

Том 1 № 4(2025)

ISSN 3034-3240 (print)

ISSN 3034-4654 (online)

СИРИУС

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТЕРРИТОРИЯ «СИРИУС»
МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР «СИРИУС»



ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

Том 1 № 4 (2025)

СИРИУС

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТЕРРИТОРИЯ «СИРИУС»
МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР «СИРИУС»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Председатель Научного совета Международного
математического центра «Сириус»

академик Шведской королевской академии наук
Европейской академии наук и Academia Europaea
Лаптев Арий Ариевич

НАУЧНЫЙ СОВЕТ МЕЖДУНАРОДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА «СИРИУС»

д.ф.-м.н. *Ландо Сергей Константинович* (ВШЭ)
чл.-корр. РАН *Миронов Андрей Евгеньевич* (ИМ СО РАН)
академик *Трещев Дмитрий Валерьевич* (МИАН)
д.ф.-м.н. *Цих Август Карлович* (СФУ)
к.ф.-м.н. *Щуплев Алексей Валерьевич* (ММЦ «Сириус»)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

академик *Аптекарев Александр Иванович* (ИПМ РАН)
академик *Безродных Сергей Игоревич* (ФИЦ ИУ РАН)
академик *Беклемишев Лев Дмитриевич* (МИАН)
академик *Гончаров Сергей Савостьянович* (ИМ СО РАН)
академик *Кашин Борис Сергеевич* (МИАН)
академик *Кисляков Сергей Витальевич* (ПОМИ РАН)
академик *Козлов Валерий Васильевич* (МИАН)
академик *Конягин Сергей Владимирович* (МИАН)
академик *Лукоянов Николай Юрьевич* (ИММ УрО РАН)
академик *Матиясевич Юрий Владимирович* (ПОМИ РАН)
академик *Романов Владимир Гаврилович* (ИМ СО РАН)
академик *Семенов Алексей Львович* (МГУ)
академик *Тыртыйшиков Евгений Евгеньевич* (ИВМ РАН)
академик *Черноусько Феликс Леонидович* (ИПМех РАН)
академик *Четверушкин Борис Николаевич* (ИПМ РАН)
академик *Шайдуров Владимир Викторович* (КНЦ СО РАН)
академик *Шананин Александр Алексеевич* (МФТИ)
чл.-корр. РАН *Болотин Сергей Владимирович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Бухштабер Виктор Матеевич* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Василевский Юрий Викторович* (ИВМ РАН)
чл.-корр. РАН *Васин Владимир Васильевич* (ИММ УрО РАН)
чл.-корр. РАН *Веснин Андрей Юрьевич* (ИМ СО РАН)
чл.-корр. РАН *Гайфуллин Александр Александрович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Гасников Александр Владимирович* (ИУ)
чл.-корр. РАН *Гущин Валентин Анатольевич* (ИАП РАН)
чл.-корр. РАН *Давыдов Алексей Александрович* (МГУ)
чл.-корр. РАН *Кабанихин Сергей Игоревич* (ИМ СО РАН)
чл.-корр. РАН *Лазарева Галина Геннадьевна* (РУДН)
чл.-корр. РАН *Петров Игорь Борисович* (МФТИ)
чл.-корр. РАН *Попов Владимир Леонидович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Протасов Владимир Юрьевич* (МГУ)
чл.-корр. РАН *Прохоров Юрий Геннадьевич* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Разборов Александр Александрович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Садовский Владимир Михайлович* (ИВМ СО РАН)
чл.-корр. РАН *Тишкин Владимир Федорович* (ИПМ РАН)
чл.-корр. РАН *Шкаликов Андрей Андреевич* (МГУ)
чл.-корр. РАН *Якововский Михаил Владимирович* (ИПМ РАН)

МЕЖДУНАРОДНЫЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
«СИРИУС»

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

СИРИУС
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 1

2025

№. 4

Под редакцией

А. А. Лаптева

Имперский колледж Лондона, Великобритания
Научно-технологический университет «Сириус», Россия

Федеральная территория «Сириус»
Международный математический центр «Сириус»
2025

Журнал учрежден в 2024 г. Образовательным фондом «Талант и успех»
Издается при финансовой поддержке Федеральной территории «Сириус»

УДК 51
ББК 22.1
С402

С402 Сириус. Математический журнал. Том 1, No. 4 — Федеральная территория «Сириус» :
Международный математический центр «Сириус», 2025 — 108 с.

В данном выпуске представлены работы, объединенные применением математических методов в разнообразных областях — от теории управления и искусственного интеллекта до математического анализа и экономического моделирования. Основные направления включают формализацию и декомпозицию задач для построения объяснимых систем искусственного интеллекта, проблемы продолжения функций, анализ квазипериодических потенциалов, исследование левоинвариантных управляемых систем, аналитических свойств функций, вопросы сложности алгоритмов и свойства групп. Сборник демонстрирует глубокие теоретические результаты и их междисциплинарные приложения.

Для специалистов по теоретической и прикладной математике — научных работников, преподавателей вузов, а также аспирантов и студентов.

УДК 51
ББК 22.1

Редколлегия: А. И. Аптекарев, А. Д. Баранов, В. М. Бухштабер, Ю. В. Василевский, А. Ю. Веснин, С. С. Гончаров, С. И. Кабанихин, В. А. Калягин, А. А. Лаптев (гл. ред.), Т. Е. Панов, Ю. Л. Сачков, Т. М. Садыков, А. П. Солодов, В. Н. Темляков, К. Ю. Федоровский, С. Б. Шлосман.

Руководитель редакционно-издательского отдела и выпускающий редактор: Т. Н. Рожковская

Журнал публикует новые научные результаты по всем направлениям теоретической и прикладной математики. В качестве авторов приглашаются участники всех мероприятий, проводимых Международным математическим центром «Сириус» с 2020 г., а также номинанты и лауреаты Премии молодым математикам России, учрежденной Образовательным фондом «Талант и успех». Рукописи для публикации в «Сириус. Математическом журнале» принимаются через платформу EditFlow: <https://ef.msp.org/submit/sirius>.

Все статьи, прошедшие рецензирование через EditFlow и одобренные главным редактором, публикуются на английском языке издательством Springer в журнале-источнике «Sirius Mathematical Journal» отдельными выпусками «Journal of Mathematical Sciences. Series B».

Весь тираж 500 экземпляров журнала безвозмездно и бесплатно направляется математическому сообществу в России и ближнем зарубежье: в библиотеки РАН, областные научные библиотеки, университеты, академические институты, математические организации, а также адресно — профессиональным математикам.

<https://siriusmathcenter.ru/SiriusMathJ>

Подписано в печать 22.12.2025. Формат 220x290 мм. Усл. печ. л. 12,5. Тираж 500 экз.

Адрес редакции: 354340, Федеральная территория «Сириус», Дельта Сириус, Триумфальный пер., 1, офис 9-047, тел.: +7 (862) 241-98-44, доб. 5824, email: gozhkovskaya.tn@talantiuspeh.ru.

ООО «Издательство «Сочи пресс», 354000, Сочи, Виноградный пер., 15, тел.: 7 (862) 296-08-08.

Заказ №0135

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

© Международный математический центр «Сириус», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

А. О. Беляков

О динамике инвестиций в модели эндогенного экономического роста	9
1. Введение	9
2. Постановка задачи	10
3. Условия оптимальности	12
3.1. Неограниченный рост с потреблением	14
3.2. Ограниченный рост с потреблением	14
4. Необходимые условия оптимальности	15
5. Пример с производственной функцией Кобба — Дугласа	16
6. Выводы	17
Декларация	18
Литература	18

А. Видрас, А. Ижер

Фундаментальный принцип Эйлера — Эренпрайса и обобщенные функции	19
1. Введение	19
2. Главные значения и вычеты медленного роста. $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменатели	23
3. Доказательства теорем 1.1 и 1.2	24
3.1. Вспомогательные алгебраические сведения	24
3.2. Необходимый аналитический инструментарий	25
3.3. Доказательства теорем 1.1 и 1.2	27
4. Квазирегулярные семейства с обратными элементами медленного по Пэли — Винеру роста	30
5. Модифицированный вес Пэли — Винера	34
Литература	36

И. А. Галяев, Ю. Л. Сачков

Лоренцевы задачи на группе Гейзенберга	38
1. Введение	38
2. Первая лоренцева задача	39
2.1. Постановка задачи	39
2.2. Множество достижимости	39
2.3. Существование оптимальных траекторий	41
2.4. Экстремальные траектории	42
2.5. Экспоненциальное отображение и волновые фронты	42
2.6. Сопряженные точки	42
2.7. Оптимальность экстремальных траекторий	43
3. Вторая лоренцева задача	43
3.1. Постановка задачи	43
3.2. Множество достижимости	44
3.3. Экстремальные траектории и волновые фронты	44
3.4. Сопряженные точки	44
4. Третья лоренцева задача	47
4.1. Постановка задачи	47
4.2. Множество достижимости	47
4.3. Экстремальные траектории и волновые фронты	48
4.4. Сопряженные точки	48

4.5. Оптимальность экстремальных траекторий	49
5. Заключение	49
Благодарности	49
Литература	49
С. С. Гончаров, Е. Е. Витяев, Д. И. Свириденко, А. В. Нечесов	
Задачный подход: Недостающее звено между человеком и машиной?	51
1. Введение	51
2. Задачный подход	52
2.1. Основной принцип: Задача как основополагающая единица	52
2.2. Объяснимость через формализацию задач	53
2.3. Иерархия задач и декомпозиция	53
2.3.1. Параметры необходимые для декомпозиции задач/целей	53
2.3.2. Вывод конечного результата	54
2.3.3. Свойства трассировки	54
2.3.4. Значимость параметров	54
2.4. Принципы проектирования доверенных интеллектуальных систем	55
3. Функционирование и обучение агентов	55
4. Индуктивный вывод знаний в рамках задачного подхода	57
5. Заключение	59
Литература	59
Н. В. Крылов	
О продолжении функций класса ВМО в параболическом случае	61
Благодарности	65
Литература	65
А. Я. Мальцев	
О задаче Новикова для потенциалов диэдральной симметрии	66
1. Введение	66
2. Открытые линии уровня потенциалов симметрии D_n	68
3. Заключение	72
Литература	73
А. В. Подобрыв	
Экстремальные траектории левоинвариантных аффинных систем и субримановы геодезические	74
1. Введение	74
2. Экстремали левоинвариантных задач оптимального управления	74
3. Связь экстремалей аффинной и субримановой задач	75
4. Примеры	77
Литература	79
Т. Г. Пшеницын	
О сложности распознавания грамматик слияния, сохраняющих связность	81
1. Введение	81
2. Предварительные сведения	83
3. Разрешимость и верхняя сложностная оценка	86
4. Нижняя сложностная оценка	89
5. Заключение	94
Благодарности	94
Литература	94

Н.-П. Скоруппа

Полнота представлений Вейля для конечных квадратичных модулей	96
1. Введение	96
2. Короткое доказательство теоремы 1.1	97
3. Дальнейшие следствия доказательства теоремы 1.1	98
4. Нетривиальное двукратное центральное расширение группы $SL(2, \mathbb{Z})$	99
5. Замечания и открытые проблемы	101
Литература	101

А. Б. Сухов

Теорема сепаратной аналитичности для CR-функций	103
1. Введение	103
2. Предварительные сведения	104
3. Подклейка комплексных кругов ко вполне вещественным многообразиям класса C^1 ...	105
3.1. Обобщенное уравнение Бишопа, существование и регулярность кругов	105
3.2. Стабильность кругов	107
4. Доказательство теоремы 1.1	108
Литература	108

А. О. Беляков

О ДИНАМИКЕ ИНВЕСТИЦИЙ В МОДЕЛИ ЭНДОГЕННОГО ЭКОНОМИЧЕСКОГО РОСТА

Исследуется динамика оптимальных вложений в два фактора производства (физический и человеческий капитал) на бесконечном горизонте, для произвольной линейно-однородной производственной функции, удовлетворяющей предельным условиям на частные производные, которые слабее условий Инады. Предполагается, что в силу специфики рынка труда производители не могут управлять количеством работников, а вложения в человеческий капитал, отражающий уровень технологического развития, воплощенного в труде, необратимы в отличие от инвестиций в физический капитал, который можно преобразовать в потребление. Найдены оптимальные решения и условия, когда будут осуществляться вложения в человеческий капитал. Показано, что при достаточно малой норме дисконтирования полезности и достаточно большой относительной несклонности к риску потребителя для него оптимально вначале наращивать только физический капитал, пока его предельная производительность не снизится до предельной производительности человеческого капитала, а затем инвестировать в оба вида капитала в постоянной пропорции, что приводит к неограниченному росту факторов, а также к асимметрии в реакции инвестиций на изменения переменных.

1. Введение

Определение оптимального или равновесного соотношения ресурсов, направленных на расширение производства и на получение знаний, увеличивающих эффективность будущего производства — один из главных вопросов теории экономического роста. К решению этой задачи, также как к задаче Рамсея [1] об оптимальных инвестициях в физический капитал [2], начали применять методы теории оптимального управления почти сразу после публикации принципа максимума Понтрягина [3]. Узава [4] оптимизировал линейный функционал от потребления, Лукас [5] использовал вогнутую функцию мгновенной полезности — общепринятое предположение (см. [6]). Обычно в задачах об оптимальных инвестициях в два фактора производства используется производственная функция Кобба — Дугласа [5], [7]–[9] или линейная функция [10].

В данной работе исследуется динамика модифицированной модели Узавы — Лукаса, в которой, в отличие от большинства рассмотренных в литературе задач с вложениями в человеческий капитал, продукт производится по произвольной неоклассической технологии, а скорость прироста человеческого капитала считается пропорциональной потраченному на это количеству конечного продукта, которое в сумме с потреблением временно может превышать текущий выпуск за счет уменьшения запаса физического капитала. Также предполагается, что вложения в человеческий капитал не могут быть отрицательными. Такие простые предположения о создании человеческого капитала позволили строго описать не только траекторию сбалансированного роста, но и переход к ней, где оптимальные вложения в человеческий капитал увеличиваются скачком, что обуславливает резкое отличие распределения инвестиций на переходной траектории.

Автор частично финансово поддержан РФФ (грант No. 25-18-00319).

А. О. Беляков: Центральный банк Российской Федерации, Московская школа экономики, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Национальный исследовательский технологический университет «МИСиС», Москва, Россия; belyakov@mse-msu.ru.

В развитие результатов [11] к интегральному целевому функционалу добавлен терминальный член, отвечающий за реализацию накопленного физического капитала на бесконечности в виде потребления, что допускает существование оптимальных траекторий неограниченного накопления факторов производства с повсюду нулевым текущим потреблением, полученных из необходимых условий оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина (см. [3, 12]).

Для произвольных неоклассических производственных функций, линейно-однородных с убывающими частными производными, удалось получить простые условия существования неограниченного роста, включающие ослабление условий Инады [13]. При этих условиях оптимальное решение, полученное из достаточных условий оптимальности Мангасаряна (см. [14]), включает переходную траекторию, на которой наращивается только физический капитал, пока его предельная производительность не снизится до уровня предельной производительности человеческого капитала. Далее на траектории сбалансированного роста вложения осуществляются как в физический, так и в человеческий капиталы в постоянной пропорции.

Представляет интерес отличие распределения вложений в физический и человеческий капитал на переходной траектории и на траектории сбалансированного роста, так как при помощи него, в частности, можно предсказать разную реакцию инвестиций на изменение переменных модели.

Задаче центрального планировщика можно сопоставить эквивалентную децентрализованную модель общего равновесия, по аналогии с [5]. При достаточно жестком рынке труда производители могут быть склонны реагировать на изменения спроса не столько наймом и увольнением работников, сколько инвестициями в физический и человеческий капиталы. Однако, если физический капитал, в случае экономического спада, можно продать, то вернуть вложения в человеческий капитал, уменьшив его, маловероятно. Поэтому при одинаковых по абсолютному значению, но разных по знаку изменениях выпуска $\Delta Y_+ = -\Delta Y_- > 0$, чистые инвестиции в физический капитал могут отличаться по величине $\Delta K_+ < -\Delta K_-$. Действительно, пусть выпуск на одного работника описывается неоклассической производственной функцией $F(K, A)$ от физического K и человеческого A капитала работника. Тогда для малых изменений можно приближенно записать равенства

$$\begin{aligned}\Delta Y_+ &= F'_K(K, A) \Delta K_+ + F'_A(K, A) \Delta A_+, \\ \Delta Y_- &= F'_K(K, A) \Delta K_- + F'_A(K, A) \Delta A_-, \end{aligned}$$

откуда при $\Delta Y_+ = -\Delta Y_- > 0$ из необратимости инвестиций в человеческий капитал, $\Delta A_- = 0$ и равенства предельных производительностей физического и человеческого капиталов на траектории сбалансированного роста, $F'_K(K, A) = F'_A(K, A)$, следует

$$\Delta K_+ = -\Delta K_- - \Delta A_+.$$

Таким образом получается асимметричная реакция инвестиций в физический капитал на изменения спроса в экономике на траектории сбалансированного роста, в отличие от экономики на переходной траектории, где для поддержания роста не оптимально вкладываться в человеческий капитал, $\Delta A_+ = 0$.

2. Постановка задачи

Пусть поток труда в экономике пропорционален населению, которое растет с заданным темпом $n(t)$, достигающим стационарного значения n . Центральный планировщик максимизирует дисконтированную с нормой $\rho > 0$ суммарную полезность всех потребителей:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[\int_0^T e^{-\rho t + \int_0^t n(\eta) d\eta} u(C(t)) dt + \nu e^{-\rho T + \int_0^T n(\eta) d\eta} u(K(T)) \right] \rightarrow \max, \quad (2.1)$$

по душевным потреблению $C(t) \geq 0$ и государственным расходам $G(t) \geq 0$ при динамике физического капитала $K(t) > 0$ на одного работника для всех $t \geq 0$:

$$\dot{K}(t) = F(K(t), A(t)) - C(t) - G(t) - n(t) K(t), \quad K(0) = K_0 > 0, \quad (2.2)$$

где F — чистая средняя производительность труда (чистым выпуском называем выпуск за вычетом расходов из-за выбытия капитала), $\nu \geq 0$ — коэффициент, характеризующий возможность

получить полезность, преобразовав накопленный капитал в потребление в конце процесса. Государственные расходы G идут на увеличение человеческого капитала A работника

$$\dot{A}(t) = G(t) - n(t)A(t), \quad A(0) = A_0 > 0. \quad (2.3)$$

(Суммарные государственные расходы на $N > 0$ работников — NG . Прирост суммарного человеческого капитала $\frac{d}{dt}(NA) = NG \Rightarrow N\dot{A} + \dot{N}A = NG$ с учетом $\dot{N} = nN$ дает $\dot{A} + nA = G$.)

Потребители обладают постоянной относительной несклонностью к риску $\theta > 0$, т.е. их предельная функция полезности имеет вид

$$u'(C) = C^{-\theta}. \quad (2.4)$$

Будем использовать функции мгновенной полезности вида

$$u(C) = \begin{cases} \frac{C^{1-\theta}}{1-\theta}, & \theta \neq 1, \\ \ln C, & \theta = 1. \end{cases}$$

Пусть $F(K, A)$ — линейно однородная функция, которая определена на положительном ортанте $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ и дифференцируема по обеим переменным на строго положительном ортанте $\mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ со строго монотонно убывающими частными производными по каждой переменной. Будем считать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.1. Для всех $A > 0$

$$\lim_{K \rightarrow 0} (F'_K(K, A) - F'_A(K, A)) > 0, \quad \lim_{K \rightarrow \infty} (F'_K(K, A) - F'_A(K, A)) < 0.$$

Поскольку $F'_K(K, A)$ убывает по K , а $F'_A(K, A)$ возрастает по K в силу однородности степени нуль, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.1. Равенство $F'_K(K, A) = F'_A(K, A)$ имеет место при одном и только одном отношении $\bar{k} = K/A > 0$.

Для формулировки следующей леммы удобно перейти к удельным переменным

$$\frac{F(K, A)}{A} = F(k, 1) := f(k), \quad k = \frac{K}{A}.$$

Из теоремы Эйлера для однородной функции первой степени вытекают тождества

$$F(K, A) = F'_K(K, A)K + F'_A(K, A)A, \quad F'_K(K, A) = F'_k(k, 1).$$

Поделив первое тождество на A и учитывая равенство

$$F'_K(K, A) = f'(k), \quad (2.5)$$

получаем

$$f(k) = f'(k)k + F'_A(K, A),$$

откуда следует

$$F'_A(K, A) = f(k) - f'(k)k. \quad (2.6)$$

В удельных переменных условие 2.1 принимает вид

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +0} ((1+k)f'(k) - f(k)) &> 0, \\ \lim_{k \rightarrow \infty} ((1+k)f'(k) - f(k)) &< 0. \end{aligned}$$

Лемма 2.1. Условие 2.1 выполнено, если

$$\lim_{k \rightarrow +0} f'(k) > f(0) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k),$$

где $f(0) = \lim_{k \rightarrow +0} F(k, 1)$.

Доказательство. Имеем

$$\lim_{k \rightarrow +0} ((1+k)f'(k) - f(k)) = \lim_{k \rightarrow +0} f'(k) - f(0).$$

В силу строгой вогнутости f

$$f(x) - f(k) < f'(k)(x - k), \quad x \neq k,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} ((1+k)f'(k) - f(k)) < \lim_{k \rightarrow \infty} (1+x)f'(k) - f(x),$$

где $x = 0$ или

$$x = \arg \max_x ((1+x) \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) - f(x)).$$

Лемма доказана. □

Теорема 2.1. *Предельные производительности факторов совпадают:*

$$F'_K(K, A) = F'_A(K, A)$$

или в удельных переменных с учетом (2.5)–(2.6):

$$f'(k) = f(k) - f'(k)k, \tag{2.7}$$

при одном и только одном отношении $K/A = k = \bar{k} > 0$, если

$$\lim_{k \rightarrow +0} f'(k) > f(0), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) \leq f(0). \tag{2.8}$$

Замечание 2.1. При $f(0) \geq 0$ условия (2.8) обобщают условия Инады [13]:

$$\lim_{k \rightarrow +0} f'(k) = +\infty, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) = 0,$$

которые выполняются для функции Кобба – Дугласа $F(K, A) = K^\alpha A^{1-\alpha}$, где $f(k) = k^\alpha$, но не для любой функции с постоянной эластичностью замещения $F(K, A) = (\alpha K^\eta + \beta A^\eta)^{\frac{1}{\eta}}$, вогнутой при $\eta \in (0, 1)$, где $f(k) = (\alpha k^\eta + \beta)^{\frac{1}{\eta}}$, так как

$$f'(k) = \alpha \left(\alpha + \frac{\beta}{k^\eta} \right)^{\frac{1}{\eta}-1} \rightarrow \alpha^{\frac{1}{\eta}} > 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

тогда как при $\alpha \leq \beta$ условия (2.8) выполнены, поскольку $f'(k) \rightarrow \alpha^{\frac{1}{\eta}} \leq \beta^{\frac{1}{\eta}} = f(0)$.

Если отношение факторов производства постоянно, $\frac{K(t)}{A(t)} = \bar{k}$ для всех $t \geq \tau$, то эти факторы будут расти с одинаковым темпом

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g(t) - n(t), \tag{2.9}$$

где $g(t) := \frac{G(t)}{A(t)}$. Такую динамику экономики будем называть *сбалансированным ростом*, при котором удельное потребление $c(t) = \frac{C(t)}{A(t)}$ может быть выражено из уравнений (2.2) и (2.3) в виде

$$c(t) = (f'(\bar{k}) - g(t)) (\bar{k} + 1). \tag{2.10}$$

3. Условия оптимальности

Функция Гамильтона – Понтрягина задачи (2.1)–(2.3) в текущих переменных

$$\mathcal{H}(K, A, C, G, \lambda, \psi, t) = u(C) + \lambda(F(K, A) - C - G - n(t)K) + \psi(G - n(t)A)$$

вогнута по совокупности переменных (K, A, C, G) . Поэтому можно воспользоваться достаточными условиями оптимальности Мангасаряна [14], состоящими из

(1) условия максимума

$$(\widehat{C}(t), \widehat{G}(t)) \in \arg \max_{C, G \geq 0} \mathcal{H}(\widehat{K}(t), \widehat{A}(t), C, G, \lambda(t), \psi(t), t), \tag{3.1}$$

(2) сопряженных уравнений

$$\begin{aligned}(\rho - n(t))\lambda(t) - \dot{\lambda}(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial K}, \\(\rho - n(t))\psi(t) - \dot{\psi}(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial A},\end{aligned}\tag{3.2}$$

(3) предельных условий типа трансверсальности в виде

$$\begin{aligned}\liminf_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T + \int_0^T n(\eta) d\eta} (\lambda(T) - \nu u'(\hat{K}(T)))(K(T) - \hat{K}(T)) &\geq 0, \\ \liminf_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T + \int_0^T n(\eta) d\eta} \psi(T)(A(T) - \hat{A}(T)) &\geq 0,\end{aligned}$$

где $K(\cdot)$ и $A(\cdot)$ — любые допустимые траектории, которые удовлетворяют уравнениям состояния (2.2)–(2.3) при неотрицательных управлениях.

Далее будем опускать символ $\hat{\cdot}$ над оптимальными переменными. В силу вогнутости \mathcal{H} условия максимума выполняются тогда и только тогда, когда

$$u'(C(t)) - \lambda(t) = 0 \quad \text{или} \quad u'(0) - \lambda(t) \leq 0, \quad C(t) = 0,\tag{3.3}$$

$$\psi(t) - \lambda(t) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(t) - \lambda(t) \leq 0, \quad G(t) = 0.\tag{3.4}$$

Однако $u'(0) = +\infty$ и, следовательно, $u'(C(t)) = \lambda(t)$:

$$(C(t))^{-\theta} = \lambda(t) > 0.\tag{3.5}$$

Поэтому $C(t) > 0$, а $G(t) \in (0, \infty)$ только тогда, когда $\psi(t) = \lambda(t)$. Из сопряженных уравнений

$$\rho \lambda(t) - \dot{\lambda}(t) = \lambda(t) F'_K(K(t), A(t)),\tag{3.6}$$

$$\rho \psi(t) - \dot{\psi}(t) = \lambda(t) F'_A(K(t), A(t))\tag{3.7}$$

видно, что $\psi(t) = \lambda(t)$ только тогда, когда предельные производительности физического и человеческого капитала совпадают (2.7), что происходит, если выполнены условия (2.8) теоремы 2.1 при единственном постоянном отношении $\frac{K(t)}{A(t)} = \bar{k}$, и можно записать цепочку равенств

$$\frac{\dot{\psi}(t)}{\psi(t)} = \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)} = \rho - f'(\bar{k}).\tag{3.8}$$

В силу $K(t) \geq 0$ и $A(t) \geq 0$ условия трансверсальности выполнены, если имеют место равенства

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T + \int_0^T n(\eta) d\eta} (\lambda(T) - \nu u'(K(T))) K(T) = 0,\tag{3.9}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\rho T + \int_0^T n(\eta) d\eta} \psi(T) A(T) = 0,\tag{3.10}$$

которые справедливы при

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\dot{\lambda}(T)}{\lambda(T)} + \frac{\dot{K}(T)}{K(T)} + n(T) < \rho,$$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{u''(K(T))\dot{K}(T)}{u'(K(T))} + \frac{\dot{K}(T)}{K(T)} + n(T) < \rho,$$

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{\dot{\psi}(T)}{\psi(T)} + \frac{\dot{A}(T)}{A(T)} + n(T) < \rho.$$

При $\psi(t) = \lambda(t)$ в силу (3.8) и (2.9) условия трансверсальности выполнены, если

$$\limsup_{T \rightarrow \infty} g(T) < f'(\bar{k}), \quad \limsup_{T \rightarrow \infty} (1 - \theta) g(T) + \theta n(T) < \rho.\tag{3.11}$$

Из условия максимума (3.5) и сопряженного уравнения (3.6) получаем уравнение Эйлера

$$\frac{\dot{C}(t)}{C(t)} = \frac{f'(k(t)) - \rho}{\theta},$$

из которого следует, что на траектории сбалансированного роста, где $k \equiv \bar{k}$, потребление на одного работника растет с постоянным темпом. Тогда выражение для удельного потребления (2.10), записанное в темпах прироста,

$$\frac{f'(\bar{k}) - \rho}{\theta} + n(t) - g(t) = \frac{-\dot{g}(t)}{f'(\bar{k}) - g(t)},$$

дает динамику $g(t)$:

$$\dot{g}(t) = - [g(t) - f'(\bar{k})] \left[g(t) - \frac{f'(\bar{k}) - \rho}{\theta} - n(t) \right]. \quad (3.12)$$

Далее считаем $n(t) \equiv n$. Тогда стационарное значение $g(t) = \bar{g}$,

$$\bar{g} := \frac{f'(\bar{k}) - \rho}{\theta} + n,$$

удовлетворяет условиям трансверсальности (3.11) и положительному потреблению, если

$$(1 - \theta) f'(\bar{k}) + \theta n < \rho. \quad (3.13)$$

3.1. Неограниченный рост с потреблением. Для неограниченного роста факторов производства на одного работника, как видно из (2.9), требуется $\bar{g} > n$, т.е.

$$f'(\bar{k}) > \rho. \quad (3.14)$$

Переходная траектория при $t \in [0, \tau]$, $G(t) = 0$ и $A(t) = A_0 e^{-nt}$ описывается решением системы уравнений

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t), \quad k(0) = \frac{K_0}{A_0} \in (0, \bar{k}], \quad (3.15)$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - \rho}{\theta} + n, \quad (3.16)$$

переходящим на траекторию сбалансированного роста в точке $c(\tau) = \bar{c}$, $k(\tau) = \bar{k}$, где

$$\bar{c} = (f'(\bar{k}) - \bar{g})(\bar{k} + 1) \quad (3.17)$$

в силу (2.10). На траектории сбалансированного роста при $t > \tau$ переменные

$$A(t) = A_0 e^{(\bar{g}-n)t - \bar{g}\tau}, \quad G(t) = \bar{g} A(t), \quad C(t) = \bar{c} A(t), \quad K(t) = \bar{k} A(t), \quad (3.18)$$

прирастают с одинаковым темпом $\bar{g} - n = \frac{f'(\bar{k}) - \rho}{\theta}$.

Заметим, что условие существования траектории сбалансированного роста с положительными вложениями в человеческий капитал $\bar{g} > 0$ также гарантирует конечность времени $\tau < \infty$ перехода на эту траекторию. Действительно, из (3.15) следует

$$\bar{c} < f(\bar{k}) \iff \dot{k}(\tau) > 0 \Rightarrow \tau < \infty.$$

С учетом (2.7) и (3.17) получаем условие, что τ конечно:

$$(f'(\bar{k}) - \bar{g})(\bar{k} + 1) = \bar{c} < f(\bar{k}) = f'(\bar{k})(1 + \bar{k}) \iff \bar{g} > 0.$$

3.2. Ограниченный рост с потреблением. Если условие (3.14) не выполняется, переход на траекторию не происходит и оптимальный рост описывается, как в задаче Рамсея [1], седловой траекторией системы (3.15)–(3.16), стремящейся к стационарной точке системы (k^*, c^*) , определяемой уравнениями:

$$c^* = f(k^*), \quad f'(k^*) = \rho - \theta n.$$

Параметр ν не имеет значения при $\rho > \theta n$, так как ввиду ограниченности удельного капитала при $k(t) \rightarrow k^*$ терминальный член функционала стремится к нулю:

$$e^{-(\rho-n)T} u(K(T)) = e^{-(\rho-n)T} u(A_0 e^{-nT} k(t)) e^{-(\rho-n)T} = e^{-(\rho-\theta n)T} u(A_0) u(k(t)) \rightarrow 0.$$

4. Необходимые условия оптимальности

Функция Гамильтона — Понтрягина

$$\mathcal{H}(K, A, C, G, \lambda, \psi, \mu) = \mu u(C) + \lambda (F(K, A) - C - G - nK) + \psi (G - nA)$$

в текущих переменных для принципа максимума Понтрягина содержит неотрицательный множитель Лагранжа $\mu \geq 0$. Принцип максимума утверждает, что для оптимального процесса необходимо $(\mu, \lambda(t), \psi(t)) \neq (0, 0, 0)$ при выполнении условия максимума (3.1) с сопряженными уравнениями (3.2); см., например, [12]. Тогда для $G \in (0, \infty)$ необходимо $\frac{K(t)}{A(t)} = \bar{k}$. В нормальном случае $\mu = 1$ при

$$(1 - \theta) f'(\bar{k}) + \theta n < \rho < f'(\bar{k})$$

стационарное решение $g = \bar{g}$ дифференциального уравнения (3.12)

$$\dot{g}(t) = - [g(t) - f'(\bar{k})] [g(t) - \bar{g}]$$

является единственно возможным, так как оно неустойчиво в силу $\bar{g} < f'(\bar{k})$, нулевое потребление невозможно, а при $g(t) \rightarrow f'(\bar{k})$ — неоптимально. На рис. 1 изображены траектории g при условиях роста (3.14) и положительного потребления (3.13):

$$f'(\bar{k}) - n > \frac{f'(\bar{k}) - \rho}{\theta} > 0.$$

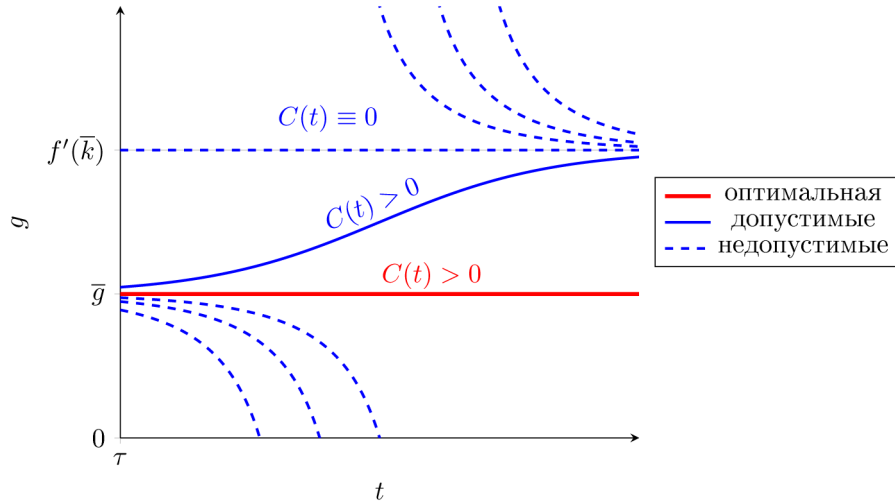


Рис. 1. При $g(t) \equiv \bar{g}$ потребление $C(t)$ максимально и, так как оно растет с постоянным темпом при любых допустимых $g(t)$, доставляет наибольшее значение функционалу.

Потребление растет с одинаковым темпом $(\bar{g} - n)$ на всех траекториях $g(t)$. Однако в силу (2.10) начальный уровень потребления $C(\tau) = A(\tau) (f'(\bar{k}) - g(\tau)) (\bar{k} + 1)$ при $g(\tau) = \bar{g}$ является наивысшим из допустимых и остается таковым в каждый последующий момент времени $t > \tau$. Ввиду (3.13) терминальный член в функционале стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} e^{-(\rho-n)T} |u(K(T))| &\leq e^{-(\rho-n)T} \frac{\left(\bar{k} A_0 e^{(f'(\bar{k})-n)(T-\tau)}\right)^{1-\theta}}{|1-\theta|} \\ &= e^{((1-\theta)f'(\bar{k})+\theta n-\rho)T} \frac{\left(\bar{k} A_0 e^{-(f'(\bar{k})-n)\tau}\right)^{1-\theta}}{|1-\theta|} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, величина капитала на бесконечности не имеет значения в функционале, который, очевидно, максимален при наибольшем всюду потреблении.

Нулевое потребление возможно только при $\theta < 1$, так как иначе $u(+0) \rightarrow -\infty$. При $\mu = 0$

$$\mathcal{H}(K, A, C, G, \lambda, \psi, 0, t) = \lambda(F(K, A) - C - G - n(t)K) + \psi(G - n(t)A)$$

по принципу максимума $(\lambda, \psi) \neq (0, 0)$ и

(1) из условия максимума для $C(t) = 0$ и $G(t) > 0$ следует $\psi(t) = \lambda(t) > 0$,

(2) (3.6) и (3.7) — сопряженные уравнения, поэтому для $G \in (0, \infty)$ необходимо $\frac{K(t)}{A(t)} = \bar{k}$.

Этим условиям не противоречит рост с $g = f'(\bar{k})$. Тогда на траектории сбалансированного роста при $t > \tau$

$$A(t) = A_0 e^{(f'(\bar{k})-n)t - f'(\bar{k})\tau}, \quad G(t) = f'(\bar{k})A(t), \quad C(t) = 0, \quad K(t) = \bar{k}A(t).$$

При достаточно малом дисконтировании (3.13) функционал нулевой и не является максимальным, так как

$$e^{-(\rho-n)T} u(K(T)) = e^{((1-\theta)f'(\bar{k})+\theta n-\rho)T} u(K(\tau)) \rightarrow 0,$$

где

$$u(K(\tau)) = \frac{(\bar{k} A_0 e^{-(f'(\bar{k})-n)\tau})^{1-\theta}}{1-\theta},$$

а приведенное выше нормальное оптимальное решение доставляет положительный функционал.

При $(1-\theta)f'(\bar{k})+\theta n > \rho$ функционал неограниченно растет и обгоняюще оптимален, так как $(f'(\bar{k})-n)$ — максимально возможный постоянный темп прироста факторов.

При $(1-\theta)f'(\bar{k})+\theta n = \rho$ функционал постоянен:

$$\nu e^{-(\rho-n)T} u(K(T)) = \nu e^{((1-\theta)f'(\bar{k})+\theta n-\rho)T} u(K(\tau)) = \nu u(K(\tau)).$$

Поэтому его значение нужно сравнить со значением в задаче Рамсея с ограниченным ростом в п. 3.2. Здесь начинает играть роль коэффициент ν . Заметим, что если $f'(\bar{k}) > 0$, то в силу $\theta < 1$ имеем $\rho > \theta n$, когда терминальный член функционала стремится к нулю при ограниченном росте, так что нулевое потребление неоптимально.

5. Пример с производственной функцией Кобба — Дугласа

Рассмотрим производственную функцию Кобба — Дугласа и постоянную норму выбытия физического капитала $\delta > 0$, так что чистый выпуск запишется в виде

$$F(K, A) = K^\alpha A^{1-\alpha} - \delta K, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Записав в удельных переменных чистый выпуск $f(k) = k^\alpha - \delta k$ и предельную производительность физического капитала $f'(k) = \alpha k^{\alpha-1} - \delta$, видно, что выполняются условия (2.8) теоремы 2.1. Поэтому уравнение (2.7)

$$\alpha k^{\alpha-1} - \delta = (1-\alpha)k^\alpha.$$

имеет единственное решение \bar{k} . В качестве примера рассмотрим логарифмическую функцию мгновенной полезности $\theta = 1$ и предположим, что норма дисконтирования больше темпа прироста работников $\rho > n$. Тогда выполнены условия неограниченного роста (3.14) и положительности потребления (3.13) оптимального решения.

Переходная траектория при $t \in [0, \tau]$ без вложений ($G(t) = 0$) в человеческий капитал $A(t) = A_0 e^{-nt}$ описывается решением следующей системы уравнений (жирные стрелки на рис. 2):

$$\begin{aligned} \dot{k}(t) &= (k(t))^\alpha - \delta k(t) - c(t), & k(0) &= \frac{K_0}{A_0} \in (0, \bar{k}], \\ \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} &= \alpha (k(t))^{\alpha-1} - \delta - \rho + n, \end{aligned}$$

непрерывно переходящим в траекторию сбалансированного роста в точке $k(\tau) = \bar{k}$, $c(\tau) = \bar{c} = (\rho - n)(1 + \bar{k})$ (см. (3.17)). При $t > \tau$ переменные A, G, C, K растут (3.18) с одинаковым постоянным темпом $\bar{g} - n$, где $\bar{g} = \alpha \bar{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho + n = (1-\alpha)\bar{k}^\alpha - \rho + n$ (см. рис. 3).

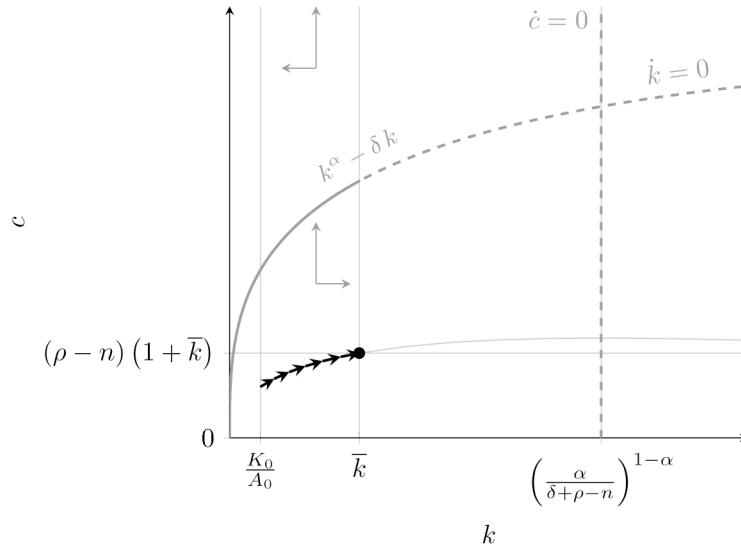


Рис. 2. Фазовая диаграмма удельных переменных капитала и потребления на переходной траектории (жирные стрелки) к траектории сбалансированного роста (жирная точка), где удельные переменные остаются постоянными.

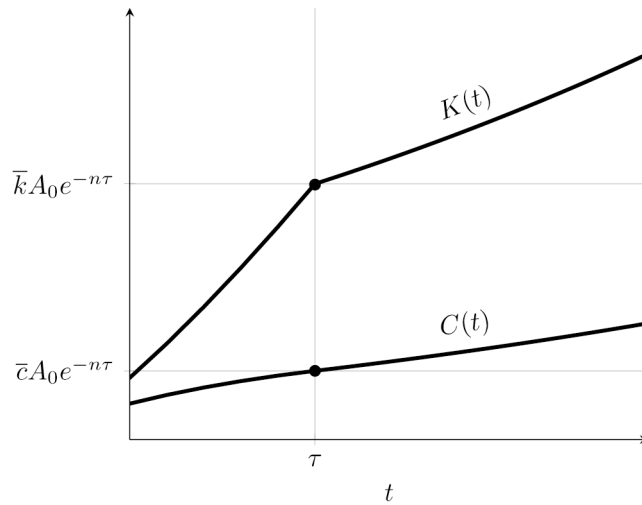


Рис. 3. Физический капитал $K(t)$ и потребление $C(t)$ по времени прирастают с темпом $\bar{g} - n = \alpha \bar{k}^{\alpha-1} - \delta - \rho$ при $t > \tau$.

