Д. А. Баранов, О. В. Починка, Д. Д. Шубин, Е. И. Яковлев

О НАДСТРОЙКАХ НАД ГРАДИЕНТНО–ПОДОБНЫМИ ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ТРЕМЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ

Смейл показал, что надстройки над сопряженными диффеоморфизмами топологически эквивалентны. При определенных предположениях сопряженность диффеоморфизмов эквивалентна эквивалентности надстроек. Мы показываем, что этот критерий выполняется для градиентно-подобных диффеоморфизмов с тремя периодическими орбитами на произвольных ориентируемых поверхностях, доказываем, что 3-многообразия, допускающие надстройки над такими диффеоморфизмами, являются малыми многообразиями Зейферта и вычисляем группы гомологий этих многообразий и количество классов эквивалентности потоков на каждом допустимом многообразии Зейферта.

1. Введение и формулировка результата

В теории динамических систем весьма полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток, называемый надстройкой над f. Смейл [**1**] показал, что надстройки над сопряженными диффеоморфизмами топологически эквивалентны. Обратное утверждение в общем случае неверно, но критерий выполняется, если диффеоморфизм задан на многообразии, фундаментальная группа которого не допускает эпиморфизм в группу $\mathbb{Z}$ [**2**]. Таким образом, для ориентируемых поверхностей критерий гарантированно выполняется лишь на двумерной сфере. В настоящей статье критерий обобщается на класс градиентно-подобных диффеоморфизмов с тремя периодическими орбитами на произвольных ориентируемых поверхностях.

Пусть S_p — замкнутая ориентируемая поверхность рода $p > 0$ и G — класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса — Смейла $f : S_p \to S_p$, неблуждающее множество которых состоит в точности из трех периодических орбит. Полная топологическая классификация диффеоморфизмов класса G получена в [**3**] (см. также [**4**], где предложены эффективные алгоритмы распознавания инвариантов таких систем). В [**3**] также установлено, что число классов топологической сопряженности диффеоморфизмов множества G на поверхности рода p вычисляется по формуле $N_p = \varphi(4p) + \varphi(4p+2)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, т. е. количество взаимно простых с n чисел, не превышающих n.

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ. Третий автор поддержан фондом «БАЗИС».

Д. А. Баранов: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, denbaranov0066@gmail.com.
О. В. Починка: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, olga-pochinka@yandex.ru.
Д. Д. Шубин: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, schub.danil@yandex.ru.
Е. И. Яковлев: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, elptv@yandex.ru.

Английский перевод опубликован в *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 4–16 (2024).

Напомним определение надстройки над диффеоморфизмом $f: S_p \to S_p$. Определим поток ξ^t на многообразии $S_p \times \mathbb{R}$ формулой $\xi^t(s,r) = (s, r+t)$ и диффеоморфизм $g: S_p \times \mathbb{R} \to S_p \times \mathbb{R}$ формулой $g(s,r) = (f(s), r-1)$. Положим $G = \{g^k,\, k \in \mathbb{Z}\}$ и $M_f = (S_p \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $\nu_f: S_p \times \mathbb{R} \to M_f$ естественную проекцию, а через f^t — поток на многообразии M_f, заданный формулой $f^t(x) = \nu_f(\xi^t(\nu_f^{-1}(x)))$. Поток f^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом f*.

Обозначим через G^t класс надстроек над диффеоморфизмами $f \in G$. Неблуждающее множество потока f^t состоит из притягивающей A, отталкивающей R и седловой S периодических орбит [**5**, теоремы 2.1, 2.2]. Выберем трубчатую окрестность V орбиты A и образующие на $T = \partial V$: *параллель* $L \subset T$ (кривую, гомологичную в V орбите A) и *меридиан* $M \subset T$ (кривую, гомотопную нулю на V и существенную на торе $T = \partial V$). Кривые L и M можно рассматривать как петли в точке $L \cap M$, а потому их классы гомотопии являются генераторами группы $\pi_1(T)$. Чтобы не было путаницы, мы используем те же обозначения L и M для этих петель.

Пусть ρ — метрика на многообразии M^n. Любая гиперболическая орбита $\mathcal{O}$ потока $f^t: M^n \to M^n$ имеет *устойчивое* и *неустойчивое многообразия*

$$W^s_{\mathcal{O}} = \{y \in X\colon \lim_{k \to +\infty} d(\mathcal{O},\, f^k(y)) \to 0\},$$

$$W^u_{\mathcal{O}} = \{y \in X\colon \lim_{k \to -\infty} d(\mathcal{O},\, f^k(y)) \to 0\}.$$

Множество $\gamma = W^u_S \cap T$ является узлом на торе T. Запишем его гомотопический тип относительно образующих L, M: $\langle \gamma \rangle = \langle l, m \rangle$. Число l не зависит от выбора образующих, тогда как m зависит от выбора параллели. Согласно [**3**, теорема 2] $l \geqslant 3$, а m может быть любым целым числом, взаимно простым с l. Тогда пара чисел (l, m) однозначно определяет не зависящее от выбора образующих число $d \in \{1, \dots, \left[\frac{l-1}{2}\right]\}$ соотношением $d \cdot m \equiv \pm 1 \pmod{l}$. Заметим, что l и d взаимно просты.

В настоящей работе установлен следующий классификационный результат.

Теорема 1.1. *Потоки f^t, $f'^t \in G^t$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $(l, d) = (l', d')$.*

Таким образом, пара чисел (l, d) является полным топологическим инвариантом потока $f^t \in G^t$. В силу [**3**, теорема 1] пара чисел (l, d) является также полным топологическим инвариантом соответствующего диффеоморфизма $f \in G$, откуда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Потоки $f^t, f'^t \in G^t$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены соответствующие диффеоморфизмы f, $f' \in G$.*

Связь градиентно-подобных диффеоморфизмов $f \in G$ с периодическими гомеоморфизмами, установленная в [**3**], позволяет описать топологию многообразий M_f, допускающих потоки $f^t \in G^t$ (в [**6**] рассмотрен более широкий класса потоков).