6. Выводы

В случае выполнения условий (2.8)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f'(k) \leq f(0) < \lim_{k \rightarrow +0} f'(k),$$

можно выделить следующие типы решений задачи об оптимальных вложениях в физический и человеческий капиталы:

- (1) неограниченный рост человеческого и физического капиталов на одного работника при $\rho < f'(\bar{k})$
 - (а) с растущим потреблением при $(1 - \theta) f'(\bar{k}) + \theta n < \rho$,
 - (б) с нулевым потреблением при $(1 - \theta) f'(\bar{k}) + \theta n > \rho$,
 - (в) с нулевым потреблением при $(1 - \theta) f'(\bar{k}) + \theta n = \rho$, если значение ν достаточно большое, иначе оптимального решения не существует,

- (2) ограниченный рост человеческого и физического капиталов, а также потребления на одного работника при $\rho \geq f'(\bar{k})$, когда оптимально — никогда не развивать технологии и иметь положительное потребление при $f'(\bar{k}) \leq \rho - \theta n < 0$.

Декларация

Настоящая статья отражает личную позицию автора. Содержание и результаты данного исследования не следует рассматривать, в том числе цитировать в каких-либо изданиях, как официальную позицию Банка России или указание на официальную политику или решения регулятора. Любые ошибки в данном материале являются исключительно авторскими.

Литература

1. F. P. Ramsey, “A mathematical theory of saving”, *Econ. J.* **38**, No. 152, 543–559 (1928).
2. D. Cass, “Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation”, *Rev. Econ. Stud.* **32**, No. 3, 233–240 (1965).
3. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Физматгиз, М. (1961).
4. H. Uzawa, “Optimum technical change in an aggregative model of economic growth”, *Int. Econ. Rev.* **6**, No. 1, 18–31 (1965).
5. R. E. Lucas, “On the mechanics of economic development”, *J. Monet. Econ.* **22**, No. 1, 3–42 (1988).
6. R. Barro, X. Sala-i-Martin, *Economic Growth*, The MIT Press, Cambridge, MA (2004).
7. Ю. Н. Киселев, М. В. Орлов, С. М. Орлов, “Исследование краевой задачи принципа максимума Понтрягина в модели двухсекторной экономики с интегральной функцией полезности”, *Ж. выч. мат. мат. физ.* **55**, No. 11, 1812–1826 (2015).
8. Ю. Н. Киселев, М. В. Орлов, С. М. Орлов, “Оптимальные процессы в модели двухсекторной экономики с интегральной функцией полезности”, *Дифференц. уравн.* **53**, No. 2, 250 (2017).
9. С. М. Асеев, К. О. Бесов, С. Ю. Каниовский, “Оптимизация экономического роста в модели Дасгупты–Хила–Солоу–Стиглица при непостоянной отдаче от расширения масштабов производства”, *Тр. МИАН* **304**, 83–122 (2019).
10. С. М. Асеев, К. О. Бесов, А. В. Кряжимский, “Задачи оптимального управления на бесконечном интервале времени в экономике”, *Успехи мат. наук* **67**, No. 2 (404), 3–64 (2012).
11. A. O. Belyakov, “Optimal accumulation of factors with linear-homogeneous production functions on infinite time horizon”, *J. Math. Sci.* **269**, No. 6, 755–765 (2023).
12. H. Halkin, “Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons”, *Econometrica* **42**, No. 2, 267–272 (1974).
13. K.-I. Inada, “On a two-sector model of economic growth: Comments and a generalization”, *Rev. Econ. Stud.* **30**, No. 2, 119–127 (1963).
14. A. Seierstad, K. Sydsæter, *Optimal control theory with economic applications*, Elsevier etc., Amsterdam (1986).

Статья поступила в редакцию 16 сентября 2025 г.

Принята к публикации 18 декабря 2025 г.

А. Видрас, А. Ижер

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП ЭЙЛЕРА — ЭРЕНПРАЙСА И ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

Найдено условие, при котором в любом евклидовом шаре $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R)$ решение $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_{t,x}^{n+1}, \mathbb{C})$ системы уравнений свертки $\mu_0 * \varphi = \dots = \mu_M * \varphi = 0$ в \mathbb{R}^{n+1} представимо в виде суперпозиции (почти) элементарных решений, где μ_j — обобщенные функции с компактным носителем, преобразования Фурье которых удовлетворяют условию $\text{codim}_{C^{n+1}}\{\widehat{\mu}_j = 0 : j = 0, \dots, M\} = M + 1$. Метод доказательства основан на применении взвешенных интегральных представлений Бохнера — Мартинелли к интерполяции и делению по Лагранжу в сочетании с представлениями Атьи обобщенных функций главного значения и вычета медленного роста относительно веса Пэли — Винера. Исследование мотивировано примером системы, в которой все μ_j являются разностно-запаздывающими операторами с запаздываниями только по времени t . Представленное аналитическое условие основано на изучении срезов в отличие от геометрического условия медленного убывания, основанного на интегральном представлении Коши — Вейля.

1. Введение

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Для $h \in \mathbb{R}$ обозначим через $d_h : C(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n, \mathbb{C}) \longrightarrow C(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n, \mathbb{C})$ оператор сдвига, действующий по формуле

$$d_h(\varphi)(t, x) = \varphi(t - h, x). \tag{1.1}$$

Рассмотрим $m \geq 1$ линейно независимых над \mathbb{Q} ненулевых вещественных чисел h_1, \dots, h_m . При $m > 1$ операторы сдвига d_{h_1}, \dots, d_{h_m} называются операторами сдвига с несоизмеримыми запаздываниями по времени t . Для произвольного $\nu \in \mathbb{Z}^m$ введем \mathbf{h} -разностный оператор по времени $\Delta_\nu^{\mathbf{h}} : C(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n, \mathbb{C}) \longrightarrow C(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n, \mathbb{C})$ по формуле

$$\Delta_\nu^{\mathbf{h}}(\varphi)(t, x) = \varphi\left(t - \sum_{\ell=1}^m \nu_\ell h_\ell, x\right). \tag{1.2}$$

Обозначим через $(C[\Delta^{\mathbf{h}}], +, \circ)$ \mathbb{C} -алгебру, порожденную оператором $\Delta_\nu^{\mathbf{h}}$, с композицией \circ в качестве мультипликативной операции. Для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим \mathbb{C} -алгебры $(C_n[\Delta^{\mathbf{h}}], +, \circ)$ (соответственно, $(C'_n[\Delta^{\mathbf{h}}], +, \circ)$) \mathbf{h} -разностно-дифференциальных операторов, которые действуют в $C^\infty(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^n, \mathbb{C})$ и имеют вид

$$\begin{aligned} P\Delta^{\mathbf{h}} &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} P_\nu \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \circ \Delta_\nu^{\mathbf{h}}, \quad P_\nu \in \mathbb{C}[T, X], \\ Q\Delta^{\mathbf{h}} &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} Q_\nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \circ \Delta_\nu^{\mathbf{h}}, \quad Q_\nu \in \mathbb{C}[X], \end{aligned} \tag{1.3}$$

где лишь конечное число многочленов P_ν (соответственно, Q_ν), $\nu \in \mathbb{Z}^m$, отличны от нуля. В частности, $C'_0[\Delta^{\mathbf{h}}] = C[\Delta^{\mathbf{h}}]$ и $C_0[\Delta^{\mathbf{h}}] = C[\Delta^{\mathbf{h}}][\partial/\partial t]$.

А. Видрас: Кипрский университет, Никосия, Кипр; msvidras@ucy.ac.cy.

А. Ижер: Университет Бордо, Таланс, Франция; Alain.Yger@math.u-bordeaux.fr.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 310–331 (2025).

Символы $\mathcal{L}(\mathbb{P}\Delta^{\mathbf{h}})$, $\mathcal{L}(\mathbb{Q}\Delta^{\mathbf{h}})$ и преобразования Фурье $\widehat{\mathbb{P}\Delta^{\mathbf{h}}}$, $\widehat{\mathbb{Q}\Delta^{\mathbf{h}}}$ таких \mathbf{h} -разностно-дифференциальных операторов суть целые функции $n + 1$ переменных (z_0, \dots, z_n) (обозначаемых также (z_0, \mathbf{z}'))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{P}\Delta^{\mathbf{h}})(\mathbf{z}) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} P_{\nu}(z_0, \mathbf{z}') e^{-\langle \nu, \mathbf{h} \rangle z_0}, & \mathcal{L}(\mathbb{Q}\Delta^{\mathbf{h}})(\mathbf{z}) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} Q_{\nu}(\mathbf{z}') e^{-\langle \nu, \mathbf{h} \rangle z_0}, \\ \widehat{\mathbb{P}\Delta^{\mathbf{h}}}(\mathbf{z}) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} P_{\nu}(iz_0, i\mathbf{z}') e^{-i\langle \nu, \mathbf{h} \rangle z_0}, & \widehat{\mathbb{Q}\Delta^{\mathbf{h}}}(\mathbf{z}) &= \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^m} Q_{\nu}(i\mathbf{z}') e^{-i\langle \nu, \mathbf{h} \rangle z_0}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

\mathbb{C} -сопряженным пространством для $C^{\infty}(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{\mathbf{x}}^n, \mathbb{C})$ является $\mathcal{E}'(\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1})$. Введем вес Пэли – Винера.

$$p : \mathbf{z} = (z_0, \dots, z_n) = (z_0, \mathbf{z}') \in \mathbb{C}^{n+1} \mapsto \log(1 + \|\mathbf{z}\|) + \|\text{Im } \mathbf{z}\| \quad (1.5)$$

и соответствующую алгебру Пэли – Винера преобразований Фурье обобщенных функций с компактным носителем в \mathbb{R}^{n+1}

$$\mathcal{E}'(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}) := A_p(\mathbb{C}^{n+1}) = \{F \in \text{Hol}(\mathbb{C}_{z_0, \mathbf{z}'}^{n+1}) : F(\mathbf{z}) \leq A \exp(B p(\mathbf{z})) \text{ для некоторых } A, B \geq 0\}.$$

Имеют место включения

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{C}_n[\Delta^{\mathbf{h}}]} &= \mathbb{C}[z_0, e^{\pm ih_1 z_0}, \dots, e^{\pm ih_m z_0}, \mathbf{z}'] \subset \mathcal{E}'(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}}), \\ \widehat{\mathbb{C}'_n[\Delta^{\mathbf{h}}]} &= \mathbb{C}[e^{\pm ih_1 z_0}, \dots, e^{\pm ih_m z_0}, \mathbf{z}'] \subset \widehat{\mathbb{C}_n[\Delta^{\mathbf{h}}]}. \end{aligned}$$

С алгебраической точки зрения принципиальное различие между случаями $m = 1$ и $m > 1$ заключается в том, что коммутативная \mathbb{C} -алгебра

$$\text{Hol}(\mathbb{C}_{z_0}) \cap \mathbb{C}(z_0)[e^{\pm ih_1 z_0}, \dots, e^{\pm ih_m z_0}]$$

при $m = 1$ является кольцом Безу (см. [1, теорема 3.1.6]), т.е. коммутативным кольцом, в котором любой конечно порожденный идеал является главным, но это неверно при $m > 1$ (см., например, [2, пример 5.13]).

Любой системе уравнений свертки

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}\Delta^{\mathbf{h}})_j(\varphi) &\equiv 0, \quad \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}, \mathbb{C}), \quad j = 0, \dots, M, \\ (\text{соответственно, } (\mathbb{Q}\Delta^{\mathbf{h}})_j(\varphi) &\equiv 0, \quad \varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}, \mathbb{C}), \quad j = 0, \dots, M), \end{aligned} \quad (1.6)$$

с операторами $(\mathbb{P}\Delta^{\mathbf{h}})_j$ (соответственно, $(\mathbb{Q}\Delta^{\mathbf{h}})_j$) из $\mathbb{C}_n[\Delta^{\mathbf{h}}]$ (соответственно, $\mathbb{C}'_n[\Delta^{\mathbf{h}}]$) можно сопоставить гомоморфизм \mathbf{F}_P (соответственно, гомоморфизм \mathbf{F}_Q) из $(\mathcal{E}'(\widehat{\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}}))^{M+1}$ в $\mathcal{E}'(\widehat{\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}})$

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = (U_0, \dots, U_M) &\in (\mathcal{E}'(\widehat{\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}}))^{M+1} \xrightarrow{\mathbf{F}_P} \sum_{j=0}^M (\widehat{\mathbb{P}\Delta^{\mathbf{h}}})_j(\mathbf{z}) U_j(\mathbf{z}), \\ (\text{соответственно, } \mathbf{U} = (U_0, \dots, U_M) &\in (\mathcal{E}'(\widehat{\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}}))^{M+1} \xrightarrow{\mathbf{F}_Q} \sum_{j=0}^M (\widehat{\mathbb{Q}\Delta^{\mathbf{h}}})_j(\mathbf{z}) U_j(\mathbf{z})). \end{aligned}$$

Вопрос о справедливости равенства

$$\begin{aligned} \overline{\text{Im } \mathbf{F}_P} &= \mathbf{F}_P(\text{Hol}(\mathbb{C}_{z_0, \mathbf{z}'}^{n+1})) \cap \mathcal{E}'(\widehat{\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}}) \\ (\text{соответственно, } \overline{\text{Im } \mathbf{F}_Q} &= \mathbf{F}_Q(\text{Hol}(\mathbb{C}_{z_0, \mathbf{z}'}^{n+1})) \cap \mathcal{E}'(\widehat{\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}})) \end{aligned}$$

сводится к вопросу о том, обладает ли система уравнений свертки (1.4) свойством спектрального синтеза. Для произвольных систем уравнений свертки (для обобщенных функций с компактным носителем) этот вопрос остается открытым ввиду известного контрпримера Гуревича [3].

Настоящее исследование мотивировано работой [4], в которой показано, что любая система уравнений свертки (1.4) при $m = 1$ (т.е. при соизмеримых запаздываниях по времени) обладает свойством спектрального синтеза.

Прежде чем сформулировать наши результаты, введем определение псевдоэлементарного решения системы уравнений свертки

$$\mu_j * \varphi \equiv 0, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_{t,\mathbf{x}}^{n+1}, \mathbb{C}), \quad j = 0, \dots, M, \quad (1.7)$$

где $\mu_j \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^{n+1})$. Напомним сначала, что росток потока в точке $\alpha \in \mathbb{C}^{n+1}$ называется *псевдомероморфным* (в смысле [5, § 2], что достаточно для наших целей), если он является ростком в точке α конечной суммы (индексированной ι) ростков потоков, каждый из которых в окрестности α реализуется как прямой образ при голоморфном отображении π_ι потока, заданного в окрестности начала координат в некотором $\mathbb{C}_\xi^{N_\iota}$ и имеющего там (с точностью до переобозначения координат $\xi_\varkappa = (\xi_1, \dots, \xi_{N_\iota})$) следующий вид:

$$\left(\bigotimes_{\varkappa \leq k'} \left[\frac{1}{\xi_\varkappa^{\nu_\varkappa}} \right] \right) \left(\bigwedge_{k' < \varkappa \leq k} \bar{\partial} \left[\frac{1}{\xi_\varkappa^{\nu_\varkappa}} \right] \right) \wedge \varpi,$$

где $0 \leq k' \leq k \leq N_\iota$, $\nu_\varkappa \in \mathbb{N}$, $\varkappa \leq k$, ϖ — гладкая форма.

Определение 1.1. Гладкая функция $\varphi : \mathbb{R}_{t,\mathbf{x}}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ называется *псевдоэлементарным решением* системы уравнений свертки (1.7), если она удовлетворяет этой системе и существуют точка $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ множества

$$V_\mu := \left\{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \exp \left(-i \left(tz_0 + \sum_{j=1}^n x_j z_j \right) \right) d\mu_j(t, \mathbf{x}) = 0, \quad j = 0, \dots, M \right\}$$

и росток в точке α псевдомероморфного $(n+1, n+1)$ -потока T_α с носителем в $V_{\mu, \alpha}$ такие, что

$$\varphi(x) = \left\langle \exp \left(i \left(t\zeta_0 + \sum_{j=1}^n x_j \zeta_j \right) \right) T_\alpha, \theta_\alpha \right\rangle \quad (1.8)$$

для гладкой $(0,0)$ -формы $\theta_\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^{n+1})$, тождественно равной 1 в открытой окрестности точки α .

Замечание 1.1. Определение 1.1 обобщает определение элементарного решения системы (1.7) в частном случае, когда каждый коэффициент (росток коэффициента) потока T_α , являющийся обобщенной функцией, имеет вид $q(\zeta, \partial/\partial\zeta) d\mu_{V_{\mu, \alpha}}$. Здесь q — росток в точке α некоторого голоморфного (нетерова) дифференциального оператора с голоморфными коэффициентами на объемлющем многообразии \mathbb{C}^{n+1} , а $d\mu_{V_{\mu, \alpha}}$ — росток борелевской меры с носителем на ростке замкнутого аналитического множества $V_{\mu, \alpha}$.

Следующая теорема дополняет результаты [4] для случая соизмеримых запаздываний.

Теорема 1.1. Пусть $m = 1$ и $(P\Delta^{(h_1)})_0, \dots, (P\Delta^{(h_1)})_M - M + 1$ элементов в $\mathbb{C}_n[\Delta^{(h_1)}]$, где $M \leq n$. Любое решение $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{C})$ системы разностно-дифференциальных уравнений

$$(P\Delta^{(h_1)})_j(\varphi) \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}^{n+1}, \quad j = 0, \dots, M, \quad (1.9)$$

с условиями

$$\begin{aligned} \text{codim}_{\mathbb{C}^{n+1}} \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : (\widehat{P\Delta^{(h_1)}})_j(\mathbf{z}) = 0, \quad j = 0, \dots, M \} &= M + 1, \\ \text{codim}_{\mathbb{C}^{n+1}} \{ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : (\widehat{P\Delta^{(h_1)}})_j(\mathbf{z}) = 0, \quad j = 0, \dots, M, z_0 = \xi \} &= M + 2 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

может быть явно представлено в любом евклидовом шаре $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R)$ в виде суперпозиции псевдоэлементарных решений этой системы.

Второй результат демонстрирует трудности, возникающие при несоизмеримых запаздываниях. Он относится к случаю $m = 2$ и указывает на необходимость введения дополнительных арифметических условий, а также необходимость ограничить рассмотрение до случая полного пересечения (геометрическое условие).

Теорема 1.2. Пусть $m = 2$ и h_1, h_2 — вещественные алгебраические числа. Для $M \leq n$ рассмотрим $M+1$ операторов $(Q\Delta^{(h_1, h_2)})_0, \dots, (Q\Delta^{(h_1, h_2)})_M$ из $\mathbb{C}'_n[\Delta^{(h_1, h_2)}]$ с полиномиальными коэффициентами $Q_{j, \nu}$ из $\overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_n]$ такими, что

$$\begin{aligned} \text{codim}_{\mathbb{C}^{n+1}} \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : (Q\Delta^{(h_1, h_2)})_j(z) = 0, j = 0, \dots, M\} &= M + 1, \\ \text{codim}_{\mathbb{C}^{n+1}} \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : (Q\Delta^{(h_1, h_2)})_j(z) = 0, j = 0, \dots, M, z_0 = \xi\} &= M + 2 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Тогда любое решение $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{C})$ системы разностно-дифференциальных уравнений

$$(Q\Delta^{(h_1, h_2)})_j(\varphi) \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}_{t, x}^{n+1}, \quad j = 0, \dots, M,$$

можно явно представить в виде суперпозиции псевдоэлементарных решений этой системы в любом евклидовом шаре $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R)$.

Замечание 1.2. В теореме 1.2 присутствуют два арифметических условия. Первое состоит в требовании алгебраичности вещественных чисел h_1 и h_2 , а второе — принадлежности полиномиальных коэффициентов $Q_{j, \nu}$ кольцу $\overline{\mathbb{Q}}[X_1, \dots, X_n]$. Кроме того, требуется выполнение геометрического условия (1.11).

Метод доказательства (см. § 2), основанный на идеях работы [4], позволяет сопоставить набору $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_M) \in A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ и вектору ρ (общего положения относительно \mathbf{f}) из $]0, +\infty[^{M+1}$ обобщенные функции главного значения $\text{pv}_\rho(\mathbf{f})$ и $n + 1$ вычетов $\text{res}_{\rho, 0}(\mathbf{f}), \dots, \text{res}_{\rho, n}(\mathbf{f})$ в \mathbb{C}^{n+1} (см. определение 2.1). Тогда $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для \mathbf{f} называется элемент $\widehat{T} \in A_p(\mathbb{C}^{n+1})$, для которого все обобщенные функции $\widehat{T}(\zeta) \text{pv}_\rho(\mathbf{f}), \widehat{T}(\zeta) \text{res}_{\rho, k}(\mathbf{f}), k = 0, \dots, n$, оказываются обобщенными функциями медленного роста в \mathbb{C}^{n+1} относительно веса Пэли — Винера p в смысле определения 2.2.

В § 3 мы показываем, что теоремы 1.1 и 1.2 следуют из существования $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателя δ , для которого идеал $(\mathbf{f}, z \mapsto \delta(iz))A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ порождается в $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ полиномиальными функциями. Условие (1.10) можно было бы опустить, однако, как и в [4], тогда потребовалось бы привлечение сизигий для конечно порожденных модулей над

$$(\text{Hol}(\mathbb{C}_{z_0}) \cap \mathbb{C}(z_0)[e^{\pm ih_1 z_0}, \dots, e^{\pm ih_m z_0}])[X_1, \dots, X_n].$$

Конструкции в § 2 и 3 мотивируют введение понятия квазирегулярной последовательности в $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ с обратным элементом медленного роста относительно веса Пэли — Винера (определения 4.1 и 4.2). Тогда полулокальное эйлерово представление решений как суперпозиции псевдоэлементарных решений справедливо для любой системы уравнений свертки $\mu_j * \varphi \equiv 0, j = 0, \dots, M$, в \mathbb{R}^{n+1} при условии, что последовательность $(\widehat{\mu}_0, \dots, \widehat{\mu}_M)$ квазирегулярна с обратным элементом медленного роста относительно веса Пэли — Винера (см. теоремы 4.1 и 4.2). Это условие аналитического характера сравнивается с условием геометрического характера, предложенного в [6, теорема 10.1], где использовано условие медленного убывания последовательности целых функций $(\widehat{\mu}_0, \dots, \widehat{\mu}_M)$ относительно почти параллельного семейства $(M + 1)$ -мерных аффинных подпространств.

Теорема 1.2 показывает, что задачи, связанные с проблемой спектрального синтеза или представлением Эйлера среднепериодических решений систем разностно-дифференциальных уравнений с несоизмеримыми запаздываниями даже только по (единственной) временной переменной, приводят к сложным (и до сих пор не решенным) вопросам арифметического характера. В § 5 мы обсуждаем лежащие в основе этого факта фундаментальные гипотезы о суммах экспонент (Шапиро — Монтгомери, Эренпрайс; [7, 8], в связи с теоремой Акса — Шануэля [9]), а также их слабые постановки. В частности, упоминаются новейшие достижения, основанные на теории o -минимальности (гипотеза Пилы — Уилки для пфаффовых структур [10]). Эти результаты могут пролить свет на природу таких тонких вопросов.

Последний параграф посвящен весам Пэли — Винера вида $z \mapsto \log(1 + \|z'\|) + |\text{Im}z_0| + |z_0|^\varepsilon$ с произвольно малым $\varepsilon > 0$, которые пока играют лишь вспомогательную роль, но могут оказаться весьма перспективными при решении этих (пока гипотетических) вопросов.

2. Главные значения и вычеты медленного роста. $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменатели

Сначала приведем фундаментальную лемму, которая будет основным инструментом всей работы.

Лемма 2.1. Пусть $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})$ и $'\mathcal{D}^{(0,1)}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})$ — \mathbb{C} -пространства комплекснозначных обобщенных функций \mathbb{C}^{n+1} и $(0, 1)$ -потоков на \mathbb{C}^{n+1} соответственно. Для любых $\rho = (\rho_0, \dots, \rho_M) \in]0, +\infty[^{M+1}$ и голоморфного отображения $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_M) : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{M+1}$ голоморфные отображения

$$\begin{aligned} \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \gg 1\} &\mapsto \left[\left(\prod_{j=0}^M |f_j|^{2\rho_j \lambda} \right) \frac{1}{\|\mathbf{f}\|^{2(M+1)}} \right] \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}), \\ \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \gg 1\} &\mapsto \left[\bar{\partial} \left(\prod_{j=0}^M |f_j|^{2\rho_j \lambda} \right) \frac{1}{\|\mathbf{f}\|^{2(M+1)}} \right] \in '\mathcal{D}^{(0,1)}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

продолжаются до мероморфных отображений из \mathbb{C} в $\mathcal{D}'(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})$ и $'\mathcal{D}^{(0,1)}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})$ соответственно.

Доказательство. Проведем доказательство локально. Рассмотрим окрестность U начала координат и предположим, что $(f_0 \cdots f_M)(0) = 0$. Пусть $\pi : \mathcal{U} \rightarrow U$ — собственное лог-разрешение особенностей для гиперповерхности $U \cap \{\zeta : (f_0 \cdots f_M)(\zeta) = 0\}$ такое, что $\pi^*(\mathcal{f} \mathcal{O}_U)$ — главный пучок $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}$ -идеалов, нулевое множество которого является гиперповерхностью с нормальными пересечениями в \mathcal{U} . В локальной карте \mathcal{U} с координатами \mathbf{w} и центром в прообразе $\{\zeta \in U : (f_0 \cdots f_M)(\zeta) = 0\}$ каждая функция $\pi^* f_j$, $j = 0, \dots, M$ имеет вид $u_j w^{\gamma_j}$, где u_j — обратимая голоморфная функция и w^{γ_j} — моном. При этом мономиальный идеал $(w^{\gamma_0}, \dots, w^{\gamma_M})$ является главным. Поскольку все ρ_j строго положительны, требуемые утверждения выполняются. Мероморфное продолжение в каждой карте на \mathcal{U} получается интегрированием по частям. \square

Лемма 2.1 приводит к следующему определению для голоморфного отображения \mathbf{f} и наклона $\rho \in]0, +\infty[^{M+1}$ в общем положении относительно \mathbf{f} .

Определение 2.1. Пусть заданы \mathbf{f} и $\rho \in]0, +\infty[^{M+1}$ в общем положении относительно \mathbf{f} . Обобщенная функция главного значения $\operatorname{rv}_{\rho}(\mathbf{f}) = a_{\rho}(\mathbf{f}; 0)$ — это коэффициент при λ^0 в разложении мероморфной функции в ряд

$$\lambda \mapsto \left(\prod_{j=0}^M |f_j|^{2\rho_j \lambda} \right) \frac{1}{\|\mathbf{f}\|^{2(M+1)}} = \sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}} a_{\rho}(\mathbf{f}; \varkappa) \lambda^{\varkappa} \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})$$

в окрестности $\lambda = 0$. Аналогично коэффициент при λ^0 в разложении мероморфной функции

$$\lambda \mapsto \bar{\partial} \left(\prod_{j=0}^M |f_j|^{2\rho_j \lambda} \right) \frac{1}{\|\mathbf{f}\|^{2(M+1)}} = \sum_{\varkappa \in \mathbb{Z}} \omega_{\rho}(\mathbf{f}; \varkappa) \lambda^{\varkappa} \in '\mathcal{D}^{(0,1)}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})$$

в окрестности $\lambda = 0$ равен $(0, 1)$ -поток

$$\omega_{\rho}(\mathbf{f}; 0) = \sum_{k=0}^M \operatorname{res}_{\rho, k}(\mathbf{f}) d\bar{z}_k.$$

Коэффициенты при дифференциалах $d\bar{z}_k$ — это $n + 1$ вычетов $\operatorname{res}_{\rho, k}(\mathbf{f})$, $k = 0, \dots, n$.

Применяя непрерывный аналог формулы биномиальных коэффициентов с отрицательным показателем (см., например, [11, замечание 1.6]), для $\lambda \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} \lambda \gg 1$, $\mathbf{f} \in \operatorname{Hol}(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C}^{M+1})$, $\rho \in]0, +\infty[^{M+1}$ и $\tau_1, \dots, \tau_M > 0$, $\sum_1^M \tau_j < M + 1$, получаем следующее представление:

$$\frac{\prod_{j=0}^M |f_j|^{2\rho_j \lambda}}{\|\mathbf{f}\|^{2(M+1)}} = \left(\frac{1}{2i\pi} \right)^M \frac{1}{M!} \int_{\mathbf{v} \in \tau + i\mathbb{R}^M} \Gamma_{M+1}(\mathbf{v}) \frac{|f_0|^{2(\rho_0 \lambda + \sum_1^M v_j)}}{|f_0|^{2(M+1)}} \prod_{j=1}^M |f_j|^{2(\rho_j \lambda - v_j)} d\mathbf{v}, \quad (2.2)$$

где $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_M)$, $d\mathbf{v} = dv_1 \cdots dv_M$ и $\Gamma_{M+1}(\mathbf{v})$ — произведение гамма-функций

$$\Gamma_{M+1}(\mathbf{v}) := \Gamma(M+1 - v_1 - \dots - v_M) \prod_{j=0}^M \Gamma(v_j).$$

Из (2.2) следует, что при оценке роста в \mathbb{C}^{n+1} обобщенных функций $\text{pv}_\rho(\mathbf{f})$ и $\text{res}_{\rho,k}(\mathbf{f})$, $k = 0, \dots, n$, важную роль будут играть системы глобальных формальных уравнений Бернштейна — Сато

$$\delta(\zeta) b(\lambda_0, \dots, \lambda_M) \left(\prod_{\nu=0}^M (f_\nu(\zeta))^{\lambda_\nu} \right) = \mathcal{Q}_j(\zeta) \left[\lambda, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \left(f_j(\zeta) \left(\prod_{\nu=0}^M (f_\nu(\zeta))^{\lambda_\nu} \right) \right), \quad j = 0, \dots, M, \quad (2.3)$$

где $b \in \mathbb{C}[\lambda]$, $\delta \in \text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1})$, $\mathcal{Q}_j(\zeta)$, $j = 0, \dots, M$, — голоморфные функции на \mathbb{C}^{n+1} со значениями в $\mathbb{C}[\lambda, \partial/\partial \zeta]$. Такие оценки роста справедливы при условии, что ρ находится в общем положении и согласован с уравнениями (2.3).

Определим свойство медленного роста обобщенной функции в \mathbb{C}^{n+1} относительно веса Пэли — Винера p из (1.5).

Определение 2.2. Обобщенная функция $\tau \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^{n+1}, \mathbb{C})$ называется обобщенной функцией медленного роста относительно веса p , если существуют комплексная мера $d\mu$, мультииндексы $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{n+1}$, $\ell(\alpha, \beta) := \sum_{k=0}^n (\alpha_k + \beta_k)$, и положительная константа B_τ такие, что

$$\tau = \left(\prod_{k=0}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \right)^{\alpha_k} \circ \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right)^{\beta_k} \right) (d\mu), \quad (2.4)$$

$$\int_{\mathbb{C}^{n+1}} (1 + \|\zeta\|)^{\ell(\alpha, \beta)} e^{-B_\tau p(\zeta)} |d\mu(\zeta)| < +\infty.$$

Определение 2.3. Пусть $\mu = (\mu_0, \dots, \mu_M)$ — набор $M+1$ обобщенных функций с компактным носителем в $\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}$. Элемент \hat{T} алгебры Пэли — Винера $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ называется $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для $\hat{\mu}$, если существует $\rho \in]0, +\infty[^{M+1}$ в общем положении относительно $\hat{\mu}$ такой, что $n+2$ обобщенных функций

$$\hat{T}(\zeta) \text{pv}_\rho(\hat{\mu}), \hat{T}(\zeta) \text{res}_{\rho,0}(\hat{\mu}), \dots, \hat{T}(\zeta) \text{res}_{\rho,M}(\hat{\mu})$$

оказываются медленного роста относительно веса p .

3. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

3.1. Вспомогательные алгебраические сведения. Пусть задано вещественное число $h_1 \in \mathbb{R}^*$. Обозначим через $\mathcal{K}(h_1)$ алгебру операторов на $\mathbb{C}[E, T, X_1, \dots, X_n]$, порожденную коммутирующими операторами E, T, X_1, \dots, X_n умножения на переменные E, T, X_1, \dots, X_n и коммутирующими дифференциальными операторами $\partial/\partial T := \partial/\partial T$, $\partial/\partial X_k := \partial/\partial X_k$, $k = 1, \dots, n$, с дополнительными правилами коммутирования для оператора E :

$$[E, \partial/\partial T] = ih_1 E, \quad [E, \partial/\partial X_k] = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

где $[P, Q] = P \circ Q - Q \circ P$ обозначает скобку Ли.

Пусть даны два линейно независимых над полем \mathbb{Q} числа $h_1, h_2 \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{K}(h_1, h_2)$ алгебру операторов на $\overline{\mathbb{Q}}[E_1, E_2, X_1, \dots, X_n]$, порожденную коммутирующими операторами умножения $E_1, E_2, X_1, \dots, X_n$ и коммутирующими дифференциальными операторами $\partial/\partial T$, $\partial/\partial X_1, \dots, \partial/\partial X_n$ с дополнительными правилами коммутирования для операторов E_1 и E_2 :

$$[E_j, \partial/\partial T] = ih_j E, \quad [E_j, \partial/\partial X_k] = 0, \quad j = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Любой конечно порожденный $\mathcal{K}(h_1)$ - или $\mathcal{K}(h_1, h_2)$ -модуль \mathcal{M} наследует размерность $d(\mathcal{M})$, определяемую как степень ассоциированного многочлена Гильберта, возникающего при градуировке по полной степени операторов, фигурирующих в реализации алгебр $\mathcal{K}(h_1)$ или $\mathcal{K}(h_1, h_2)$ (см., например, [12, § 2]). Приведем здесь два результата, доказанные в [12].

Предложение 3.1 ([12, предложение 2.1]). Пусть \mathcal{M} — конечно порожденный $\mathcal{K}(h_1)$ -модуль размерности $d(\mathcal{M})$, не превышающей $n+1$. Тогда найдутся два ненулевых многочлена одной переменной с комплексными коэффициентами $P = P_{\mathcal{M}}$, $Q = Q_{\mathcal{M}}$ и целое положительное число $\ell = \ell_{\mathcal{M}}$ такие, что

$$E^\ell P(\mathbf{T}) \mathcal{M} = Q(\mathbf{E}) \mathcal{M} = 0. \quad (3.3)$$

Предложение 3.2 ([12, предложение 2.3]). Пусть \mathcal{M} — конечно порожденный $\mathcal{K}(h_1, h_2)$ -модуль размерности $d(\mathcal{M})$, не превышающей $n+1$. Тогда найдутся два ненулевых многочлена одной переменной с алгебраическими коэффициентами $P_1 = P_{1, \mathcal{M}}$, $P_2 = P_{2, \mathcal{M}}$ такие, что

$$P_1(\mathbf{E}_1) \mathcal{M} = P_2(\mathbf{E}_2) \mathcal{M} = 0. \quad (3.4)$$

3.2. Необходимый аналитический инструментарий. Построим сначала гладкую положительную плюрисубгармоническую регуляризацию $\|\mathrm{Im}\|_{\mathrm{reg}}$ функции $\|\mathrm{Im}\| : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \mapsto \|\mathrm{Im} \mathbf{z}\|$. Такая регуляризация получается в результате свертки функции $\|\mathrm{Im}\|$ с гладкой положительной радиальной финитной функцией θ с носителем в евклидовом шаре $\mathbb{B}_{\mathbb{C}^{n+1}}(0, 1) := \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : \|\mathbf{z}\| \leq 1\}$. Определим также на $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$ гладкие формы

$$\mathbf{W}_{\mathrm{pol}}(\mathbf{z}, \zeta) = \frac{1 + \sum_{k=0}^n z_k \bar{\zeta}_k}{1 + \|\zeta\|^2} + dd^c \log(1 + \|\zeta\|^2), \quad (3.5)$$

$$\mathbf{W}_{\mathrm{exp}}(\mathbf{z}, \zeta) = 1 - 2 \sum_{k=0}^n \frac{\partial \|\mathrm{Im} \zeta\|_{\mathrm{reg}}}{\partial \zeta_k} (\zeta_k - z_k) + 2 dd^c \|\mathrm{Im} \zeta\|_{\mathrm{reg}},$$

где $dd^c = (i/2\pi) \partial \bar{\partial}$. Для произвольных $N \in \mathbb{N}$ и $C \geq 0$ обозначим через $\mathbf{W}_{\mathrm{pol}}^N$ и $e^{C(\mathbf{W}_{\mathrm{exp}}-1)}$ следующие гладкие формы на $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$:

$$\mathbf{W}_{\mathrm{pol}}^N(\mathbf{z}, \zeta) = \sum_{\varkappa=0}^{\min(N, n)} \binom{N}{\varkappa} \left(\frac{1 + \sum_{k=0}^n z_k \bar{\zeta}_k}{1 + \|\zeta\|^2} \right)^{N-\varkappa} (dd^c \log(1 + \|\zeta\|^2))^{\varkappa}, \quad (3.6)$$

$$e^{C(\mathbf{W}_{\mathrm{exp}}-1)}(\mathbf{z}, \zeta) = e^{-C} \exp \left(-2C \sum_{k=0}^n \frac{\partial \|\mathrm{Im} \zeta\|_{\mathrm{reg}}}{\partial \zeta_k} (\zeta_k - z_k) \right) \left(\sum_{\varkappa=0}^{n+1} \frac{(2dd^c \|\mathrm{Im} \zeta\|_{\mathrm{reg}})^{\varkappa}}{\varkappa!} \right),$$

в которых (коммутативное) произведение двух форм, имеющих бистепени (r, r) и (r', r') , естественно задается их внешним произведением. Гладкие формы, введенные в (3.5) и (3.6), являются голоморфными по \mathbf{z} . В дальнейшем ключевую роль играет следующее хорошо известное неравенство:

$$\forall \mathbf{z}, \zeta \in \mathbb{C}^{n+1}, \quad \left| \exp \left(-2C \sum_{k=0}^n \frac{\partial \|\mathrm{Im} \zeta\|_{\mathrm{reg}}}{\partial \zeta_k} (\zeta_k - z_k) \right) \right| \leq e^{C(\|\mathrm{Im} \mathbf{z}\|_{\mathrm{reg}} - \|\mathrm{Im} \zeta\|_{\mathrm{reg}})}. \quad (3.7)$$

Будем использовать более простое обозначение

$$\forall (\mathbf{z}, \zeta) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}, \forall N \in \mathbb{N}, C \geq 0, \quad \mathbf{W}_N^C(\mathbf{z}, \zeta) := (\mathbf{W}_{\mathrm{pol}}^N e^{C(\mathbf{W}_{\mathrm{exp}}-1)})(\mathbf{z}, \zeta). \quad (3.8)$$

Для полноты изложения напомним, как взвешенные формулы Бохнера — Мартинелли приводят к формулам деления с остатком (см., например, [11, предложение 4.33]). Здесь мы изложим (легко прослеживаемую) схему деления по модулю идеалов, порожденных наборами целых функций, задающих полные пересечения в \mathbb{C}^{n+1} . Хотя общий подход остается тем же, он опирается (например, в алгебраической ситуации, когда функции f_j являются многочленами или, как в [4], многочленами от $e^{ih_1 z_0}, z_0, \dots, z_n$) на (вообще говоря, неявно строящуюся) резольвенту для фактор-пучка $\mathcal{O}_{n+1}/\mathbf{f}\mathcal{O}_{n+1}$ длины не более, чем $n+2$. Глобальное построение такой резольвенты (если оно возможно) обеспечивается теоремой Гильберта о сизигиях. Поскольку это построение неэффективно, мы не рассматриваем здесь этот случай и отсылаем читателя к [11, гл. 4] за подробностями и актуальной библиографией.

Зафиксируем последовательность $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_M)$ такую, что

$$\mathrm{codim}_{\mathbb{C}^{n+1}} \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} : \mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0\} = M + 1.$$

Рассмотрим ассоциированный комплекс Кошуля $(\mathbf{K}^f, \|\cdot\|)$, снабженный канонической метрикой на каждом тривиальном голоморфном векторном расслоении над \mathbb{C}^{n+1} . Если $\mathbf{C}^{M+1} = \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{M+1}$ — тривиальное векторное расслоение ранга $M+1$ над \mathbb{C}^{n+1} с каноническим базисом $\{e_0, \dots, e_M\}$, т.е.

$$\mathbf{f} = \sum_{j=0}^M f_j e_j,$$

а $(\mathbf{C}^{M+1})^*$ — его двойственное расслоение, то \mathbf{K}^f есть

$$0 \rightarrow \bigwedge^{M+1} (\mathbf{C}^{M+1})^* \xrightarrow{\lfloor_{\mathbf{f}, M+1}} \bigwedge^M (\mathbf{C}^{M+1})^* \xrightarrow{\lfloor_{\mathbf{f}, M}} \dots \xrightarrow{\lfloor_{\mathbf{f}, 3}} \bigwedge^2 (\mathbf{C}^{M+1})^* \xrightarrow{\lfloor_{\mathbf{f}, 2}} (\mathbf{C}^{M+1})^* \xrightarrow{\lfloor_{\mathbf{f}, 1}} \mathbb{C},$$

где $\lfloor_{\mathbf{f}, \ell}$, $\ell = 1, 2, \dots$, — операторы внутреннего произведения, например,

$$\lfloor_{\mathbf{f}, 1}(\zeta) : \xi = \sum_{j=0}^M \xi_j e_j^* \mapsto \sum_{j=0}^M \xi_j f_j(\zeta).$$

Пусть

$$\mathbb{E}(\mathbf{K}^f) := \bigoplus_{\ell \geq 1} \bigwedge^{\ell} (\mathbf{C}^{M+1})^*,$$

$$\sigma := \sum_{\ell \geq 1} \sigma_{\ell} \circ \text{Proj} \bigwedge^{\ell-1} (\mathbf{C}^{M+1})^* \in \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{E}(\mathbf{K}^f), \mathbb{E}(\mathbf{K}^f)),$$

где σ_{ℓ} , $\ell \in \mathbb{N}^*$, — почти всюду определенный минимальный обратный элемент для $\lfloor_{\mathbf{f}, \ell}$:

$$\sigma_{\ell}(\zeta) : \xi \in \bigwedge^{\ell-1} (\mathbf{C}^{M+1})^* \mapsto \frac{1}{\|\mathbf{f}(\zeta)\|^2} \left(\sum_{j=0}^M \overline{f_j(\zeta)} e_j^* \right) \wedge \xi \in \bigwedge^{\ell} (\mathbf{C}^{M+1})^*,$$

так что σ — гладкое отображение на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \mathbf{f}^{-1}\{0\}$. Для $\rho \in]0, +\infty[^{M+1}$ поток \mathbf{R}^f со значениями в $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{E}(\mathbf{K}^f), \mathbb{E}(\mathbf{K}^f))$ и определенный формулой

$$\mathbf{R}^f = \left[\bar{\partial} \left(\prod_{j=0}^M |f_j|^{2\rho_j \lambda} \right) \sum_{r \geq 1} \frac{\sigma}{2i\pi} \left(\bar{\partial} \left(\frac{\sigma}{2i\pi} \right) \right)^{r-1} \right]_{\lambda=0} = \left(\sum_{k=0}^n \text{res}_{\rho, k}(\mathbf{f}) d\zeta_k \right) \wedge \Omega_{\sigma}, \quad (3.9)$$

где Ω_{σ} — гладкая форма, совпадает со своей $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^0(\mathbf{C}^{M+1})^*, \bigwedge^{M+1}(\mathbf{C}^{M+1})^*)$ -значной компонентой и удовлетворяет условиям

$$\forall j = 0, \dots, M, \quad \mathbf{R}^f f_j = 0. \quad (3.10)$$

Обозначим через \mathbf{P}^f парный ему $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{E}(\mathbf{K}^f), \mathbb{E}(\mathbf{K}^f))$ -значный поток, определенный формулой

$$\mathbf{P}^f := \left[\left(\prod_{j=0}^M |f_j|^{2\rho_j \lambda} \right) \sum_{r \geq 1} \frac{\sigma}{2i\pi} \left(\bar{\partial} \left(\frac{\sigma}{2i\pi} \right) \right)^{r-1} \right]_{\lambda=0} = \text{pv}_{\rho}(\mathbf{f}) \Omega_{\sigma}, \quad (3.11)$$

где

$$\mathbf{P}_r^f = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_r \leq M} \mathbf{P}_{r, I}^f e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_r}^*$$

означает его $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\bigwedge^0(\mathbf{C}^{M+1})^*, \bigwedge^r(\mathbf{C}^{M+1})^*)$ -значную компоненту. Так как \mathbb{C}^{n+1} штейново, существуют целые функции $(\mathbf{z}, \zeta) \mapsto h_{j,k}(\mathbf{z}, \zeta)$, $j = 0, \dots, M$, $k = 0, \dots, n$, комплексных переменных (\mathbf{z}, ζ) такие, что

$$\forall j = 0, \dots, M, \quad f_j(\zeta) - f_j(\mathbf{z}) = \sum_{k=0}^n (\zeta_k - z_k) h_{j,k}(\mathbf{z}, \zeta). \quad (3.12)$$

Для голоморфной формы \mathbb{H}_f в $\mathbb{C}_{\mathbf{z}}^{n+1} \times \mathbb{C}_{\zeta}^{n+1}$, заданной равенством

$$\mathbb{H}_f(\mathbf{z}, \zeta) = \mathbb{H}_f(\mathbf{z}, \zeta) = \sum_{j=0}^M \left(\sum_{k=0}^n h_{j,k}(\mathbf{z}, \zeta) d\zeta_k \right) e_j \quad (3.13)$$

в $\mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}^{n+1}$, имеем

$$\left(\sum_{j=0}^M e_j^* \wedge e_j \right) \wedge \left(\sum_{r=1}^{M+1} \frac{1}{(r-1)!} (\mathbb{H}_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \zeta) \wedge \overset{r-1}{\text{раз}} \wedge \mathbb{H}_{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \zeta)) \wedge \mathbf{P}_r^{\mathbf{f}}(\zeta) \right) = \sum_{j=0}^M \mathbb{T}_j^{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \zeta) e_j^*,$$

где каждое отображение $(\mathbf{z}, \zeta) \mapsto \mathbb{T}_j^{\mathbf{f}}(\mathbf{z}, \zeta)$ со значениями в потоках по переменным ζ голоморфно зависит от \mathbf{z} . Зафиксируем финитную функцию $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^{n+1}, [0, 1])$, тождественно равную 1 в некоторой открытой окрестности замкнутого евклидова шара $\overline{\mathbb{B}_{\mathbb{C}^{n+1}}(0, 1)}$. Пусть $L \in \mathbb{N}^*$ — произвольное целое число. Тогда любая целая функция h в \mathbb{C}^{n+1} допускает в $\mathbb{B}_{\mathbb{C}^{n+1}}(0, L) \setminus \mathbf{f}^{-1}(\{0\})$ следующее интегральное представление для любых $N \in \mathbb{N}$, $C \geq 0$ и произвольной точки $\mathbf{z} \in \mathbb{B}_{\mathbb{C}^{n+1}}(0, L) \setminus \mathbf{f}^{-1}(\{0\})$:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{z}) &= 2i\pi \sum_{j=0}^M f_j(\mathbf{z}) \int_{\mathbb{C}^{n+1}} ((\mathbb{S}_L \mathbf{W}_N^C \mathbb{T}_j^{\mathbf{f}})(\mathbf{z}, \zeta))_{n+1, n+1} h(\zeta) \\ &+ \int_{\mathbb{C}^{n+1}} ((\mathbb{S}_L \mathbf{W}_N^C)(\mathbf{z}, \zeta))_{n-M, n-M} \frac{\mathbb{H}_{\mathbf{f}}^{M+1}(\mathbf{z}, \zeta)}{(M+1)!} \mathbf{R}^{\mathbf{f}}(\zeta) h(\zeta), \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\mathbb{S}_L(\mathbf{z}, \zeta) = \left(\chi\left(\frac{\zeta}{L}\right) + \frac{1}{2i\pi} \bar{\partial}_{\zeta} \left(\left(1 - \chi\left(\frac{\zeta}{L}\right)\right) \frac{\partial \|\zeta\|^2}{\sum_{k=0}^n \bar{\zeta}_k (\zeta_k - z_k)} \right) \right)^{n+2}.$$

3.3. Доказательства теорем 1.1 и 1.2.

Доказательство теоремы 1.1. В силу предложения 3.1, если

$$\mathbf{f} = ((P\Delta^{\mathbf{h}})_0, \dots, (P\Delta^{\mathbf{h}})_M),$$

то существует система глобальных формальных уравнений Бернштейна — Сато

$$B(\zeta_0, \lambda_0, \dots, \lambda_M) \left(\prod_{\nu=0}^M (f_{\nu}(\zeta))^{\lambda_{\nu}} \right) = \mathcal{Q}_j(\zeta) \left[\boldsymbol{\lambda}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \left(f_j(\zeta) \left(\prod_{\nu=0}^M (f_{\nu}(\zeta))^{\lambda_{\nu}} \right) \right), \quad j = 0, \dots, M, \quad (3.15)$$

где $B \in \mathbb{C}[\zeta_0, \boldsymbol{\lambda}]$, а коэффициенты каждой функции $\zeta \mapsto \mathcal{Q}_j(\zeta)[\boldsymbol{\lambda}, \partial/\partial \zeta]$, $j = 0, \dots, M$, принадлежат $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ (см. [12, предложение 2.2]). Теперь можно применить непрерывный аналог формулы биномиальных коэффициентов для строго отрицательного показателя $-(M+1)$ и по аналогии с [12, § 3] заключить, что существуют $\rho \in]0, +\infty[^{M+1}$ в общем положении относительно \mathbf{f} и полиномиальная функция

$$\zeta_0 \mapsto \delta(i\zeta_0) = \delta_{\rho}(i\zeta_0) \in \mathbb{C}[\zeta_0],$$

которая является $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для \mathbf{f} в смысле определения 2.3. Положим

$$p_j(\mathbf{z}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_0|=R} \frac{1}{\delta(i\zeta_0)} \frac{\delta(iz_0) - \delta(i\zeta_0)}{z_0 - \zeta_0} f_j(\zeta_0, \mathbf{z}') d\zeta_0 \in \mathbb{C}[\mathbf{z}], \quad j = 0, \dots, M.$$

Равенство идеалов

$$(\delta(iz_0), \mathbf{f}) A_p(\mathbb{C}^{n+1}) = (\delta(iz_0), \mathbf{p}) A_p(\mathbb{C}^{n+1}) \quad (3.16)$$

проверяется непосредственно. Тогда

$$p_j(\mathbf{z}) \equiv \delta(iz_0) \widehat{U}_j(\mathbf{z}) \quad (\text{по модулю идеала } \mathbf{f} A_p(\mathbb{C}^{n+1})) \quad (3.17)$$

для $U_j \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^{n+1})$, $j = 0, \dots, M$. Пусть $N_{\mathbf{f}} = (M+1)d_{\mathbf{f}} + 2(n+1) + 1$ (соответственно, $C_{\mathbf{f}} = (M+1)r_{\mathbf{f}}$), где $d_{\mathbf{f}}$ обозначает максимум степеней полиномиальных коэффициентов $P_{j,\nu}$ (соответственно, $r_{\mathbf{f}}$ — максимум абсолютных величин целых чисел $\nu \in \mathbb{Z}$), участвующих в разложении (1.3) всех $(P\Delta^{(h_1)})_j$, $j = 0, \dots, M$. Зафиксируем финитную функцию $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{C}^{n+1}, [0, 1])$ как в (3.14) выше. Пусть $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{C})$ — решение системы разностно-дифференциальных уравнений (1.9) и $R_0 > 0$. Для любой точки (t, \mathbf{x}) в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_0)$ определим

$$E_{t, \mathbf{x}} : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \mapsto \exp\left(iz_0 t + i \sum_{k=1}^n z_k x_k \right) = \widehat{\delta}_{-(t, \mathbf{x})}(\mathbf{z}). \quad (3.18)$$

Для любых $N \geq N_f$, $C \geq C_f$ и $L \in \mathbb{N}^*$ из (3.14) следует, что в шаре $\mathbb{B}_{\mathbb{C}^{n+1}}(0, L)$ справедливо следующее интегральное представление:

$$\begin{aligned} \delta(iz_0)E_{t,\mathbf{x}}(z) &= 2i\pi \sum_{j=0}^M f_j(z) \int_{\mathbb{C}^{n+1}} ((\mathbb{S}_L \mathbf{W}_N^{C+R} \mathbb{T}_j^f)(z, \zeta))_{n+1, n+1} \delta(i\zeta_0) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta) \\ &+ \int_{\mathbb{C}^{n+1}} ((\mathbb{S}_L \mathbf{W}_N^{C+R})(z, \zeta))_{n-M, n-M} \frac{\mathbb{H}_f^{M+1}(z, \zeta)}{(M+1)!} \mathbf{R}^f(\zeta) \delta(i\zeta_0) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta). \end{aligned}$$

Поскольку $\zeta_0 \mapsto \delta(i\zeta_0)$ является $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для f , можно выбрать $N_0 \gg N_f$ и $C_0 \gg C_f$ так, что имеет место интегральное представление (в пределе при $L \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} \delta(iz_0)E_{t,\mathbf{x}}(z) &= 2i\pi \sum_{j=0}^M f_j(z) \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_{N_0}^{C_0+R_0} \mathbb{T}_j^f)_{n+1, n+1}(z, \zeta) \delta(i\zeta_0) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta) \\ &+ \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_{N_0}^{C_0+R_0}(z, \zeta))_{n-M, n-M} \frac{\mathbb{H}_f^{M+1}(z, \zeta)}{(M+1)!} \mathbf{R}^f(\zeta) \delta(i\zeta_0) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta) \\ &\equiv \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_{N_0}^{C_0+R_0}(z, \zeta))_{n-M, n-M} \frac{\mathbb{H}_f^{M+1}(z, \zeta)}{(M+1)!} \mathbf{R}^f(\zeta) \delta(i\zeta_0) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta) \\ &\equiv \widehat{\mathcal{R}}_0^{t,\mathbf{x}}(z) \quad (\text{по модулю идеала } \mathbf{f}A_p(\mathbb{C}^{n+1})), \end{aligned} \tag{3.19}$$

где все интегралы по \mathbb{C}^{n+1} следует понимать в смысле абсолютной сходимости и $\text{Supp } \mathcal{R}_0^{t,\mathbf{x}} \subset \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, C_0 + R_0 + (M+1)r_f)$. Отметим, что N_0 и C_0 зависят лишь от констант ℓ и B из определения 2.2 обобщенных функций медленного роста (относительно веса p) $\delta(i\zeta_0) \text{pv}_\rho(\mathbf{f})$, $\delta(i\zeta_0) \text{res}_{\rho,k}(\mathbf{f})$, $k = 0, \dots, n$.

Кроме того, если χ_{R_0} — финитная функция в \mathbb{R}^{n+1} , тождественно равная 1 в некоторой открытой окрестности шара $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, C_0 + R_0 + (M+1)r_f)$, то из формулы обращения преобразования Фурье следует

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)(\varphi(t, \mathbf{x})) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} (\chi_{R_0} \varphi)(-\tau, -\boldsymbol{\xi}) d\mathcal{R}_0^{t,\mathbf{x}}(\tau, \boldsymbol{\xi}) \\ &= \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \mathcal{K}_0[\varphi, R](\zeta) \mathbf{R}^f(\zeta) \delta(i\zeta_0) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta), \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_0), \end{aligned} \tag{3.20}$$

где

$$\mathcal{K}_0[\varphi, R](\zeta) := \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \widehat{\chi_{R_0} \varphi}(\boldsymbol{\omega}) \left(\mathbf{W}_{N_0}^{C_0+R_0} \frac{\mathbb{H}_f^{M+1}}{(M+1)!} \right)(\boldsymbol{\omega}, \zeta) d\boldsymbol{\omega}.$$

Пусть $p_{M+1}(\zeta) = \delta(i\zeta_0)$. Из существования системы формальных уравнений Бернштейна — Сато

$$b(\lambda_0, \dots, \lambda_{M+1}) \left(\prod_{\nu=0}^{M+1} (p_\nu(\zeta))^{\lambda_\nu} \right) = \mathcal{J}_j(\zeta) \left[\boldsymbol{\lambda}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \left(p_j(\zeta) \left(\prod_{\nu=0}^{M+1} (p_\nu(\zeta))^{\lambda_\nu} \right) \right), \quad j = 0, \dots, M+1,$$

где $b \in \mathbb{C}[\boldsymbol{\lambda}]$, а $\mathcal{J}_j(\zeta)$, $j = 0, \dots, M+1$, — полиномиальные $\mathbb{C}[\boldsymbol{\lambda}, \partial/\partial \zeta]$ -значные функции в \mathbb{C}^{n+1} (см. [15]), функция $\zeta \mapsto 1$ является $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для $(p, \delta(i\zeta_0))$. Более того, все задействованные обобщенные функции медленного роста относительно веса p являются также функциями медленного роста относительно веса $z \mapsto \log(1 + \|z\|)$. Пусть $R_1 > 0$. Тогда для $N_1 \gg 1$ (зависящего от $\tilde{p} := (p, \delta(i\zeta_0))$) и произвольной точки $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$

$$E_{t,\mathbf{x}}(z) \equiv \widehat{\mathcal{R}}_1^{t,\mathbf{x}}(z) + \delta(iz_0) \widehat{\mathcal{P}}_1^{t,\mathbf{x}}(z) \quad (\text{по модулю идеала } \mathbf{f}A_p(\mathbb{C}^{n+1})), \tag{3.21}$$

где

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{R}}_1^{t,\mathbf{x}}(z) &= \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_{N_1}^{R_1}(z, \zeta))_{n-M-1, n-M-1} \frac{\mathbb{H}_{\tilde{p}}^{M+2}(z, \zeta)}{(M+2)!} \mathbf{R}^{\tilde{p}}(\zeta) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta), \\ \widehat{\mathcal{P}}_1^{t,\mathbf{x}}(z) &= 2i\pi \sum_{j=0}^M \widehat{U}_j(z) \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_{N_1}^{R_1} \mathbb{T}_j^{\tilde{p}})_{n+1, n+1}(z, \zeta) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta) \\ &\quad + 2i\pi \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_{N_1}^{R_1} \mathbb{T}_{M+1}^{\tilde{p}})_{n+1, n+1}(z, \zeta) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta).\end{aligned}$$

Повторяя рассуждения, приведшие нас к (3.20), получаем

$$(\mathcal{R}_1^{t,\mathbf{x}} * \varphi)(0, \mathbf{0}) = \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \mathcal{K}_1[\varphi, R_1] \mathbf{R}^{\tilde{p}}(\zeta) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta),$$

где

$$\mathcal{K}_1[\varphi, R_1] = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \widehat{\chi_{R_1} \varphi}(\omega) \left(\mathbf{W}_{N_1}^{R_1} \frac{\mathbb{H}_{\tilde{p}}^{M+2}}{(M+2)!} \right) (\omega, \zeta) d\omega,$$

а χ_{R_1} — финитная функция в \mathbb{R}^{n+1} , тождественно равная 1 в некоторой открытой окрестности шара $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$. С другой стороны, подберем R_0 , удовлетворяющее соотношению

$$R_0 > R'_1 = R_1 + \max \left\{ (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} : (t, \mathbf{x}) \in \bigcup_{j=0}^M \text{supp } U_j \right\}. \quad (3.22)$$

Тогда формула (3.20) будет справедлива в некоторой открытой окрестности носителя $\mathcal{P}_1^{t,\mathbf{x}}$ для (t, \mathbf{x}) , принадлежащих замкнутому шару в \mathbb{R}^{n+1} с центром в начале координат и радиусом R_1 . Из (3.20) следует, что для любой точки $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{P}_1^{t,\mathbf{x}} * \delta \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) (\varphi) \right) (0, \mathbf{0}) &= \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathcal{K}_0[\varphi, R_0] \mathbf{R}^{\hat{\mu}})(\zeta) \delta(i\zeta_0), \\ \left((\mathcal{P}_1^{t,\mathbf{x}} * ((\tau, \xi) \mapsto E_{\tau, \xi}(\zeta))) (0, \mathbf{0}) \right) &= \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \mathcal{K}_0[\varphi, R] (\zeta) \mathbf{R}^f(\zeta) \delta(i\zeta_0) \widehat{\mathcal{P}}_1^{t,\mathbf{x}}(\zeta).\end{aligned}$$

Следовательно, из (3.21) вытекает, что для любой точки $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$

$$\varphi(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \mathcal{K}_1[\varphi, R_1] \mathbf{R}^{\tilde{p}}(\zeta) E_{t,\mathbf{x}}(\zeta) + \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \mathcal{K}_0[\varphi, R_0] (\zeta) \mathbf{R}^f(\zeta) \delta(i\zeta_0) \widehat{\mathcal{P}}_1^{t,\mathbf{x}}(\zeta). \quad (3.23)$$

Поскольку для выражения под знаком второго интеграла в (3.23) имеем

$$\delta(i\zeta_0) \widehat{\mathcal{P}}_1^{t,\mathbf{x}}(\zeta) = E_{t,\mathbf{x}}(\zeta) - \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_{N_1}^{R_1}(\zeta, \zeta'))_{n-M-1, n-M-1} \frac{\mathbb{H}_{\tilde{p}}^{M+2}(\zeta, \zeta')}{(M+2)!} \mathbf{R}^{\tilde{p}}(\zeta') E_{t,\mathbf{x}}(\zeta'),$$

формула (3.23) дает представление функции φ в евклидовом шаре $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$ в виде суперпозиции псевдоэлементарных решений однородной системы уравнений свертки (1.9). Таким образом, теорема 1.1 доказана, так как единственное ограничение на выбор $R_0 \gg R_1 > 0$ — это условие (3.22). \square

Доказательство теоремы 1.2. В силу предложения 3.2 для

$$\mathbf{f} = ((Q\Delta^{(h_1, h_2)})_0, \dots, (Q\Delta^{(h_1, h_2)})_M)$$

существуют две системы глобальных формальных уравнений Бернштейна — Сато

$$\begin{aligned} B_1(e^{-ih_1\zeta_0}, \lambda_0, \dots, \lambda_M) \left(\prod_{\nu=0}^M (f_\nu(\zeta))^{\lambda_\nu} \right) &= \mathcal{Q}_{j,1}(\zeta) \left[\lambda, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \left(f_j(\zeta) \left(\prod_{\nu=0}^M (f_\nu(\zeta))^{\lambda_\nu} \right) \right), \\ B_2(e^{-ih_2\zeta_0}, \lambda_0, \dots, \lambda_M) \left(\prod_{\nu=0}^M (f_\nu(\zeta))^{\lambda_\nu} \right) &= \mathcal{Q}_{j,2}(\zeta) \left[\lambda, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] \left(f_j(\zeta) \left(\prod_{\nu=0}^M (f_\nu(\zeta))^{\lambda_\nu} \right) \right), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $j = 0, \dots, M$, $B_\mu \in \overline{\mathbb{Q}}[e^{-ih_\mu\zeta_0}, \lambda]$, а коэффициенты каждой полиномиально-значной функции $\zeta \mapsto \mathcal{Q}_{j,\mu}(\zeta)[\lambda, \partial/\partial\zeta]$, $j = 0, \dots, M$, $\mu = 1, 2$, принадлежат $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ (см. [12, предложение 2.4]). Аналогично доказательству теоремы 1.1, повторяя аргументы из [12, § 3], основанные на использовании непрерывного аналога формулы биномиальных коэффициентов с показателем $-(M+1)$ (2.2), получаем, что существуют вектор $\rho \in]0, +\infty[^{M+1} \cap \overline{\mathbb{Q}}^{M+1}$ общего положения относительно \mathbf{f} и две функции $\zeta_0 \mapsto \delta_1(\zeta_0) = \delta_{\rho,1}(\zeta_0)$ и $\zeta_0 \mapsto \delta_2(\zeta_0) = \delta_{\rho,2}(\zeta_0)$ в $\overline{\mathbb{Q}}[e^{-ih_1\zeta_0}]$ и $\overline{\mathbb{Q}}[e^{-ih_2\zeta_0}]$ соответственно, каждая из которых является $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для \mathbf{f} в смысле определения 2.3. Поскольку h_1 и h_2 — вещественные алгебраические числа, линейно независимые над \mathbb{Q} , в силу теоремы Гельфонда — Шнайдера $\xi = 0$ является единственным комплексным числом ξ , для которого $e^{-ih_1\xi}$ и $e^{-ih_2\xi}$ одновременно будут алгебраическими. Кроме того, из теоремы Бейкера, которая утверждает, что ненулевые линейные комбинации логарифмов алгебраических чисел ограничены снизу, получаем, что идеал, порожденный δ_1 и δ_2 в $A_p(\mathbb{C})$, содержит $(i\zeta_0)^\nu$, где ν — наименьшая кратность нуля $\xi = 0$ функций δ_1 и δ_2 (см. [13, лемма 1]). Следовательно, функция $\zeta_0 \mapsto (i\zeta_0)^\nu$ также является $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для \mathbf{f} в смысле определения 2.2. Для каждого $j = 0, \dots, M$ положим

$$p_j(\mathbf{z}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_0|=R} \frac{1}{(i\zeta_0)^\nu} \frac{(iz_0)^\nu - (i\zeta_0)^\nu}{z_0 - \zeta_0} f_j(\zeta_0, \mathbf{z}') d\zeta_0 \in \mathbb{C}[\mathbf{z}],$$

так что равенство (3.16) остается верным после замены $z_0 \mapsto \delta(iz_0)$ на $z_0 \mapsto (iz_0)^\nu$. Дальнейшее доказательство теоремы 1.2 идентично доказательству теоремы 1.1. \square

Замечание 3.1. Так как $\mathbb{E}_1 := \text{Hol}(\mathbb{C}_{z_0}) \cap \mathbb{C}(z_0)[e^{\pm ih_1 z_0}]$ является кольцом Безу (см. [1]), в доказательстве теоремы 1.1 можно сопоставить \mathbf{f} конечную глобальную резольвенту длины $n+2$, рассматривая при этом f_j как элементы $\mathbb{E}_1[\mathbf{z}']$ (см. [4, теорема 3.3]). Затем можно использовать взвешенные формулы деления/интерполяции Лагранжа типа Бохнера — Мартинелли, порожденные почти всюду точными (за исключением замкнутого аналитического множества) комплексами тривиальных эрмитовых голоморфных векторных расслоений, комплекс пучков сечений которых точен (как комплекс Кошуля в случае полного пересечения). То же замечание применимо к паре $(\mathbf{f}, \delta(i\zeta_0))$, так как соответствующий идеал порождается в алгебре Пэли — Винера многочленами. Таким образом, условие полного пересечения для \mathbf{f} , а также условие

$$\text{codim}_{\mathbb{C}^{n+1}}(\mathbf{f}^{-1}\{0\} \cap \{\zeta_0 = \xi\}) = M+2 \quad \forall \xi \in \mathbb{C}$$

могут быть опущены. В теореме 1.2 условие полного пересечения для \mathbf{f} удалить нельзя, так как $\mathbb{E}_2 := \text{Hol}(\mathbb{C}_{z_0}) \cap \overline{\mathbb{Q}}(z_0)[e^{\pm ih_1 z_0}, e^{\pm ih_2 z_0}]$ уже не является кольцом Безу, тогда как второе условие по-прежнему не обязательно. Тем не менее, поскольку для нахождения резольвенты в общем случае нет эффективной процедуры, на протяжении всей статьи мы рассматриваем только случай полного пересечения.

4. Квазирегулярные семейства с обратными элементами медленного по Пэли — Винеру роста

Пусть \mathcal{F} — конечное семейство элементов алгебры $\text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1})$. Семейство \mathcal{F} называется *квазирегулярным* в $\text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1})$, если

$$\text{codim}_{\mathbb{C}^{n+1}} \{z \in \mathbb{C}^{n+1} : f(z) = 0, f \in \mathcal{F}\} = \text{card } \mathcal{F} \text{ или } +\infty; \quad (4.1)$$

т.е. замкнутое аналитическое множество $V(\mathcal{F})$ общих нулей элементов \mathcal{F} либо является полным пересечением в \mathbb{C}^{n+1} , либо пусто.

Для систем сверточных уравнений на \mathbb{R}^{n+1} (для свертываемых функций с компактным носителем) вопрос о том, обладает ли система свойством спектрального синтеза остается открытым ввиду контрпримера Гуревича [3]. В алгебре Пэли — Винера $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ квазирегулярность последовательностей определяется чисто алгебраически. А именно, семейство $\mathcal{F} = \{f_0, \dots, f_M\}$ элементов $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ (порождающее идеал $\mathcal{F}A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ в $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$) является квазирегулярным, если для любого $L \in \mathbb{N}^*$ верна импликация:

$$\begin{aligned} \sum_{J=\{j_1, \dots, j_L\} \subset \{0, \dots, M\}} g_J \prod_{\ell=1}^L f_{j_\ell} \in (\mathcal{F}A_p(\mathbb{C}^{n+1}))^{L+1} \text{ для некоторого } g_J \in A_p(\mathbb{C}^{n+1}) \\ \implies g_J \in \mathcal{F}A_p(\mathbb{C}^{n+1}) \quad \forall J. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Именно такой подход, использованный в доказательстве теорем 1.1 и 1.2 (см. § 3), подводит нас к следующему определению конечных семейств, квазирегулярных в $\text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1})$. Мы назовем их квазирегулярными семействами с обратным элементом p -медленного роста. Определение состоит из двух частей: начального шага и рекурсивного правила.

Определение 4.1 (начальный шаг). Конечное семейство \mathcal{F} элементов $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ такое, что $V(\mathcal{F}) = \emptyset$ в \mathbb{C}^{n+1} , называется *квазирегулярным с обратным элементом p -медленного роста*, если 1 принадлежит идеалу $\mathcal{F}A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ или, эквивалентно (см. [14]),

$$\exists c_{\mathcal{F}} > 0, B_{\mathcal{F}} \geq 0 : \sum_{f \in \mathcal{F}} |f(z)| \geq c_{\mathcal{F}} \exp(-B_{\mathcal{F}} p(z)). \quad (4.3)$$

Определение 4.2 (рекурсивное правило). Пусть $M \in \mathbb{N}$. Конечное семейство $\mathcal{F} = \{f_0, \dots, f_M\}$ из $M+1$ элементов $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ называется *квазирегулярным с обратным элементом p -медленного роста*, если оно квазирегулярно в $\text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1})$ и для $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_M)$ существует $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменатель $\widehat{T} \in A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ такой, что семейство $\mathcal{F} \sqcup \{\widehat{T}\}$ из $M+2$ элементов квазирегулярно с обратным элементом p -медленного роста.

Замечание 4.1. Если семейство $\mathcal{F} \subset \text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1})$ содержит больше, чем $n+1$ элементов, то множество их общих нулей пусто. Поэтому рекурсивная процедура, описанная в определении 4.2, завершится начальным шагом (определение 4.1). Таким образом, понятие квазирегулярности с обратным элементом p -медленного роста определено корректно благодаря согласованности определений 4.1 и 4.2.

Пример 4.1. Пусть

$$\mathcal{F} = \{(\widehat{P\Delta}^{(h_1)})_j : j = 0, \dots, M\} \text{ или } \{(\widehat{Q\Delta}^{(h_1, h_2)})_j : j = 0, \dots, M\}, \quad (4.4)$$

где $M \leq n$, как в теореме 1.1 или 1.2. В п. 3.3 показано, что в обоих случаях существует полиномиальный $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменатель $z_0 \mapsto \delta(iz_0)$ для \mathcal{F} . Более того, $\mathcal{F} \sqcup \{z_0 \mapsto \delta(iz_0)\}$ определяет квазирегулярное семейство в $\text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1})$ согласно второму условию в (1.10) или (1.11). Поскольку семейство $\mathcal{F} \sqcup \{z_0 \mapsto \delta(iz_0)\}$ порождает в $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ тот же идеал, что и полиномиальные функции, можно с точностью до замены образующих идеала $(\mathcal{F} \sqcup \{z_0 \mapsto \delta(iz_0)\})A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ в $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ принять постоянную функцию $z \mapsto 1$ в качестве $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателя для семейства $\mathcal{F} \sqcup \{z_0 \mapsto \delta(iz_0)\}$. Следовательно, оба семейства \mathcal{F} в (4.4) являются квазирегулярными последовательностями с обратным элементом p -медленного роста.

Теорема 4.1. Пусть \mathcal{F} — квазирегулярное семейство элементов $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ с обратным элементом p -медленного роста, и пусть $\mathcal{M} := \{\mu : \widehat{\mu} \in \mathcal{F}\}$. Тогда система

$$(\mu * \varphi)(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mu \in \mathcal{M}, \quad (4.5)$$

где $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}, \mathbb{C})$, наследует свойство спектрального синтеза.

Доказательство. Мы следуем идее доказательства теоремы 5.2 из [4], основанного на обратной индукции по коразмерности $M+1 \in \{0, \dots, n+1\} \cup \{+\infty\}$ нулевого множества $\widehat{\mu} = (\mu_0, \dots, \mu_M)$ в \mathbb{C}^{n+1} .

База индукции. При $M+1 = +\infty$ требуемое утверждение следует из [14, теорема 28].

Шаг индукции. Пусть $M \leq n$. Зафиксируем $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменатель \widehat{T}_0 для $\widehat{\mu}$ и произвольный элемент $\widehat{T} \in \widehat{\mu} \text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1}) \cap A_p(\mathbb{C}^{n+1})$. По предположению индукции существуют $\widehat{U}_0, \dots, \widehat{U}_M, \widehat{V}_0 \in A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ такие, что

$$\widehat{T} = \sum_{j=0}^M \widehat{U}_j \widehat{\mu}_j + \widehat{V}_0 \widehat{T}_0.$$

Поскольку \widehat{T}_0 является $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для $\widehat{\mu}$, а $\widehat{T}_0 \widehat{V}_0$, как и \widehat{T} , принадлежит $\widehat{\mu} \text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1}) \cap A_p(\mathbb{C}^{n+1})$, рассуждения, приведшие к формуле деления (3.19) в доказательстве теоремы 1.1, вместе с соотношениями (3.10) для $\mathbf{f} = \widehat{\mu}$ показывают, что существуют $N \in \mathbb{N}^*$ и $C > 0$ такие, что в алгебре $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ имеет место формула деления

$$(\widehat{T}_0 \widehat{V}_0)(z) = 2i\pi \sum_{j=0}^M \widehat{\mu}_j(z) \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_N^C \mathbb{T}_j^{\widehat{\mu}})_{n+1, n+1}(z, \zeta) (\widehat{T}_0 \widehat{V}_0)(\zeta).$$

Отметим, что в доказательстве теоремы 1.1 использовалось лишь одно свойство T_0 , а именно: $\widehat{T}_0 \text{rv}_p(\widehat{\mu})$ является обобщенной функцией медленного роста относительно веса p . Поэтому $\widehat{T} \in \widehat{\mu} A_p(\mathbb{C}^{n+1})$, что завершает шаг индукции. \square

Теорема 4.2. Пусть \mathcal{F} — квазирегулярное семейство элементов $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ с обратным элементом p -медленного роста, и пусть $\mathcal{M} := \{\mu : \widehat{\mu} \in \mathcal{F}\}$. Тогда в любом евклидовом шаре $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R)$ пространства $\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}$ любое решение $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}, \mathbb{C})$ системы уравнений свертки (4.5) в $\mathbb{R}_{t, \mathbf{x}}^{n+1}$ может быть представлено в виде суперпозиции псевдоэлементарных решений.

Доказательство. Можно считать, что множество общих нулей в \mathbb{C}^{n+1} элементов из \mathcal{F} непусто; иначе по теореме 4.1 \mathbb{C} -пространство гладких решений однородной системы уравнений свертки (4.5) совпадает с $\{0\}$. Таким образом, пусть $\mathcal{F} = \{\widehat{\mu}_0, \dots, \widehat{\mu}_M\}$, $M \leq n$, и $\widehat{\mu} = (\widehat{\mu}_0, \dots, \widehat{\mu}_M)$. Пусть $\widehat{T}_0, \dots, \widehat{T}_{M'-1}$, $M + M' \leq n$, суть последовательные $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменатели, возникающие в рекурсивной процедуре согласно определению 4.2. А именно, \widehat{T}_0 является $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для $\widehat{\mu}$ и для каждого $\ell \geq 0$, $\widehat{T}_{\ell+1}$ является $A_{p+1}(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для $(\widehat{\mu}, \widehat{T}_0, \dots, \widehat{T}_\ell)$. Поскольку $(\widehat{\mu}, \widehat{T}_0, \dots, \widehat{T}_{M'-1})$ не имеют общих нулей в \mathbb{C}^{n+1} , из начального шага (определение 4.1) следует существование обобщенных функций $U_0, \dots, U_M, V_0, \dots, V_{M'-1}$ таких, что для произвольного $z \in \mathbb{C}^{n+1}$

$$1 = \sum_{j=0}^M \widehat{U}_j(z) \widehat{\mu}_j(z) + \sum_{j'=0}^{M'-1} \widehat{V}_{j'}(z) \widehat{T}_{j'}(z). \quad (4.6)$$

Пусть φ — гладкое решение системы уравнений свертки $\mathcal{M} * \varphi \equiv 0$ в \mathbb{R}^{n+1} . Зафиксируем $R_0 > 0$. Для любой точки $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_0)$ в \mathbb{R}^{n+1} определим функцию $E_{t, \mathbf{x}}$ как в (3.18). Как и в доказательстве теоремы 1.1, где $T_0 = \delta(\partial/\partial t)$, существуют $N_0 \in \mathbb{N}^*$ и $C_0 \in \mathbb{R}$, не зависящие от R_0 и такие, что

$$(\widehat{T}_0 E_{t, \mathbf{x}})(z) \equiv \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_{N_0}^{C_0+R_0}(z, \zeta))_{n-M, n-M} \frac{\mathbb{H}_{\mathbf{f}}^{M+1}(z, \zeta)}{(M+1)!} \mathbf{R}^{\widehat{\mu}}(\zeta) \widehat{T}_0(\zeta) E_{t, \mathbf{x}}(\zeta)$$

по модулю $\widehat{\mu} A_p(\mathbb{C}^{n+1})$. Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1.1, получим, что для любой точки $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_0)$

$$(T_0 * \varphi)(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \mathcal{H}_0[\varphi, R_0](\zeta) \mathbf{R}^{\widehat{\mu}}(\zeta) \widehat{T}_0(\zeta) E_{t, \mathbf{x}}(\zeta), \quad (4.7)$$

где

$$\mathcal{H}_0[\varphi, R_0](\zeta) := \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \widehat{\chi}_{R_0} \varphi(\omega) \left(\mathbf{W}_{N_0}^{C_0+R_0} \frac{\mathbb{H}_{\mathbf{f}}^{M+1}}{(M+1)!} \right) (\omega, \zeta) d\omega.$$

Здесь χ_{R_0} — финитная функция в \mathbb{R}^{n+1} , тождественно равная 1 в открытой окрестности замкнутого шара в \mathbb{R}^{n+1} с центром в начале координат и радиусом $C_0 + R_0 + (M + 1) \|\text{Supp } \boldsymbol{\mu}\|$, где

$$\|\text{Supp } \boldsymbol{\mu}\| := \max \left\{ \|(t, \mathbf{x})\| : (t, \mathbf{x}) \in \bigcup_{j=0}^M \text{Supp } \mu_j \right\}.$$

Пусть $R_1 > 0$. Поскольку \widehat{T}_1 является $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателем для $(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{T}_0)$, существуют $N_1 \in \mathbb{C}^*$ и $C_1 > 0$, не зависящие от R_1 и такие, что для любой точки $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$

$$\widehat{T}_1(z) E_{t, \mathbf{x}}(z) \equiv \widehat{\mathcal{R}}_1^{t, \mathbf{x}}(z) + \widehat{T}_0(z) \widehat{\mathcal{P}}_1^{t, \mathbf{x}}(z) \quad (\text{по модулю идеала } \widehat{\boldsymbol{\mu}} A_p(\mathbb{C}^{n+1})), \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{R}}_1^{t, \mathbf{x}}(z) &= \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_{N_1}^{R_1+C_1}(z, \zeta))_{n-M-1, n-M-1} \frac{\mathbb{H}_{(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{T}_0)}^{M+2}(z, \zeta)}{(M+2)!} \mathbf{R}^{(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{T}_0)}(\zeta) \widehat{T}_1(\zeta) E_{t, \mathbf{x}}(\zeta), \\ \widehat{\mathcal{P}}_1^{t, \mathbf{x}}(z) &= 2i\pi \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathbf{W}_{N_1}^{R_1+C_1} \mathbb{T}_{M+1}^{(\boldsymbol{\mu}, T_0)})_{n+1, n+1}(z, \zeta) \widehat{T}_1(\zeta) E_{t, \mathbf{x}}(\zeta). \end{aligned}$$

По тем же причинам, что и на шаге с \widehat{T}_0 , получаем, что для любой точки (t, \mathbf{x}) в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$

$$(\widehat{\mathcal{R}}_1^{t, \mathbf{x}} * \varphi)(0, \mathbf{0}) = \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \mathcal{K}_1[\varphi, R_1] \mathbf{R}^{(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{T}_0)}(\zeta) \widehat{T}_1(\zeta) E_{t, \mathbf{x}}(\zeta),$$

где

$$\mathcal{K}_1[\varphi, R_1](\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \widehat{\chi}_{R_1} \varphi(\boldsymbol{\omega}) \left(\mathbf{W}_{N_1}^{R_1+C_1} \frac{\mathbb{H}_{(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{T}_0)}^{M+2}}{(M+2)!} \right) (\boldsymbol{\omega}, \zeta) d\boldsymbol{\omega}$$

для некоторой финитной функции χ_{R_1} в \mathbb{R}^{n+1} , которая зависит от $\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{T}_0, R_1$ и тождественно равна 1 в открытой окрестности замкнутого шара в \mathbb{R}^{n+1} с центром в нуле 0 и радиусом $R'_1 = C_1 + R_1 + (M + 2) \|\text{Supp } (\boldsymbol{\mu}, T_0)\|$. Если $R_0 \gg R_1$ настолько велико, что формула представления (4.7) справедлива в некоторой открытой окрестности $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R'_1)$, то для любой точки (t, \mathbf{x}) в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathcal{P}}_1^{t, \mathbf{x}} * (T_0 * \varphi))(0, \mathbf{0}) &= \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathcal{K}_0[\varphi, R_0] \mathbf{R}^{\widehat{\boldsymbol{\mu}} \widehat{T}_0})(\zeta) ((\widehat{\mathcal{P}}_1^{t, \mathbf{x}} * ((\tau, \boldsymbol{\xi}) \mapsto E_{\tau, \boldsymbol{\xi}}(\zeta)))(0, \mathbf{0})) \\ &= \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathcal{K}_0[\varphi, R_0] \mathbf{R}^{\widehat{\boldsymbol{\mu}} \widehat{T}_0})(\zeta) \widehat{\mathcal{P}}_1^{t, \mathbf{x}}(\zeta). \end{aligned}$$

С другой стороны, из (4.8) следует, что для любой точки $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$

$$\delta_{-(t, \mathbf{x})} * T_1 * \varphi = \widehat{\mathcal{R}}_1^{t, \mathbf{x}} * \varphi + \widehat{\mathcal{P}}_1^{t, \mathbf{x}} * T_0 * \varphi.$$

Поэтому при $R_0 \gg R_1$

$$(T_1 * \varphi)(t, \mathbf{x}) = \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \mathcal{K}_1[\varphi, R_1] \mathbf{R}^{(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{T}_0)}(\zeta) \widehat{T}_1(\zeta) E_{t, \mathbf{x}}(\zeta) + \int_{\mathbb{C}^{n+1}} (\mathcal{K}_0[\varphi, R_0] \mathbf{R}^{\widehat{\boldsymbol{\mu}}})(\zeta) (\widehat{T}_0 \widehat{\mathcal{P}}_1^{t, \mathbf{x}})(\zeta) \quad (4.9)$$

для всех $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$. Заменяя $(\widehat{T}_0 \widehat{\mathcal{P}}_1^{t, \mathbf{x}})(\zeta)$ во втором интеграле в (4.9) на

$$(\widehat{T}_1 E_{t, \mathbf{x}})(\zeta) - \int_{\mathbb{C}^{n+1}} \left((\mathbf{W}_{N_1}^{R_1+C_1})_{n-M-1, n-M-1} \frac{\mathbb{H}_{(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{T}_0)}^{M+2}}{(M+2)!} \right) (\zeta, \zeta') (\mathbf{R}^{(\widehat{\boldsymbol{\mu}}, \widehat{T}_0)} \widehat{T}_1 E_{t, \mathbf{x}})(\zeta')$$

получим представление $T_1 * \varphi$ в виде суперпозиции псевдоэлементарных решений системы уравнений $\boldsymbol{\mu} * \psi \equiv 0$ в шаре $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_1)$. Процесс аналогичен выводу из (4.7) представления $T_0 * \varphi$ в виде суперпозиции в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_0)$ при $R_0 \gg R_1$.