Теорема 1.2. *Пусть поток $f^t \in G^t$ имеет параметры (l, d). Тогда многообразие M_f является малым многообразием Зейферта одного из следующих видов*:

(1) $M_f \cong M\Big(\mathbb{S}^2, (2,1), (l,d), \Big(l, \frac{l}{2} - d\Big)\Big)$, *если l четное и $l/2$ четное,*

(2) $M_f \cong M\Big(\mathbb{S}^2, (2,1), (l,d), \Big(\frac{l}{2}, \frac{\frac{l}{2} - d}{2}\Big)\Big)$, *если l четное, $l/2$ нечетное,*

(3) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2,1), (l,d), (2l, l-2d))$, *если l нечетное.*

В данной статье мы также вычисляем число классов эквивалентности рассматриваемых потоков на всех допустимых многообразиях.

Теорема 1.3. *Несущее многообразие любого потока f^t из класса G^t, являющегося надстройкой над диффеоморфизмом $f\colon S_p \to S_p \in G$, гомеоморфно в точности одному из следующих многообразий*:

(1) $A_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2,1), (4p, d), (4p, 2p-d))$, $p \in \mathbb{N}$, $d \in \{1, \dots, p-1\}$, $(d, 4p) = 1$,

(2) $B_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2,1), (4p+2, d), (2p+1, p-(d-1)/2))$, $p \in \mathbb{N}$, $d \in \{1, \dots, 2p-1\}$, $(d, 4p+2) = 1$.

При этом

(1) *каждое многообразие* $A_{p,d}$ *допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества* G^t, *которые представимы потоками с параметрами* $(4p, d)$ *и* $(4p, 2p-d)$,

(2) *каждое многообразие* $B_{p,d}$ *допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества* G^t, *которые представимы потоками с параметрами* $(4p+2, d)$ *и* $(2p+1, p-(d-1)/2)$.

Мы вычисляем все группы гомологий с целыми коэффициентами многообразий $A_{p,d}$, $B_{p,d}$.

Теорема 1.4. *Группы гомологий с целыми коэффициентами многообразий* $A_{p,d}$, $B_{p,d}$ *изоморфны следующим группам*:

(1) $H_3(A_{p,d}) \cong H_2(A_{p,d}) \cong \mathbb{Z}$ *и* $H_1(A_{p,d}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$,

(2) $H_3(B_{p,d}) \cong H_2(B_{p,d}) \cong H_1(B_{p,d}) \cong \mathbb{Z}$.

2. Вспомогательные сведения

2.1. Градиентно-подобные диффеоморфизмы. Пусть S_p — замкнутая ориентируемая поверхность рода $p \geqslant 0$ с метрикой ρ. Гомеоморфизмы $f, f' \colon S_p \to S_p$ называются *топологически сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h : S_p \to S_p$ такой, что $f'h = hf$. Точка $x \in S_p$ называется *блуждающей* для гомеоморфизма f, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^n(U_x) \cap U_x = \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f. Если множество Ω_f конечно, то каждая точка $r \in \Omega_f$ периодическая с некоторым периодом $m_r \in \mathbb{N}$.

Пусть f — диффеоморфизм. Точка $r \in \Omega_f$ называется *гиперболической*, если абсолютные значения всех собственных значений матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_r}}{\partial x}\right)\Big|_r$ не равны 1. Если абсолютные значения всех собственных значений меньше (больше) 1, то точка r называется *стоком* (*источником*). Стоки и источники называются *узлами*. Если гиперболическая периодическая точка не является узлом, то это *седловая точка*.

Для гиперболической периодической точки r диффеоморфизма f через q_r обозначим число собственных значений матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_r}}{\partial x}\right)\Big|_r$, по модулю больших 1. Гиперболическая структура периодической точки r влечет существование *устойчивого*

$$W_r^s = \{x \in S_p : \lim_{k\to+\infty} \rho(f^{k\cdot m_r}(x), r) = 0\}$$

и *неустойчивого*

$$W_r^u = \{x \in S_p : \lim_{k\to+\infty} \rho(f^{-k\cdot m_r}(x), r) = 0\}$$

многообразий, являющихся гладкими вложениями $\mathbb{R}^{2-q_r}$ и $\mathbb{R}^{q_r}$ в несущее многообразие соответственно.

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Компонента связности множества $W_r^u \setminus r$ ($W_r^s \setminus r$) называется *неустойчивой (устойчивой) сепаратрисой*. Диффеоморфизм $f \colon S_p \to S_p$ называется *диффеоморфизмом Морса — Смейла*, если Ω_f конечно и гиперболично, а инвариантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.

Периодические данные периодической орбиты $\mathcal{O}_r$ периодической точки r — это набор чисел (m_r, q_r, ν_r), где m_r — период r, $q_r = \dim\ W_r^u$ и ν_r — тип ориентации r: $\nu_r = +1$ ($\nu_r = -1$), если $f^{m_r}|_{W_r^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов тип ориентации всех узлов равен $+1$, а тип ориентации седловых точек может быть равен $+1$ или -1.

2.2. Многообразия Зейферта. Приведем необходимые сведения из теории многообразий Зейферта (см., например, [**7**]).