Очевидно, что эти шаги образуют рекурсию, благодаря которой можно представить каждую свертку $T_{j'} * \varphi$, $j' = 0, \dots, M' - 1$, в виде суперпозиции псевдоэлементарных решений системы

уравнений $\mu * \psi \equiv 0$ в $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^{n+1}}(0, R_{j'})$. Отметим, что на каждом шаге требуется пересматривать цепочку неравенств $R_0 \gg R_1 \gg \dots \gg R_{j'}$, что возможно, так как число шагов M' конечно. Согласно (4.6)

$$\varphi = \sum_{j'=0}^{M'-1} V_{j'} * (T_{j'} * \varphi),$$

в \mathbb{R}^{n+1} , поэтому теорема 4.2 справедлива, если $R_0 \gg R_1 \gg \dots \gg R_{M'-1} \gg 1$. Последнее условие гарантирует, что представление $T_{M'-1} * \varphi$ и, следовательно, $T_{j'} * \varphi$, $j' = 0, \dots, M' - 1$, остается справедливым в некоторой открытой окрестности объединения носителей обобщенных функций $V_{j'}$. \square

Замечание 4.2. Пусть $\mathcal{F} = \{f_0, \dots, f_M\}$, $M < n$, — квазирегулярное семейство элементов $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ с обратным элементом p -медленного роста такое, что множество общих нулей $\mathbf{f}^{-1}(\{0\})$ непусто. Пусть $(\widehat{T}_0, \widehat{T}_1, \dots)$ в $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ — последовательность, построенная при доказательстве теоремы 4.2. Роль этой последовательности в нашем подходе аналогична роли почти параллельного семейства \mathcal{L} $(M + 1)$ -мерных линейных подпространств, введенного в [6, определение 5.1] для квазирегулярного семейства \mathcal{F} (в $\text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1})$). Напомним, что семейство \mathcal{L} называется *почти параллельным*, а квазирегулярное семейство \mathcal{F} — *медленно убывающим* относительно \mathcal{L} , если существуют константы $c_{\mathcal{F}, \mathcal{L}} \geq 0$, $c'_{\mathcal{F}, \mathcal{L}} \in \mathbb{R}$, $C_{\mathcal{F}, \mathcal{L}} \geq 0$, $C'_{\mathcal{F}, \mathcal{L}} \geq 0$ такие, что для каждого $L \in \mathcal{L}$ связные компоненты множества

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}, L} := \{z \in L : \|\mathbf{f}(z)\| \leq e^{-c_{\mathcal{F}, \mathcal{L}} p(z) - c'_{\mathcal{F}, \mathcal{L}}}\}$$

ограничены и для любых z и ζ , принадлежащих одной и той же компоненте связности $\mathcal{E}_{\mathcal{F}, L}$, имеет место неравенство $p(\zeta) \leq C_{\mathcal{F}, \mathcal{L}} p(z) + C'_{\mathcal{F}, \mathcal{L}}$. Если \mathcal{F} медленно убывает относительно почти параллельного семейства \mathcal{L} , то идеал $\mathcal{F}A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ замкнут и для системы уравнений свертки $\mathcal{M} * \varphi \equiv 0$, $\mathcal{M} = \{\mu : \widehat{\mu} \in \mathcal{F}\}$, в $\mathbb{R}_{t, x}^{n+1}$, решения представимы как суперпозиции элементарных решений этой системы (см. [6, теорема 10.1]). При доказательстве этого результата используется интегральное представление с мероморфным ядром, а именно, — представление Коши — Вейля.

Наш подход основан на изучении срезов, как и в [6]. Однако принципиальное отличие от [6] состоит в том, что наш подход аналитический, а не геометрический. Мы применяем теорию обобщенных функций \mathbb{C}^{n+1} и взвешенное интегральное представление Бохнера — Мартинелли, ядро которого почти всюду гладкое, но не мероморфное, в отличие от ядра Коши — Вейля, использованного в [6].

5. Модифицированный вес Пэли — Винера

Изложенный подход не распространяется на системы уравнений свертки вида (1.6) при $m > 2$. Это связано с тем, что соответствующий анализ потребовал бы доказательства гипотез о свойствах алгебры $\widehat{\mathbb{C}[\Delta^h]}$ (или даже в менее общей ситуации — об элементах $\widehat{\mathbb{C}'[\Delta^h]}$), которые в настоящее время представляются неразрешимыми. Для вектора $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_M)$ в $(\widehat{\mathbb{C}_n[\Delta^h]})^{M+1}$ (соответственно, $(\widehat{\mathbb{C}'_n[\Delta^h]})^{M+1}$) существует система глобальных алгебраических формальных уравнений Бернштейна — Сато

$$B(\zeta_0, \boldsymbol{\lambda}) \left(\prod_{\nu=0}^M (f_\nu(\zeta))^{l_\nu} \right) = \mathcal{Q}_j(\zeta) \left[\boldsymbol{\lambda}, \frac{\partial}{\partial \zeta'} \right] \left(f_j(\zeta) \left(\prod_{\nu=0}^M (f_\nu(\zeta))^{l_\nu} \right) \right), \quad j = 0, \dots, M, \quad (5.1)$$

где $B \in \widehat{\mathbb{C}[\Delta^h]}[\lambda_0, \dots, \lambda_M]$ (соответственно, $B \in \widehat{\mathbb{C}'[\Delta^h]}[\lambda_0, \dots, \lambda_M]$), а $\mathcal{Q}_j(\zeta)$ — $\mathbb{C}[\boldsymbol{\lambda}, \partial/\partial \zeta']$ -значная функция с коэффициентами в $\widehat{\mathbb{C}'_n[\Delta^h]}$ (см. [15, § 3]). Алгебраическую основу здесь составляет алгебра Вейля $\mathbb{K}\langle z', \partial/\partial z' \rangle$, где $z' = (z_1, \dots, z_n)$ и поле частных \mathbb{K} алгебры $\widehat{\mathbb{C}[\Delta^h]}$ (соответственно, $\widehat{\mathbb{C}'[\Delta^h]}$).

Из [12, § 3] вытекает, что существование формальной системы типа (5.1) влечет существование $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$ -знаменателя вида $z_0 \rightarrow \widehat{e}(z_0)$ для \mathbf{f} , где $e \in \mathbb{C}[\Delta^h]$ (соответственно, $e \in \mathbb{C}'[\Delta^h]$). Если коэффициенты полиномов $P_{j, \nu}$ (соответственно, $Q_{j, \nu}$), определяющих f_j , алгебраические, то

полиномиальные (соответственно, постоянные) коэффициенты в выражении для e также алгебраические. Этот факт объясняется тем, что в такой ситуации многочлен B в (5.1) можно выбрать с алгебраическими коэффициентами.

Поясним, как в данном контексте возникают гипотезы, связанные с экспоненциальными многочленами. Напомним гипотезу о линейных комбинациях экспонент с комплексными коэффициентами

$$e : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{\omega \in \Omega[e]} a_\omega \exp(-i\omega z),$$

где спектр $\Omega[e]$ является конечным подмножеством \mathbb{R} . Эта гипотеза была сформулирована первоначально Шапиро [16], а затем — Монтгомери [17, 18] (см. также [8]). Согласно этой гипотезе для двух взаимно простых экспоненциальных многочленов e_0, e_1 из кольца $\mathbb{C}[z \mapsto e^{i\omega z} : \omega \in \mathbb{R}]$

$$\text{card}(\{\xi \in \mathbb{C} : e_0(\xi) = e_1(\xi) = 0\}) < +\infty.$$

Хотя полное решение остается недостижимым, последние результаты теории минимальности (формулировка в терминах блоков теоремы Пилы — Уилки для пфаффовых структур [10, теорема 2]) и количественные диофантовы оценки [19, теорема 2] позволяют предположить, что для $e \in \mathbb{C}[z \mapsto e^{i\omega z} : \omega \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}]$ найдется $N_\epsilon = N_{\epsilon, e} \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\text{card} \{ \xi \in e^{-1}(\{0\}) : |\xi| \leq R, d(\xi, e^{-1}(\{0\}) \setminus \{\xi\}) \leq (2 + |\xi|)^{-N_\epsilon} \} = O_\epsilon(R^\epsilon). \quad (5.2)$$

В том же ключе для элементов алгебры $\overline{\mathbb{Q}}[z \mapsto e^{i\omega z} : \omega \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}]$ Эренпрайс [20, с. 322] сформулировал следующую гипотезу:

$$\begin{aligned} \forall e \in \overline{\mathbb{Q}}[z \mapsto e^{i\omega z} : \omega \in \overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}] \text{ обобщенная функция главного значения} \\ \zeta_0 \mapsto \text{pv} \left[\frac{1}{e(\zeta_0)} \right] \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}) \text{ есть функция медленного роста относительно веса } p. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Пусть $\mathbf{f} = (f_0, \dots, f_M)$ — набор $M + 1$ элементов $\widehat{\mathbb{C}}'_n[\Delta^h]$ ($\mathbf{h} \in (\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R})^m$, $m > 2$), задающий в \mathbb{C}^{n+1} полное пересечение $V(\mathbf{f})$ с условием $\text{codim}(V(\mathbf{f}) \cap \{z_0 = \xi\}) \geq M + 2$ для всех $\xi \in \mathbb{C}$ (как в условии (1.11) теоремы 1.2). Тогда, как отмечено выше, для \mathbf{f} существует p -знаменатель $e_0 \in \mathbb{C}[\zeta_0 \mapsto e^{\pm i h_j \zeta_0} : j = 1, \dots, m]$.

Предположив, что ослабленная количественная форма (5.2) гипотезы Шапиро — Монтгомери верна, можно разбить нули e_0 на две категории:

- ϵ -плохие нули — ненулевые нули e_0 , количество которых контролируется оценкой (5.2) (таких нулей мало),
- ϵ -хорошие нули — остальные нули, в окрестности которых обобщенная функция главного значения $\zeta_0 \mapsto \text{pv}[1/e_0(\zeta_0)]$ является обобщенной функцией медленного роста относительно веса $p(\zeta_0)$, порядок которой не превышает N_ϵ .

Рассмотрим каноническое произведение Вейерштрасса

$$\Pi_\epsilon : z_0 \mapsto \prod_{\{\xi \in \mathbb{C}^* : \xi - \epsilon\text{-плохой нуль } e_0\}} \left(1 - \frac{z_0}{\xi}\right) \exp\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu_\epsilon} \frac{1}{\kappa} \left(\frac{z_0}{\xi}\right)^\kappa\right).$$

где ν_ϵ — наименьшее положительное целое число такое, что

$$\sum_{\xi - \epsilon\text{-плохой нуль } e_0} 1/|\xi|^{\nu+1} < +\infty.$$

Здесь ϵ -плохие нули ξ экспоненциального многочлена e_0 рассматриваются с учетом (равномерно ограниченных) кратностей и упорядочены в порядке возрастания модулей. Функция Π_ϵ целая, и ее порядок меньше, чем ϵ (см. [21]). Сказанное мотивирует введение модифицированного веса Пэли — Винера

$$p_\epsilon : \mathbf{z} \in \mathbb{C}^{n+1} \mapsto \|\text{Im } \mathbf{z}\| + \log(1 + \|\mathbf{z}'\|) + |\mathbf{z}_0|^\epsilon, \quad \epsilon > 0,$$

так, чтобы выполнялось вложение $\Pi_\epsilon A_p(\mathbb{C}^{n+1}) \subset A_{p_\epsilon}(\mathbb{C}^{n+1})$. Для ϵ -хорошего нуля ξ экспоненциального многочлена e_0 с кратностью $\mu_\xi(e_0)$ введем отображение q_ξ по формуле

$$q_\xi := \left((z_0 - \xi)^{\mu_\xi(e_0)}, \sum_{\varkappa=0}^{\mu_\xi(e_0)-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_0} \right)^\varkappa [f_0](\xi, z') \frac{(z_0 - \xi)^\varkappa}{\varkappa!}, \dots, \sum_{\varkappa=0}^{\mu_\xi(e_0)-1} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_0} \right)^\varkappa [f_M](\xi, z') \frac{(z_0 - \xi)^\varkappa}{\varkappa!} \right).$$

Так как q_ξ — полиномиальное отображение, обобщенная функция $\tau_\xi \in \mathcal{D}'(\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2(n+1)}, \mathbb{C})$ в \mathbb{C}^{n+1} , определенная как коэффициент при λ^0 в разложении Лорана в окрестности начала координат мероморфной функции (со значениями в пространстве обобщенных функций) $\lambda \mapsto \|q_\xi\|^{2(\lambda - M - 2)}$, является функцией медленного роста относительно веса $\log(1 + \|z\|)$ и, следовательно, относительно веса p . Если семейство $\{\tau_\xi : \xi \text{ — хороший нуль } e_0\}$ имеет равномерно медленный рост относительно веса $\log(1 + \|z\|)$ в \mathbb{C}^{n+1} и, следовательно, равномерно медленный рост относительно p , из доказательств теорем 1.1 и 4.1 вытекает

$$\Pi_\epsilon(\zeta_0) \times (A_p(\mathbb{C}^{n+1}) \cap \mathbf{f} \text{Hol}(\mathbb{C}^{n+1})) \subset \mathbf{f} A_{p_\epsilon}(\mathbb{C}^{n+1}).$$

Поскольку порядок $\epsilon > 0$ функции Π_ϵ можно взять произвольно малым, естественно считать, что ослабленная (по-прежнему гипотетическая) количественная форма (5.2) гипотезы Шапиро — Монтгомери, примененная к системам разностно-запаздывающих уравнений с несоизмеримыми алгебраическими запаздываниями по времени, приводит к ослабленным вариантам свойства спектрального синтеза для таких систем. Точнее, операция деления на $\hat{\mu}$ реализуется в любой алгебре $A_{p_\epsilon}(\mathbb{C}^{n+1})$ при любом сколь угодно малом $\epsilon > 0$, хотя не обязательно выполнима в исходной алгебре Пэли — Винера $A_p(\mathbb{C}^{n+1})$.

Литература

1. H. Gluesing-Luerssen, *Linear Delay-Differential Systems with Commensurate Delays: An Algebraic Approach*, Springer, Berlin (2001).
2. L. C. G. J. M. Habets, “System equivalence for AR-systems over rings-with an application to delay-differential systems”, *Math. Control Signals Syst.* **12**, No. 3, 219–244 (1999).
3. D. I. Gurevich, “Counterexamples to problem of L. Schwartz”, *Funct. Anal. Appl.* **9**, 116–120 (1975).
4. S. J. Matsubura-Heo, “Residue current approach to Ehrenpreis–Malgrange type theorem for linear differential equations with constant coefficients and commensurate time lags”, *Adv. Math.* **331**, 170–208 (2018).
5. M. Andersson, E. Wulcan, “Decomposition of residue currents”, *J. Reine Angew. Math.* **638**, 103–118 (2010).
6. C. A. Berenstein, B. A. Taylor, “Interpolation problems in \mathbb{C}^n with applications to harmonic analysis”, *J. Anal. Math.* **38**, 128–254 (1980).
7. A. Yger, “A conjecture by Leon Ehrenpreis about zeroes of exponential polynomials”, In: *From Fourier Analysis and Number Theory to Radon Transforms and Geometry. In Memory of Leon Ehrenpreis*, pp. 517–535, Springer, New York (2013).
8. P. D’Aquino, A. Macintyre, G. Terzo, “From Schanuel’s conjecture to Shapiro’s conjecture”, *Comment. Math. Helv.* **89**, 597–616 (2014).
9. J. Ax, “On Schanuel’s conjectures”, *Ann. Math.* **93**, No. 2, 252–268 (1971).
10. G. Binyamini, D. Novikov, B. Zack, “Wilkie’s conjecture for Pfaffian structures”, *Ann. Math.* **2** **199**, No. 2, 795–821 (2024).
11. A. Vidras, A. Yger, *Multivariate Residue Theory and Applications*, Am. Math. Soc., Providence, RI (2023).
12. C. A. Berenstein, A. Yger, “Exponential polynomials and \mathcal{D} -modules”, *Compos. Math.* **95**, 131–181 (1995).
13. C. A. Berenstein, A. Yger, “On Lojasiewicz inequalities for exponential polynomials”, *J. Math. Anal. Appl.* **129**, 166–195 (1988).

14. J. J. Kelleher, B. A. Taylor, “Finitely generated ideals in rings of analytic functions”, *Math. Ann.* **193**, 225–237 (1971).
15. B. Lichtin, “Generalized Dirichlet series and B-functions”, *Compos. Math.* **65**, 81–120 (1988).
16. H. Shapiro, “The expansion of mean-periodic functions in series of exponentials”, *Comm. Pure Appl. Math.* **11**, 1–21 (1958).
17. R. Tijdeman, A. Van der Poorten, “On common zeros of exponential polynomials”, *Enseign. Math.* (2) **21**, No. 2, 57–67 (1975).
18. A. Van der Poorten, “A note on the zeros of exponential polynomials”, *Compos. Math.* **31**, No. 2, 109–113 (1975).
19. P. Habegger, “Diophantine approximation on definable sets”, *Selecta Math.* **24**, No. 2, 1633–1675 (2018).
20. L. Ehrenpreis, *Fourier Analysis in Several Variables*, John Wiley & Sons, New York etc. (1970).
21. B. Ja. Levin, *Distribution of Zeros of Entire Functions*, Am. Math. Soc., Providence, RI (1964).

Статья поступила в редакцию 6 января 2025 г.

Принята к публикации 12 марта 2025 г.

И. А. Галяев, Ю. Л. Сачков

ЛОРЕНЦЕВЫ ЗАДАЧИ НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассматриваются три левоинвариантные лоренцевские структуры на группе Гейзенберга, которые различаются положением конуса будущего относительно коммутаторной подалгебры алгебры Гейзенберга. Для этих структур исследуется множество достижимости, существование лоренцевых длиннейших, параметризация экстремальных траекторий и геометрия волновых фронтов. Локальная и глобальная оптимальность экстремальных траекторий изучается с использованием как аналитических, так и численных методов.

1. Введение

С точки зрения глобальной дифференциальной геометрии общая теория относительности описывается лоренцевой геометрией [1, 2]. Важной исследовательской проблемой является сравнение подходов и результатов лоренцевой и римановой геометрии. Например, в лоренцевой геометрии информация может распространяться вдоль кривых с векторами скорости из некоторого острого конуса. Естественной является задача отыскания лоренцевых длиннейших, максимизирующих функционал типа длины вдоль допустимых кривых. Поэтому представляет большой интерес задача описания лоренцевых длиннейших для всех пар точек, где вторая достижима из первой вдоль допустимой кривой. Эта задача полностью исследована лишь в простейшем случае левоинвариантной лоренцевой структуры в \mathbb{R}^{n+1} , для пространства Минковского \mathbb{R}_1^{n+1} и др. [3].

Левоинвариантная лоренцева структура на группе Ли — это невырожденная квадратичная форма g индекса 1 на алгебре Ли \mathfrak{g} . Напомним некоторые основные определения лоренцевой геометрии [4]. Элемент $X \in \mathfrak{g}$ называется *времениподобным*, если $g(X) < 0$, *пространственноподобным*, если $g(X) > 0$, *светоподобным* (или нулевым), если $g(X) = 0$. Липшицева кривая в G называется *времениподобной*, если она имеет времениподобный вектор скорости почти везде; пространственноподобные, светоподобные и непространственноподобные кривые определяются аналогично. Ориентация времени X_0 — это произвольный времениподобный элемент $X_0 \in \mathfrak{g}$. Направленная в будущее времениподобная кривая $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, называется *параметризованной длиной дуги*, если $g(q(t), \dot{q}(t)) \equiv -1$. Любая направленная в будущее времениподобная кривая может быть параметризована длиной дуги, аналогично римановой геометрии.

Лоренцева длина непространственноподобной кривой $\gamma \in \text{Lip}([0, t_1], G)$ определяется следующим образом:

$$l(\gamma) = \int_0^{t_1} \sqrt{|g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})|} dt.$$

Для точек $q_0, q_1 \in G$ обозначим через $\Omega_{q_0 q_1}$ множество всех направленных в будущее непространственноподобных кривых в G , которые соединяют q_0 и q_1 . В случае $\Omega_{q_0 q_1} = \emptyset$ определим лоренцево расстояние (функцию разделения времени) от точки q_0 до точки q_1 как

$$d(q_0, q_1) = \sup\{l(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{q_0 q_1}\}. \quad (1.1)$$

И. А. Галяев: Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия; ivan.galyaev@ayandex.ru.

Ю. Л. Сачков: Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия; yusachkov@gmail.com.

Английский оригинал: *J. Math. Sci.* **295**, No. 3, 345–358 (2025).

Если $\Omega_{q_0 q_1} = \emptyset$, то по определению $d(q_0, q_1) = 0$.

Направленная в будущее непространственноподобная кривая γ называется *максимизатором длины Лоренца*, если она максимальна в (1.1) между своими конечными точками $\gamma(0) = q_0$, $\gamma(t_1) = q_1$. *Причинное будущее* точки $q_0 \in G$ — это множество $J_{q_0}^+$ точек $q_1 \in G$, для которых существует направленная в будущее непространственноподобная кривая γ , соединяющая q_0 и q_1 . Причинное прошлое $J_{q_0}^-$ определяется аналогично в терминах направленных в прошлое непространственноподобных кривых.

Пусть $q_0 \in G$, $q_1 \in J_{q_0}^+$. Поиск максимизаторов длины Лоренца, которые соединяют q_0 и q_1 , сводится к поиску направленных в будущее непространственноподобных кривых γ , которые решают задачу

$$l(\gamma) \rightarrow \max, \quad \gamma(0) = q_0, \quad \gamma(t_1) = q_1.$$

В данной работе рассматриваются три лоренцевы задачи на группе Гейзенберга. К задачам применяется принцип максимума Понтрягина (ПМП), и получена параметризация аномальных и нормальных экстремальных траекторий. Исследуются достижимые множества и существование оптимальных траекторий.

Группа Гейзенберга — это пространство $G \simeq \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ с базисом левоинвариантных векторных полей [5]

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

2. Первая лоренцева задача

2.1. Постановка задачи. Первая задача о лоренцевых длиннейших на группе Гейзенберга ставится как следующая задача оптимального управления [2, 6]:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^3 u_i X_i, \quad q = (x, y, z) \in G, \quad (2.1)$$

$$u \in U = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 0, u_1 \geq 0\}, \quad (2.2)$$

$$q(0) = q_0, \quad q(t_1) = q_1, \quad (2.3)$$

$$J = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2} dt \rightarrow \max. \quad (2.4)$$

Лоренцева форма, соответствующая этой задаче, имеет вид

$$g = -\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2,$$

где $\omega_i \in \Lambda(G)$ — левоинвариантные 1-формы на G , заданные условиями

$$\omega_1|_{\text{Id}} = dx|_{\text{Id}}, \quad \omega_2|_{\text{Id}} = dy|_{\text{Id}}, \quad \omega_3|_{\text{Id}} = dz|_{\text{Id}}. \quad (2.5)$$

Конус будущего $\{\xi \in T_q G \mid g(\xi) \leq 0\} \setminus \{0\}$ не пересекается с коммутантом $\mathbb{R}X_3(q)$ алгебры Гейзенберга.

С учетом левоинвариантности задачи положим $q_0 = \text{Id} = (0, 0, 0)$.

2.2. Множество достижимости. Обозначим через \mathcal{A} (соответственно, $\mathcal{A}(t_1)$) множество достижимости системы (2.1), (2.2) из точки q_0 за произвольное неотрицательное время (соответственно, за время $t_1 > 0$).

Теорема 2.1. *Имеет место включение $\mathcal{A} \subset \{(x, y, z) \in G \mid x \geq |y|\}$. В частности, система (2.1), (2.2) не является глобально управляемой.*

Доказательство. Из системы (2.1), (2.2) получаем $\dot{x} \pm \dot{y} = \sqrt{u_2^2 + u_3^2} \pm u_1 \geq 0$. Поэтому на множестве достижимости $x \pm y \geq 0$. \square

В силу ПМП в геометрической форме [6, теорема 12.1], если $u(t)$, $t \in [0, t_1]$, — управление такое, что соответствующая траектория $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, удовлетворяет включению $q(t_1) \in \partial \mathcal{A}(t_1)$, то существует липшицева кривая $\lambda_t \in T_{q(t)}^*G$, $t \in [0, t_1]$, для которой выполняются условия

$$\begin{aligned} \lambda_t &\neq 0, \\ \dot{\lambda}_t &= \vec{h}_{u(t)}(\lambda_t), \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$h_{u(t)}(\lambda_t) = \max_{v \in U} h_v(\lambda_t) \tag{2.7}$$

при почти всех $t \in [0, t_1]$. Здесь

$$h_u(\lambda) = \sum_{i=1}^3 u_i h_i(\lambda)$$

означает гамильтониан ПМП, $h_i(\lambda) = \langle \lambda, X_i \rangle$ — линейные на слоях кокасательного расслоения T^*G гамильтонианы, а \vec{h}_u — гамильтоново векторное поле с гамильтонианом h_u [6].

Гамильтонова система (2.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \{u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3, h_1\} = u_1 \{h_1, h_1\} + u_2 \{h_2, h_1\} + u_3 \{h_3, h_1\} = -u_2 h_3, \\ \dot{h}_2 &= u_1 h_3, \\ \dot{h}_3 &= 0, \\ \dot{q} &= u_1 X_1 + u_2 X_2 + u_3 X_3, \end{aligned}$$

где $\{\cdot, \cdot\}$ — скобка Пуассона. По условию максимума (2.7)

$$\begin{aligned} h_1 &= -\sqrt{h_2^2 + h_3^2}, \\ u_1 &= -h_1, \quad u_2 = h_2, \quad u_3 = h_3. \end{aligned}$$

Поэтому гамильтонова система ПМП принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= -h_2 h_3, \\ \dot{h}_2 &= -h_1 h_3, \\ \dot{h}_3 &= 0, \\ \dot{q} &= -h_1 X_1 + h_2 X_2 + h_3 X_3. \end{aligned}$$

Проинтегрируем эту систему.

(1) Если $h_3 = 0$, то $h_1, h_2 \equiv \text{const}$,

$$x = -h_1 t, \quad y = h_2 t, \quad z = 0. \tag{2.8}$$

2) Если $h_3 \neq 0$, то

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1^0 \text{ch } \tau - h_2^0 \text{sh } \tau, \\ h_2 &= h_2^0 \text{ch } \tau - h_1^0 \text{sh } \tau, \\ x &= (-h_1^0 \text{sh } \tau + h_2^0 (\text{ch } \tau - 1))/h_3, \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$y = (h_2^0 \text{sh } \tau - h_1^0 (\text{ch } \tau - 1))/h_3, \tag{2.10}$$

$$z = (\text{sh } \tau + \tau)/2, \tag{2.11}$$

$$\tau = h_3 t.$$

Пусть $\lambda = (h_1^0, h_2^0, h_3, q_0) \in T_{q_0}^*G$. Обозначим через $q(\lambda, t)$ экстремальную траекторию, соответствующую начальному ковектору λ . Из параметризации (2.9)–(2.11) экстремальных траекторий видно, что $q(k\lambda, t/k) = q(\lambda, t)$, $k \neq 0$. Поэтому

$$\mathcal{A}(t) = \{q(\lambda, t) \mid \lambda \in C\} = \{q(k\lambda, t/k) \mid \lambda \in C\} = \{q(\lambda', t/k) \mid \lambda' \in C\} = \mathcal{A}(t/k), \quad k > 0,$$

где $C = \{(h_1^0, h_2^0, h_3) \in \mathbb{R}^3 \mid h_1^0 = -\sqrt{(h_2^0)^2 + h_3^2}\}$. Следовательно,

$$\mathcal{A} = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}(t) = \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{A}(t/k) = \mathcal{A}(1).$$

Введем параметризацию траекторий (2.8)–(2.11) при $t = 1$:

- если $h_3 = 0$, то $x_1 = |h_2^0|$, $y_1 = h_2^0$, $z_1 = 0$,
- если $h_3 \neq 0$, то

$$\begin{aligned} x_1 &= (-h_1^0 \operatorname{sh} h_3 + h_2^0 (\operatorname{ch} h_3 - 1))/h_3, \\ y_1 &= (h_2^0 \operatorname{sh} h_3 - h_1^0 (\operatorname{ch} h_3 - 1))/h_3, \\ z_1 &= (\operatorname{sh} h_3 + h_3)/2, \\ h_1^0 &= -\sqrt{(h_2^0)^2 + h_3^2}. \end{aligned}$$

Введем обозначение $S = \{(x_1, y_1, z_1)(h_1^0, h_2^0, h_3) \mid (h_1^0, h_2^0, h_3) \in C\}$, т.е. S — множество конечных точек экстремальных траекторий, соответствующих начальным коекторам $(h_1^0, h_2^0, h_3) \in C$.

Предложение 2.1. Если $q(t)$, $t \in [0, t_1]$, — траектория системы (2.1)–(2.3), удовлетворяющая условию $q(t_1) \in \partial \mathcal{A}$, то $q(t_1) \in S$.

Поверхность S изображена на рис. 1. Из этого рисунка видно, что S разбивает G на две связанные области. Обозначим через S_+ область, содержащуюся в области $\{(x, y, z) \in G \mid x \geq |y|\}$.

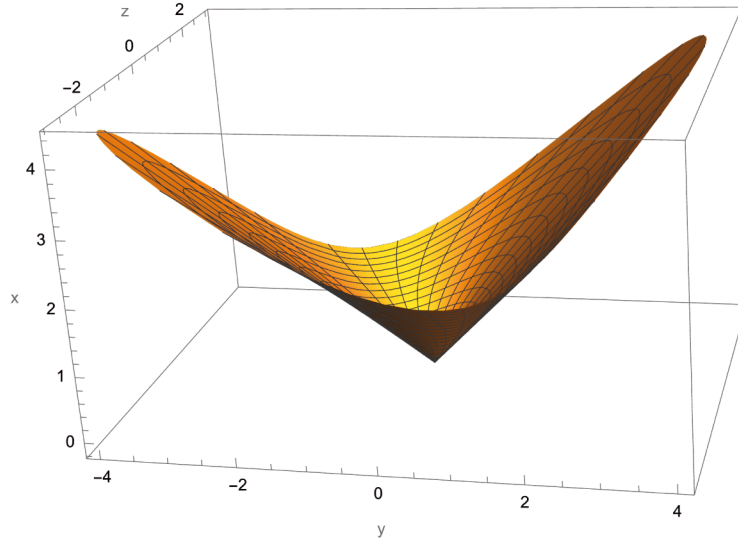


Рис. 1. Поверхность S для первой задачи.

Приближенные вычисления позволяют сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 2.1. Имеет место равенство $\mathcal{A} = S_+$.

2.3. Существование оптимальных траекторий.

Теорема 2.2. Если $q_1 \in \mathcal{A}$, то в задаче (2.1)–(2.4) существует оптимальная траектория.

Доказательство. Конус будущего $C_- = \{\xi \in T_q G \mid g(\xi) \leq 0\} \setminus \{0\}$ не пересекается с коммутантом $\mathbb{R}X_3$ алгебры Гейзенберга. Поэтому существует левоинвариантная 1-форма времени $\tau \in \Lambda^1 G$, $\tau|_{C_-} < 0$, ядро которой содержит этот коммутант. Тогда форма τ замкнута, а потому и точна. Из [7, теорема 1] следует существование лоренцевой длиннейшей, соединяющей точки q_0 и q_1 . \square

2.4. Экстремальные траектории. Принцип максимума Понтрягина утверждает, что экстремали в задаче (2.1)–(2.4) являются траекториями гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} \dot{\lambda} &= \vec{H}(\lambda), \\ H &= \frac{1}{2}(-h_1^2 + h_2^2 + h_3^2), \quad h_1 \leq 0; \end{aligned}$$

причем в аномальном случае $H \equiv 0$, а в нормальном случае $H \equiv \text{const} < 0$ (можно положить $H \equiv -1/2$).

Аномальные траектории совпадают с траекториями $q(\lambda, t)$, вычисленными в п. 2.2 (см. формулы (2.8)–(2.11)), при этом $h_1^0 = -\sqrt{(h_2^0)^2 + h_3^2}$. Аномальные траектории светоподобны и заполняют поверхность S (см. рис. 2).

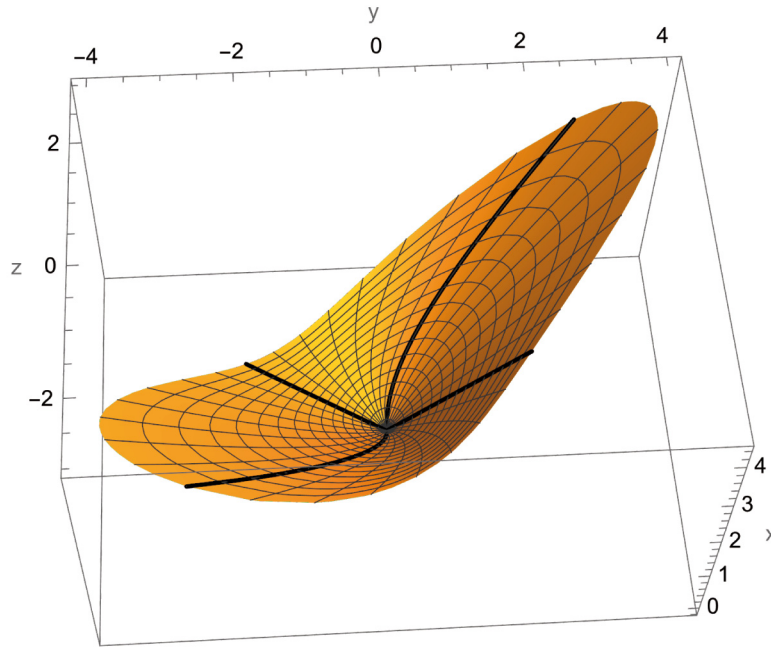


Рис. 2. Поверхность S и аномальные траектории для первой задачи.

Нормальные траектории параметризуются теми же формулами (2.8)–(2.11), но при $h_1^0 = -\sqrt{1 + (h_2^0)^2 + h_3^2}$.

2.5. Экспоненциальное отображение и волновые фронты. Параметризуем гиперboloид $\{H = -1/2, h_1 < 0\}$ как $h_1 = -\text{ch } \varphi, h_2 = \text{sh } \varphi \cos \theta, h_3 = \text{sh } \varphi \sin \theta$. Тогда нормальные экстремальные траектории (2.8)–(2.11) становятся функциями переменных (φ, θ, t) и можно определить экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : (\varphi, \theta, t) \mapsto (x, y, z). \quad (2.12)$$

Волновой фронт радиуса $t > 0$ есть множество $W_t = \{\text{Exp}(\varphi, \theta, t) \mid \varphi, \theta \in \mathbb{R}\}$. Рисунок 3 показывает, что $\bigcup_{t>0} W_t = S_+$.

2.6. Сопряженные точки.

Теорема 2.3. Если $h_3 \neq 0$, то нормальная экстремальная траектория $q(\lambda, t), t > 0$, не содержит сопряженных точек, потому локально оптимальна.

Доказательство. Непосредственное вычисление показывает, что якобиан экспоненциального отображения (2.12) равен

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\varphi, \theta, t)} = \frac{\text{sh}^2(t \sin \theta \sin \varphi)}{\sin^2 \theta \text{sh } \varphi}.$$

Если $h_3 = \text{sh } \varphi \sin \theta \neq 0$, то $J \neq 0$ при $t > 0$ и сопряженных точек нет. □

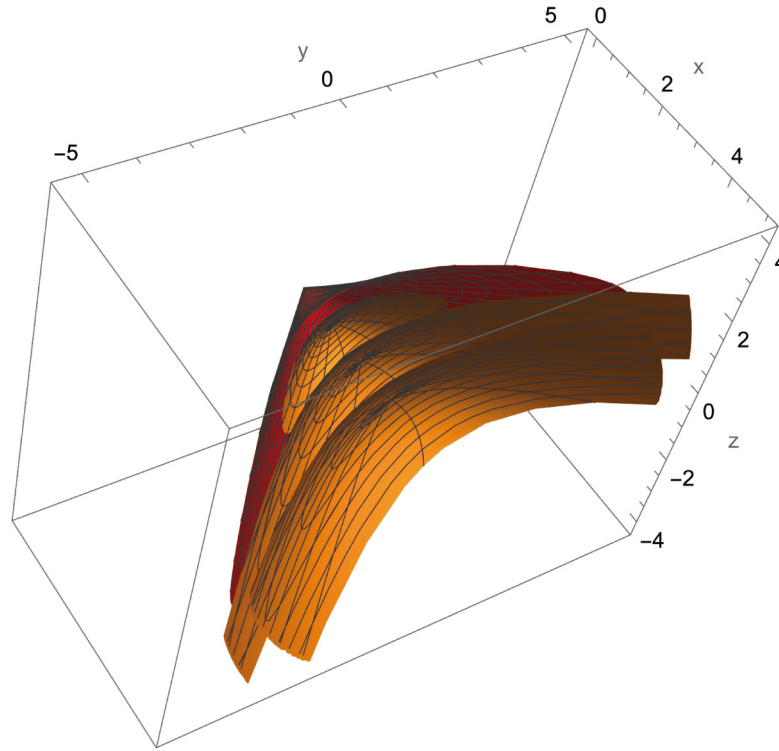


Рис. 3. Поверхность S и волновые фронты для первой задачи.

2.7. Оптимальность экстремальных траекторий. Из-за отсутствия явного описания множества достижимости \mathcal{A} мы ограничимся в этом пункте численными экспериментами и гипотезами на их основе.

Рисунок 3 показывает, что волновые фронты W_t , $t > 0$, регулярно покрывают область $S_+ = \int \mathcal{A}$. Поэтому с учетом теоремы Адамара о глобальном диффеоморфизме [8] приходим к следующей гипотезе.

Гипотеза 2.2. Экспоненциальное отображение

$$\text{Exp} : \left\{ \lambda \in T_{q_0}^* G \mid h_1^0 = -\sqrt{1 + (h_2^0)^2 + h_3^2} \right\} \times \mathbb{R}_{+t} \rightarrow \text{int } \mathcal{A}$$

является диффеоморфизмом. Поэтому любая экстремальная траектория $q(t)$, $t > 0$, оптимальна.

3. Вторая лоренцева задача

3.1. Постановка задачи. Вторая лоренцева задача на группе Гейзенберга ставится следующим образом:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^3 u_i X_i, \quad q = (x, y, z) \in G, \tag{3.1}$$

$$u \in U = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 \leq 0, u_3 \geq 0\}, \tag{3.2}$$

$$q(0) = q_0 = \text{Id} = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1, \tag{3.3}$$

$$J = \int_0^{t_1} \sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2} dt \rightarrow \max. \tag{3.4}$$

Соответствующая лоренцева форма имеет вид

$$g = \omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2,$$

где $\omega_i \in \Lambda(G)$ — левоинвариантные 1-формы на G , заданные условиями (2.5). Конус будущего $\{\xi \in T_q G \mid g(\xi) \leq 0\} \setminus \{0\}$ содержит внутри себя коммутант $\mathbb{R}X_3(q)$ алгебры Гейзенберга.

3.2. Множество достижимости. Аналогично § 2 будем искать траектории системы (3.1)–(3.3), приходящие на границу множества достижимости \mathcal{A} . Соответствующие экстремали ПМП в геометрической форме имеют вид

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1^0 \cos \tau - h_2^0 \sin \tau, \\ h_2 &= h_2^0 \cos \tau + h_1^0 \sin \tau, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} h_3 &= -\sqrt{(h_1^0)^2 + (h_2^0)^2}, \\ x &= (h_1^0 \sin \tau + h_2^0(\cos \tau - 1))/h_3, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$y = (h_2^0 \sin \tau - h_1^0(\cos \tau - 1))/h_3, \tag{3.7}$$

$$z = -(\sin \tau + \tau)/2, \tag{3.8}$$

$$\tau = h_3 t. \tag{3.9}$$

Если траектория $q(t)$ приходит на границу множества \mathcal{A} , то она лежит на поверхности

$$\begin{aligned} S &= \{(x_1, y_1, z_1)(h_1^0, h_2^0) \mid h_1^0, h_2^0 \in \mathbb{R}, \\ x_1 &= (h_1^0 \sin h_3 + h_2^0(\cos h_3 - 1))/h_3, \\ y_1 &= (h_2^0 \sin h_3 - h_1^0(\cos h_3 - 1))/h_3, \\ z_1 &= -(\sin h_3 + h_3)/2, \\ h_3 &= -\sqrt{(h_1^0)^2 + (h_2^0)^2}. \end{aligned}$$

Поверхность S , изображенная на рис. 4, не делит G на две связные области, поэтому мы приходим к следующей гипотезе.

Гипотеза 3.1. Система (3.1)–(3.3) вполне управляема, т.е. $\mathcal{A} = G$. Поэтому в задаче (3.1)–(3.4) существуют траектории со сколь угодно большим значением функционала J и не существует оптимальных траекторий.

3.3. Экстремальные траектории и волновые фронты. Аналогично § 2 применим ПМП к задаче (3.1)–(3.4). Анормальные траектории совпадают со светоподобными, они параметризуются формулами (3.5)–(3.9) и заметают поверхность S (см. рис. 5).

Нормальные траектории параметризуются формулами (3.5)–(3.9) и удовлетворяют равенству

$$h_3 = -\sqrt{1 + (h_1^0)^2 + (h_2^0)^2},$$

их исходные ковекторы принадлежат гиперболоиду $\{H = \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2 - h_3^2) = -\frac{1}{2}, h_3 < 0\}$. Введем на этом гиперболоиде координаты $h_1 = \text{sh } \theta \cos \varphi$, $h_2 = \text{sh } \theta \sin \varphi$, $h_3 = -\text{ch } \theta$. Тогда нормальные траектории параметризуются экспоненциальным отображением

$$\text{Exp} : (\theta, \varphi, t) \mapsto (x, y, z). \tag{3.10}$$

Волновые фронты $W_t = \{\text{Exp}(\theta, \varphi, t) \mid \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}$ изображены на рис. 6 и 7, они заполняют всю область, ограниченную поверхностью S . Обратим внимание, что для второй задачи поверхность S имеет сингулярности.

3.4. Сопряженные точки.

Теорема 3.1. Если $\theta \neq 0$, то нормальные траектории $\text{Exp}(\theta, \varphi, t)$, $t > 0$, не содержат сопряженных точек, потому локально оптимальны.

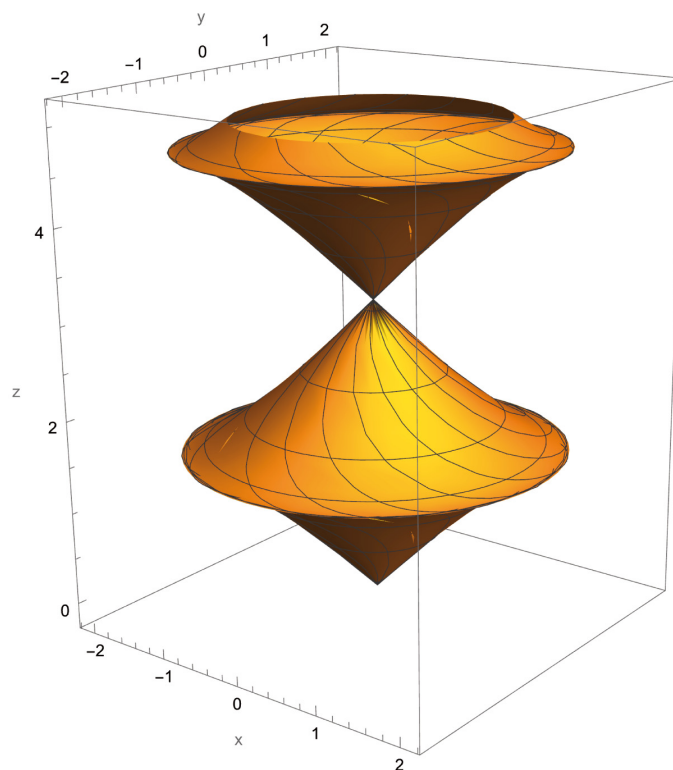


Рис. 4. Поверхность S для второй задачи.

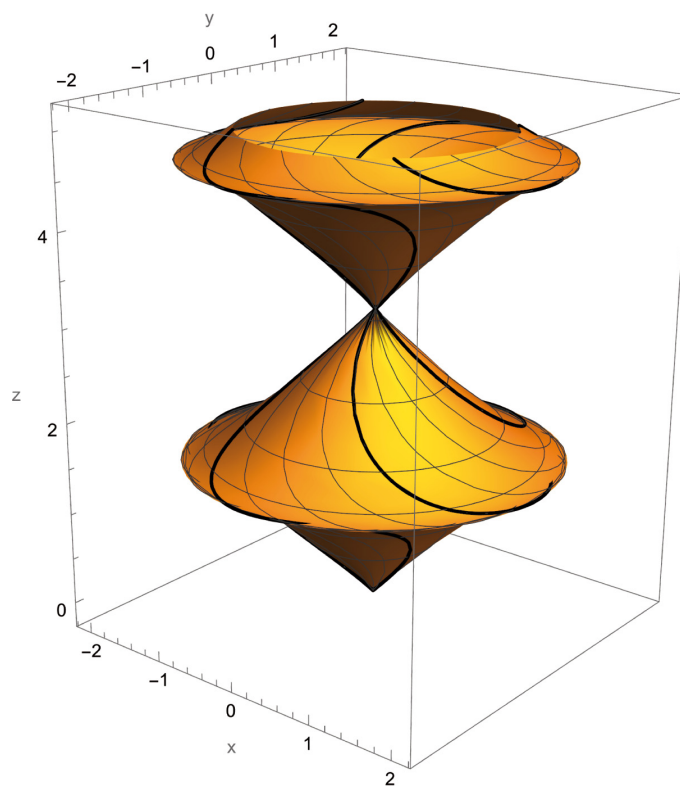


Рис. 5. Поверхность S и аномальные траектории для второй задачи.

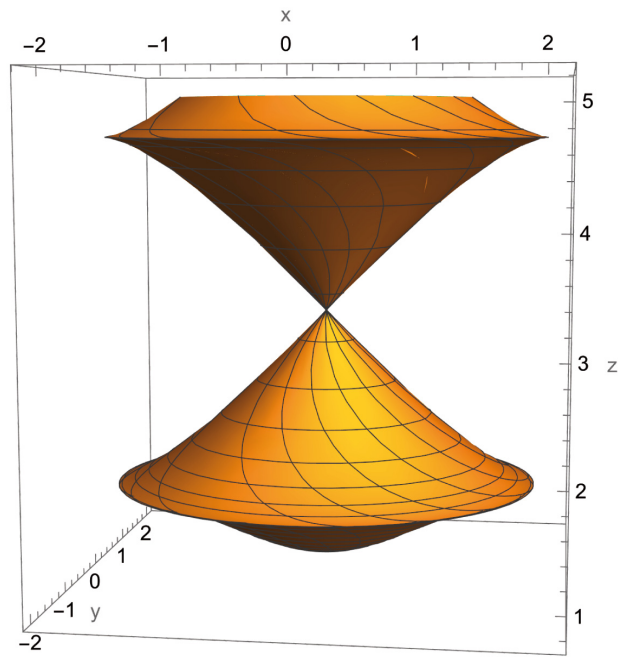


Рис. 6. Волновой фронт для второй задачи.

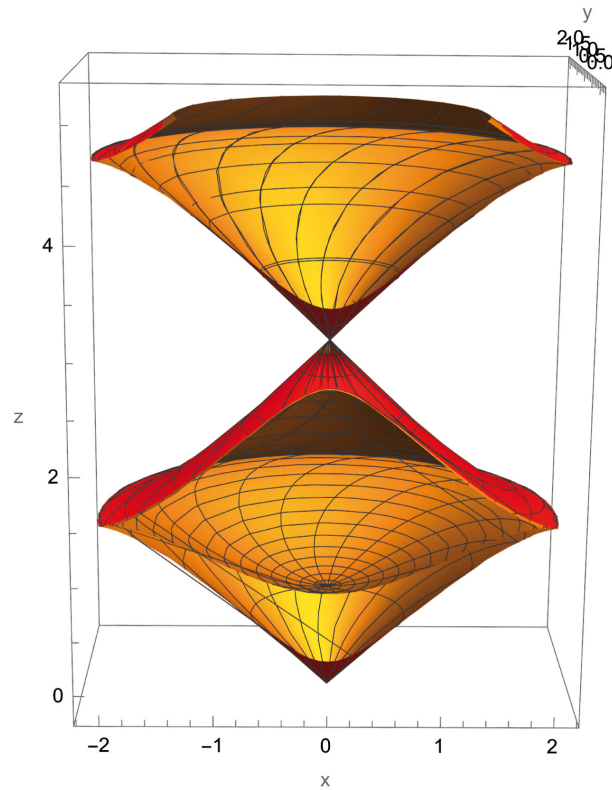


Рис. 7. Поверхность S и волновой фронт для второй задачи.

Доказательство. Непосредственное вычисление на основе формул (3.6)–(3.8) дает

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{(\theta, \varphi, t)} = \frac{\sin^2(t \operatorname{ch} \theta) \operatorname{th}^2 \theta}{\operatorname{sh} \theta} \neq 0$$

при $\theta, t \neq 0$. □

4. Третья лоренцева задача

4.1. Постановка задачи. Третья лоренцева задача на группе Гейзенберга ставится следующим образом:

$$\dot{q} = \sum_{i=1}^3 u_i Y_i, \quad q = (x, y, z) \in G, \quad (4.1)$$

$$u \in U = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 0, u_1 \geq 0\}, \quad (4.2)$$

$$q(0) = q_0 = \operatorname{Id} = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1, \quad (4.3)$$

$$J = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2} dt \rightarrow \max, \quad (4.4)$$

$$Y_1 = X_1 + X_2, \quad Y_2 = X_1 - X_2, \quad Y_3 = -X_1 - X_2 + X_3.$$

Соответствующая лоренцева форма имеет вид

$$g = \frac{1}{2} \omega_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 + \omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_3,$$

где левоинвариантные 1-формы $\omega_i \in \Lambda(G)$ удовлетворяют условиям (2.5). Легко видеть, что $g(X_3(\operatorname{Id})) = 0$, поэтому коммутант алгебры Гейзенберга $\mathbb{R}X_3$ содержится в световом конусе $\{\xi \in T_q G \mid g(\xi) = 0\}$.

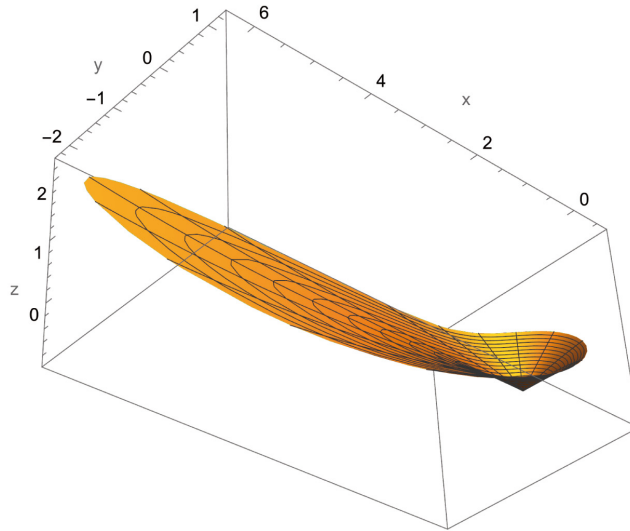


Рис. 8. Поверхность S для третьей задачи.

Схема исследования третьей задачи совпадает со схемой, примененной выше к первым двум задачам, поэтому в этом разделе изложение будет более кратким.

4.2. Множество достижимости.

Теорема 4.1. *Множество достижимости системы (4.1), (4.2) удовлетворяет включению $\mathcal{A} \subset \{(x, y, z) \in G \mid x + y \geq 0\}$, поэтому система не является вполне управляемой.*

Доказательство. Из управляемой системы (4.1), (4.2) получаем $\dot{x} = u_1 + u_2 + u_3$, $\dot{y} = u_1 - u_2 - u_3$, поэтому $\dot{x} + \dot{y} = 2u_1 \geq 0$. \square

В силу ПМП в геометрической форме, если траектория $q(t) = (x, y, z)(t)$ системы (4.1), (4.2) приходит на границу множества достижимости \mathcal{A} , то

$$x = (g_1^0 + g_3^0)^2 t^2 + (-g_1^0 + g_2^0 - g_3^0)t, \quad (4.5)$$

$$y = -(g_1^0 + g_3^0)^2 t^2 - (g_1^0 + g_2^0 + g_3^0)t, \quad (4.6)$$

$$z = -\frac{1}{3}(g_1^0 + g_3^0)^3 t^3 - (g_1^0 g_2^0 + g_2^0 g_3^0)t^2 + g_3^0 t, \quad (4.7)$$

$$g_1^0 = -\sqrt{(g_2^0)^2 + (g_3^0)^2}. \quad (4.8)$$

Эти траектории заполняют поверхность S , изображенную на рис. 8.

Гипотеза 4.1. (1) Поверхность S разделяет G на две связные области, одна из которых (обозначим S_+) содержится в полупространстве $\{(x, y, z) \in G \mid x + y \geq 0\}$,

(2) $\mathcal{A} = S_+$,

(3) для любой точки $q_1 \in \mathcal{A}$ существует оптимальная траектория в задаче (4.1)–(4.4).

4.3. Экстремальные траектории и волновые фронты. Анормальные траектории светоподобны, параметризуются формулами (4.5)–(4.8) и заполняют поверхность S (см. рис. 9).

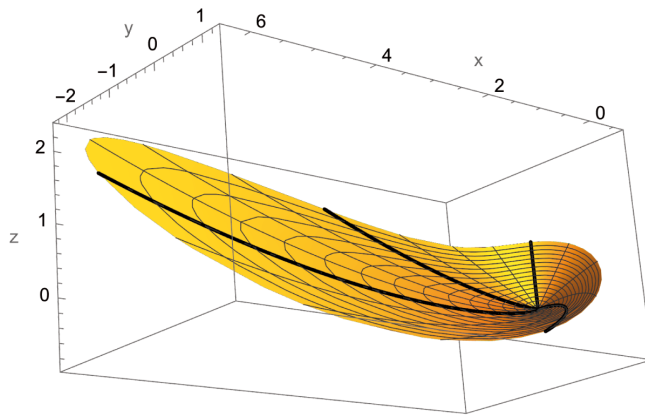


Рис. 9. Поверхность S и анормальные траектории для третьей задачи.

Нормальные траектории времениподобны и параметризуются формулами (4.5)–(4.7),

$$g_1^0 = -\sqrt{1 + (g_2^0)^2 + (g_3^0)^2}.$$

С точностью до перепараметризации времени можно считать, что экстремали принадлежат гиперболоиду $\{H = (-g_1^2 + g_2^2 + g_3^2)/2 = -\frac{1}{2}, g_1 < 0\}$, где $g_i(\lambda) = \langle \lambda, Y_i \rangle$, $i = 1, 2, 3$. Параметризуя этот гиперболоид

$$g_1 = -\text{ch } \theta, \quad g_2 = \text{sh } \theta \cos \varphi, \quad g_3 = \text{sh } \theta \sin \varphi,$$

получаем экспоненциальное отображение $\text{Exp} : (\theta, \varphi, t) \mapsto (x, y, z)$, задающее натурально параметризованные нормальные траектории.

Численные эксперименты показывают, что волновые фронты $W_t = \{\text{Exp}(\theta, \varphi, t) \mid \theta, \varphi \in \mathbb{R}\}$, $t > 0$, регулярно заполняют область S_+ (см. рис. 10).

4.4. Сопряженные точки.

Теорема 4.2. Если $\theta \neq 0$, то нормальная экстремальная траектория $\text{Exp}(\theta, \varphi, t)$, $t > 0$, не содержит сопряженных точек, потому локально оптимальна.

Доказательство. Имеем

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \varphi, t)} = -2t^2 \operatorname{sh} \theta \neq 0$$

при $\theta, t \neq 0$. □

4.5. Оптимальность экстремальных траекторий.

Гипотеза 4.2. Все экстремальные траектории $q(t)$, $t > 0$, глобально оптимальны.

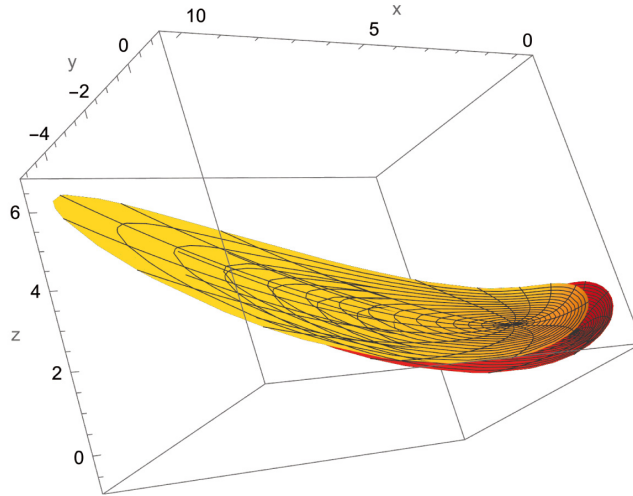


Рис. 10. Поверхность S и волновой фронт для третьей задачи.

5. Заключение

В работе начато исследование трех левоинвариантных лоренцевых структур g на группе Гейзенберга G с разным расположением конуса будущего $C = \{\xi \in T_q G \mid g(\xi) \leq 0\}$ относительно коммутанта $\mathbb{R}X_3$ алгебры Гейзенберга:

- (1) для первой структуры $\mathbb{R}X_3$ содержится внутри C ,
- (2) для второй структуры $\mathbb{R}X_3$ лежит вне C ,
- (3) для третьей структуры $\mathbb{R}X_3$ лежит на границе C .

Эти структуры имеют разное качественное поведение:

- (a) для первой и третьей структур система глобально неуправляема, лоренцевы длиннейшие существуют на множестве достижимости, экстремальные траектории оптимальны,
- (b) для второй структуры система глобально управляема, лоренцевы длиннейшие отсутствуют.

На основании этих наблюдений можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 5.1. Любая левоинвариантная лоренцева структура на группе Ли имеет один из качественных типов (a) или (b).

Было бы интересно проверить справедливость этой гипотезы для группы Гейзенберга и более общих классов групп Ли.

Благодарности

Авторы благодарны А. В. Подобряеву за разъяснения по поводу теоремы 2.2.

Авторы благодарят рецензента за подробный отзыв о статье.

Литература

1. O. Müller, M. Sánchez, “An invitation to Lorentzian geometry”, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **115**, No. 3–4 153–183. (2014).
2. J. K. Beem, P. E. Ehrlich, K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker, New York (1996).
3. А. О. Иванов, А. О. Тужилин, *Лекции по классической дифференциальной геометрии*, Логос, М. (2009).
4. Yu. L. Sachkov, *Introduction to Geometric Control*, Springer, Cham (2022).
5. Ю.Л. Сачков, “Левоинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификации и задачи, интегрируемые в элементарных функциях”, *Успехи мат. наук* **77**, No. 1, 99–163 (2022).
6. А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М. (2005).
7. L. V. Lokutsievskiy, A. V. Podobryaev, “Existence theorem for sub-Lorentzian problems”, *J. Dyn. Control Syst.* **30**, No. 2, 1–12 (2024).
8. S. G. Krantz, H. R. Parks, *The Implicit Function Theorem: History, Theory and Applications*, Birkäuser (2001).

Статья поступила в редакцию 20 сентября 2025 г.

Принята к публикации 18 декабря 2025 г.

С. С. Гончаров, Е. Е. Витяев, Д. И. Свириденко, А. В. Нечесов

ЗАДАЧНЫЙ ПОДХОД: НЕДОСТАЮЩЕЕ ЗВЕНО МЕЖДУ ЧЕЛОВЕКОМ И МАШИНОЙ?

Исследуется возможность применения задачного подхода к построению объяснимых и доверенных систем искусственного интеллекта. Задача описывается в виде упорядоченной шестерки элементов: цель, входные данные, ограничения, выходные данные, критерий решенности и онтология. Подход интегрирует логические методы рассуждений с вероятностным обучением на основе теории функциональных систем. В рамках этой модели исследуется взаимодействие в мультиагентных системах, где агенты могут быть представлены как LLM-агентами, так и логическими агентами, выполняющими верификацию действий LLM-агентов. Таким образом формализованное понятие задачи позволяет осуществлять иерархические декомпозиции, где сложные задачи разбиваются на более простые подзадачи, что позволяет получать отслеживаемые, понятные человеку объяснения посредством цепочки доказательств, удовлетворяющие соответствующему критерию.

1. Введение

На сегодняшний день большие языковые модели (LLM) достигли значительного прогресса в области генерации текстов, решения задач, компьютерного зрения и т.д. Пользователи могут взаимодействовать с этими моделями и получать не только прямые ответы на сложные вопросы, но и сам процесс рассуждения. Особенно важно, что изменив формулировку запроса или инструкции, можно повлиять на рассуждение LLM и тем самым на результат, который она возвращает.

Разница в ответах и способах рассуждений возникает очень часто при небольших изменениях спецификации задачи, предметной области или каких-то других факторов. Это показывает, что способ формулировки проблемы (включая любые указанные методы или критерии) может существенно повлиять на полученное решение. Поэтому, чтобы надежно контролировать рассуждения интеллектуальной системы и гарантировать применение ею соответствующих правил, мы должны строго определять задачи и критерии их решенности.

Для нас особенно важно не только получение конечного ответа, но и сам процесс рассуждений, каким образом этот ответ был получен. Другими словами, процесс рассуждения имеет решающее значение для прозрачности, объяснимости и доверия. В последнее время большие языковые модели уже научились объяснять результат своих действий. Хотя эти объяснения далеки от идеальных, но их появление демонстрирует потенциал интеллектуальных систем в повышении интерпретируемости своих рассуждений, что является важным шагом на пути к укреплению доверия пользователей.

Работа С. С. Гончарова и Е. Е. Витяева выполнена при финансовой поддержке Государственным заданием: «Логические исчисления и семантики, теории моделей и вычислимости» FWNF-2022-001.

С. С. Гончаров: Институт математики им.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; s.s.goncharov@math.nsc.ru.

Е. Е. Витяев: Институт математики им.Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; vityaev@math.nsc.ru.

Д. И. Свириденко: Институт философии и права СО РАН, Новосибирск, Россия; dsviridenko47@gmail.com.

А. В. Нечесов: Исследовательский центр в сфере искусственного интеллекта Новосибирского государственного университета, Новосибирск, Россия; nechessoff@gmail.com.

Английский оригинал: *J. Math. Sci.* **295**, No. 1, 4–14 (2025).

Появление развернутого вывода получения конечного ответа позволило большим языковым моделям перейти из категории «черного ящика» в категорию «проверяемого ответа». Фактически, разработка надежных ИИ-систем, которые являются безопасными, доверенными и подотчетными, стала приоритетной задачей во всем мире [1]. Обеспечение возможности понимания и проверки решений ИИ является ключом к внедрению ИИ в таких чувствительных областях, как финансы, медицина и юриспруденция [2].

Одним из перспективных направлений исследований на сегодняшний день является создание гибридных систем искусственного интеллекта, сочетающих логические модели мышления с нейро-символьными моделями (arXiv.1711.03902). Интегрируя эти два подхода в одной интеллектуальной системе, мы добиваемся того, что такие гибридные системы могут достичь как высокой производительности, так и надежности. Предыдущие работы авторов по логико-вероятностному выводу и теории обучения способствуют этой интеграции.

Парадигма построения интеллектуальных систем, ориентированная на задачи, естественным образом распространяется на многоагентные системы (МАС). В МАС, ориентированной на задачи, в рамках одной системы опционально могут быть сформулированы глобальные цели системы, но также у каждого агента есть свое целеполагание, которое может изменяться в процессе взаимодействия с другими агентами. Цели и задачи агента, в зависимости от текущих условий, могут как быть, так и не быть согласованы с глобальными целями системы. Многоагентные системы на основе гибридного подхода продемонстрировали присущую им отказоустойчивость и динамическую специализацию агентов, что приводит к повышению надежности всей системы. Из этого следует, что гибридная многоагентная система, в которой некоторые агенты управляются с помощью LLM, а другие выступают в качестве логических контроллеров, обеспечивает более надежное и интерпретируемое коллективное поведение. Эти наблюдения показывают, что проектирование, ориентированное на задачи, может эффективно координировать работу различных интеллектуальных агентов, объединяя их сильные стороны для достижения надежных результатов.

Данная работа может представлять интерес не только в связи с теоретическим результатом, но также как решение, позволяющее сделать практические реализации систем искусственного интеллекта доверенными и объяснимыми. Например, такой подход может быть использован при построении цифровых решений для умных городов [3], виртуальных городов [4] и метавселенных [5], в основе которых будут лежать гибридные мультиагентные системы, состоящие из логических агентов и агентов на базе LLM. Обучение агентов будет основано на распределенной базе иерархически упорядоченных знаний.

2. Задачный подход

Согласно работам Ершова и Самохвалова [6, 7] задача определена только тогда, когда формализован критерий ее решенности. Задачу можно представить некоторой логической формулой в некоторой формальной системе. А критерием решенности задачи является истинность формулы при подстановке решения. В более общем плане решение задачи — это вычисляемый термин, в котором значения свободных переменных ищутся в согласии с фиксированными интерпретациями, чтобы соответствовать логической формуле (концепция, восходящая к работе А. Н. Колмогорова 1930-х годов по интуиционистскому исчислению высказываний).

В этом параграфе мы усилим это определение и рассмотрим задачный подход как универсальную парадигму для разработки понятных и заслуживающих доверия систем искусственного интеллекта.

2.1. Основной принцип: Задача как основополагающая единица. Мы исходим из того, что интеллектуальное поведение по своей сути состоит из постоянного решения последовательностей задач. Формально задачу \mathcal{T} можно представить как кортеж:

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{C}_{in}, \mathcal{C}_{const}, \mathcal{O}, \mathcal{K}, \Omega \rangle,$$

где

\mathcal{G} **цель**: желаемое состояние системы/среды (формально или семантически определенное),

\mathcal{C}_{in} **вход**: исходное состояние или входные данные,

- C_{const} **ограничения:** временные, ресурсные, этические или физические ограничения,
 \mathcal{O} **выход:** решение (действие, план или прогноз),
 \mathcal{K} **критерий:** механизм проверки корректности цели \mathcal{G} и оценки ее достижения,
 Ω **онтология:** формальное представление знаний о предметной области.

Эта формулировка отличается от исторических определений тем, что требует формализации таких понятий как критерий решенности/проверяемость (\mathcal{K}), проверку ограничений (C_{const}) и онтологическое обоснование (Ω) [8].

2.2. Объяснимость через формализацию задач. Этот подход позволяет строить системы объяснительного искусственного интеллекта с помощью следующих инструментов.

Объяснения через локализацию: Поведение системы описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Текущая задача } \mathcal{T}_i &\rightarrow \text{Критерий решенности } \mathcal{K}_i \\ &\rightarrow \text{Ответ } \mathcal{O}_i \text{ удовлетворяющий } \mathcal{K}_i. \end{aligned}$$

Проверяемость: Независимая проверка через формализованный критерий решения \mathcal{K} обеспечивает *корректность*:

$$\text{Verify}(\mathcal{O}, \mathcal{K}) = \begin{cases} 1, & \mathcal{O} \models \mathcal{K} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Согласованность целей и действий: Каждое действие сопоставляется определенной задаче \mathcal{T} , предотвращая галлюцинации:

$$\forall a_i \in \mathcal{A}, \exists \mathcal{T}_j : a_i = f(\mathcal{T}_j). \quad (2.2)$$

2.3. Иерархия задач и декомпозиция. Сложные цели разбиваются на подцели.

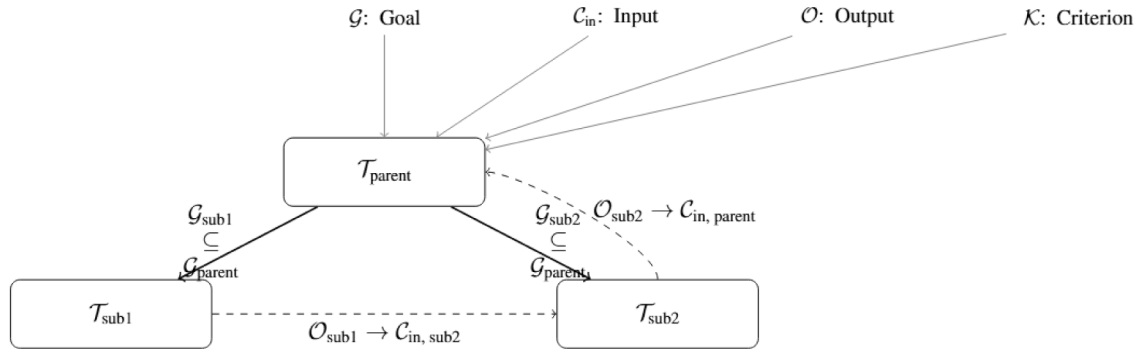


Рис. 1. Схема разбиения задачи на подзадачи.

2.3.1. Параметры необходимые для декомпозиции задач/целей. Для разбиения задач (см. рис. 1) на подзадачи можно оперировать шестью задачными компонентами

$$\mathcal{T} = \langle \mathcal{G}, C_{\text{in}}, C_{\text{const}}, \mathcal{O}, \mathcal{K}, \Omega \rangle,$$

которые можно формализовать следующим образом.

- **Наследование целей (\mathcal{G}):**

$$\mathcal{G}_{\text{sub}_i} \subseteq \mathcal{G}_{\text{parent}} \quad \forall i.$$

Дочерние подцели должны способствовать достижению родительской цели.

- **Data Flow ($C_{\text{in}}, \mathcal{O}$):**

$$\mathcal{O}_{\text{child}_j} \rightarrow C_{\text{in, parent}} \quad \text{или} \quad \mathcal{O}_{\text{child}_j} \rightarrow C_{\text{in, sibling}_k}.$$

Дочерние выходные данные становятся данными для смежных подцелей, либо для родительской цели.

• **Цепи критериев (\mathcal{K}):**

$$\bigwedge_{i=1}^n (\mathcal{O}_{\text{sub}_i} \models \mathcal{K}_{\text{sub}_i}) \Rightarrow \mathcal{O}_{\text{parent}} \models \mathcal{K}_{\text{parent}}.$$

Корректность подзадач влечет корректность родительской задачи.

2.3.2. Вывод конечного результата. Проверкой конечного результата $\mathcal{O}_{\text{parent}}$ будет являться проверка того, насколько решение удовлетворяет всем критериям задачи на протяжении всей иерархической декомпозиции. Для этого формируется рекурсивно структурированный список со следующими компонентами для каждой задачи \mathcal{T}_i :

T1 Цель \mathcal{G}_i : Конкретная цель соответствующей подзадачи \mathcal{T}_i .

T2 Критерий решенности \mathcal{K}_i : Формальные правила, используемые для проверки решенности задачи.

T3 Решение \mathcal{O}_i : Решение задачи \mathcal{T}_i .

T4 Доказательство π_i : Доказательство того, что ответы $\mathcal{O}_i \models \mathcal{K}_i$ верны, если они попадают под один из следующих критериев:

- верный логический вывод (для символьных задач),
- необходимый уровень доверия (для вероятностных задач),
- получен результат внешней проверки от доверенного источника.

TS Подзадачи: Для сложных задач аналогичные проверки проходят также все дочерние подзадачи.

ST1 Проверка всех $\tau_j, j = 1 \dots m$.

ST2 Допустимость перехода от решения подзадач к конечному решению:

$$\pi_{\text{comp}} \vdash \left(\bigwedge_{j=1}^m (\mathcal{O}_j \models \mathcal{K}_j) \right) \Rightarrow (\mathcal{O}_{\text{parent}} \models \mathcal{K}_{\text{parent}}).$$

2.3.3. Свойства трассировки.

- **Полнота:** Проверка всех задачи на пути нахождения основного решения.
- **Проверяемость:** Каждое π_i можно независимо проверить.
- **Объяснимость:** Человекопонятное обоснование на всех уровнях.
- **Согласованность:** Все π_i должны присутствовать в цепочке доказательств.

2.3.4. Значимость параметров.

1. **Объяснимость:** Параметр, задающий список дочерних подзадач:

$$\text{Trace}(\mathcal{O}_{\text{parent}}) = \bigcup [\mathcal{G}_i, \mathcal{K}_i, \mathcal{O}_i]_{i=1}^n.$$

2. **Локализация ошибки:** Если мы нашли подзадачу, решение которой не удовлетворяет критерию решенности, то это решение целиком также не подходит и для главной задачи:

$$\exists \mathcal{T}_k : \mathcal{O}_k \not\models \mathcal{K}_k \Rightarrow \text{Fault}(\mathcal{T}_k).$$

3. **Архитектура гибридной системы:** Определяем, какие именно данные и задачи получает на вход каждый из агентов в такой гибридной среде:

$$\begin{aligned} \text{Symbolic Agent} &\rightarrow \mathcal{K}, \mathcal{C}_{\text{const}}, \\ \text{LLM Agent} &\rightarrow \mathcal{G}, \mathcal{C}_{\text{in}}. \end{aligned}$$

4. **Верификация доверия к системе:** Описывает формальный метод верификации доверия к системе через проверку соответствия всех ее компонентов установленным спецификациям (критериям):

$$\text{Trust}(\mathcal{T}) = \prod_{i=1}^n \text{sgn}(\mathcal{O}_i \models \mathcal{K}_i),$$

где $\text{sgn}(\mathcal{O}_i \models \mathcal{K}_i)$ равен 1, если $\mathcal{O}_i \models \mathcal{K}_i$, и 0 иначе.

2.4. Принципы проектирования доверенных интеллектуальных систем.

P1 Задачно-ориентированная архитектура: Архитектура системы определяется решаемыми задачами: прикладная область $\rightarrow \{\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_n\} \rightarrow$ компоненты системы.

P2 Критерии решенности: Для каждой из решаемых задач должен быть четко определен критерий решенности \mathcal{K}

$$\forall \mathcal{T}_i \in \mathfrak{T}, \exists \mathcal{K}_i : \text{isFormal}(\mathcal{K}_i) \vee \text{isProbabilistic}(\mathcal{K}_i).$$

P3 Онтологическая привязка: Общая онтология Ω согласование между человеком и ИИ:

$$\text{Interpret}_h(\Omega) \approx \text{Interpret}_{AI}(\Omega).$$

P4 Объяснимость: Объяснение идет через решения подзадач, удовлетворяющих соответственным критериям решенности \mathcal{K}_j :

$$\text{Explain}(\mathcal{O}) = \bigcup [\mathcal{T}_i, \mathcal{K}_i, \text{Proof}(\mathcal{O}_i \models \mathcal{K}_i)].$$

P5 Обучение интеллектуальных систем на основе задач: Знания приобретаются через решаемые задачи:

$$\text{Learn}(\mathcal{D}, \mathcal{T}) \rightarrow \{\text{Improve}(\mathcal{K}), \text{RefineRules}(\mathcal{T})\}.$$

Этот подход позволяет рассматривать задачи как фундаментальные строительные блоки для построения доверенного ИИ. Делая упор на критерии решенности \mathcal{K}_i , онтологические обоснования Ω_j и иерархическую структуру знание, которая обеспечивает

- корректность всех логических переходов,
- механизмы координации агентов,
- получение новых знаний.

Далее мы более подробно рассмотрим функционирование агентов и их обучение. Для этого будем использовать теорию функциональных систем (ТФС) по Анохину, которая позволит нам строить системы доверенного искусственного интеллекта.

3. Функционирование и обучение агентов

Рассмотрим общую модель работы агента на основе ТФС. Будем считать, что система управления агента работает в дискретном времени $t = 0, 1, \dots$. Агент обладает набором сенсоров S_1, \dots, S_n , которые характеризуют как его внутреннее состояние, так и внешнюю среду. Для каждого сенсора S_i существует набор возможных значений VS_i .

Агент также имеет набор возможных действий A_1, \dots, A_m в среде. Любое действие, выполненное в момент времени t_i , может привести к изменениям в окружающей среде к моменту $t_i + 1$, что, в свою очередь, изменит показания его сенсоров.

Поскольку агент «воспринимает» мир исключительно через свои сенсоры, с точки зрения агента состояние системы в любой момент времени может быть представлено вектором значений его сенсоров $V(t) = (v_1, \dots, v_n)$, где $v_i \in VS_i$ — значение i -го сенсора в момент времени t . Состояния с одинаковыми показаниями сенсоров неразличимы для агента. Обозначим множество всех возможных состояний агента как $SS = (VS_1 \times VS_2 \times \dots \times VS_n)$.

В общем случае, поскольку сенсоры агента имеют физические ограничения (например, чувствительность, диапазон), то при выполнении действия в состоянии S система может перейти в одно или несколько возможных состояний с точки зрения агента. Таким образом, действие A_i можно определить как функционал, переводящий систему «агент—среда» из одного состояния в другое с определенной вероятностью

$$A_i : (SS_i) \rightarrow (SS \times P),$$

где SS_i — подмножество состояний SS , для которых действие A_i имеет смысл (исполнимо), а $SS \times P$ — множество пар (ss, p) , где $ss \in SS$ — конечное состояние, а $p \in [0, 1]$ — вероятность его достижения из начального состояния $ss \in SS_i$ при выполнении действия A_i .

Определим понятия события и истории событий. Событие $E = (ss_0, ss_e, A)$ представляет собой единичный случай перевода системы из состояния $ss_0 \in SS_0$ в состояние $ss_e \in SS$ путем выполнения действия A_0 . История H определяется как набор пар (e, t) , где e — событие, а t — время.

Определив общую модель системы «агент–среда», перейдем к более конкретной дискретной модели.

На множестве значений сенсоров VS определим набор предикатов $PS = \{PS_1, \dots, PS_k\}$, каждый из которых задает условие, вычисляемое на основе значений сенсоров.

Таким образом, состояние системы можно представить вектором $S = (ps_1, \dots, ps_k)$ всех значений предикатов из PS .

Цель агента — достичь определенной цели. Определим цель как подмножество состояний системы, в котором определенные предикаты из PS имеют значения, однозначно определяющие достижение цели G :

$$G = \{ps_1, \dots, ps_l\}, \quad l \leq k.$$

Уточним понятия события и истории событий для дискретной модели. Событие $E = (S_0, S_e, A)$ представляет собой единичный переход из состояния $S_0 = (ps_{01}, \dots, ps_{0k})$ в состояние $S_e = (ps_{e1}, \dots, ps_{ek})$ посредством действия A . История H — это набор пар (e, t) , где e — событие, а t — время.

В соответствии с общей теорией функциональных систем Анохина достижение цели осуществляется посредством функциональных систем. Функциональная система FS^{rank} — это кортеж

$$(G^{\text{rank}}, R_1, \dots, R_v, FS_1^{\text{rank}+1}, \dots, FS_w^{\text{rank}+1}), \quad w \leq v,$$

где G^{rank} — основная цель, FS^{rank} ; R_i — правила, сформированные посредством семантического вероятностного вывода [2] на основе истории событий; $FS_i^{\text{rank}+1}$ — подчиненные функциональные системы, активирующие определенные правила из R_1, \dots, R_v .

Правило R — преобразование $S_0 \xrightarrow[p]{A} S_e$, где

- S_0 — начальное состояние системы $(ps_{01}, \dots, ps_{0n})$,
- S_e — конечное состояние системы $(ps_{e1}, \dots, ps_{en})$ (для правил, принадлежащих FS^{rank} , конечное состояние является основной целью G^{rank}),
- A — действие, вызывающее переход из состояния в состояние,
- p — вероятность перехода.

Вероятность p правила R — это значение от 0 до 1, вычисляемое следующим образом: если a — количество случаев, когда S_0 было начальным состоянием, а b — количество случаев, когда действие A перевело S_0 в S_e , то $p = b/a$. Назовем a и b *статистикой правила*.

Отметим, что вероятности правил p и вероятности переходов из множества P — разные величины. Цель FS в процессе накопления опыта — максимально приблизить вероятности правил к реальным вероятностям среды.

Функциональная система FS^{rank} может создавать подчиненные системы $FS^{\text{rank}+1}$, цель которых — достижение подцелей $G^{\text{rank}+1}$ (состояний системы), для которых FS^{rank} содержит эффективные правила для достижения основной цели G^{rank} (рис. 1).

Когда система FS^{rank} (где $\text{rank} = 0, 1, \dots$) получает запрос на достижение цели G^{rank} , она либо выбирает правило R_i^{rank} с наибольшей вероятностью из собственного набора правил, либо делегирует управление подчиненной системе $FS^{\text{rank}+1}$, достижение цели $G^{\text{rank}+1}$, которой позволяет использовать правила из собственного набора FS^{rank} с более высокой вероятностью (рис. 2). Подчиненные системы выбираются только тогда, когда либо в FS^{rank} не существует применимого правила для текущего состояния, либо вероятность применимого правила R_i^{rank} ниже составной вероятности достижения $G^{\text{rank}+1}$ подчиненной системой $FS^{\text{rank}+k}$ и применения некоего другого правила R_i^{rank} , $k > 0$.

Если выбрана подчиненная система $FS^{\text{rank}+1}$, она получает запрос на достижение подцели $G^{\text{rank}+1}$, после успешного достижения которой система FS^{rank} выбирает правило R_i^{rank} с наибольшей вероятностью предсказывающее G^{rank} и выполняет соответствующее действие. После этого

система применяет подкрепление/наказание к использованным правилам на основе полученного результата. Если $G^{\text{rank}+1}$ не достигнута, то FS^{rank} возвращает «цель не достигнута».

FS^{rank} может создавать подчиненные системы $FS^{\text{rank}+1}$. Для задания $G^{\text{rank}+1}$ выбирается правило с наибольшей вероятностью из FS^{rank} , и его начальное состояние S_0 определяется как $G^{\text{rank}+1}$. Для построения набора правил $FS^{\text{rank}+1}$ с целевым состоянием $G^{\text{rank}+1}$ используются исторические события и семантический вероятностный вывод [9].

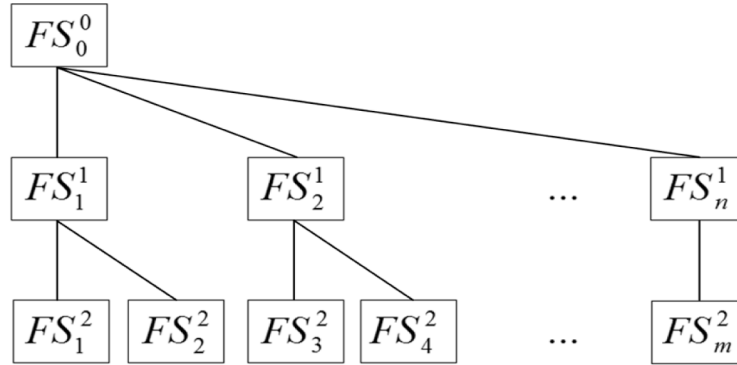


Рис. 2. Иерархия функциональных систем.

При выполнении выбранного правила система выполняет действие A и переходит в новое состояние. Это состояние сравнивается с G^{rank} . В случае успеха правило подкрепляется (к статистике добавляется положительный опыт); в противном случае наказывается (добавляется отрицательный опыт). Соответствующее правило уточняется в соответствии с семантическим вероятностным выводом [9].

4. Индуктивный вывод знаний в рамках задачного подхода

Предметная область (ПО) может быть формально представлена как эмпирическая система $\mathfrak{S} = \langle A, \Omega \rangle$, где A — множество объектов предметной области, а Ω представляет доменную онтологию ПО — полный набор отношений и операций, интерпретируемых в рамках ПО [10]. Для доверительных ИИ-систем интерпретируемость человеком онтологии предметной области существенна.

Индуктивный вывод знаний представляет собой процесс вывода общих утверждений на основе конкретных экземпляров. При реализации этого процесса в машинном обучении признаки и атрибуты объектов должны обрабатываться так, чтобы давать знания, интерпретируемые в рамках онтологии ПО.

Рассмотрим проблему обнаружения теории $\text{Th}(\mathfrak{S})$ ПО на эмпирической системе. Мы полагаем, что $\text{Th}(\mathfrak{S})$ состоит из универсальных формул (более общие случаи рассмотрены в [11]). Известно, что любое множество универсальных формул логически эквивалентно совокупности правил вида

$$\forall x_1, x_2 \dots (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0), \quad k \geq 0, \quad (4.1)$$

где A_0, A_1, \dots, A_k — литералы. Таким образом, $\text{Th}(\mathfrak{S})$ может быть корректно охарактеризована как набор правил (4.1).

Заметим, что любое правило $C = (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$ логически следует из своих подправил вида

$$(A_{i1} \& \dots \& A_{in} \Rightarrow A_0),$$

где

$$\{A_{i1}, \dots, A_{in}\} \subset \{A_1, \dots, A_k\}, \quad 0 \leq n < k,$$

$$(A_{i1} \& \dots \& A_{in} \Rightarrow A_0) \vdash (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0).$$

Это допускает теоретическое упрощение. Определим закон на $\mathfrak{S} = \langle A, \Omega \rangle$ как правило C (формы (4.1)), которое выполнимо на \mathfrak{S} , в то время как ни одно из его собственных подправил не выполнимо на \mathfrak{S} . Обозначив через L множество всех таких законов на \mathfrak{S} , можно доказать, что $L \vdash \text{Th}(\mathfrak{S})$ [9].