Полноторий $\mathbb{V} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, разбитый на слои вида $\{x\} \times \mathbb{S}^1$, называется *тривиально расслоенным полноторием*. Рассмотрим полноторий $\mathbb{V}$ как цилиндр $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ с основаниями, склеенными в силу поворота на угол $2\pi m/l$ для целых взаимно простых m, l, $l > 1$. Разбиение цилиндра на отрезки вида $\{x\}\times[0,1]$ определяет разбиение этого полнотория на окружности, называемые *слоями*. Отрезок $\{0\}\times[0,1]$ порождает слой, который называется *особым*, все остальные (*неособые*) слои полнотория оборачиваются l раз вокруг особого слоя и m раз вокруг меридиана полнотория. Число l называется *кратностью* особого слоя. Полноторий с таким разбиением на слои называется *нетривиально расслоенным полноторием* с *орбитальными инвариантами* (l, m).

Многообразие Зейферта — это компактное ориентируемое 3-многообразие M, разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои) так, что каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию. Такое разбиение называется *расслоением Зейферта*. Слои, которые переходят в центр нетривиально расслоенного полнотория, называются *особыми*.

Базой многообразия Зейферта M называется компактная поверхность $\Sigma = M/_\sim$, где $\sim$ — отношение эквивалентности такое, что $x \sim y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному слою. База любого многообразия Зейферта — компактная поверхность, которая замкнута тогда и только тогда, когда замкнуто многообразие M. Многообразие, допускающее расслоение Зейферта с базой сфера и не более, чем тремя особыми слоями, называется *малым*.

Расслоение Зейферта M с базой Σ и орбитальными инвариантами $(l_1, m_1), \ldots, (l_s, m_s)$, $s \in \mathbb{N}$ обычно записывают в виде $M(\Sigma, (l_1, d_1), \ldots, (l_s, d_s))$, где $m_i d_i \equiv 1 \pmod{l_i}$, $i \in \{1, \ldots, s\}$. Ориентация на слоях расслоения Зейферта однозначно определяется ориентацией одного из слоев.

Два расслоения Зейферта M, M' называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M \to M'$, переводящий слои одного слоения в слои другого с сохранением ориентации слоев. Гомеоморфизм h в этом случае называется *изоморфизмом расслоений Зейферта*.

Предложение 2.1. [**7**, теорема 10.2] *Расслоения Зейферта*

$$M(\Sigma, (l_1, d_1), \ldots, (l_s, d_s)) \quad \text{и} \quad M'(\Sigma', (l'_1, d'_1), \ldots, (l'_{s'}, d'_{s'}))$$

изоморфны тогда и только тогда, когда выполнены условия

- Σ *гомеоморфно* Σ',
- $s = s'$, $l_i = l'_i$, $d_i \equiv \pm d'_i \pmod{l_i}$ *для* $i \in \{1, \ldots, s\}$,
- *если поверхность* Σ *замкнута, то* $\sum\limits_{i=1}^{s} \frac{d_i}{l_i} = \pm \sum\limits_{i=1}^{s} \frac{d'_i}{l'_i}$.

Предложение 2.2. [**7**, теорема 10.12] *Если два малых расслоения Зейферта M и M' с тремя особыми слоями и базой сфера не изоморфны, то многообразия M и M' не гомеоморфны.*

2.3. Периодические гомеоморфизмы. Гомеоморфизм $\varphi : S_p \to S_p$ называется *периодическим*, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\varphi^n = id$. Наименьшее из таких n называется textit-периодом φ. Точка x_0 называется *точкой меньшего периода* $n_0 < n$ гомеоморфизма φ, если $\varphi^{n_0}(x_0) = x_0$.

Согласно результатам Нильсена [**8**] (см. также [**9**]), для любого сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма $\varphi : S_p \to S_p$ множество B_φ точек меньшего периода конечно, а пространство орбит действия гомеоморфизма φ на S_p является сферой с g ручками (модульной поверхностью). В окрестности точки x_0 меньшего периода n_0 отображение f^{n_0} сопряжено повороту на некоторый рациональный угол $2\pi\frac{m_0}{l_0}$, где $l_0 = n/n_0$, $0 < m_0 < l_0$, $(m_0, l_0) = 1$. Обозначим через X_i, $i = 1, \ldots, s$, орбиты точек меньшего периода, их периоды — через n_i и положим $l_i = n/n_i$. Обозначим через m_i/l_i соответствующее число вращения и определим число $d_i \in \{1, \ldots, n_i - 1\}$ из условия $d_i \cdot m_i \equiv 1 \pmod{l_i}$. Набор параметров $(n, p, g, n_1, \ldots, n_s, d_1, \ldots, d_s)$ периодического гомеоморфизма φ называется его *полной характеристикой*.

Предложение 2.3 ([**8**]). *Два периодических гомеоморфизма топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые с точностью до перенумерации полные характеристики.*

Предложение 2.4 ([**3**, лемма 1]). *Любой диффеоморфизм $f : S_p \to S_p \in G$ имеет вид $f = \zeta\varphi$, где ζ — сдвиг на единицу времени градиентно-подобного потока и $\varphi : S_p \to S_p$ — периодический гомеоморфизм периода n со свойствами*

- $B_\varphi = \Omega_f$ *и* $\varphi|_{B_\varphi} = f|_{\Omega_f}$*;*
- *гомеоморфизм* φ *имеет полную характеристику одного из следующих видов*:
  (1) $(4p, 0, p, 2p, 1, 1, 1, q, 2p - q)$ *при* $0 < q < 2p$*,*
  (2) $(4p, g = 0, p, 2p, 1, 1, 1, q, 6p - d_2)$ *при* $2p < q < 4p$*,*
  (3) $(4p + 2, 0, p, 2p + 1, 2, 1, 1, q, 2p + 1 - 2d_2)$ *при* $0 < q \leqslant p$*,*
  (4) $(4p + 2, 0, p, 2p + 1, 2, 1, 1, q, 6p + 3 - 2d_2)$ *при* $p < q \leqslant 2p$*;*
- *седловая орбита диффеоморфизма* f *имеет период* $n/2$.

Обозначим через m/l число вращения, соответствующее стоковой орбите диффеоморфизма $f \in G$. Определим $d \in \{1, \dots, \left[\frac{l-1}{2}\right]\}$ из соотношения $d \cdot m \equiv \pm 1 \pmod l$.

Предложение 2.5 ([**3**, теорема 1])**.** *Диффеоморфизмы* f, $f' \in G$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда* $(l, d) = (l', d')$.

Таким образом, пара чисел (l, d) является полным топологическим инвариантом диффеоморфизма $f \in G$.

3. Классификация потоков множества G^t

Доказательство теоремы 1.1. *Необходимость.* Пусть потоки f^t, $f'^t \in G^t$ с параметрами $(l, d), (l', d')$ топологически эквивалентны посредством некоторого гомеоморфизма $h\colon M_f \to M_{f'}$. Тогда гомеоморфизм h переводит периодические орбиты потока f^t в аналогичные периодические орбиты потока f'^t с сохранением типа и направления движения, т. е. $A' = h(A)$, $S' = h(S)$, $R' = h(R)$. Не уменьшая общности можно считать, что $V' = h(V)$, и $\gamma' = h(\gamma)$, поскольку $\gamma = \partial V \cap W^u_S$ и $\gamma = \partial V' \cap W^u_{S'}$. Тогда $h|_V : V \to V'$ — гомеоморфизм заполненных торов, сохраняющий направление образующих A, A'. Отсюда следует (см., например, [**10**]), что в образующих L, M; L', M' торов $T = \partial V$, $T' = \partial V'$ гомеоморфизм $h|_T$ индуцирует изоморфизм $h_* : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, где $k \in \mathbb{Z}$, и

$$(l', m') = (l, m) \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

$\langle l, m \rangle$ и $\langle l', m' \rangle$ — гомотопические типы узлов γ и γ' соответственно. Из (3.1) следует

$$l' = l, \quad m' \equiv \pm m \pmod l. \tag{3.2}$$

По определению число $d' \in \{1, \dots, [(l-1)/2]\}$ определяется соотношением $d' \cdot m' \equiv \pm 1 \pmod l$. В силу (3.2) число d' совпадает с числом $d \in \{1, \dots, [(l-1)/2]\}$, которое определяется соотношением $d \cdot m \equiv \pm 1 \pmod l$.

Достаточность. Пусть $f^t, f'^t \in G^t$ — потоки с параметрами (l, d), (l', d') соответственно и $(l, d) = (l', d')$. В силу предложения 2.5 соответствующие диффеоморфизмы $f, f' \in G$ заданы на одной и той же поверхности S_p и существует гомеоморфизм $h_0 : S_p \to S_p$ такой, что

$$h_0 f = f' h_0. \tag{3.3}$$

Определим гомеоморфизм $H : S_p \times \mathbb{R} \to S_p \times \mathbb{R}$ формулой $H(s, r) = (h_0(s), r)$. Напомним, что поток ξ^t на многообразии $S_p \times \mathbb{R}$ задан формулой $\xi^t(s, r) = (s, r + t)$, диффеоморфизм $g : S_p \times \mathbb{R} \to S_p \times \mathbb{R}$ задан формулой $g(s, r) = (f(s), r - 1)$, $G = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$, $M_f = (S_p \times \mathbb{R})/G$, $\nu_f : S_p \times \mathbb{R} \to M_f$ — естественная проекция, и поток f^t на многообразии M_f задан формулой $f^t(x) = \nu_f(\xi^t(\nu_f^{-1}(x)))$. Аналогичные обозначения со штрихом имеют место для потока f'^t. Прямая проверка показывает, что $H\xi^t = \xi^t H$ и $Hg = g'H$ в силу (3.3). Тогда гомеоморфизм H проектируется в гомеоморфизм $h : M_f \to M_{f'}$ по формуле $h(x) = \nu_{f'}(H(\nu_f^{-1}(x)))$, где $hf^t = f'^t h$. $\square$

4. Топология многообразия M_f

Доказательство теоремы 1.2. Пусть диффеоморфизм $f \in G$ имеет вид $f = \xi\varphi$, где ξ — сдвиг на единицу времени градиентно-подобного потока и φ — периодический гомеоморфизм. Тогда f и φ гомотопны. Следовательно, многообразия M_f и M_φ гомеоморфны. В силу предложения2.4 M_φ — многообразие Зейферта с базой сфера и тремя особыми слоями одного из следующих видов:

(1) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2,1), (4p, d), (4p, 2p-d))$ при $0 < d < 2p$, $(d, 2p) = 1$,

(2) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2,1), (4p, d), (4p, 6p-d))$ при $2p < d < 4p$, $(d, 2p) = 1$,

(3) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2,1), (2p+1, d), (4p+2, 2p+1-2d))$ при $0 < d \leqslant p$, $(d, 4p+2) = 1$,

(4) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2,1), (2p+1, d), (4p+2, 6p+3-2d))$ при $p < d \leqslant 2p$, $(d, 4p+2) = 1$.

Покажем, что любое многообразие вида (2) гомеоморфно некоторому многообразию вида (1). Действительно, положим $d = 4p - \widetilde{d}$. Тогда многообразие вида (2) примет вид $M(\mathbb{S}^2, (2,1), (4p, 4p-\widetilde{d}), (4p, 2p+\widetilde{d}))$, $0 < \widetilde{d} < 2p$, $(\widetilde{d}, 2p) = 1$.