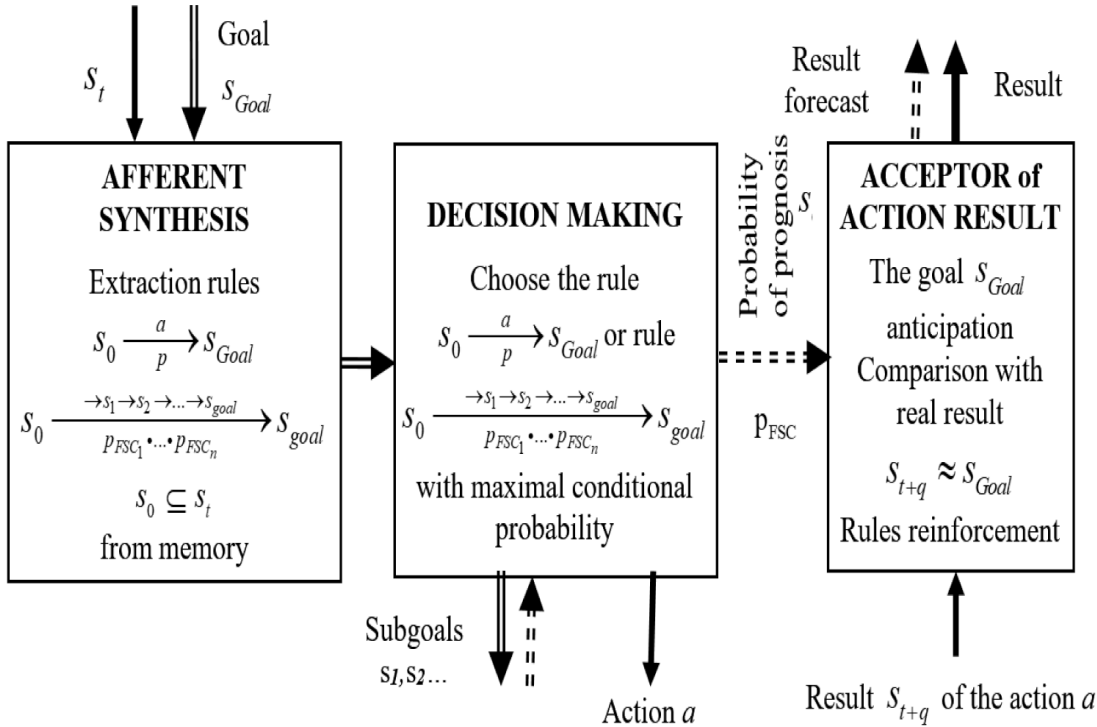


Рис. 3. Функциональная система.

Определим вероятностную меру η на $\mathfrak{S} = \langle A, \Omega \rangle$ согласно [12]. Вероятностный закон на \mathfrak{S} — это правило $C = (A_1 \& \dots \& A_k \Rightarrow A_0)$, условная вероятность которого определена формулой

$$\eta(A_0 \& A_1 \& \dots \& A_k) / \eta(A_1 \& \dots \& A_k)$$

($\eta(A_1 \& \dots \& A_k) > 0$) и строго больше условных вероятностей всех его подправил. Сильнейший вероятностный закон (СВЗ) представляет собой вероятностный закон, который не является собственным подправилем любого другого вероятностного закона.

Обучение предметной области посредством индуктивного вывода вероятностных знаний на \mathfrak{S} полностью реализуется семантическим вероятностным выводом.

Последовательность

$$C_1 \sqsubset C_2 \sqsubset \dots \sqsubset C_n, \quad C_i = (A_1^i \& \dots \& A_{k_i}^i \Rightarrow G)$$

вероятностных законов является семантическим вероятностным выводом для СВЗ C_n , предсказывающего факт G , если

- (1) $C_1 = (\Rightarrow G)$,
- (2) каждое правило C_i является собственным подправилем правила C_{i+1} ,
- (3) $\eta(C_i) < \eta(C_{i+1})$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Предсказательная способность знаний является важнейшей. Определение СВЗ разрешает проблему статистической двусмысленности [9, 13], которая обеспечивает непротиворечивость предсказаний.

Совокупность всех СВЗ, предсказывающих факт G , вместе с их семантическим вероятностным выводом образует дерево семантического вероятностного вывода для G . В этом дереве максимально специфичный вероятностный закон (МСВЗ) (G) есть СВЗ с максимальной условной вероятностью. Полное множество МСВЗ объединяет все НСВЗ(G), $G \in \Omega$.

Ключевым результатом является включение $L \subseteq \text{НСВЗ}$ [9, 11], показывающее, что МСВЗ расширяет $\text{Th}(\mathfrak{S})$, включая как детерминированные, так и вероятностные правила. Поскольку МСВЗ сохраняет логическую непротиворечивость [9, 11, 13], оно корректно представляет вероятностную теорию $\mathfrak{S} = \langle A, \Omega \rangle$.

Данный метод индуктивного вывода знаний реализован платформой «Discovery», которая была успешно применена для решения множества практических задач.

5. Заключение

Задачный подход формирует целостную и математически строгую основу для создания ИИ-систем, которые обладают объяснимостью, проверяемостью и соответствием заданным человеком целям. Формулируя каждую проблему как формальную задачу с явными целями, ограничениями, критериями и онтологическими основаниями, данный подход гарантирует, что процесс рассуждения становится прозрачным и подотчетным.

Данная методология поддерживает иерархическую декомпозицию сложных проблем, позволяя получать прослеживаемые решения, в которых каждый шаг может быть независимо верифицирован. Она также естественным образом допускает использование гибридных архитектур ИИ, объединяющих широкие лингвистические и контекстуальные способности больших языковых моделей с точностью и надежностью символьных вычислений, а также многозадачных систем, где различные компоненты взаимодействуют для достижения общих целей.

Эти характеристики делают задачный подход перспективным направлением для разработки устойчивых, заслуживающих доверия ИИ-систем, устойчивых к таким ошибкам, как галлюцинации. Хотя для оценки его эффективности в различных предметных областях требуется дальнейшая практическая проверка, теоретическая согласованность и архитектурная гибкость подхода указывают на его потенциально ключевую роль в создании ИИ-систем следующего поколения, в том числе общего интеллекта.

Литература

1. L. Floridi, J. Cowls, “A unified framework of five principles for AI in society”, *Harvard Data Sci. Rev.* 1.1 (2019)
2. C. Rudin, “Stop explaining black box models for high stakes decisions and use interpretable models instead”, *Nature Mach. Intell.* 1, 206–215 (2019).
3. A. Nechesov, J. Ruponen, “Empowering government efficiency through civic intelligence: Merging Artificial Intelligence and blockchain for smart citizen proposals”, *Technologies* 12, No. 12 (2024).
4. A. Nechesov, I. Dorokhov, J. Ruponen, “Virtual cities: from digital twins to autonomous ai societies”, *IEEE Access* 13, 13866–13903, (2025).
5. A. Nechesov, S. Barykin, “One AI, One World: A global AI strategy by the international AI committee (IAIC)”, *Syst. Inform.* 26, 77–102 (2025).
6. Ю. Л. Ершов, К. Ф. Самохвалов, “О новом подходе к философии математики”, *Выч. сист.* 104, 141–148 (1984).
7. Ю. Л. Ершов, К. Ф. Самохвалов, *Современная философия математики: недомогания и лечение*, Параллель, Новосибирск (2007).
8. T. R. Gruber, “Toward principles for the design of ontologies used for knowledge sharing?” *Int. J. Hum.-Comput. Stud.* 43, No. 5-6, 907–928 (1995).
9. E. Vityaev, “The logic of prediction”, In: *Mathematical Logic in Asia*, 263–276, World Scientific, Hackensack, NJ (2006).
10. N. Guarino, D. Oberle, S. Staab, “What is an ontology?” In: *Handbook on Ontologies*, Springer (2009).

11. Е. Витяев, “Семантический вероятностный вывод предсказаний”, *Изв. ИГУ, Сер. мат.* **21**, 33–50 (2017).
12. J. Y. Halpern, “An analysis of first-order logics of probability”, *Artif. Intell.* **46**, No. 3, 311–350 (1990).
13. Е. Vityaev, S. Odintsov, “How to predict consistently?” In: *Trends in Mathematics and Computational Intelligence*, pp. 35–41, Springer, Cham (2019).

Статья поступила в редакцию 9 августа 2025 г.

Принята к публикации 12 октября 2025 г.

Н. В. Крылов

О ПРОДОЛЖЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССА ВМО В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Доказано, что любую функцию a класса ВМО^x в кубе в \mathbb{R}^{d+1} можно продолжить до функции \hat{a} класса ВМО^x во всем пространстве \mathbb{R}^{d+1} , причем ее полунорма $[a]^\sharp$ сохраняется почти без изменения, которая, грубо говоря, является L_∞ -нормой максимальной функции по t и ВМО -нормой по x .

Мы докажем, что функции, заданные в параболическом параллелепипеде, измеримые по t и принадлежащие пространству ВМО по x , можно продолжить на все пространство «контролируемым» образом, так что ВМО^x -характеристика продолженной функции контролируется ВМО^x -характеристикой исходной функции. Наш интерес к этой проблеме был обусловлен необходимостью продолжить матричнозначные функции (коэффициенты при старших производных в параболических операторах) с сохранением свойств невырожденности и ограниченности.

В случае не зависящих от t функций проблема продолжения функций класса ВМО из области на все пространство с контролируемым увеличением ВМО -полунормы привлекала внимание многих исследователей. Первые результаты по решению этой задачи получены Джонсом [1], который доказал мощную теорему, дающую необходимые и достаточные условия на область, при которых такое продолжение возможно. Позднее (см. [2] и библиографию там же) оказалось, что условия Джонса означают по сути условие равномерности области (см. определение, например, в [2], где авторы указывают, что шары являются равномерными областями). Результаты Джонса относятся к ограниченным областям, случай неограниченных областей изучался, например, в [3].

Напомним, что если \mathcal{O} — область в $\mathbb{R}^d = \{x = (x^1, \dots, x^d) : x^i \in \mathbb{R}\}$ и u — функция на \mathcal{O} , то пишем $u \in \text{ВМО}(\mathcal{O})$, если для любого куба $Q = (a, b)^d \subset \mathcal{O}$ величина

$$\frac{1}{|Q|^2} \int_Q \int_Q |u(x) - u(y)| dx dy \quad (|Q| = \text{vol}Q) \quad (1)$$

ограничена константой, не зависящей от Q . Наименьшая из таких констант обозначается через $[u]_{\text{ВМО}(\mathcal{O})}$. Если величина (1) стремится к нулю при $|Q| \downarrow 0$, мы пишем $u \in \text{ВМО}(\mathcal{O})$.

До сих пор при использовании функций класса ВМО в уравнениях с частными производными столь общие области \mathcal{O} , как в [1]–[3], не рассматривались, но даже для простых областей проверка условий из цитированных работ требует погружения в глубокую область математики, довольно далекую от теории уравнений с частными производными. Более того, иногда требуется, чтобы продолженные функции обладали дополнительными свойствами такими, как обращение в нуль на некотором расстоянии от исходной области. Например, автор статьи [4] «с нуля» строит доказательство того, что функции класса ВМО в ограниченных областях с липшицевой границей можно продолжить до функций класса ВМО в \mathbb{R}^d таким образом, чтобы продолжение обращалось в нуль вне несколько большей области. Стоит отметить, что подход из [4] не работает для продолжения функций из ВМО .

Следующая теорема доказана в [5] без использования сложной терминологии из [1]–[3] (здесь формулировка слегка изменена).

Н. В. Крылов: Университет Миннесота, Миннеаполис, США; nkrylov@umn.edu.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **294**, No. 6, 900–905 (2025).

Теорема 1. Пусть $A_1 = (-1, 1)^d$, $A_2 = (-2, 2)^d$ и $a \in \text{ВМО}(A_2)$. Тогда существует функция \hat{a} на \mathbb{R}^d такая, что

$$\hat{a} = a \text{ на } A_1, \quad \hat{a} = \frac{1}{|A_2|} \int_{A_2} a \, dx \text{ вне } A_2, \quad (2)$$

$$[\hat{a}]_{\text{ВМО}(\mathbb{R}^d)} \leq N[a]_{\text{ВМО}(A_2)}, \quad (3)$$

где N не зависит от a .

Следствие 1. Для $\delta \in (0, 1]$ определим \mathbb{S}_δ как множество симметричных $d \times d$ -матриц, собственные значения которых принадлежат $[\delta, \delta^{-1}]$, и предположим, что задана \mathbb{S}_δ -значная функция $a \in \text{ВМО}(A_2)$. Тогда существует \mathbb{S}_δ -значная функция \hat{a} на \mathbb{R}^d такая, что выполняются (2) и (3).

Действительно, во-первых, это следует из доказательства в [5]. Но давайте обозначим через \check{a}^{ij} функцию, полученную применением теоремы 1 к a^{ij} , а затем определим \hat{a} как проекцию $\check{a} = (\check{a}^{ij}, i, j = 1, \dots, d)$, рассматриваемую как точку в пространстве всех $d \times d$ -матриц, на \mathbb{S}_δ . Затем заметим, что если Π — оператор проекции, то

$$|\Pi(\check{a}(x)) - \Pi(\check{a}(y))| \leq |\check{a}(x) - \check{a}(y)|.$$

В отличие от следствия 1 здесь мы имеем дело с \mathbb{S}_δ -значными функциями $a(t, x)$, $(t, x) \in \mathbb{R}^{d+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, которые измеримы по t и в некотором смысле являются функциями класса ВМО по x . Для $x \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\|x\| = \max_{i \leq d} |x^i|.$$

Если $\Gamma \subset \mathbb{R}^{d+1}$, мы обозначаем через $|\Gamma|$ его меру Лебега, и когда это имеет смысл для функций $f(t, x)$, мы обозначаем

$$\int_{\Gamma} f \, dxdt = \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} f \, dxdt.$$

Для $\rho > 0$ совокупность множеств $x + (0, \rho)^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, обозначается \mathbb{C}_ρ . Совокупность множеств $(s, s + \rho^2) \times C$, $s \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{C}_\rho$ обозначается \mathbb{Q}_ρ . Если $Q = (a, b) \times C \in \mathbb{Q}_\rho$, положим $\rho_Q = \rho$, $Q^z = (a, b)$, $Q^\tau = C$. Пусть $\mathcal{P} = (0, 1)^{d+1}$.

Для областей $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ обозначаем через $\mathbb{Q}_\rho(\mathcal{O})$ совокупность множеств $Q \in \mathbb{Q}_\rho$ таких, что $Q \subset \mathcal{O}$.

Для области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{d+1}$, $\rho_0 \in (0, \infty]$ и функции a , заданной в \mathcal{O} , пишем $a \in \text{ВМО}_{\rho_0}^x(\mathcal{O})$, если

$$[a]_{\rho_0, \mathcal{O}}^\# := \sup_{\rho \leq \rho_0} \sup_{Q \in \mathbb{Q}_\rho(\mathcal{O})} \int_{Q^z} \int_{Q^\tau} \int_{Q^\tau} |a(t, x) - a(t, y)| \, dx dy dt < \infty.$$

Замечание 1. Если a не зависит от t и $a \in \text{ВМО}_1^x(\mathcal{P})$, то $a \in \text{ВМО}((0, 1)^d)$. Однако, если a не зависит от x , то $[a]_{\rho_0, \mathcal{O}}^\# = 0$. Это в некоторой степени оправдывает обозначение ВМО^x .

Теорема 2. Пусть a — вещественная функция класса $\text{ВМО}_1^x(\mathcal{P})$. Тогда существует вещественная функция \hat{a} на \mathbb{R}^{d+1} такая, что

$$a = \hat{a} \text{ на } \mathcal{P}, \quad [\hat{a}]_{\infty, \mathbb{R}^{d+1}}^\# \leq 3^{2+2d} [a]_{1, \mathcal{P}}^\#. \quad (4)$$

Доказательство теоремы основано на следующем частном случае формулы замены переменных (см. [6, п. 3.3.3, теорема 2]).

Теорема 3. Пусть $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ имеет конечную константу Липшица и $\hat{a} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Обозначим через J якобиан φ . Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{a} J \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{x: \varphi(x)=y} \hat{a}(x) \right) dy. \quad (5)$$

Замечание 2. Если $\hat{a}(x) = a(\varphi(x))$, то уравнение (5) приобретает вид

$$\int_{\mathbb{R}^d} a(\varphi(x)) J(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} a(y) \# \{x : \varphi(x) = y\} dy. \quad (6)$$

Эта формула доказана, если $\hat{a} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. По очевидным причинам она также верна для любого $a \geq 0$.

Доказательство теоремы 2. Положим $a(t, x) = 1$, если $(t, x) \in \partial\mathcal{P}$. Введем 2-периодическую функцию $\varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, такую, что $\varphi(t) = t$ на $[0, 1]$ и $\varphi(t) = 1 - t$ на $[1, 2]$, и положим

$$\varphi(x) = (\varphi(x^1), \dots, \varphi(x^d)), \quad \hat{a}(t, x) = a(\varphi(t), \varphi(x)).$$

Заметим, что константа Липшица отображения $(t, x, y) \rightarrow (\varphi(t), \varphi(x), \varphi(y))$ равна единице и его якобиан равен единице почти всюду. Следовательно, согласно замечанию 2, для любого $Q \in \mathbb{Q}$

$$\begin{aligned} I_Q &:= \int_{Q^z} \int_{Q^\tau} \int_{Q^\tau} |\hat{a}(t, x) - \hat{a}(t, y)| dx dy dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d+1}} |a(\varphi(t), \varphi(x)) - a(\varphi(t), \varphi(y))| I_{Q^z}(t) I_{Q^\tau}(x) I_{Q^\tau}(y) dx dy dt \\ &= \int_{(0,1)^{2d+1}} |a(t_1, x_1) - a(t_1, y_1)| \sigma_Q^z(t_1) \sigma_Q^\tau(x_1) \sigma_Q^\tau(y_1) dx_1 dy_1 dt_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\sigma_Q(t_1)$ — число точек в $\{t \in Q^z : \varphi(t) = t_1\}$, а $\sigma_Q(x_1)$ — число точек в $\{x \in Q^\tau : \varphi(x) = x_1\}$.

Случай $\rho_Q \leq 1$. В этом случае

$$\sigma_Q(t_1) \leq 2, \quad \sigma_Q(x_1), \sigma_Q(y_1) \leq 2^d. \quad (8)$$

Действительно, для заданного временного интервала $[c, c+1]$ каждое значение φ на этом интервале может повторяться не более двух раз. То же верно для $x^i \in [c, c+1]$ таких, что $\varphi(x^i)$ принимает фиксированное значение. Поскольку имеется d координат x^i , получаем $\sigma_Q(x_1) \leq 2^d$.

Кроме того, если $\sigma_Q^z(t'_1) \neq 0$ и $\sigma_Q^z(t''_1) \neq 0$, то для некоторых $t', t'' \in Q^z$ имеем

$$|t'_1 - t''_1| = |\varphi(t') - \varphi(t'')| \leq |t' - t''| \leq \rho_Q^2.$$

Следовательно, существует $t_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$\{t_1 \in (0, 1) : \sigma_Q^z(t_1) \neq 0\} \subset [t_0 - \rho_Q^2/2, t_0 + \rho_Q^2/2] \subset [0, 1].$$

Аналогично, если $\sigma_Q^\tau(x'_1) \neq 0$ и $\sigma_Q^\tau(x''_1) \neq 0$, то для некоторых $x', x'' \in Q^\tau$

$$\|x'_1 - x''_1\| = \|\varphi(x') - \varphi(x'')\| \leq \rho_Q.$$

Таким образом, существует $\hat{C} \in \mathbb{C}_{\rho_Q}$, $\hat{C} \subset [0, 1]^{d+1}$, такая, что $\{x_1 \in (0, 1)^d : \sigma_Q^\tau(x_1) \neq 0\} \subset \hat{C}$. Для $\hat{Q} = (t_0 - \rho_Q^2/2, t_0 + \rho_Q^2/2) \times \hat{C}$ отсюда следует, что $\hat{Q} \in \mathbb{Q}_{\rho_Q}(\mathcal{P})$,

$$\begin{aligned} I_Q &\leq 2^{2d+1} \int_{\hat{Q}^z} \int_{(0,1)^d} \int_{(0,1)^d} |a(t, x) - a(t, y)| I_{\hat{Q}^\tau}(x) I_{\hat{Q}^\tau}(y) dx dy dt \\ &= 2^{2d+1} \int_{\hat{Q}^z} \int_{\hat{Q}^\tau} \int_{\hat{Q}^\tau} |a(t, x) - a(t, y)| dx dy dt \leq 2^{2d+1} \rho_Q^{2d+2} a_{1, \mathcal{P}}^\# . \end{aligned}$$

Случай $\rho_Q \in (n-1, n]$ с целым $n \geq 2$. В этом случае в формуле (7)

$$\sigma^z \leq n^2 + 1 < (n+1)^2, \quad \sigma^\tau \leq (n+1)^d,$$

и тогда

$$I \leq (n+1)^{2+2d} \int_{(0,1)} \int_{(0,1)^d} \int_{(0,1)^d} |a(t, x) - a(t, y)| dx dy dt.$$

Интегральный член меньше, чем $a_{1, \mathcal{P}}^\#$ по определению и

$$(n+1)^{2+2d} \leq \rho_Q^{2+2d} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{2+2d} \leq \rho_Q^{2+2d} 3^{2+2d}.$$

Поэтому

$$I \leq 3^{2+2d} a_{1, \mathcal{P}}^\# \rho_Q^{2+2d},$$

что доказывает теорему. □

Применяя приведенное доказательство к матричным функциям, получаем следующее утверждение.

Следствие 2. Пусть a — \mathbb{S}_δ -значная функция класса $\text{BMO}^x_1(\mathcal{P})$. Тогда существует \mathbb{S}_δ -значная функция \hat{a} на \mathbb{R}^{d+1} такая, что выполняется (4).

Замечание 3. Из приведенного доказательства видно, что если $[a]_{\rho, \mathcal{P}}^\# \rightarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$, то $[\hat{a}]_{\rho, \mathbb{R}^{d+1}}^\# \rightarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$.

Замечание 4. Если a не зависит от t , мы получаем теорему о продолжении для обычных функций класса ВМО.

Замечание 5. Опишем типичную ситуацию, когда следствие 2 оказывается полезным. Пусть a — \mathbb{S}_δ -значная функция класса $\text{BMO}^x_\infty(\mathbb{R}^{d+1})$, $\mathcal{L}u = \partial_t u + a^{ij} D_{ij} u$. Относительно легко (см., например, [7]) доказать, что если $p \in (1, \infty)$ и

$$[a]_{\infty, \mathbb{R}^{d+1}}^\# \leq \check{a}(d, \delta, p) \tag{9}$$

для подходящего $\check{a}(d, \delta, p) > 0$, то для любых $\lambda \geq 0$ и $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{d+1})$

$$\|\partial_t u, D^2 u, \sqrt{\lambda} Du, \lambda u\|_{L_p} \leq N(d, \delta, p) \|\mathcal{L}u - \lambda u\|_{L_p}, \tag{10}$$

где $L_p = L_p(\mathbb{R}^{d+1})$. Ниже мы обозначаем через N универсальные постоянные, зависящие только от d, δ, p .

Во многих случаях пользоваться глобальным условием (9) неудобно, особенно если конечной целью является рассмотрение уравнений в ограниченных областях. Заменяем (9) на следующее условие:

$$[a]_{1, (t,x)+\mathcal{P}}^\# \leq \check{a}(d, \delta, p) \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^{d+1}. \tag{11}$$

В этом случае для функции $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^{d+1})$ с носителем в \mathcal{P} имеем

$$\hat{\mathcal{L}}u := \partial_t u + \hat{a}^{ij} D_{ij} u = \mathcal{L}u$$

на \mathbb{R}^{d+1} и, следовательно, получаем (10). Это верно, если носитель u лежит в любой из областей $(t, x) + \mathcal{P}$. Затем возьмем неотрицательную функцию $\zeta \in C^\infty_0(\mathcal{P})$ такую, что интеграл от ее p -й степени равен единице, и определим

$$\zeta_{s,y}(t, x) = \zeta(t + s, x + y), \quad u_{s,y} = u \zeta_{s,y}.$$

Согласно вышесказанному, например,

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} |D^2 u_{s,y}|^p dx dt \leq N \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |\mathcal{L}u_{s,y} - \lambda u_{s,y}|^p dx dt.$$

Здесь

$$D_{ij} u_{s,y} = \zeta_{s,y} D_{ij} u + D_i \zeta_{s,y} D_j u + D_j \zeta_{s,y} D_i u + u D_{ij} \zeta_{s,y},$$

$$2^{-p} \zeta_{s,y}^p |D^2 u|^p \leq |D^2 u_{s,y}|^p + N |D \zeta_{s,y}|^p |Du|^p + N |D^2 \zeta_{s,y}|^p |u|^p$$

(мы воспользовались тем, что $(a + b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$, $a, b \geq 0$). Аналогично

$$2^{-p} \zeta_{s,y}^p |\partial_t u|^p \leq |\partial_t u_{s,y}|^p + N |\partial_t \zeta_{s,y}|^p |u|^p,$$

$$2^{-p} \zeta_{s,y}^p |Du|^p \leq |Du_{s,y}|^p + N |D \zeta_{s,y}|^p |u|^p.$$

Кроме того,

$$|\mathcal{L}u_{s,y} - \zeta_{s,y} \mathcal{L}u| \leq N(|u| |D \zeta_{s,y}| + |D \zeta_{s,y}| |Du|).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \|\zeta_{s,y} \partial_t u, \zeta_{s,y} D^2 u, \zeta_{s,y} \sqrt{\lambda} Du, \zeta_{s,y} \lambda u\|_{L_p}^p \leq N(d, \delta, p) \|\zeta_{s,y} (\mathcal{L}u - \lambda u)\|_{L_p}^p \\ & + N \|u D^2 \zeta_{s,y}\|_{L_p}^p + N \|u \partial_t \zeta_{s,y}\|_{L_p}^p + \|N |D \zeta_{s,y}| Du\|_{L_p}^p. \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение по $(s, y) \in \mathbb{R}^{d+1}$ и замечая, что, например,

$$\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \|\zeta_{s,y} D^2 u\|_{L_p}^p dy ds = \int_{\mathbb{R}^{d+1}} |D^2 u(t, x)|^p \left(\int_{\mathbb{R}^{d+1}} \zeta_{s,y}^p(t, x) dy ds \right) dx dt = \|D^2 u\|_{L_p}^p,$$

мы приходим к неравенству

$$\|\partial_t u, D^2 u, \sqrt{\lambda} Du, \lambda u\|_{L_p} \leq N \|\mathcal{L}u - \lambda u\|_{L_p} + N_1 \|Du\|_{L_p} + N_0 \|u\|_{L_p},$$

которое справедливо для всех $\lambda \geq 0$. Можно перенести члены с Du и u из правой в левую часть, если

$$2N_0 \leq \lambda, \quad 2N_1 \leq \sqrt{\lambda}.$$

В этом случае получаем (10) при условии (11) при $\lambda \geq \lambda_0 = \lambda_0(d, \delta, p) > 0$ и любой функции $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{d+1})$.

Благодарности

Автор искренне благодарен А. Лернеру за привлечение его внимания к работе [5] и плодотворное обсуждение.

Литература

1. P. W. Jones, “Extension theorems for ВМО”, *Indiana Univ. Math. J.* **29**, No. 1, 41–66 (1980).
2. Y. Chu, G. Wang, “Two necessary and sufficient conditions for uniform domains”, *Hokkaido Math. J.* **35**, No. 4, 935–942 (2006).
3. A. Butaev, G. Dafni, “Locally uniform domains and extension of ВМО functions”, *Ann. Fennici Math.* **48**, No. 2, 567–594 (2023).
4. P. Acquistapace, “On ВМО regularity for linear elliptic systems”, *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, **161**, 231–269 (1992).
5. A. K. Lerner, S. Ombrosi, I. P. Rivera-Ríos, “On two weight estimates for iterated commutators”, *J. Funct. Anal.* **281**, No. 8, Paper No. 109153 (2021).
6. Л. К. Эванс, Р. Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций*, Научная книга, Новосибирск (2002).
7. N. V. Krylov, “Essentials of Real Analysis and Morrey–Sobolev spaces for second-order elliptic and parabolic PDEs with singular first-order coefficients”, *J. Math. Sci.* **294**, No. 6, 802–899 (2025).

Статья поступила в редакцию 3 июля 2025 г.

Принята к публикации 29 октября 2025 г.

А. Я. Мальцев

О ЗАДАЧЕ НОВИКОВА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ДИЭДРАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

Исследуется задача Новикова об описании линий уровня квазипериодических функций на плоскости для двумерных потенциалов диэдральной симметрии. Показано, что квазипериодические потенциалы описываемого типа могут иметь открытые линии уровня лишь на единственном уровне энергии $\epsilon = \epsilon_0$, что сближает их со случайными потенциалами на плоскости.

1. Введение

В данной статье мы изучаем задачу Новикова для квазипериодических функций специальной симметрии, свойственной многим квазикристаллам. В общем случае задача Новикова состоит в описании линий уровня квазипериодических функций на плоскости с произвольным числом квазипериодов. Следуя общепринятому определению, мы называем *квазипериодической функцией* на плоскости с N квазипериодами ограничение N -периодической функции $f(\mathbf{z}) = f(z^1, \dots, z^N)$ в \mathbb{R}^N на плоскость $\Pi = \mathbb{R}^2$ при аффинном вложении $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ общего положения

$$V(x, y) = f(\mathbf{z})|_{\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^N}. \quad (1.1)$$

Квазипериодические функции на плоскости будем называть *потенциалами* и обозначать $V(\mathbf{r}) = V(x, y)$.

Исследование задачи Новикова основано на описании открытых (незамкнутых) линий уровня $V(x, y) = \text{const}$. Наиболее подробно исследован случай $N = 3$ (см. [1, 2] и библиографию там же), который играет важную роль при описании гальваномагнитных явлений в металлах со сложными поверхностями Ферми (см., например, [3]). Аналитические результаты получены для случая $N = 4$ (см. [4, 5]), а также имеются некоторые результаты общего характера для произвольного N (см. [6, 7]). Однако случай $N > 3$ исследован менее детально по сравнению с $N = 3$.

Специфика квазипериодических потенциалов состоит в том, что они наследуют особенности как периодических, так и случайных потенциалов, представляя некоторый «промежуточный» тип между этими типами потенциалов. В задаче Новикова этот факт проявляется в поведении открытых линий уровня $V(x, y) = \text{const}$; а именно, квазипериодические потенциалы на плоскости можно разделить на два основных типа.

Потенциалы первого типа имеют топологически регулярные открытые линии уровня, устойчивые по отношению к малым вариациям параметров задачи. Каждая такая линия уровня, хотя и не является периодической, лежит в прямой полосе конечной ширины в плоскости \mathbb{R}^2 , проходя ее насквозь (рис. 1). Для заданной функции $f(\mathbf{z})$ такие линии уровня возникают одновременно (при одних и тех же значениях энергии) во всех плоскостях Π заданного направления вложения $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ (для ограничения (1.1)) и имеют одно и то же среднее направление во всех таких плоскостях.

Потенциалы второго типа имеют сложные открытые линии уровня, которые могут, например, блуждать по всей плоскости \mathbb{R}^2 (рис. 2). Благодаря этому свойству такие потенциалы ближе к случайным потенциалам на плоскости, поэтому будем называть их *хаотическими потенциалами*.

А. Я. Мальцев: Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН, Москва, Россия; maltsev@itp.ac.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **294**, No. 6, 906–914 (2025).

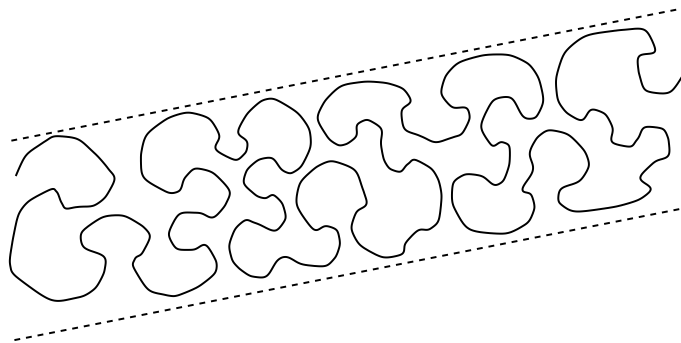


Рис. 1. Общий вид топологически регулярной открытой линии уровня квазипериодического потенциала на плоскости.

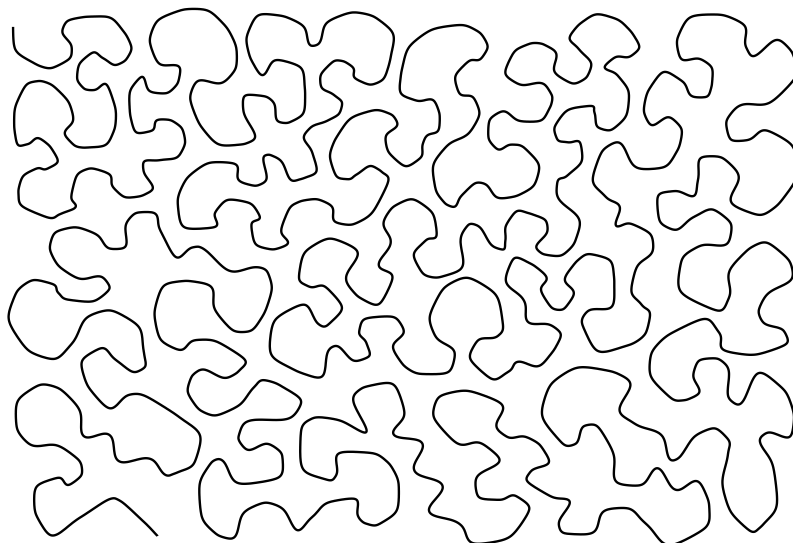


Рис. 2. Общий вид хаотической линии уровня квазипериодического потенциала на плоскости.

Хаотические открытые линии уровня квазипериодических потенциалов обычно неустойчивы по отношению к малым вариациям параметров задачи, включая уровень энергии потенциала. Во многих интересных семействах квазипериодических потенциалов возникновение топологически регулярных потенциалов $V(x, y)$ соответствует семейству областей в пространстве параметров, определяющих устойчивые семейства топологически регулярных открытых линий уровня. Хаотические потенциалы возникают на дополнении к описанным выше областям, напоминающем канторово множество в пространстве параметров.

Важным свойством хаотических линий уровня в случае $N = 3$ является то, что они появляются лишь на единственном уровне соответствующего потенциала $V(x, y) = \epsilon_0$ (линии уровня при всех $\epsilon \neq \epsilon_0$ замкнуты [9]). Помимо сложной формы хаотических линий уровня, данное свойство также приближает такие потенциалы $V(x, y)$ к типу случайных потенциалов на плоскости, а также отличает их от топологически регулярных потенциалов.

Для случая $N > 3$ аналогичного свойства хаотических линий уровня выявить в общем случае пока не удалось. Однако оно установлено для некоторых важных классов квазипериодических потенциалов.

В данной работе мы докажем, что квазипериодические потенциалы с произвольным N и группой симметрии D_n (группой диэдра) обладают таким свойством. С учетом сложности геометрии открытых траекторий этот факт означает, что свойства таких потенциалов близки свойствам случайных потенциалов на плоскости.

2. Открытые линии уровня потенциалов симметрии D_n

Мы рассматриваем квазипериодические потенциалы, обладающие группой симметрии диэдра D_n при $n \geq 3$. Это означает, в частности, существование n осей симметрии потенциала $V(x, y)$, проходящих через одну и ту же точку O на плоскости Π (рис. 3). Точка O является при этом центром поворотной симметрии (на углы $\alpha_s = 2\pi s/n$) потенциала $V(x, y)$.

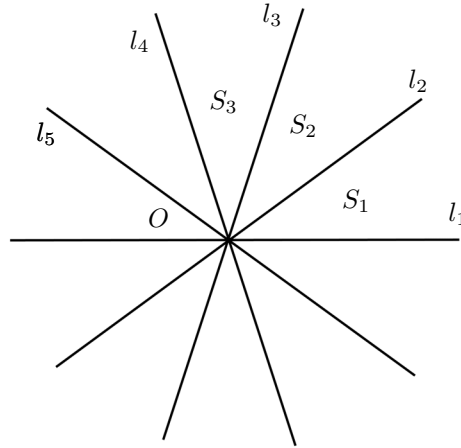


Рис. 3. Оси симметрии потенциала $V(x, y)$, проходящие через одну точку в плоскости Π и делящие плоскость на $2n$ секторов S_i .

Потенциал $V(\mathbf{r})$ является квазипериодическим, т.е. определяется ограничением M -периодической функции $F(\mathbf{w}) = F(w^1, \dots, w^M)$ на плоскость $\Pi = \mathbb{R}^2$ при некотором аффинном вложении $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^M$:

$$V(\mathbf{r}) = F(\mathbf{w}) \Big|_{\Pi = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^M}.$$

В общем случае считаем функцию $F(\mathbf{w})$ периодической относительно некоторой решетки $\mathbb{Z}^M \subset \mathbb{R}^M$, которую будем считать целочисленной. Симметрия потенциала $V(\mathbf{r})$ естественным образом отвечает симметрии вложения $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^M$, а также решетки $\mathbb{Z}^M \subset \mathbb{R}^M$.

Отметим, что в примерах размерность M нередко выбирается с целью сделать симметрию такого вложения наиболее наглядной. Число квазипериодов потенциала $V(\mathbf{r})$ при этом равно размерности минимального целочисленного подпространства $\mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^M$, содержащего плоскость Π :

$$\Pi = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{R}^M.$$

В качестве такого примера можно указать вложения $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$, отвечающие симметрии n -го порядка и такие, что плоскость Π содержится в гиперплоскости, ортогональной вектору $(1, 1, \dots, 1)$, а соответствующие потенциалы $V(\mathbf{r})$ имеют $(n - 1)$ квазипериодов.

В данной работе мы не уточняем количество квазипериодов потенциалов $V(\mathbf{r})$, но всегда предполагаем, что потенциал $V(\mathbf{r})$ определяется ограничением (1.1) функции $f(z^1, \dots, z^N)$, периодической относительно некоторой решетки $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$, при некотором «вполне иррациональном» вложении $\Pi = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^N$, т.е. таком, что плоскость Π не содержится ни в какой рациональной гиперплоскости и не содержит рациональных одномерных направлений в \mathbb{R}^N .

Предположим также, что функция $f(\mathbf{z})$ достаточно гладкая, в частности,

$$|\nabla f(\mathbf{z})| \leq C \tag{2.1}$$

для некоторой константы C .

Для упрощения изложения считаем, что все потенциалы (1.1) могут иметь особенности лишь определенного вида (в \mathbb{R}^2), а именно, кратные седла либо изолированные минимумы или максимумы.

При изучении задачи Новикова естественно рассматривать ситуацию одновременно во всех параллельных плоскостях $\Pi = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^N$ заданного направления $\xi \in G_{N,2}$, отличающихся лишь сдвигами в пространстве \mathbb{R}^N . Поэтому будем рассматривать семейство потенциалов $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N-2}$,

где вектор \mathbf{a} ортогонален направлению ξ , а потенциал $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ задается ограничением $f(\mathbf{z})$ на плоскость $\Pi(\mathbf{a})$, полученную сдвигом плоскости Π на вектор \mathbf{a} в \mathbb{R}^N . Потенциал $V(\mathbf{r}, \mathbf{0})$ совпадает при этом с исходным потенциалом $V(\mathbf{r})$. Отметим также, что в теории квазикристаллов преобразования $V(\mathbf{r}) \rightarrow V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ обычно называют *фазовыми преобразованиями*.

Среди потенциалов $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ лишь некоторые обладают точной симметрией D_n (при различных положениях точки $O(\mathbf{a}) \in \Pi(\mathbf{a})$); в частности, точной симметрией обладает потенциал $V(\mathbf{r}, \mathbf{0})$. Множество таких потенциалов, однако, соответствует всюду плотному множеству в пространстве параметров \mathbf{a} . В общем случае можно сказать, что группа D_n является точечной группой квазикристаллографической группы потенциалов $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ (см., например, [10]).

Согласно общим результатам [2, 6] открытые линии уровня

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) = \epsilon \tag{2.2}$$

возникают (хотя бы при одном значении \mathbf{a}) в связанном замкнутом интервале $\epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2]$, который может стягиваться в единственную точку $\epsilon_0 = \epsilon_1 = \epsilon_2$. Как показано в [7], в случае $\epsilon_2 > \epsilon_1$ и $\epsilon \in (\epsilon_1, \epsilon_2)$ открытые линии уровня (2.2) должны возникать для всех значений $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N-2}$.

Интервал $[\epsilon_1, \epsilon_2]$ является, таким образом, общим для всего семейства $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$. В частности, возможность возникновения открытых линий уровня (2.2) не более, чем на одном уровне ϵ_0 для одного из потенциалов $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ влечет то же свойство для всех потенциалов этого семейства.

Здесь мы предполагаем, что потенциал $V(\mathbf{r}, \mathbf{0})$ обладает точной симметрией D_n , и нашей задачей является доказательство соотношения $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$ в этой ситуации. Из сказанного выше следует, что достаточно доказать это свойство лишь для потенциала $V(\mathbf{r}, \mathbf{0})$.

Предположим, что потенциал $V(\mathbf{r}, \mathbf{0})$ имеет открытые линии уровня в некотором конечном интервале энергий $\epsilon \in (\epsilon_1, \epsilon_2)$. Без ограничения общности выберем два значения E_1, E_2 таких, что $\epsilon_1 < E_1 < E_2 < \epsilon_2$ и открытые линии уровня

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{0}) = E_{1,2} \tag{2.3}$$

являются несингулярными гладкими кривыми.

Мы предполагаем, что потенциал $V(\mathbf{r}, \mathbf{0})$ имеет n осей симметрии $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n$, проходящих через точку $O \in \Pi$ и делящих плоскость $\Pi = \mathbb{R}^2$ на $2n$ одинаковых секторов S_1, \dots, S_{2n} (рис. 3).

Открытая несингулярная линия уровня (2.3) не может пересекать сразу оба луча, ограничивающих какой-либо из секторов S_i (иначе в силу симметрии отражения, она должна быть замкнутой линией уровня, обходящей вокруг точки O). Таким образом, любая из открытых линий уровня (2.3) может либо пересекать один из лучей в единственной точке (и быть симметричной относительно него), либо целиком лежать внутри одного из секторов (рис. 4).

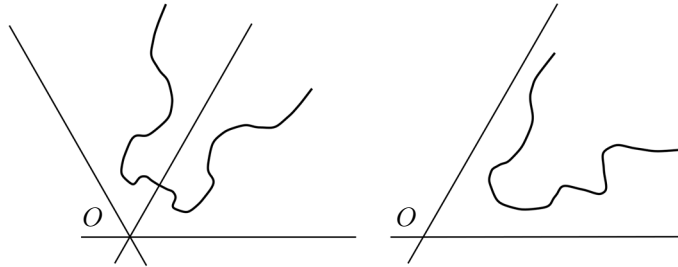


Рис. 4. Возможная форма открытых линий уровня (2.3) (схематично).

В любом случае каждая из таких линий уровня содержит кривую γ , начинающуюся на некотором расстоянии R от точки O и уходящую на бесконечность, целиком находясь в одном из секторов S_i и на расстоянии не менее R от точки O . В силу симметрии такие же кривые имеются в каждом секторе S_i . Таким образом, в каждом секторе можно выделить кривые γ_1 и γ_2 , лежащие на уровнях E_1 и E_2 соответственно: $V(\mathbf{r}, \mathbf{0})|_{\gamma_1} \equiv E_1$ и $V(\mathbf{r}, \mathbf{0})|_{\gamma_2} \equiv E_2$ (см. рис. 5).

Как мы уже отмечали, потенциалы $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$, обладающие точной симметрией D_n , отвечают всюду плотному множеству в пространстве параметров \mathbf{a} . Такие потенциалы соответствуют плоскостям $\Pi(\mathbf{a}) \subset \mathbb{R}^N$, полученным целочисленными сдвигами исходной плоскости $\Pi = \Pi(\mathbf{0})$ в пространстве \mathbb{R}^N . Таким образом, все плоскости направления ξ , проходящие через целочисленные

сдвиги точки O в \mathbb{R}^N , соответствуют потенциалам $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$, обладающим точной симметрией D_n . Очевидно, что картина линий уровня в таких плоскостях идентична картине в плоскости $\Pi(\mathbf{0})$, при этом соответствующий сдвиг точки O ($O(\mathbf{a}) \in \Pi(\mathbf{a})$) играет в них ту же роль, что и точка O в плоскости $\Pi(\mathbf{0})$.

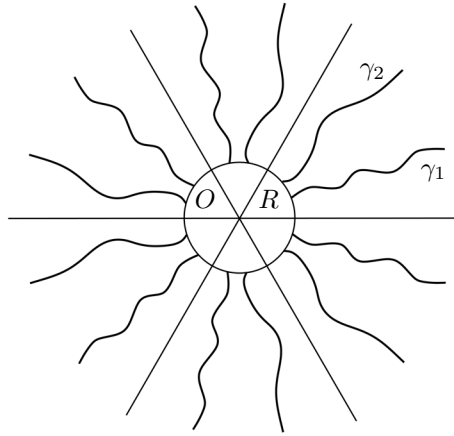


Рис. 5. Кривые γ_1 и γ_2 , лежащие на уровнях $\epsilon = E_1$ и $\epsilon = E_2$ (в каждом секторе S_i).

Рассмотрим в плоскости $\Pi(\mathbf{0})$ сектор S_1 , ограниченный лучами \mathbf{l}_1^+ и \mathbf{l}_2^+ , а также луч \mathbf{L} , выходящий из точки O и ортогональный прямой \mathbf{l}_2 (рис. 6).

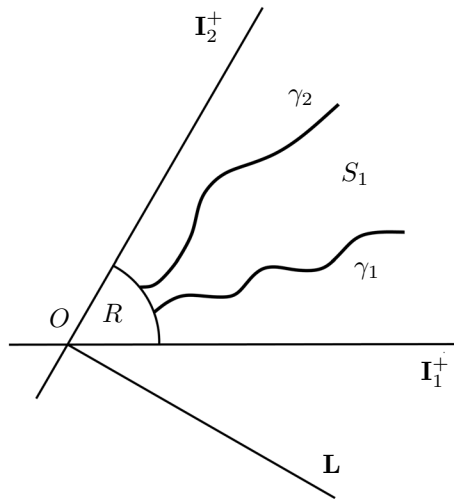


Рис. 6. Сектор S_1 в плоскости $\Pi(\mathbf{0})$ и луч \mathbf{L} , ортогональный \mathbf{l}_2 .

Луч $\mathbf{L} \subset \mathbb{R}^N$ образует всюду плотную обмотку тора \mathbb{T}^N после факторизации

$$\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N / \mathbb{Z}^N.$$

Это означает, что \mathbf{L} подходит (бесконечно много раз) сколь угодно близко к целочисленным сдвигам точки O в \mathbb{R}^N . Мы можем, таким образом, выбрать целочисленный сдвиг точки O ($O' \in \mathbb{R}^N$), удаленный на расстояние

$$\delta < (E_2 - E_1)/C \tag{2.4}$$

от луча \mathbf{L} и на расстояние

$$D > 2R + \delta \tag{2.5}$$

от точки O в \mathbb{R}^N .

Как было отмечено выше, картина линий уровня (2.2) в плоскости $\Pi(\mathbf{a}) \ni O'$ идентична картине в плоскости $\Pi(\mathbf{0})$. Рассмотрим в плоскости $\Pi(\mathbf{a})$ сектор S'_2 и находящиеся в нем кривые γ'_1 и γ'_2 , аналогичные кривым γ_1 и γ_2 в секторе S_2 в плоскости $\Pi(\mathbf{0})$ (рис. 7).

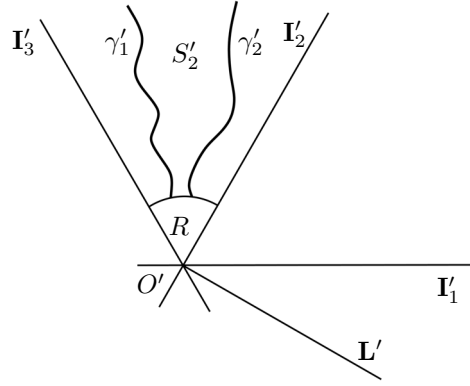


Рис. 7. Сектор S'_2 в плоскости $\Pi(\mathbf{a}) \ni O'$, содержащий кривые γ'_1 и γ'_2 .

По определению мы имеем на кривых γ'_1 и γ'_2 :

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \Big|_{\gamma'_1} \equiv E_1, \quad V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \Big|_{\gamma'_2} \equiv E_2. \quad (2.6)$$

Пусть \mathbf{h} — кратчайший вектор в \mathbb{R}^N , соединяющий точку O' с лучом \mathbf{L} ($|\mathbf{h}| = \delta$). Пусть $\sigma_{\mathbf{h}}[\Pi(\mathbf{a})]$ представляет сдвиг плоскости $\Pi(\mathbf{a})$ на вектор \mathbf{h} . Очевидно, что $\sigma_{\mathbf{h}}[\Pi(\mathbf{a})] = \Pi(\mathbf{0})$. В случае сдвига $\sigma_{\mathbf{h}}[S'_2] \subset \Pi(\mathbf{0})$ возможны два случая (рис. 8).

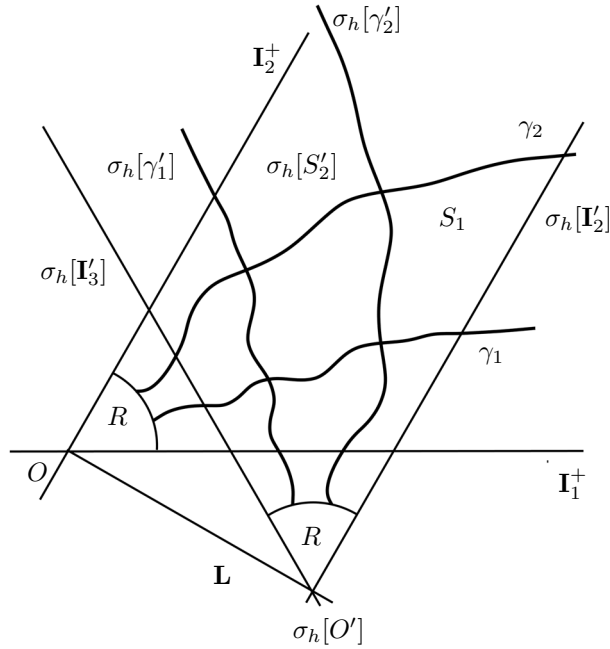


Рис. 8. Пересечение кривых γ_1, γ_2 с кривыми $\sigma_{\mathbf{h}}[\gamma'_2], \sigma_{\mathbf{h}}[\gamma'_1]$ в случае 1.

Случай 1: (а) γ_1 пересекает $\sigma_{\mathbf{h}}[\gamma'_2]$ либо (б) γ_2 пересекает $\sigma_{\mathbf{h}}[\gamma'_1]$. Согласно (2.1), (2.4) и (2.6) в случае (а)

$$V(\mathbf{r}, \mathbf{0}) \Big|_{\sigma_{\mathbf{h}}[\gamma'_2]} \equiv f(\mathbf{z}) \Big|_{\sigma_{\mathbf{h}}[\gamma'_2]} \geq f(\mathbf{z}) \Big|_{\gamma'_2} - \delta \cdot C > V(\mathbf{r}, \mathbf{a}) \Big|_{\gamma'_2} - (E_2 - E_1) = E_1.$$

В то же время $V(\mathbf{r}, \mathbf{0}) \Big|_{\gamma_1} \equiv E_1$, что приводит к противоречию (аналогично в случае (б)).

Случай 2: γ_1 и γ_2 не пересекают $\sigma_{\mathbf{h}}[I'_2]$. В этом случае обе кривые γ_1 и γ_2 лежат в полуполосе Γ , ширина которой не превосходит $D + \delta$. Ввиду симметрии в секторе S_{2n} имеется аналогичная полуполоса Γ^* , содержащая кривые γ_1^* и γ_2^* , симметричные γ_1 и γ_2 относительно I_1 (рис. 9 а).

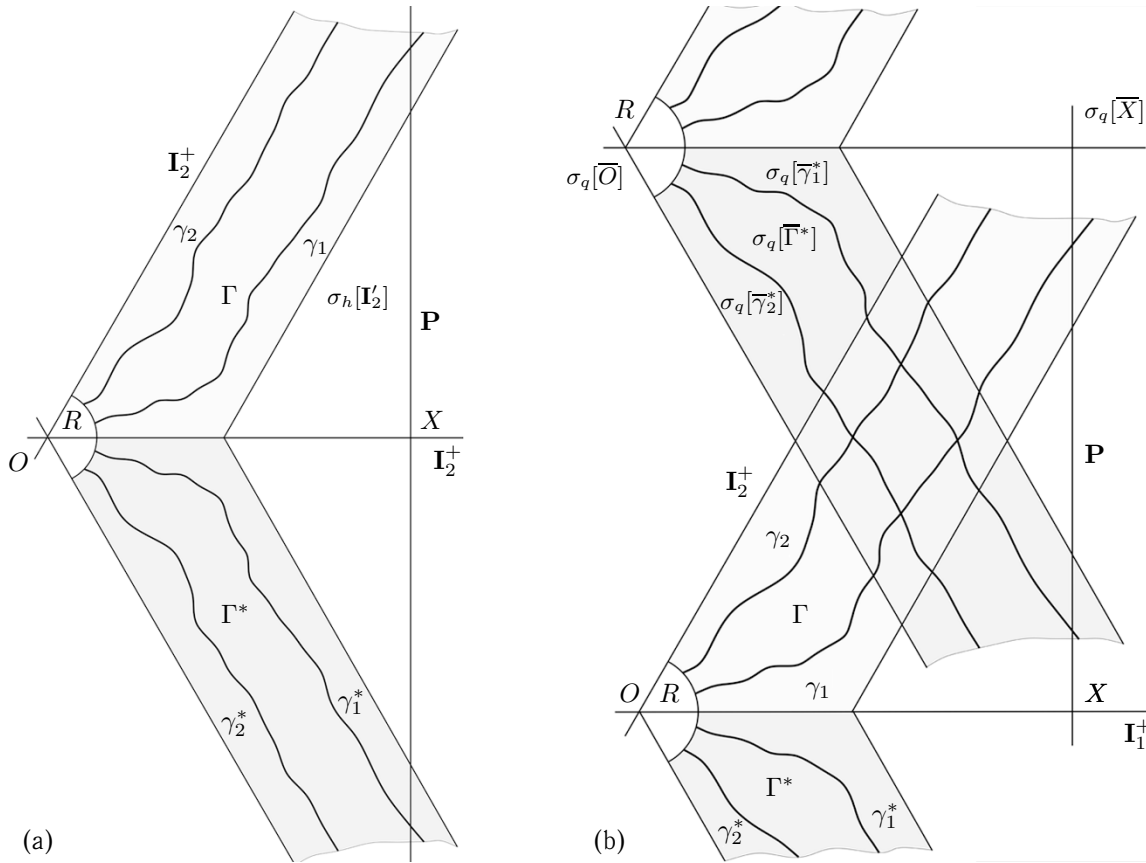


Рис. 9. (а) Полосы Γ и Γ^* на плоскости $\Pi(\mathbf{0})$, содержащие кривые $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^*, \gamma_2^*$ в случае 2. (б) Пересечение кривых $\sigma_q[\bar{\gamma}_2^*], \sigma_q[\bar{\gamma}_1^*]$ с кривыми γ_1 и γ_2 на плоскости $\Pi(\mathbf{0})$.

Рассмотрим прямую P , ортогональную I_1 и лежащую на достаточном удалении (справа) от пересечения полос Γ и Γ^* (рис. 9 (а)). Пусть $X \in \Pi(\mathbf{0})$ является точкой пересечения P и I_1 . Прямая P образует всюду плотную обмотку в $\mathbb{T}^N = \mathbb{R}^N / \mathbb{Z}^N$ после факторизации. Поэтому можно найти целочисленный сдвиг точки X ($\bar{X} \in \mathbb{R}^N$), удаленную на расстояние не более, чем δ от прямой $P \subset \mathbb{R}^N$ и на достаточно большое расстояние от X .

Картина линий уровня на плоскости $\Pi(\mathbf{a}) \ni \bar{X}$ идентична картине на плоскости $\Pi(\mathbf{0})$. В частности, можно выделить полосы $\bar{\Gamma}, \bar{\Gamma}^*$, а также кривые $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\gamma}_1^*, \bar{\gamma}_2^*$, идентичные находящимся на плоскости $\Pi(\mathbf{0})$.

Пусть \mathbf{q} — кратчайший вектор, соединяющий \bar{X} с прямой P ($|\mathbf{q}| \leq \delta$). Нетрудно видеть, что при подходящем выборе точки \bar{X} можно обеспечить пересечение кривых $\sigma_q[\bar{\gamma}_2^*]$ и $\sigma_q[\bar{\gamma}_1^*]$ с кривыми γ_1 и γ_2 на плоскости $\Pi(\mathbf{0})$ (рис. 9 (б)). В результате приходим к тому же противоречию, что и в случае 1.

3. Заключение

Таким образом, мы доказали, что при перечисленных выше условиях появление открытых линий уровня у любого потенциала $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ описанного выше семейства возможно лишь при единственном значении энергии $\epsilon = \epsilon_0$. Согласно общим результатам [6] каждый конкретный потенциал $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ из этого семейства обязан иметь либо открытые линии уровня, либо замкнутые линии уровня сколь угодно больших размеров (либо и то, и другое) на уровне $\epsilon = \epsilon_0$.

Все линии уровня потенциалов $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ при $\epsilon \neq \epsilon_0$ являются замкнутыми. Размеры замкнутых линий уровня всех $V(\mathbf{r}, \mathbf{a})$ при $\epsilon \neq \epsilon_0$ при этом ограничены одной константой $D(\epsilon)$, стремящейся

к бесконечности при $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$. Следует заметить, что скорость роста величины $D(\epsilon)$ в этом пределе существенно зависит от особенностей исходного потенциала $V(\mathbf{r})$ (и, в частности, от числа квазипериодов N).

Литература

1. С. П. Новиков, “Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса”, *Успехи мат. наук* **37**, No. 5, 3–49 (1982).
2. И. А. Дынников, “Геометрия зон устойчивости в проблеме Новикова о полуклассическом движении электрона”, *Успехи мат. наук* **54**, No. 1, 21–60 (1999).
3. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, “Топологическая интегрируемость, классический и квантовый хаос и теория динамических систем в физике конденсированного состояния”, *Успехи мат. наук* **74**, No. 1, 149–184 (2019).
4. С. П. Новиков, “Уровни квазипериодических функций на плоскости и гамильтоновы системы”, *Успехи мат. наук* **54**, No. 5, 147–148 (1999).
5. И. А. Дынников, С. П. Новиков, “Топология квазипериодических функций на плоскости”, *Успехи мат. наук* **60**, No. 1, 3–28 (2005).
6. И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, “Геометрия квазипериодических функций на плоскости”, *Успехи мат. наук* **77**, No. 6, 109–136 (2022).
7. А. Я. Мальцев, “О задаче Новикова с большим числом квазипериодов и ее обобщениях”, *Труды МИАН* **325**, 175–189 (2024).
8. A. Ya. Maltsev, S. P. Novikov, “Open level lines of a superposition of periodic potentials on a plane”, *Ann. Phys.* **447** Part 2, Article ID 169039 (2022).
9. И. А. Дынников, “Доказательство гипотезы С.П. Новикова о полуклассическом движении электрона”, *Мат. заметки* **53**, No. 5, 57–68 (1993).
10. Ле Тханг Ты Куок, С. А. Пиунихин, В. А. Садов, “Геометрия квазикристаллов”, *Успехи мат. наук* **48**, No. 1, 41–102 (1993).

Статья поступила в редакцию 9 июня 2025 г.

Принята к публикации 21 сентября 2025 г.

А. В. Подобрыв

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ АФФИННЫХ СИСТЕМ И СУБРИМАНОВЫ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ

Рассматриваются левоинвариантные аффинные по управлению системы на группах Ли (системы со сносом). Приведены условия, при которых снос может быть исключен. При этих условиях показана связь экстремальных траекторий таких систем со сносом с субримановыми геодезическими.

1. Введение

В последнее время растет интерес к левоинвариантным управляемым системам со сносом. Например, такие системы возникают в задачах управления квантовыми системами [1], а также в (суб)лоренцевой геометрии [2]. В настоящей работе мы рассматриваем левоинвариантные управляемые системы на группах Ли, где неограниченное управление лежит в некотором подпространстве алгебры Ли и имеется постоянный снос (фиксированный элемент алгебры Ли). Такие системы называются аффинными по управлению. Ставится задача оптимального управления — минимизация квадратичного по управлению интегрального функционала качества. Основная идея заключается в сведении рассматриваемой задачи к левоинвариантной субримановой [3], т.е. линейной по управлению системе, где управление лежит в том же подпространстве алгебры Ли, с тем же функционалом качества. Другими словами, при некоторых общих условиях задача сводится к левоинвариантной задаче оптимального управления с неголономными связями и квадратичным по управлению функционалом качества. При этом указывается, как связаны экстремальные траектории аффинной системы с экстремальными траекториями линейной по управлению системы, т.е. субримановыми геодезическими. Оказывается, они отличаются умножением справа на однопараметрическую подгруппу, порожденную вектором сноса.

Впервые, по-видимому, вопрос исключения сноса в левоинвариантных задачах был рассмотрен в [4]. В [5] метод исключения сноса был применен для исследования управления двухуровневыми и трехуровневыми квантовыми системами.

В настоящей статье конструкция исключения сноса рассматривается в большей общности. В § 2 вводятся необходимые определения и обозначения, а также приводятся уравнения левоинвариантных гамильтоновых векторных полей на кокасательном расслоении группы Ли в тривиализации этого расслоения с помощью левых сдвигов. Эти уравнения необходимы для инвариантной записи уравнений экстремалей. В § 3 формулируется и доказывается основной результат — теорема 3.1. В § 4 обсуждаются следствия и примеры.

2. Экстремали левоинвариантных задач оптимального управления

Пусть G — вещественная группа Ли и \mathfrak{g} — ее алгебра Ли. Двойственное пространство алгебры Ли обозначается \mathfrak{g}^* . Для подпространства $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ обозначим через $\mathfrak{p}^0 \subset \mathfrak{g}^*$ его аннулятор и через e единичный элемент группы G . Далее, L_x и R_x — левый и правый сдвиги на элемент x в группе

А. В. Подобрыв: Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский, Россия; alex@alex.botik.ru.

Английский оригинал: *J. Math. Sci.* **295**, No. 3, 325–333 (2025).

G , L_{x*} и R_{x*} — их дифференциалы соответственно. Если A — линейный оператор, A^* обозначает сопряженный оператор. Как обычно, Ad и ad обозначают присоединенные представления группы Ли G и алгебры Ли \mathfrak{g} соответственно, т.е.

$$\begin{aligned} \text{Ad} : G &\rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}), & (\text{Ad } x)\xi &= L_{x*}R_{x^{-1}*}\xi, & x \in G, \xi \in \mathfrak{g}, \\ \text{ad} : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}), & (\text{ad } \xi)\zeta &= [\xi, \zeta], & \xi, \zeta \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Обозначим через Ad^* и ad^* коприсоединенные представления группы Ли G и алгебры Ли \mathfrak{g} соответственно,

$$\begin{aligned} \text{Ad}^* : G &\rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g}^*), & \text{Ad}^* x &= (\text{Ad } x^{-1})^*, & \text{т.е. } (\text{Ad}^* x)p(\cdot) &= p((\text{Ad } x^{-1})(\cdot)), & x \in G, p \in \mathfrak{g}^*, \\ \text{ad}^* : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}^*), & \text{ad}^* \xi &= -(\text{ad } \xi)^*, & \text{т.е. } (\text{ad}^* \xi)p(\cdot) &= -p([\xi, \cdot]), & \xi \in \mathfrak{g}, p \in \mathfrak{g}^*. \end{aligned}$$

Кроме того, нам понадобится тривиализация кокасательного расслоения с помощью левых сдвигов

$$T^*G \xrightarrow{\sim} G \times \mathfrak{g}^*, \quad T^*G \ni \lambda \mapsto (\pi(\lambda), L_{\pi(\lambda)}^* \lambda),$$

где $\pi : T^*G \rightarrow G$ — естественная проекция.

Левоинварантная задача оптимального управления формулируется следующим образом: Найти липшицеву кривую $x : [0, t_1] \rightarrow G$ и измеримое управление $u \in L^\infty([0, t_1], U)$ такие, что

$$x_0 = e, x_{t_1} = x^1, \quad \dot{x}_t = L_{x_t*} u_t \text{ для п.в. } t \in [0, t_1], \quad \int_0^{t_1} \varphi(u_t) dt \rightarrow \min, \quad (2.1)$$

где $x^1 \in G$ и $t_1 > 0$ фиксированы, $U \subset \mathfrak{g}$ — множество управлений, а функция $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна.

Определим семейство функций на двойственном пространстве к алгебре Ли \mathfrak{g}^* , зависящее от параметров $u \in U$ и $\nu \in \{0, 1\}$,

$$H_u^\nu(p) = p(u) - \nu \varphi(u), \quad p \in \mathfrak{g}^*.$$

Определение 2.1. Кривая $(x, p) : [0, t_1] \rightarrow T^*G \simeq G \times \mathfrak{g}^*$ называется *экстремалью* задачи (2.1), если существует управление $\tilde{u} \in L^\infty([0, t_1], U)$ такое, что кривая (x_t, p_t) удовлетворяет гамильтоновой системе

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= L_{x_t*} \tilde{u}_t, \\ \dot{p}_t &= -(\text{ad}^* \tilde{u}_t) p_t, \end{aligned}$$

выполняется условие максимума $H_{\tilde{u}_t}^\nu(p_t) = \max_{u \in U} H_u^\nu(p_t)$ для почти всех $t \in [0, t_1]$ и условие нетривиальности $(p_t, \nu) \neq 0$. Если $\nu = 1$ (соответственно, $\nu = 0$), то экстремаль называется *нормальной* (соответственно, *анормальной*), а кривая $\{x_t \in G \mid t \in [0, t_1]\}$ — *нормальной* (соответственно, *анормальной*) *экстремальной траекторией*.

Замечание 2.1. Согласно принципу максимума Понтрягина [6] любая оптимальная траектория задачи (2.1) является проекцией некоторой экстремали. Современные формулировки принципа максимума Понтрягина для общих задач оптимального управления на гладких многообразиях можно найти в [7, теорема 12.3]. Гамильтонова система для левоинвариантных задач на группах Ли выводится в [7, § 18.3.2].

3. Связь экстремалей аффинной и субримановой задач

Рассмотрим вещественную группу Ли G . Пусть $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ — подпространство ее алгебры Ли. Поставим следующую левоинвариантную аффинную по управлению задачу с квадратичным функционалом качества: Найти липшицеву кривую $x : [0, t_1] \rightarrow G$ и измеримое управление $u \in L^\infty([0, t_1], \mathfrak{p})$ такие, что

$$x_0 = e, x_{t_1} = x^1, \quad \dot{x}_t = L_{x_t*}(a + u_t) \text{ для п.в. } t \in [0, t_1], \quad \int_0^{t_1} \mathcal{B}(u_t, u_t) dt \rightarrow \min, \quad (\text{aff})$$

где $x^1 \in G$ и $t_1 > 0$ фиксированы, \mathcal{B} — невырожденная положительно определенная билинейная форма на пространстве \mathfrak{p} и вектор сноса $a \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{p}$ фиксирован.

Рассмотрим также левоинвариантную субриманову задачу: Найти липшицеву кривую $x : [0, t_1] \rightarrow G$ и измеримое управление $u \in L^\infty([0, t_1], \mathfrak{p})$ такие, что

$$x_0 = e, x_{t_1} = x^1, \quad \dot{x}_t = L_{x_t^*} u_t \text{ для п.в. } t \in [0, t_1], \quad \int_0^{t_1} \mathcal{B}(u_t, u_t) dt \rightarrow \min, \quad (\text{sR})$$

где $x^1 \in G$ и $t_1 > 0$ фиксированы и \mathcal{B} — невырожденная положительно определенная билинейная форма на пространстве \mathfrak{p} .

Теорема 3.1. *Предположим, что*

- (1) *подпространство $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ инвариантно относительно оператора $\text{ad } a$,*
- (2) *существует дополнительное к нему $(\text{ad } a)$ -инвариантное подпространство \mathfrak{k} ,*
- (3) *оператор $(\text{ad } a)|_{\mathfrak{p}}$ в пространстве \mathfrak{p} кососимметричен относительно формы \mathcal{B} .*

Пусть кривая $h : [0, t_1] \rightarrow G$ такова, что $\dot{h}_t = L_{h_t^} a$. Тогда в тривиализации кокасательного расслоения с помощью левых сдвигов $T^*G = G \times \mathfrak{g}^*$ любая экстремаль задачи (sR) имеет вид*

$$\hat{x}_t = x_t h_t^{-1}, \quad \hat{p}_t = (\text{Ad}^* h_t) p_t,$$

где (x_t, p_t) — экстремаль задачи (aff). Наоборот, любая экстремаль задачи (aff) имеет вид

$$x_t = \hat{x}_t h_t, \quad p_t = (\text{Ad}^* h_t^{-1}) \hat{p}_t,$$

где (\hat{x}_t, \hat{p}_t) — экстремаль задачи (sR).

Доказательство. Пусть (x_t, p_t) — экстремаль задачи (aff), соответствующая управлению u_t , т.е. эта кривая удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_t &= L_{x_t^*} (a + u_t), \\ \dot{p}_t &= -(\text{ad}^* (a + u_t)) p_t. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если (\hat{x}_t, \hat{p}_t) — экстремаль задачи (sR), соответствующая управлению \hat{u}_t , то

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_t &= L_{\hat{x}_t^*} \hat{u}_t, \\ \dot{\hat{p}}_t &= -(\text{ad}^* \hat{u}_t) \hat{p}_t. \end{aligned} \quad (3.2)$$

(1) Покажем, что если пара (x_t, p_t) удовлетворяет системе (3.1), то пара $\hat{x}_t = x_t h_t^{-1}$, $\hat{p}_t = (\text{Ad}^* h_t) p_t$ удовлетворяет системе (3.2) при $\hat{u}_t = (\text{Ad } h_t) u_t$.

Для дифференцирования нам потребуются следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (h_t^{-1}) &= R_{h_t^{-1}^*} (-a), \\ \frac{d}{dt} (\text{Ad } h_t^{-1}) &= -\text{ad } a \text{ Ad } h_t^{-1}, \\ \frac{d}{dt} (\text{Ad } h_t) &= \text{Ad } h_t \text{ ad } a, \\ \frac{d}{dt} (\text{Ad}^* h_t) &= \text{Ad}^* h_t \text{ ad}^* a. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Используя тождество Лейбница и первое уравнение системы (3.1), получим

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_t &= R_{h_t^{-1}^*} \dot{x}_t - L_{x_t^*} R_{h_t^{-1}^*} a = R_{h_t^{-1}^*} L_{x_t^*} (a + u_t) - L_{x_t^*} R_{h_t^{-1}^*} a \\ &= L_{x_t^*} L_{h_t^{-1}^*} (\text{Ad } h_t) u_t = L_{\hat{x}_t^*} \hat{u}_t, \end{aligned}$$

где в третьем равенстве учтено, что левые и правые сдвиги коммутируют.

Далее, с помощью тождеств (3.3) и второго уравнения системы (3.1) получаем

$$\begin{aligned}\dot{\hat{p}}_t &= \frac{d}{dt}(\text{Ad}^* h_t)p_t = (\text{Ad}^* h_t)(\text{ad}^* a)p_t - (\text{Ad}^* h_t)((\text{ad}^* a)p_t + (\text{ad}^* u_t)p_t) \\ &= -(\text{Ad}^* h_t)(\text{ad}^* u_t)p_t = p_t([u_t, (\text{Ad} h_t^{-1})(\cdot)]) = p_t((\text{Ad} h_t^{-1})[(\text{Ad} h_t)u_t, \cdot]) \\ &= -(\text{ad}^*(\text{Ad} h_t)u_t)(\text{Ad}^* h_t)p_t = -(\text{ad}^* \hat{u}_t)\hat{p}_t.\end{aligned}$$

(2) Аналогично доказывается, что если пара (\hat{x}_t, \hat{p}_t) удовлетворяет системе (sR), то пара $x_t = \hat{x}_t h_t$, $p_t = (\text{Ad}^* h_t^{-1})\hat{p}_t$ удовлетворяет системе (3.1) при $u_t = (\text{Ad} h_t^{-1})\hat{u}_t$.

(3) Остается доказать, что управление u_t удовлетворяет условию максимума для задачи (aff) тогда и только тогда, когда управление \hat{u}_t удовлетворяет условию максимума для задачи (sR). Прежде всего заметим, что $u_t \in \mathfrak{p}$ тогда и только тогда, когда $\hat{u}_t \in \mathfrak{p}$, поскольку по предположению пространство \mathfrak{p} инвариантно относительно оператора $\text{ad} a$, а, значит, и относительно $\text{Ad} h_t$.

Пусть \mathfrak{k} — дополнительное $(\text{ad} a)$ -инвариантное подпространство к пространству \mathfrak{p} в алгебре Ли \mathfrak{g} . Рассмотрим разложение $p_t = r_t + s_t$, где $r_t \in \mathfrak{p}^* \simeq \mathfrak{k}^0$, а $s_t \in \mathfrak{k}^* \simeq \mathfrak{p}^0$. Рассмотрим сначала нормальный случай. Тогда условия максимума в этих задачах имеют вид

$$r_t = \mathcal{B}(u_t, \cdot), \quad \hat{r}_t = \mathcal{B}(\hat{u}_t, \cdot).$$

Эти условия эквивалентны. Действительно,

$$\begin{aligned}\hat{r}_t &= (\text{Ad}^* h_t)r_t = (\text{Ad} h_t^{-1})^* r_t = \mathcal{B}(u_t, (\text{Ad} h_t^{-1})(\cdot)) \\ &= \mathcal{B}((\text{Ad} h_t^{-1})(\text{Ad} h_t)u_t, (\text{Ad} h_t^{-1})(\cdot)) = \mathcal{B}((\text{Ad} h_t^{-1})\hat{u}_t, (\text{Ad} h_t^{-1})(\cdot)).\end{aligned}$$

По предположению снос a таков, что оператор $(\text{ad} a)|_{\mathfrak{p}}$ кососимметричен относительно формы \mathcal{B} . Это означает, что оператор $(\text{Ad} h_t^{-1})|_{\mathfrak{p}}$ ортогонален. Поэтому цепочку равенств выше можно продолжить до равенства $\hat{r}_t = \mathcal{B}(\hat{u}_t, \cdot)$.

Перейдем теперь к аномальному случаю. Условия максимума суть $r_t = 0$ и $\hat{r}_t = 0$ соответственно. Очевидно, что они эквивалентны в силу $\hat{r}_t = (\text{Ad}^* h_t)r_t$. \square

4. Примеры

Замечание 4.1. Если снос $a \in \mathfrak{g}$ таков, что группа $\{\exp(ta) \mid t \in \mathbb{R}\}$ компактна, т.е. является окружностью, то при выполнении условия (1) теоремы 3.1 условие (2) выполняется автоматически.

Замечание 4.2. Если дополнительное подпространство к подпространству \mathfrak{p} одномерно, т.е. $\mathfrak{k} = \text{span}\{a\}$, то условие (2) теоремы 3.1 также выполняется.

Замечание 4.3. Условия теоремы 3.1 выполняются, если $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ — разложение Картана полупростой алгебры Ли и снос $a \in \mathfrak{k}$, т.е.

$$[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \subset \mathfrak{k}, \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, \quad [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}, \quad a \in \mathfrak{k},$$

а форма \mathcal{B} на подпространстве \mathfrak{p} является ограничением формы Киллинга. Более того, в этом случае по теореме 3.1 нормальные экстремальные траектории задачи (aff) будут произведениями, вообще говоря, трех однопараметрических подгрупп. Это следует из того, что нормальные экстремальные траектории задачи (sR) суть произведения двух однопараметрических подгрупп, как это было замечено в [8]–[10] (см. также [11, замечание 3.11]):

$$\hat{x}_t = \exp t(\xi + \zeta) \exp(-t\zeta), \quad \xi \in \mathfrak{p}, \quad \zeta \in \mathfrak{k}.$$

Если $\mathfrak{k} = \text{span}\{a\}$, то нормальные экстремальные траектории задачи (aff) будут произведениями, вообще говоря, двух однопараметрических подгрупп. Действительно, в этом случае второй множитель, составляющий нормальную экстремальную траекторию субримановой задачи, будет однопараметрической подгруппой с касательным вектором, пропорциональным сносу a .

Приведем примеры левоинвариантных управляемых систем со сносом, оптимальный синтез в которых может быть построен с помощью оптимального синтеза соответствующей субримановой задачи.

Пример 4.1. Рассмотрим правоинвариантную управляемую систему на группе Ли SU_2 , аффинную по двум управлениям. Ее динамика задается уравнением Шрёдингера (в системе единиц с постоянной Планка $\hbar = 1$)

$$i \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t),$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2) : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{C}^2$, $|\psi_1(t)|^2 + |\psi_2(t)|^2 = 1$ и H — эрмитова матрица вида

$$H = \begin{pmatrix} -E & \Omega_1(t) + i\Omega_2(t) \\ \Omega_1(t) - i\Omega_2(t) & E \end{pmatrix},$$

где $E \in \mathbb{R}$ — константа и $\Omega_1, \Omega_2 : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$ — управления.

Различные постановки задачи оптимального управления для такой управляемой системы изучались ранее. В частности, в [12] рассматривалась задача быстрогодействия с ограниченными управлениями, а в [13] — задача минимизации функционала энергии с неограниченными управлениями. Редукция такой аффинной по управлению системы к субримановой применялась в [5].

Прежде всего заметим, что правоинвариантная система сводится к левоинвариантной с помощью инверсии $G \ni x \mapsto x^{-1}$. Обобщим эту управляемую систему до серии левоинвариантных систем на группе Ли SU_2 , аффинных по двумерному управлению, и поставим задачу минимизации симметричного функционала энергии. Для этого выберем следующий базис алгебры Ли \mathfrak{su}_2 :

$$e_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Выполнены следующие коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = e_1. \quad (4.1)$$

Задача оптимального управления заключается в нахождении липшицевой кривой $x : [0, t_1] \rightarrow SU_2$ и управления $u = (v, w) \in L^\infty([0, t_1], \mathbb{R}^2)$ таких, что

$$\begin{aligned} x_0 &= e, \quad x_{t_1} = x^1, \\ \dot{x}_t &= L_{x_t^*} \left(v_t e_1 + w_t e_2 + \frac{1}{I_3} e_3 \right) \text{ для п.в. } t \in [0, t_1], \\ \int_0^{t_1} (I_1 v_t^2 + I_2 w_t^2) dt &\rightarrow \min, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $t_1 > 0$, $x^1 \in SU_2$ и $I_1, I_2, I_3 > 0$ фиксированы.

Заметим, что если положить $\mathfrak{p} = \text{span} \{e_1, e_2\}$, $a = \frac{1}{I_3} e_3$, $\mathfrak{k} = \text{span } a$ и $\mathcal{B}(u, u) = I_1 v^2 + I_2 w^2$ (где $u = v e_1 + w e_2$), то в силу (4.1) имеем $(\text{ad } a)$ -инвариантное разложение $\mathfrak{su}_2 = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$. Кроме того, оператор $(\text{ad } a)|_{\mathfrak{p}}$ кососимметричен относительно формы \mathcal{B} тогда и только тогда, когда $I_1 = I_2$. Таким образом, при $I_1 = I_2$ мы находимся в ситуации замечания 4.3 и применима теорема 3.1.

Оптимальный синтез в соответствующей субримановой задаче при $I_1 = I_2$ построен в [14] и независимо в [15], где доказано, что замыкание множества разреза (т.е. множества точек потери оптимальности экстремальных траекторий) есть окружность $S_{\text{cut}}^1 = \{\exp(t e_3) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Более того, субриманово экспоненциальное отображение осуществляет диффеоморфизм

$$\widehat{\text{Exp}} : \left\{ p_0 \in \mathfrak{su}_2^* \setminus \mathfrak{p}^0 \mid \sqrt{\mathcal{K}(p_0, p_0)} < \frac{2\pi I_1}{t_1} \right\} \rightarrow SU_2 \setminus S_{\text{cut}}^1, \quad \widehat{\text{Exp}}(p_0) = \widehat{x}_{t_1},$$

где $(\widehat{x}_t, \widehat{p}_t)$ — субриманова экстремаль с начальными условиями (e, p_0) , а \mathcal{K} — форма Киллинга, перенесенная на двойственное пространство к алгебре Ли.

Следовательно, то же верно и для экспоненциального отображения аффинной по управлению задачи: имеет место диффеоморфизм

$$\text{Exp} : \left\{ p_0 \in \mathfrak{su}_2^* \setminus \mathfrak{p}^0 \mid \sqrt{\mathcal{K}(p_0, p_0)} < \frac{2\pi I_1}{t_1} \right\} \rightarrow SU_2 \setminus S_{\text{cut}}^1, \quad \text{Exp}(p_0) = x_{t_1},$$

где (x_t, p_t) — экстремаль задачи (4.2) с начальными условиями (e, p_0) .

Пример 4.2. Рассмотрим группу Ли

$$\mathrm{SU}_{1,1} = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ \bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{C}, |z|^2 - |w|^2 = 1 \right\} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Ее алгебра Ли порождена элементами

$$e_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

с коммутационными соотношениями

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = e_2, \quad [e_2, e_3] = -e_1.$$

Рассмотрим левоинвариантную задачу оптимального управления вида (4.2). Так же как в примере 4.1, имеет место разложение Картана $\mathfrak{p} = \mathrm{span}\{e_1, e_2\}$, $\mathfrak{k} = \mathrm{span} e_3$ и снос $a = \frac{1}{I_3} e_3$. Кроме того, оператор $(\mathrm{ad} a)|_{\mathfrak{p}}$ кососимметричен относительно формы \mathcal{B} тогда и только тогда, когда $I_1 = I_2$. Следовательно, в случае $I_1 = I_2$ применима теорема 3.1.

Соответствующая левоинвариантная субриманова задача решена в [14, 16], откуда можно получить решение аффинной задачи.

Пример 4.3. Рассмотрим двухступенную группу Карно, т.е. связную и односвязную группу Ли с алгеброй Ли \mathfrak{g} , допускающей разложение

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1] = \mathfrak{g}_2, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = [\mathfrak{g}_2, \mathfrak{g}_2] = 0.$$

Тогда любая левоинвариантная система со сносом $a \in \mathfrak{g}_2$ и управлением из подпространства \mathfrak{g}_1 удовлетворяет условиям теоремы 3.1. В соответствующих субримановых задачах оптимальный синтез построен для свободных двухступенных групп Карно с вектором роста распределения $(\dim \mathfrak{g}_1, \dim \mathfrak{g})$ равным (2, 3) [17], (3, 6) [18], для субримановых структур корангов (т.е. $\dim \mathfrak{g}_2$) равных 1 и 2 [19, 20], в общем случае свободных двухступенных субримановых структур имеются частичные результаты [21, 22].

Литература

1. D D'Alessandro, *Introduction to Quantum Control and Dynamics*, CRC Press, Boca Raton, FL (2021).
2. J. K. Beem, P. E. Ehrlich, K. L. Easley, *Global Lorentzian Geometry*, Marcel Dekker, New York (1996).
3. A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, *A Comprehensive Introduction to Sub-Riemannian Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2019).
4. A. Sarti, G. Walsh, Sh. Sastry, "Steering left-invariant control systems on matrix Lie groups", In: *Proceedings of the 32nd Conference on Decision and Control*, pp. 3117–3121, San Antonio, Texas (1993).
5. U. Boscain et al., "Optimal control in laser-induced population transfer for two- or three-level quantum systems", *J. Math. Phys.* **43**, No 5, 2107–2132 (2002).
6. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М. (1961).
7. А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М. (2005).
8. А. А. Аграчев, "Methods of control theory in nonholonomic geometry", In: *Proceedings of ICM-94*, pp. 1473–1483, Birkhauser, Zürich (1995).
9. R. W. Brockett, "Explicitly solvable control problems with nonholonomic constraints", In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control* **1**, pp. 13–16 (1999).
10. V. Jurdjevic, "Optimal control, geometry and mechanics", In: *Mathematical Control Theory*, pp. 227–267, Springer (1999).
11. A. V. Podobryaev, "Homogeneous geodesics in sub-Riemannian geometry", *ESAIM: Control, Optim. Calc. Vari.* **29**, Paper No. 11 (2023).