Поскольку $1 \equiv -1 \pmod 2$, $4p - \widetilde{d} \equiv -\widetilde{d} \pmod{4p}$ и $2p + \widetilde{d} \equiv -(2p - \widetilde{d}) \pmod{4p}$, в силу предложения2.1

$$M(\mathbb{S}^2, (2,1), (4p, d), (4p, 6p-d)) \cong M(\mathbb{S}^2, (2,1), (4p, \widetilde{d}), (4p, 2p-\widetilde{d})).$$

Таким образом, любое многообразие M_f является многообразием Зейферта вида (1) или (3). Выразив параметры многообразия Зейферта через параметры потока (l, d), мы получим список из трех типов многообразий, анонсированных в теореме. При этом первый тип соответствует надстройке над диффеоморфизмом f с неподвижными стоком и источником, второй тип — с неподвижным стоком и источником периода 2, третий тип — со стоком периода 2 и неподвижным источником. □

5. Подсчет числа классов эквивалентности потоков на данном многообразии

Доказательство теоремы 1.3. В доказательстве теоремы 1.2 мы показали, что несущее многообразие M_f потока f^t с параметрами (l, d) может иметь один из следующих видов:

(1) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2,1), (l, d), (l, l/2-d))$ при $l = 4p$, $p \in \mathbb{N}$,

(2) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2,1), (l, d), (l/2, (l/2-d)/2))$ при $l = 4p+2$, $p \in \mathbb{N}$,

(3) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2,1), (l, d), (2l, l-2d))$ при $l = 2p+1$, $p \in \mathbb{N}$.

В силу предложения 2.1 множество многообразий вида (2) совпадает с множеством многообразий вида (3) и все такие многообразия имеют вид

$$B_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2,1), (4p+2, d), (2p+1, p-(d-1)/2)),$$

$$p \in \mathbb{N}, \quad d \in \{1, \dots, 2p-1\}, \quad (d, 4p+2) = 1.$$

В силу предложений 2.1 и 2.2 $B_{p,d} \cong B_{p',d'}$ тогда и только тогда, когда $p = p'$ и $d = d'$. Все многообразия первого типа имеют вид

$$A_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2,1), (4p, d), (4p, 2p-d)), \quad p \in \mathbb{N}, \quad d \in \{1, \dots, 2p-1\}, \quad (d, 4p) = 1.$$

Из предложений 2.1 и 2.2 также следует, что никакое многообразие вида $A_{p,d}$ не гомеоморфно многообразию вида $B_{p,d}$, но $A_{p,d} \cong A_{p',d'}$ тогда и только тогда, когда $p = p', d = 2p - d'$.

Таким образом, попарно различные многообразия первого типа имеют вид

$$A_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2,1), (4p, d), (4p, 2p-d)), \quad p \in \mathbb{N}, \quad d \in \{1, \dots, p-1\}, \quad (d, 4p) = 1.$$

Из приведенных рассуждений и классификации потоков класса G^t (см. теорему 1.1) заключаем, что

(1) каждое многообразие $A_{p,d}$ допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества G^t, которые могут быть представлены потоками с параметрами $(4p, d)$ и $(4p, 2p-d)$,

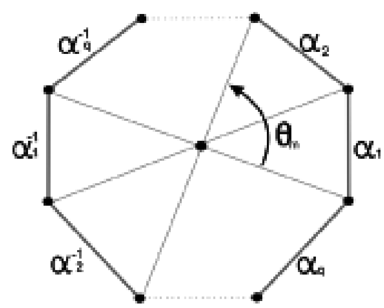
(2) каждое многообразие $B_{p,d}$ допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества G^t которые могут быть представлены потоками с параметрами $(4p+2, d)$ и $(2p+1, p-(d-1)/2)$.

$\square$

6. Группы гомологий некоторых переклеенных торов

В этом параграфе мы доказываем теорему 1.4. Доказательство вытекает из более общего результата о группах гомологий с целыми коэффициентами для многообразий переклеенных торов M_φ, где φ — периодический гомеоморфизм, определенный следующим образом.

Пусть $q \in \mathbb{N}$ и Π_q — правильный $2q$-угольник со схемой $a_1 a_2 \dots a_q a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_q^{-1}$. Выберем $m \in \{1, \dots, q-1\}$ и обозначим через $\overline{\varphi}\colon \Pi_q \to \Pi_q$ поворот многоугольника вокруг его центра на угол $\theta_m = \pi m/q$ в положительном направлении. Склеив одноименные стороны многоугольника Π_q, получим замкнутую ориентируемую поверхность S_p рода $p = [q/2]$, на которой поворот $\overline{\varphi}$ индуцирует гомеоморфизм $\varphi : S_p \to S_p$:



Пусть $\mu : \Pi_q \to S_p$ — естественная проекция и $\{i\} = i + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_q$, $i \in \mathbb{Z}$. Положим $\ell = (q, m)$, $\varkappa_m = m/\ell$, $\varkappa_q = q/\ell$. Вычисление групп гомологий многообразия M_φ проведем отдельно для случаев четного и нечетного q.

6.1. Случай $q = 2p$.

Лемма 6.1. *Пусть $q = 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда группы гомологий многообразия $M = M_\varphi$ изоморфны следующим группам*:

- *если $\varkappa_m$ четно, то $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$ и $H_2(M) \cong H_1(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$,*
- *если $\varkappa_m$ нечетно, то $H_3(M) \cong H_2(M) \cong \mathbb{Z}$ и $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^\ell$.*

Доказательство. Для $i = 1, \dots, q$ положим $z_{\{i\}} = \mu(a_i)$. Тогда $H_1(S_p) = \langle [z_{\{1\}}], \dots, [z_{\{q\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^q$, а индуцированный гомеоморфизмом φ автоморфизм $\varphi_* : H_1(S_p) \to H_1(S_p)$ описывается равенствами

$$\varphi_*([z_{\{i\}}]) = (-1)^{\left[\frac{i-1+m}{q}\right]}[z_{\{i+m\}}], \quad i = 1, \dots, q. \tag{6.1}$$

Положим $N = \nu(S_p \times 0)$, где $\nu = \nu_\varphi : S_p \times [0,1] \to M_\varphi$ — естественная проекция. Для вычисления групп гомологий многообразия M используем топологическую пару (M, N) и соответствующую гомологическую последовательность (см. [**11**, теорема 4.4.3])

$$\dots \longrightarrow H_n(N) \xrightarrow{i_*^n} H_n(M) \xrightarrow{j_*^n} H_n(M, N) \xrightarrow{\partial_*^n} H_{n-1}(N) \longrightarrow \dots. \tag{6.2}$$

Положим $z_{\{i\}}^0 = \nu(z_{\{i\}} \times 0)$ для $i = 1, \dots, q$. Тогда $H_n(N) = 0$ при $n > 2$ и

$$H_2(N) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(N) = \langle [z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{q\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}^q. \tag{6.3}$$

Вычислим группы $H_n(M, N)$. Для этого рассмотрим надстройку ΣS_p, которая получается стягиванием в точки v_0 и v_1 оснований $S_p \times 0$ и $S_p \times 1$ цилиндра $S_p \times [0,1]$. Положим $V = \{v_0, v_1\}$. Тогда $M/N = \Sigma S_p / V$. Подмножества $N \subset M$ и $V \subset \Sigma S_p$ замкнуты и являются деформационными ретрактами некоторых окрестностей $U_N \subset M$ и $U_V \subset \Sigma S_p$. Отсюда и из соотношений между группами абсолютных и относительных гомологий

[**7**, предложение 2.22] для $n > 0$ следует

$$H_n(M,N) \cong H_n(M/N) = H_n(\Sigma S_p/V) \cong H_n(\Sigma S_p, V). \tag{6.4}$$

Согласно изоморфизму надстройки [**11**, теорема 4.4.10]

$$H_3(\Sigma S_p) \cong H_2(S_p) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2(\Sigma S_p) \cong H_1(S_p) \cong \mathbb{Z}^q, \quad H_1(\Sigma S_p) = 0.$$

Подставив последние формулы в гомологическую последовательность пары $(\Sigma S_p, V)$, получим

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\jmath_*^3} H_3(\Sigma S_p, V) \xrightarrow{\partial_*^3} 0 \xrightarrow{\imath_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\jmath_*^2} H_2(\Sigma S_p, V) \xrightarrow{\partial_*^2}$$

$$\longrightarrow 0 \xrightarrow{\imath_*^1} 0 \xrightarrow{\jmath_*^1} H_1(\Sigma S_p, V) \xrightarrow{\partial_*^1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\imath_*^0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Поэтому

$$H_3(\Sigma S_p, V) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2(\Sigma S_p, V) \cong \mathbb{Z}^q, \quad H_1(\Sigma S_p, V) \cong \mathbb{Z}. \tag{6.5}$$

В силу (6.2), (6.3), (6.4) и (6.5) следующая последовательность точна:

$$0 \longrightarrow H_3(M) \xrightarrow{\jmath_*^3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*^3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\imath_*^2} H_2(M) \xrightarrow{\jmath_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial_*^2}$$

$$\longrightarrow \langle [z^0_{\{1\}}], \ldots, [z^0_{\{q\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\imath_*^1} H_1(M) \xrightarrow{\jmath_*^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\imath_*^0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{6.6}$$

Так как S_p — ориентируемое 2-многообразие, а гомеоморфизм φ сохраняет ориентацию, M — ориентируемое замкнутое 3-многообразие. Следовательно, $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$ [**7**, теорема 3.26] и $\jmath_*^3$ в (6.6) — изоморфизм. Но тогда $\partial_*^3 = 0$. С другой стороны, $\imath_*^0$ — изоморфизм, и потому $\partial_*^1 = 0$.

Поскольку $\nu : S_p \times 0 \to N$ — гомеоморфизм, формула $\varphi^0(\nu(x,0)) = \nu(\varphi(x),0)$ определяет гомеоморфизм $\varphi^0 : N \to N$.

Пусть $\varphi^0_* : H_1(N) \to H_1(N)$ — автоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом φ^0. В цилиндре $S_p \times [0,1]$ циклы $z_{\{i\}} \times 0$ и $z_{\{i\}} \times 1$ гомологичны. В процессе построения многообразия M цикл $z_{\{i\}} \times 1$ приклеивается к циклу $\varphi(z_{\{i\}}) \times 0$. Это означает, что в группе $H_1(M)$ имеет место равенство $\varphi^0_*([z^0_{\{i\}}]) = [z^0_{\{i\}}]$. Тогда в силу (6.1) в $H_1(M)$ справедливы соотношения

$$[z^0_{\{i+jm\}}] = (-1)^{\left[\frac{i-1+jm}{q}\right]}[z^0_{\{i\}}] \quad i = 1, \ldots, \ell, \quad j = 1, \ldots, \varkappa_q. \tag{6.7}$$

Таким образом, подгруппа $\operatorname{im} \imath_*^1 \subset H_1(M)$ порождается гомологическими классами $[z^0_{\{1\}}], \ldots, [z^0_{\{\ell\}}]$. При $j = q$ имеем

$$\left[\frac{i-1+qm}{q}\right] = \left[\frac{i-1}{q} + \frac{qm}{q\ell}\right] = \left[\frac{i-1}{q} + \varkappa_m\right] = \varkappa_m.$$

Поэтому для $j = q$ из (6.7) при четном $\varkappa_m$ следуют тривиальные соотношения $[z^0_{\{i\}}] = [z^0_{\{i\}}]$, а при нечетном $\varkappa_m$ — соотношения $[z^0_{\{i\}}] = -[z^0_{\{i\}}]$. В первом случае $[z^0_{\{i\}}]$ — свободные образующие группы $\operatorname{im} \imath_*^1$. Следовательно,

$$\operatorname{im} \imath_*^1 = \langle [z^0_{\{1\}}], \ldots, [z^0_{\{\ell\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^\ell. \tag{6.8}$$

Во втором случае $2[z^0_{\{i\}}] = 0$ в $H_1(M)$ для всех $i = 1, \ldots, \ell$, и следовательно,

$$\operatorname{im} \imath_*^1 = \langle [z^0_{\{1\}}], \ldots, [z^0_{\{\ell\}}] \parallel 2[z^0_{\{1\}}], \ldots, 2[z^0_{\{\ell\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}_2^\ell. \tag{6.9}$$

Из (6.8), (6.6) и равенств $\partial_*^3 = 0$ и $\partial_*^1 = 0$ получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{\jmath_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\imath_*^1} \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow 0, \tag{6.10}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{6.11}$$

В силу (6.11) имеем $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$. В последовательности (6.10) имеем $\operatorname{im} \partial_*^2 = \ker \imath_*^1 \cong \mathbb{Z}^{q-\ell}$. Тогда $\operatorname{im} \jmath_*^2 = \ker \partial_*^2 \cong \mathbb{Z}^{q-(q-\ell)} = \mathbb{Z}^\ell$. Поэтому $H_2(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$.

Из (6.9) и (6.6) получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{\jmath_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\imath_*^1} \mathbb{Z}_2^\ell \longrightarrow 0, \tag{6.12}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^\ell \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{6.13}$$

В силу (6.13) $H_1(P) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^{\ell}$. В последовательности (6.12)

$$\operatorname{im} \partial_*^2 = \ker \imath_*^1 = \mathbb{Z}^{q-\ell} \times (2\mathbb{Z})^{\ell} \cong \mathbb{Z}^q.$$

Таким образом, ∂_*^2 — мономорфизм, откуда следует $\operatorname{im} \jmath_*^2 = \ker \partial_*^2 = 0$. Но тогда $H_2(P) \cong \mathbb{Z}$. □

6.2. Случай $q = 2p + 1$.

Лемма 6.2. *Пусть $q = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда группы гомологий многообразия $M = M_\varphi$ изоморфны следующим группам:*

- *если m четно, то $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$, $H_2(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell-1}$, $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell} \times \mathbb{Z}_{\varkappa_q}$,*
- *если m нечетно, то $H_3(M) \cong H_2(M) \cong \mathbb{Z}$ и $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^{\ell-1}$.*

Доказательство. Положим $z_{\{i\}} = \mu(a_i + a_{i+1})$ для $i = 1, \ldots, 2p$ и $z_{\{0\}} = z_{\{q\}} = \mu(a_q - a_1)$. Тогда $H_1(S_p) = \langle [z_{\{1\}}], \ldots, [z_{\{2p\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^{2p}$, а индуцированный гомеоморфизмом φ автоморфизм $\varphi_* : H_1(S_p) \to H_1(S_p)$ удовлетворяет равенствам

$$\varphi_*([z_{\{i\}}] = (-1)^{[\frac{i-1+m}{q}]} [z_{\{i+m\}}]), \quad i = 1, \ldots, q.$$

Пусть $\nu : S_p \times [0, 1] \to M$ — естественная проекция, $N = \nu(S_p \times 0)$ и $z^0_{\{i\}} = \nu(z_{\{i\}} \times 0)$ для $i = 1, \ldots, q$. Тогда, как и в случае $q = 2p$, точна последовательность (6.6). Рассуждая так же, как в теореме 6.1, получаем $[z^0_{\{i+jm\}}] = (-1)^{[\frac{i-1+jm}{q}]} [z^0_{\{i\}}]$ для всех $i = 1, \ldots, \ell$, $j = 1, \ldots, \varkappa_q$.

Таким образом, подгруппа $\operatorname{im} \imath_*^1 \subset H_1(M)$ здесь также порождается гомологическими классами $[z^0_{\{1\}}], \ldots, [z^0_{\{\ell\}}]$. Поскольку ℓ в данном случае нечетно, числа m и $\varkappa_m$ четны или нечетны одновременно. Как и в лемме 6.1, при $j = q$ из (6.7) при четном $\varkappa_m$ следуют тривиальные соотношения $[z^0_{\{i\}}] = [z^0_{\{i\}}]$, а при нечетном $\varkappa_m$ — соотношения $2[z^0_{\{i\}}] = 0$.

По построению цикла $z_{\{0\}} = z_{\{q\}}$ имеем

$$[D] = \sum_{\lambda=1}^{q} (-1)^{\lambda} [z^0_{\{\lambda\}}] = 0.$$

Положим

$$[\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}] = \sum_{\lambda=1}^{\ell} (-1)^{\lambda} [z^0_{\{\lambda+l\ell\}}]$$

при $l = 0, \ldots, \varkappa_q - 1$ и $[\widehat{z}_{\{i\}}] = [z^0_{\{i\}}]$ при $i = 2, \ldots, \ell$. Поскольку матрица перехода от $[z^0_{\{1\}}], [z^0_{\{2\}}], \ldots, [z^0_{\{\ell\}}]$ к $[\widehat{z}_{\{1\}}], [\widehat{z}_{\{2\}}], \ldots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}]$ унимодулярна, гомологические классы $[\widehat{z}_{\{1\}}], [\widehat{z}_{\{2\}}], \ldots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}]$ также порождают подгруппу $\operatorname{im} \imath_*^1 \subset H_1(M)$.

Так как ℓ нечетно, имеем

$$[D] = \sum_{l=0}^{\varkappa_q - 1} (-1)^{l} [\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}] = \sum_{l=0}^{\varkappa_q - 1} (-1)^{l\ell} [\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}]. \tag{6.14}$$

По построению группы $\mathbb{Z}_q$

$$[\widehat{z}_{\{1+jm\}}] = [\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}], \quad l\ell = jm - \left[\frac{jm}{q}\right] = jm - \left[\frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q}\right], \quad j = 1, \ldots, q. \tag{6.15}$$

С другой стороны, в силу (6.7)

$$[\widehat{z}_{\{1+jm\}}] = (-1)^{[\frac{jm}{q}]} [\widehat{z}_{\{1\}}] = (-1)^{[\frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q}]} [\widehat{z}_{\{1\}}]. \tag{6.16}$$

Из (6.14) и (6.15) получаем

$$[D] = \sum_{j=1}^{\varkappa_q} (-1)^{jm - [\frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q}]} [\widehat{z}_{\{1+jm\}}] = \sum_{j=1}^{\varkappa_q} (-1)^{jm - [\frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q}] + [\frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q}]} [\widehat{z}_{\{1\}}] = [\widehat{z}_{\{1\}}] \sum_{j=1}^{\varkappa_q} (-1)^{jm}.$$

Поэтому $[D] = \varkappa_q [\widehat{z}_{\{1\}}] = 0$ для четного m и $[D] = -[\widehat{z}_{\{1\}}] = 0$ для нечетного m.

Таким образом,

$$\operatorname{im} \imath_*^1 = \langle [\widehat{z}_{\{1\}}], \ldots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}] \parallel \varkappa_q [\widehat{z}_{\{1\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z}_{\varkappa_q} \tag{6.17}$$

для четного m и

$$\operatorname{im} \imath^1_* = \langle [\widehat{z}_{\{2\}}], \dots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}] \parallel 2[z^0_{\{2\}}], \dots, 2[z^0_{\{\ell\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \tag{6.18}$$

для нечетного m. Из (6.17) и (6.6) согласно ранее полученным равенствам $\partial^3_* = 0$ и $\partial^1_* = 0$ получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{\jmath^2_*} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{\partial^2_*} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{\imath^1_*} \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z}_{\varkappa_q} \longrightarrow 0, \tag{6.19}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z}_{\varkappa_q} \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{6.20}$$

В силу (6.20) имеем $H_1(P) \cong \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}_{\varkappa_q}$. В последовательности (6.19) $\operatorname{im} \partial^2_* = \ker \imath^1_* = \mathbb{Z}^{2p-\ell+1} \times \varkappa_q \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{2p-\ell+2}$. Но тогда

$$\operatorname{im} \jmath^2_* = \ker \partial^2_* \cong \mathbb{Z}^{2p-(2p-\ell+2)} = \mathbb{Z}^{\ell-2}.$$

Поэтому $H_2(P) \cong \mathbb{Z}^{\ell-1}$.

Из (6.18) и (6.6) получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{\jmath^2_*} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{\partial^2_*} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{\imath^1_*} \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \longrightarrow 0, \tag{6.21}$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \tag{6.22}$$

В силу (6.22) имеем $H_1(P) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^{\ell-1}$. В последовательности (6.21) имеем

$$\operatorname{im} \partial^2_* = \ker \imath^1_* = \mathbb{Z}^{2p-\ell+1} \times (2\mathbb{Z})^{\ell-1} \cong \mathbb{Z}^{2p}.$$

Таким образом, ∂^2_* — мономорфизм, и поэтому $\operatorname{im} \jmath^2_* = \ker \partial^2_* = 0$. Но тогда $H_2(P) \cong \mathbb{Z}$. □

Литература

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Am. Math. Soc.* **73**, No. 6, 747–817 (1967).
2. G. Ikegami, “On classification of dynamical systems with cross-sections”, *Osaka J. Math.* **6**, 419–433 (1969).
3. Д. А. Баранов, Е. С. Косолапов, О. В. Починка, “Узел как полный инвариант диффеоморфизмов поверхностей с тремя периодическими орбитами”, *Сиб. мат. журн.* **64**, No. 4, 687–699 (2023).
4. V. Z. Grines, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina, “Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorhisms”, *Regul. Chaotic Dyn.* **21**, No. 2, 189–203 (2016).
5. T. Medvedev, E. Nozdrinova, O. Pochinka, “On periodic data of diffeomorphisms with one saddle orbit”, *Topol. Proc.* **54**, 49–68 (2019).
6. O. Pochinka, D. Shubin, “Topology of ambient 3-manifolds of nonsingular flows with twisted saddle orbit”, *Russ. J. Nonlinear Dyn.* **19**, No. 3, 371–381 (2023).
7. С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии*, МГУ, М. (1991).
8. J. Nielsen, “Die Struktur Periodischer Transformationen von Flächen”, *Math. Fys. Medd., Danske Vid. Selsk.* **15**, No. 1, 1–77 (1937).
9. D. A. Baranov, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, E. E. Chilina, “On a classification of periodic maps on the 2-torus”, *Russ. J. Nonlinear Dyn.* **19**, No. 1, 91–110 (2023).
10. D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Houston, TX (1990).
11. C. R. F. Maunder, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge etc. (1980).

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2024 г.