12. U. Boscain, E. Gronberg, R. Long, H. Rabitz, “Minimal time trajectories for two-level quantum systems with two bounded controls”, *J. Math. Phys.* **55**, No. 6, Article ID 062106 (2014).
13. D. D’Alessandro, V. Dahleh, “Optimal control of two-level quantum systems”, *IEEE Trans. Automat. Control* **46**, 866–876 (2001).
14. U. Boscain, F. Rossi, “Invariant Carnot-Carathéodory metrics on S^3 , $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces”, *SIAM J. Control Optim.* **47**, 1851–1878 (2008).
15. В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SO(3)$ ”, *Сиб. мат. ж.* **56**, No. 4, 762–774 (2015).
16. В. Н. Берестовский, И. А. Зубарева, “Геодезические и кратчайшие специальной субримановой метрики на группе Ли $SL(2)$ ”, *Сиб. мат. ж.* **57**, No. 3, 527–542 (2016).
17. R. W. Brockett, “Control theory and singular Riemannian geometry”, In: *New Directions in Applied Mathematics (Cleveland, OH, 1980)*, pp. 11–27, Springer, New York etc. (1982).
18. О. Мысаченко, “Nilpotent (3,6) sub-Riemannian problem”, *J. Dyn. Control Syst.* **8**, No. 4, 573–597 (2002).
19. A. Agrachev, D. Barilari, U. Boscain, “On the Hausdorff volume in sub-Riemannian geometry”, *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* **43**, No. 3–4, 355–388 (2012).
20. D. Barilari, U. Boscain, J.-P. Gauthier, “On 2-step, corank 2 nilpotent sub-Riemannian metrics”, *SIAM J. Control Optim.* **50**, No. 1, 559–582 (2012).
21. F. Monroy-Pérez, A. Anzaldo-Meneses, “The step-2 nilpotent $(n, n(n+1)/2)$ sub-Riemannian geometry”, *J. Dyn. Control Syst.* **12**, No. 2, 185–216 (2006).
22. L. Rizzi, U. Serres, “On the cut locus of free, step two Carnot groups”, *Proc. Am. Math. Soc.* **145**, No. 12, 5341–5357 (2017).

Статья поступила в редакцию 23 сентября 2025 г.

Принята к публикации 25 ноября 2025 г.

Т. Г. Пшеницын

О СЛОЖНОСТИ РАСПОЗНАВАНИЯ ГРАММАТИК СЛИЯНИЯ, СОХРАНЯЮЩИХ СВЯЗНОСТЬ

Грамматика слияния — вид графовых грамматик — ввели Х.-Й. Креовски, С. Кушке, А. Лай в 2017 г. Эти грамматики позволяют порождать гиперграфы с помощью операции слияния — преобразования, состоящего из склеивания гиперребер с комплементарными метками и последующего удаления этих гиперребер. В 2021 г. А. Лай определил свойство сохранения связности: грамматика слияния сохраняет связность, если результат слияния внутри одной компоненты связности либо между двумя компонентами связности любого гиперграфа, порождаемого этой грамматикой — связный гиперграф. Наличие этого свойства облегчает анализ ряда алгоритмических и теоретико-языковых задач, касающихся грамматик слияния.

В данной работе исследуется сложность распознавания самого свойства сохранения связности. Доказано, что задача проверки наличия данного свойства у грамматики слияния разрешима, принадлежит классу coNEXPTIME и при этом PSPACE -трудна.

1. Введение

Грамматика слияния — это механизм задания множеств гиперграфов, введенный в [1]. В рамках данного подхода гиперграф определяется как конечная структура вида (V, E, att, lab) , где V — множество вершин, E — множество гиперребер, $att : E \rightarrow V^*$ — функция, сопоставляющая каждому гиперребру упорядоченный набор вершин прикрепления, и $lab : E \rightarrow \Sigma$ — функция, помечающая гиперребра метками алфавита Σ (см. уточнение определения в § 2). Алфавит меток Σ содержит алфавит слияния F ; каждой метке $A \in F$ соответствует комплементарная метка $\bar{A} \in \Sigma \setminus F$. На гиперграфах определена операция слияния: если в гиперграфе H есть два гиперребра e_1, e_2 с комплементарными метками, причем они прикреплены к одинаковому числу вершин, то соответствующие вершины, к которым прикреплены e_1, e_2 , отождествляются, а сами гиперребра e_1, e_2 удаляются. Примеры применения операции слияния представлены на рис. 1. (В изображениях гиперграфов гиперребра обозначаются квадратиками или стрелками. Если $att(e) = v_1 \dots v_k$ при $k \neq 2$, то гиперребро e изображается в виде квадратика с меткой $lab(e)$, который связан с вершинами прикрепления линиями: линия с номером i соединяет e и v_i . Если $att(e) = v_1 v_2$, то e изображается как стрелка от v_1 к v_2 с меткой $lab(e)$.)

В рамках настоящей работы грамматикой слияния называется любое конечное множество Z связных гиперграфов (см. определение связности гиперграфа в § 2). Гиперграф H порождается данной грамматикой, если его можно получить из некоторого числа изоморфных копий гиперграфов, взятых из Z , применением слияний.

Одна из мотиваций к изучению грамматик слияния связана с моделированием взаимодействий молекул ДНК методами теории графовых грамматик [1, 2]. Предполагается, что связные гиперграфы соответствуют молекулам, а слияние соответствует образованию связи между молекулами (например, водородной). Для нас грамматики слияния представляют в первую очередь теоретический интерес — как системы переписывания гиперграфов с весьма естественным правилом

Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС», грант 24-7-5-15-1.

Т. Г. Пшеницын: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия; tpshenitsyn@mi-ras.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **294**, No. 6, 915–931 (2025).

“склейки гиперребер с противоположными метками”. Можно провести аналогию между правилом слияния и логическим правилом сечения, которое имеет вид

$$\frac{\vdash \Gamma, A \quad \vdash \Delta, \bar{A}}{\vdash \Gamma, \Delta}$$

В классической логике это правило формулируется следующим образом: если истинна дизъюнкция формул множества $\Gamma \cup \{A\}$ и истинна дизъюнкция формул множества $\Delta \cup \{\bar{A}\}$, где \bar{A} — отрицание формулы A , то также истинна дизъюнкция формул $\Gamma \cup \Delta$. Если интерпретировать связанные гиперграфы как своеобразные секвенции, то правило слияния, примененное к гиперребрам из разных компонент связности, можно рассматривать как аналог правила сечения.

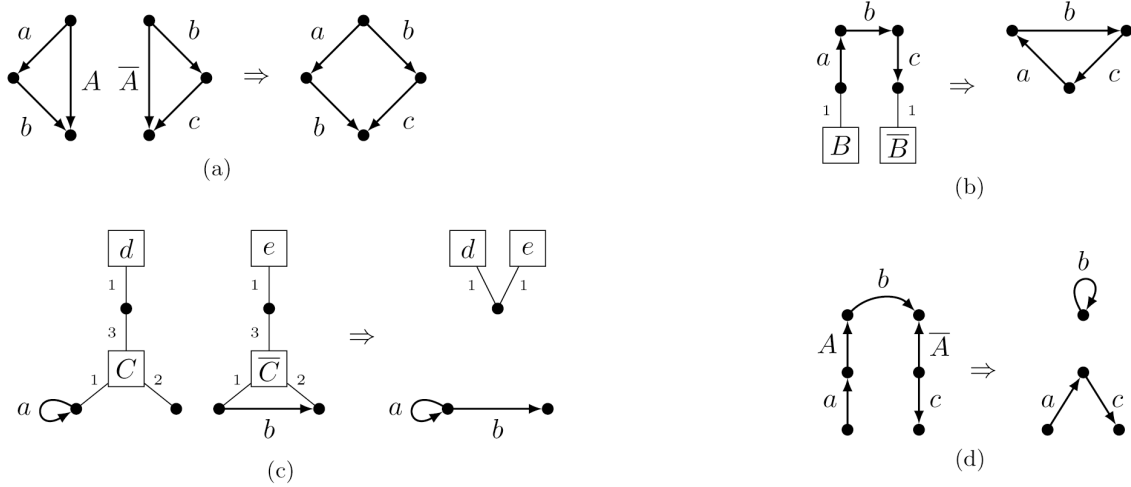


Рис. 1. Примеры применения операции слияния.

На рис. 1 показаны четыре примера применения операции слияния. Рисунки 1(a) и 1(b) иллюстрируют случаи, когда в результате слияния одного или двух связанных гиперграфов получается связный гиперграф. Напротив, на рис. 1(c) и 1(d) приведены примеры, когда результатом слияния является несвязный гиперграф. Будем говорить, что грамматика слияния *сохраняет связность*, если для любого порождаемого ею гиперграфа результат слияния (как между двумя различными компонентами связности, так и внутри одной компоненты) является связным гиперграфом. Таким образом, ситуации, соответствующие рис. 1(c) и 1(d), невозможны в грамматиках слияния, сохраняющих связность.

Если добавить в грамматики слияния механизм фильтрации, как это сделано в [1, 3], получится класс грамматик, порождающий строго больший класс языков, чем класс языков, задаваемых гиперграфовыми контекстно-свободными грамматиками. Последние — известные также как грамматики замещения гиперребер [4] — естественным образом обобщают контекстно-свободные грамматики на гиперграфы. Для них, как и для контекстно-свободных грамматик, разрешимы задача принадлежности (задается ли данный гиперграф данной грамматикой) и задача непустоты (непуст ли язык, задаваемый данной грамматикой). Поскольку грамматики слияния более выразительны, чем грамматики замещения гиперребер, представляет интерес вопрос, разрешимы ли для них вышеупомянутые алгоритмические задачи.

Оказалось, что на некоторые вопросы, касающиеся грамматик слияния, легче найти ответы, если сузить класс грамматик до грамматик слияния, сохраняющих связность. Так, в [5] было доказано, что задача непустоты для грамматик слияния, сохраняющих связность, разрешима и является NP-полной; в [1, 3] также доказано, что задача принадлежности разрешима для существенных грамматик слияния, сохраняющих связность. Разрешимость данных задач для всех грамматик слияния была оставлена как открытый вопрос в диссертации [3] и установлена позднее в [6], однако с большим количеством технических деталей. В [6] также показано, что языки, задаваемые грамматиками слияния, сохраняющими связность, удовлетворяют теореме Париха, т.е.

являются полулинейными. Аналогичное свойство для всех грамматик слияния установить не удалось.

В то время как многие задачи решаются легче для грамматик слияния, сохраняющих связность, неясно, насколько сложен сам класс таких грамматик: разрешима ли задача проверки, является ли данная грамматика слияния сохраняющей связность. В [3] отмечается, что “в общем случае наличие свойства сохранения связности проверить трудно” [3, с. 27], однако это утверждение доказано не было. Формально говоря, определение свойства сохранения связности предписывает рассмотреть всевозможные выводы в данной грамматике слияния и проверить, что в каждом из них слияния сохраняют связность. Таким образом, из определения непосредственно следует лишь, что задача принадлежит классу Π_1^0 , т.е. множество грамматик слияния, не сохраняющих связность, перечислимо.

В настоящей работе доказывается, что задача распознавания, является ли грамматика слияния сохраняющей связность, разрешима и принадлежит классу coNEXPTIME . С другой стороны, доказывается, что данная задача является PSPACE -трудной, т.е. действительно, наличие свойства сохранения связности проверить трудно. В доказательстве верхней оценки по грамматике слияния строится система линейных уравнений и неравенств таким образом, что существование у нее решения в натуральных числах эквивалентно тому, что грамматика слияния не сохраняет связность. В конструкции используются раскраски вершин гиперграфов. В доказательстве нижней оценки для сведения используются алгоритмические задачи, связанные с обобщениями контекстно-свободных грамматик — многокомпонентными контекстно-свободными грамматиками и линейными контекстно-свободными системами переписывания.

2. Предварительные сведения

2.1. Напомним, что A^* — множество слов в алфавите A , т.е. множество конечных упорядоченных наборов с элементами из A . Если дано слово $w \in A^*$, то его i -й символ обозначим через $w(i)$. Зафиксируем счетное множество меток Σ и на нем — функцию $\text{type} : \Sigma \rightarrow \mathbb{N}$.

Определение 2.1. *Гиперграф* — это структура $H = (V, E, \text{att}, \text{lab})$, где V — конечное множество *вершин*, E — конечное множество *гиперребер*, $\text{att} : E \rightarrow V^*$ — *функция прикрепления* (вершины, входящие в слово $\text{att}(e)$, называются *вершинами прикрепления* гиперребра e), $\text{lab} : E \rightarrow \Sigma$ — *функция разметки*, удовлетворяющая требованию $\text{type}(\text{lab}(e)) = |\text{att}(e)|$ (тип метки на гиперребре e совпадает с количеством вершин прикрепления e).

- Компоненты гиперграфа H будем в дальнейшем обозначать через $V_H, E_H, \text{att}_H, \text{lab}_H$.
- Множество гиперграфов с метками из Σ будем обозначать через $\mathcal{H}(\Sigma)$.
- Будем называть типом гиперребра тип его метки: $\text{type}_H(e) = \text{type}(\text{lab}_H(e))$.
- Гиперграф H — подгиперграф гиперграфа H' (символьное обозначение — $H \subseteq H'$), если $V_H \subseteq V_{H'}$, $E_H \subseteq E_{H'}$ и $\text{att}_H = \text{att}_{H'} \upharpoonright_{E_H}$, $\text{lab}_H = \text{lab}_{H'} \upharpoonright_{E_H}$.
- Если H_1, H_2 — подгиперграфы H , то их *объединением* называется подгиперграф гиперграфа H с множеством вершин $V_{H_1} \cup V_{H_2}$ и с множеством гиперребер $E_{H_1} \cup E_{H_2}$. Обозначение: $H_1 \cup H_2$.
- *Изоморфизм* гиперграфов H_1 и H_2 — это пара (f_V, f_E) биекций $f_V : V_{H_1} \rightarrow V_{H_2}$ и $f_E : E_{H_1} \rightarrow E_{H_2}$ таких, что

$$\begin{aligned} \text{lab}_{H_1}(e) &= \text{lab}_{H_2}(f_E(e)), \\ f_V(\text{att}_{H_1}(e)(1)) \dots f_V(\text{att}_{H_1}(e)(t)) &= \text{att}_{H_2}(f_E(e))(1) \dots \text{att}_{H_2}(f_E(e))(t) \end{aligned}$$

для каждого $e \in E_{H_1}$, где $t = \text{type}_{H_1}(e)$.

- Если $a \in \Sigma$ и $H \in \mathcal{H}(\Sigma)$, то через $\#_a(H)$ будем обозначать количество гиперребер с меткой a в H .
- *Путь* между вершинами v и v' в гиперграфе H — последовательность вида $(i_1, e_1, o_1), \dots, (i_n, e_n, o_n) \in (\mathbb{N} \times E_H \times \mathbb{N})^*$, где $\text{att}_H(e_1)(i_1) = v$, $\text{att}_H(e_n)(o_n) = v'$ и $\text{att}_H(e_k)(o_k) = \text{att}_H(e_{k+1})(i_{k+1})$ для каждого $k = 1, \dots, n-1$. Гиперграф H *связный*, если между любыми двумя его вершинами существует путь.

- *Компонента связности гиперграфа H* — связный гиперграф C , являющийся подгиперграфом H такой, что если $C \subseteq C' \subseteq H$ для некоторого гиперграфа C' , то $C' = C$. Множество компонент связности гиперграфа H обозначим через $\mathcal{C}(H)$.

2.2. Определим формально операцию слияния. Будем считать, что Σ является дизъюнктивным объединением множеств F (алфавита меток слияния) и \overline{F} (алфавита комплементарных меток), причем зафиксирована инволюция $\overline{} : \Sigma \rightarrow \Sigma$, устанавливающая биекцию между F и \overline{F} . Потребуем, чтобы $\text{type}(A) = \text{type}(\overline{A})$ для всех $A \in F$.

Определение 2.2. Слияние гиперребер e_1, e_2 в гиперграфе H возможно, если $\text{lab}_H(e_1) = A \in \Sigma$, $\text{lab}_H(e_2) = \overline{A}$; в таком случае оно состоит из двух шагов:

- из H удаляются e_1, e_2 ,
- в получившемся гиперграфе отождествляются вершина $\text{att}_H(e_1)(i)$ и вершина $\text{att}_H(e_2)(i)$ для каждого $i = 1, \dots, \text{type}(A)$.

Формально результатом слияния является гиперграф $H' = (V, E, \text{att}, \text{lab})$, где $V = V_H / \sim$, $E = E_H \setminus \{e_1, e_2\}$, $\text{att}(e)(i) = [\text{att}_H(e)(i)]_{\sim}$ и lab — сужение lab_H на E . Здесь \sim — наименьшее отношение эквивалентности на V_H , содержащее множество $\{(\text{att}_H(e_1)(i), \text{att}_H(e_2)(i)) \mid i = 1, \dots, \text{type}(A)\}$. Будем писать $H \Rightarrow H'$.

Можно обобщить операцию слияния, разрешив применять ее одновременно к нескольким парам гиперребер.

Определение 2.3. Пусть H — гиперграф и P — множество, элементы которого суть множества вида $\{e_1, e_2\} \subseteq E_H$, где $\text{lab}_H(e_1)$ и $\text{lab}_H(e_2)$ комплементарны; помимо этого, различные элементы P не пересекаются. Определим гиперграф $H' = (V, E, \text{att}, \text{lab})$ следующим образом:

- $V = V_H / \sim_P$, где \sim_P — наименьшее отношение эквивалентности, содержащее множество $\{(\text{att}_H(e_1)(i), \text{att}_H(e_2)(i)) \mid \{e_1, e_2\} \in P, i = 1, \dots, \text{type}(\text{lab}_H(e_1))\}$;
- $E = E_H \setminus \{e \mid \exists p (e \in p \in P)\}$;
- $\text{att}(e)(i) = [\text{att}_H(e)(i)]_{\sim_P}$ для $e \in E, i = 1, \dots, \text{type}_H(e)$;
- lab — сужение lab_H на E .

Тогда H' — результат *параллельного слияния* в H ; будем писать $H \xRightarrow{P} H'$.

Определение 2.4. *Грамматика слияния* — конечное множество Z , элементы которого суть связные гиперграфы с метками из $\Sigma = F \cup \overline{F}$.

Определение 2.5. Гиперграф H порождается грамматикой слияния Z , если существует гиперграф H_0 , каждая компонента связности которого изоморфна какому-нибудь гиперграфу из Z такой, что $H_0 \Rightarrow^* H$.

Отметим, что в оригинальном определении грамматик слияния из [1, 3] алфавит меток включает не только метки слияния и комплементарные им, но и терминальные метки, метки-маркеры и метки-коннекторы. Однако определение свойства сохранения связности из [5], которое будет дано в следующем абзаце, никак не зависит от наличия или отсутствия этих типов меток и от их функции, поэтому нет необходимости включать их в определения.

Определение 2.6. Грамматика слияния Z *сохраняет связность*, если для любого гиперграфа H , порождаемого данной грамматикой, и для любых $e_1, e_2 \in E_H$ с комплементарными метками верно одно из двух условий

- (1) e_1 принадлежит компоненте связности C_1 гиперграфа H , e_2 принадлежит компоненте связности C_2 гиперграфа H , отличной от C_1 , и слияние e_1 и e_2 в $C_1 \cup C_2$ дает связный гиперграф,
- (2) e_1 и e_2 принадлежат одной и той же компоненте связности C гиперграфа H , и слияние e_1 и e_2 в C дает связный гиперграф.

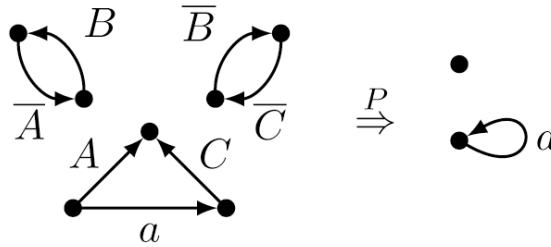
Замечание 2.1. Легко проверить, что если $H_0 \Rightarrow^* H$, то для некоторого P верно, что $H_0 \xRightarrow{P} H'$, где H' — гиперграф, изоморфный H [1, 3]. Верно и обратное: если $H_0 \xRightarrow{P} H'$, то существует гиперграф H , изоморфный H' и такой, что $H_0 \Rightarrow^* H$. Как следствие, если в определении 2.5

заменить условие $H_0 \Rightarrow^* H$ на условие $H_0 \xRightarrow{P} H'$. Это не повлияет на наличие либо отсутствие свойства сохранения связности у грамматик слияния.

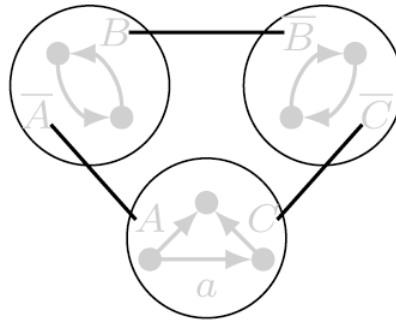
2.3. В доказательствах нам удобно представлять применения параллельных слияний с помощью неориентированного графа, называемого сетью слияний. Неориентированный граф — это тройка (V, E, att) , где $att : E \rightarrow \mathcal{P}(V)$ ставит в соответствие каждому ребру из E множество вида $\{v_1, v_2\} \subseteq V$ (v_1 и v_2 могут совпадать).

Определение 2.7. Пусть $H \xRightarrow{P} H'$. Сеть слияния — неориентированный граф $(C(H), P, att)$, где, если $p = \{e_1, e_2\} \in P$ и гиперребро e_i принадлежит компоненте связности H_i гиперграфа H (при $i = 1, 2$), то $att(p) = \{H_1, H_2\}$.

Пример 2.1. Рассмотрим применение параллельного слияния к трем парам гиперребер:



Сеть слияния в данном случае можно изобразить следующим образом:



Предложение 2.1. Если H порождается грамматикой слияния Z , сеть слияния для $H \xRightarrow{P} H'$ является связным графом и Z сохраняет связность, то H' — связный гиперграф.

Доказательство. Допустим, что сеть слияния — дерево. Зафиксируем произвольную компоненту связности H_0 гиперграфа H в качестве корня этого дерева. Будем строить последовательность H_0, H_1, \dots по следующему алгоритму. Будем обходить сеть слияния в глубину и всякий раз, когда в процессе обхода мы переходим по ребру $p = \{e_1, e_2\} \in P$ к вершине C , которую до этого не посещали, будем применять слияние к гиперребрам e_1 и e_2 . Напомним, что C — компонента связности гиперграфа H . Без ограничения общности можно считать, что $e_1 \in E_C$ и $e_2 \in H_n$, где H_n — гиперграф, полученный до этого шага. Положим H_{n+1} равным результату слияния e_1 и e_2 , примененного к объединению гиперграфов H_n и C . Поскольку грамматика слияния сохраняет связность, все H_n связны. В результате обхода дерева все компоненты связности гиперграфа H участвуют в слияниях, поэтому получающийся в итоге вышеописанного алгоритма гиперграф также связан. Наконец, отметим, что этот гиперграф изоморфен H' .

Если сеть слияния не является деревом, выберем в ней остовное дерево. Пусть P' — ребра из P , образующие остовное дерево, а P'' — остальные ребра. Уже доказано, что если $H \xRightarrow{P'} H''$, то H'' — связный гиперграф. Если поочередно применить слияния к парам гиперребер из P'' в гиперграфе H'' , то связность на каждом шаге сохранится (по свойству сохранения связности) и итоговый гиперграф H' также будет связным. \square

2.4. В § 4 в качестве вспомогательного инструмента будут использоваться альтернирующие машины Тьюринга. *Альтернирующая машина Тьюринга* (АМТ) — структура

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, \Delta, q_S, Q_F, Q_U, Q_E),$$

компоненты которой суть множество состояний Q , множество входных символов Σ , множество символов ленты $\Gamma \supseteq \Sigma \cup \{B\}$, символ пробела B , множество инструкций Δ , начальное состояние $q_S \in Q$, множество конечных состояний $Q_F \subseteq Q$, множество универсальных состояний $Q_U \subseteq Q$ и множество экзистенциальных состояний $Q_E \subseteq Q$. Будем считать, что Q является дизъюнктивным объединением множеств Q_F , Q_U и Q_E . Инструкции из Δ имеют вид (q, c, q', c', D) , где $D \in \{L, R\}$.

Конфигурация — это тройка (q, k, α) , где $q \in Q$ — текущее состояние АМТ, $\alpha \in \Gamma^*$ — содержимое ленты АМТ и $k \in \{1, \dots, |\alpha|\}$ — указатель на позицию управляющего устройства АМТ. Будем писать $(q, k, \alpha_1 \alpha_2) \vdash (q', k + 1, \alpha_1 c' \alpha_2)$ для двух конфигураций, если инструкция (q, c, q', c', R) принадлежит Δ и $|\alpha_1 c| = k$; аналогично, если $(q, c, q', c', L) \in \Delta$ и $|\alpha_1 c| = k$, будем писать $(q, k, \alpha_1 \alpha_2) \vdash (q', k - 1, \alpha_1 c' \alpha_2)$. Определим множества $\text{ACC}_t(M)$ для $t \in \mathbb{N}$ как наименьшие множества, удовлетворяющие следующим условиям.

- (1) Если $t_1 \leq t_2$, то $\text{ACC}_{t_1}(M) \subseteq \text{ACC}_{t_2}(M)$.
- (2) Если $q \in Q_F$, то любая конфигурация вида (q, k, α) принадлежит $\text{ACC}_0(M)$.
- (3) Пусть $I = (q, k, \alpha)$ — конфигурация такая, что $q \in Q_U$. Если для каждой конфигурации I' такой, что $I \vdash I'$, верно, что $I' \in \text{ACC}_t(M)$, то $I \in \text{ACC}_{t+1}(M)$.
- (4) Пусть $I = (q, k, \alpha)$ — конфигурация такая, что $q \in Q_E$. Если существует конфигурация I' такая, что $I \vdash I'$ и $I' \in \text{ACC}_t(M)$, то $I \in \text{ACC}_{t+1}(M)$.

Пусть

$$\text{ACC}(M) = \bigcup_{t \in \mathbb{N}} \text{ACC}_t(M).$$

Слово $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ допускается альтернирующей машиной Тьюринга M с использованием памяти m , если $m \geq n$ и конфигурация $(q_S, 1, wB^{m-n})$ принадлежит $\text{ACC}(M)$. Легко видеть, что если w допускается с использованием памяти m_1 и $m_1 \leq m_2$, то w также допускается с использованием памяти m_2 . Язык $L(M)$ состоит из всех слов, которые допускаются M с использованием какой-нибудь памяти.

Если дана функция $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, будем говорить, что M принадлежит $\text{ASPACE}(f)$, если для каждого слова $w \in L(M)$ верно, что оно допускается M с использованием памяти $f(|w|)$. Будем также говорить, что M принадлежит $\text{ATIME}(f)$, если M принадлежит $\text{ASPACE}(f)$ и $\text{ACC}(M) \cap \{(q_S, 1, wB^{f(n)-n}) \mid w \in \Sigma^*, |w| = n\} \subseteq \text{ACC}_{f(n)}(M)$. Согласно классическому результату [7] АМТ, работающие за полиномиальное время, распознают в точности все языки класса PSPACE . Как следствие, для некоторого многочлена $p(n)$ существует АМТ $M \in \text{ATIME}(p(n))$ такая, что $L(M)$ — PSPACE -полный язык.

3. Разрешимость и верхняя сложностная оценка

В данном параграфе доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Задача распознавания по грамматике слияния является ли она сохраняющей связность, разрешима и принадлежит классу сложности coNEXPTIME .*

Пусть дана грамматика слияния Z и поставлена задача ответить на вопрос, является ли она сохраняющей связность.

Назовем *раскраской* гиперграфа H функцию $col : V_H \rightarrow \{\bullet, \circ\}$, ставящую в соответствие вершинам H черный или белый цвет. Будем называть (H, col) *раскрашенным гиперграфом*. Раскрашенные гиперграфы (H_1, col_1) и (H_2, col_2) изоморфны, если существует изоморфизм (f_V, f_E) гиперграфов H_1 и H_2 такой, что $col_1(v) = col_2(f_V(v))$ для всех $v \in V_{H_1}$.

Обозначим через VC множество всех раскрашенных гиперграфов, а через $\text{VC}(Z)$ — множество всех раскрашенных гиперграфов (H, col) таких, что $H \in Z$. Назовем раскраску col гиперграфа H *неодноцветной*, если образу col принадлежат как черный, так и белый цвета; обозначим через $\text{HVC}(Z)$ множество пар (H, col) , где $H \in Z$ и col — неодноцветная раскраска H .

Если дана раскраска col гиперграфа H , то информацию о ней можно закодировать в метках гиперребер. Введем новое множество меток $\tilde{\Sigma} = \{(a, f) \mid a \in \Sigma, f : \{1, \dots, \text{type}(a)\} \rightarrow \{\bullet, \circ\}\}$; определим тип метки (a, f) так: $\text{type}(a, f) = \text{type}(a)$. Определим функцию $\text{he} : \text{VC} \rightarrow \mathcal{H}(\tilde{\Sigma})$ следующим образом: $\text{he}(H, col)$ — это гиперграф H' такой, что

- $V_{H'} = V_H, E_{H'} = E_H, \text{att}_{H'} = \text{att}_H,$
- $\text{lab}_{H'}(e) = (\text{lab}_H(e), f),$ где $f(i) = col(\text{att}_H(e)(i))$ для $i = 1, \dots, \text{type}_H(e).$

Определим на $\tilde{\Sigma}$ инволюцию $\bar{\cdot}$ следующим образом: $\overline{(A, f)} = (\bar{A}, f).$

Назовем метку $(A, f) \in \tilde{\Sigma}$ *неоднoцветной*, если $A \in F$ и образу f принадлежат как черный, так и белый цвета. Пусть $\theta_1, \dots, \theta_p$ — все однoцветные метки. Введем функцию $\Theta : \mathcal{H}(\tilde{\Sigma}) \rightarrow \mathbb{Z}^p:$

$$\Theta(H) = (\#\theta_1(H) - \#\bar{\theta}_1(H), \dots, \#\theta_p(H) - \#\bar{\theta}_p(H)).$$

Для каждого элемента $C \in \text{VC}(Z)$ введем переменную $x(C)$, принимающую значения в \mathbb{N} . Построим следующую систему линейных диофантовых уравнений и неравенств:

$$\begin{cases} \sum_{C \in \text{VC}(Z)} x(C)\Theta(\text{he}(C)) = 0, \\ \sum_{C \in \text{HVC}(Z)} x(C) \geq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Система (3.1) содержит экспоненциальное по размеру Z число уравнений и неизвестных.

Лемма 3.1. *Если система (3.1) имеет решение в натуральных числах, то грамматика слияния Z не сохраняет связность.*

Доказательство. Пусть существует решение системы (3.1); зафиксируем его. Построим раскрашенный гиперграф (G_0, col_0) с раскраской col_0 следующим образом: для $(H, col) \in \text{VC}(Z)$ добавим в G_0 $x(H, col)$ компонент связности, изоморфных H , раскраска col_0 каждой из которых совпадает с col ; других компонент связности G_0 не содержит.

Условие $\sum_{C \in \text{VC}(Z)} x(C)\Theta(\text{he}(C)) = 0$ говорит, что в гиперграфе $G := \text{he}(G_0, col_0)$ число гиперребер с меткой θ_i и число гиперребер с меткой $\bar{\theta}_i$ совпадают для каждого $i = 1, \dots, p$. Условие $\sum_{C \in \text{HVC}(Z)} x(C) \geq 1$ говорит, что одна из компонент связности G_0 (обозначим ее через K_0) имеет однoцветную раскраску. Положим $K := \text{he}(K_0, col_0)$.

Выберем произвольным образом множество P , удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) каждый элемент P имеет вид $\{e_1, e_2\} \subseteq E_G$, где $\text{lab}_G(e_1) = \theta_i, \text{lab}_G(e_2) = \bar{\theta}_i$ для некоторого i ,
- (2) различные элементы P не пересекаются,
- (3) каждое гиперребро из G с меткой θ_i либо $\bar{\theta}_i$ входит в один из элементов P .

По данным G и P можно построить сеть слияния $(\mathcal{C}(G), P, \text{att})$. Рассмотрим наименьшее множество $\mathcal{R}_K \subseteq \mathcal{C}(G)$ такое, что $K \in \mathcal{R}_K$ и такое, что всегда, когда $X \in \mathcal{R}_K$ и $\text{att}(q) = \{X, Y\}$ для некоторого $q \in P$, верно, что $Y \in \mathcal{R}_K$. Иными словами, \mathcal{R}_K состоит из всех вершин сети слияния, достижимых из K переходами по ребрам этой сети. Пусть $G' — объединение гиперграфов из \mathcal{R}_K . Пусть $P' = \{p \in P \mid p \subseteq E_{G'}\}$.$

Предположим, от противного, что грамматика слияния Z сохраняет связность. Рассмотрим применение правила $G' \xrightarrow{P'} G''$. По предложению 2.1, гиперграф G'' является связным. Действительно, связность сети слияния $(\mathcal{C}(G'), P', \text{att}')$ непосредственно вытекает из построения G' . Отметим, что при слияниях отождествляются вершины одного и того же цвета, поскольку в компонентарных метках θ_i и $\bar{\theta}_i$ записана информация о цветах вершин. Существует подгиперграф G'_0 гиперграфа G_0 такой, что $G' = \text{he}(G'_0, col_0)$. Раскраска col_0 компоненты связности K_0 , входящей в G'_0 , однoцветная. Существует раскрашенный гиперграф (G''_0, col''_0) такой, что $G'' = \text{he}(G''_0, col''_0)$, причем в связном гиперграфе G''_0 есть вершина черного цвета и вершина белого цвета. Зафиксируем путь между этими вершинами. Существует гиперребро e на этом пути, одна из вершин прикрепления которого белая, а другая — черная. Тогда $\text{lab}_{G''}(e)$ — однoцветная метка. Однако

это невозможно: все гиперребра гиперграфа G' с неоднородными метками участвуют в параллельном слиянии $G' \xrightarrow{P'} G''$ и потому не могут присутствовать в G'' . \square

Лемма 3.2. *Если грамматика слияния Z не сохраняет связность, то система (3.1) имеет решение в натуральных числах.*

Доказательство. Пусть H — гиперграф, порождаемый грамматикой Z , для которого нарушается определение 2.6. Согласно замечанию 2.1, можно считать, что существует гиперграф H_0 , каждая компонента связности которого изоморфна одному из гиперграфов в Z такой, что $H_0 \xrightarrow{P} H$. В гиперграфе H есть два гиперребра e_1, e_2 с комплементарными метками, слияние которых нарушает определение 2.6. Это означает, что если $Q = \{e_1, e_2\}$ и $H \xrightarrow{Q} H'$, то существуют $i_0, j_0 \in \{1, \dots, \text{type}(e_1)\}$ такие, что $[\text{att}_H(e_1)(i_0)]_{\sim_Q}$ и $[\text{att}_H(e_1)(j_0)]_{\sim_Q}$ не соединены путем в H' . Раскрасим вершины H' в черной и белой цвета так, чтобы

- (i) вершины, принадлежащие одной и той же компоненте связности, были раскрашены в один цвет,
- (ii) вершина $[\text{att}_H(e_1)(i_0)]_{\sim_Q}$ была раскрашена в белый цвет,
- (iii) вершина $[\text{att}_H(e_1)(j_0)]_{\sim_Q}$ была раскрашена в черный цвет.

Обозначим эту раскраску через col' .

Раскраску col' гиперграфа H' можно перенести на гиперграф H : определим $col(v) := col'([v]_{\sim_Q})$ для $v \in V_H$. Аналогичным образом col можно перенести на гиперграф H_0 : определим $col_0(v) := col([v]_{\sim_P})$ для каждого $v \in V_{H_0}$.

Зафиксируем множество $VC'(Z) \subseteq VC(Z)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- (1) раскрашенные гиперграфы в $VC'(Z)$ попарно не изоморфны;
- (2) для каждого раскрашенного гиперграфа из $VC(Z)$ существует изоморфный ему из $VC'(Z)$.

Другими словами, $VC'(Z)$ состоит из представителей классов изоморфности гиперграфов из $VC(Z)$. Для каждого раскрашенного гиперграфа $C \in VC'(Z)$ положим $x_0(C)$ равным числу изоморфных копий C среди компонент связности раскрашенного гиперграфа (H_0, col_0) . Если же $C \in VC(Z) \setminus VC'(Z)$, то положим $x_0(C) = 0$.

Раскраски на H_0 и H определены таким образом, что при параллельных слияниях P и Q отождествляются вершины одного цвета. Как следствие, следующая последовательность параллельных слияний корректна:

$$\text{he}(H_0, col_0) \xrightarrow{P} \text{he}(H, col) \xrightarrow{Q} \text{he}(H', col').$$

В (H', col') нет неоднородных компонент связности; как следствие, в $\text{he}(H', col')$ нет неоднородных меток. Из этого следует, что для каждого $i = 1, \dots, p$ число гиперребер с меткой θ_i в $\text{he}(H_0, col_0)$ совпадает с числом гиперребер с меткой $\bar{\theta}_i$ (они все должны пропасть в результате слияний). Следовательно, $\sum_{C \in VC(Z)} x_0(C) \Theta(\text{he}(C)) = 0$. С другой стороны, в $\text{he}(H, col)$ есть

неоднородная метка — на гиперребре e_1 . Действительно, вершина $\text{att}_H(e_1)(i_0)$ раскрашена в белый цвет, а вершина $\text{att}_H(e_1)(j_0)$ — в черный цвет. Значит, неоднородная метка есть также в $\text{he}(H_0, col_0)$. Следовательно, одна из компонент связности H_0 имеет неоднородную раскраску, и имеет место неравенство $\sum_{C \in HVC(Z)} x_0(C) \geq 1$. Получается, что набор чисел $(x_0(C) \mid C \in VC(Z))$ является решением системы (3.1). \square

Доказательство теоремы 3.1. По грамматике слияния Z строится система (3.1). Проверка существования решения системы такого вида в натуральных числах является частным случаем задачи целочисленного линейного программирования, принадлежащей классу NP (это следует из оценок на размер минимального решения [8]). Поскольку система (3.1) имеет размер $2^{O(q(|Z|))}$, где $q(n)$ — некоторый полином, время работы недетерминированного полиномиального алгоритма на входе (3.1) составляет также порядка $2^{O(q(|Z|))}$, т.е. проверка существования решения системы (3.1) принадлежит классу NEXPTIME. Существование решения системы (3.1) эквивалентно тому, что грамматика Z не сохраняет связность, по леммам 3.1 и 3.2. \square

4. Нижняя сложностная оценка

В данном параграфе доказывается следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Задача распознавания по грамматике слияния, является ли она сохраняющей связность, PSPACE-трудная.*

Для доказательства будут использованы обобщения контекстно-свободных грамматик — многокомпонентные контекстно-свободные грамматики и линейные контекстно-свободные системы переписывания [9]. Дадим необходимые определения. Пусть T — конечный алфавит.

Определение 4.1. Функция $f : (T^*)^{d_1} \times \dots \times (T^*)^{d_k} \rightarrow (T^*)^{d_0}$ называется *многокомпонентной контекстно-свободной* (МКС), если она задается равенством вида

$$f((x_{11}, \dots, x_{1d_1}), \dots, (x_{k1}, \dots, x_{kd_k})) = (y_{11} \dots y_{1l_1}, \dots, y_{d_01} \dots y_{d_0l_{d_0}}), \quad (4.1)$$

где y_{ij} (при $i = 1, \dots, d_0$ и $j = 1, \dots, l_i$) — это либо символ из T , либо одна из переменных x_{pq} ; более того, требуется, чтобы каждая переменная x_{pq} встречалась не более одного раза среди y_{ij} . Не запрещено, чтобы l_i равнялось нулю; это означает, что i -я компонента правой части равенства (4.1) — пустое слово.

Переменная x_{pq} ($p \in \{1, \dots, k\}$, $q \in \{1, \dots, d_p\}$) называется неиспользуемой в f , если она не встречается среди y_{ij} .

Легко понять, что если $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k)$ и $g(\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_m)$ — МКС-функции (где все переменные в \vec{x}_j и \vec{x}'_i различные), то их композиция вида $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, g(\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_m), \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_k)$ — тоже МКС-функция; также, если в f и g нет неиспользуемых переменных, то и в их композиции неиспользуемых переменных нет.

Определение 4.2. *Многокомпонентная контекстно-свободная грамматика* (МКС-грамматика) — это набор $G = (N, T, P, S)$, где

- (1) N — конечный алфавит нетерминальных символов с зафиксированной на нем функцией $\dim : N \rightarrow \mathbb{N}$,
- (2) T — конечный алфавит терминальных символов,
- (3) P — конечное множество МКС-правил, т.е. правил вида $A_0 \rightarrow f[A_1, \dots, A_k]$, где $f : (T^*)^{d_1} \times \dots \times (T^*)^{d_k} \rightarrow (T^*)^{d_0}$ — МКС-функция и $A_i \in N$, причем $\dim(A_i) = d_i$ при $i = 0, \dots, k$,
- (4) $S \in N$ — стартовый символ такой, что $\dim(S) = 1$.

Определение 4.3. *Линейная контекстно-свободная система переписывания* (ЛКССП) — это МКС-грамматика такая, что все участвующие в ее правилах МКС-функции не имеют неиспользуемых переменных.

Определим понятие языка, задаваемого МКС-грамматикой.

Определение 4.4. Множество $\text{der}(G)$ *производных* МКС-правил грамматики $G = (N, T, P, S)$ — наименьшее из множеств, удовлетворяющих следующим условиям:

- (1) P содержится в данном множестве;
- (2) если правила $A \rightarrow f[A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_k]$, $B \rightarrow g[B_1, \dots, B_m]$ принадлежат данному множеству и

$$h(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_m, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_k) := f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, g(\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_m), \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_k) \quad (4.2)$$

является корректно определенной композицией МКС-функций (где все переменные в \vec{x}_j и \vec{x}'_i различные), то правило $A \rightarrow h[A_1, \dots, A_{i-1}, B_1, \dots, B_m, A_{i+1}, \dots, A_k]$ принадлежит данному множеству.

Язык $L(G)$ — множество слов $w \in T^*$ таких, что $S \rightarrow h[] \in \text{der}(G)$ и $h() = w$. Для символа $A \in N$ с размерностью $\dim(A) = d$ будем также обозначать через $L_A(G)$ множество наборов слов $\vec{w} = (w_1, \dots, w_d) \in (T^*)^d$ таких, что $A \rightarrow h[] \in \text{der}(G)$ и $h() = \vec{w}$.

Определение 4.5. Символ $A \in N$ *непродуктивен* в МКС-грамматике G , если $L_A(G) = \emptyset$.

Задача проверки равенства $L_A(G) = \emptyset$ решается за полиномиальное время тем же способом, что и для контекстно-свободных грамматик [10, Алгоритм 2.7]. Все непродуктивные символы и правила грамматики, их содержащие, можно удалить, поэтому верно следующее предложение.

Предложение 4.1. *Существует алгоритм, работающий за полиномиальное время, который преобразует ϵ -грамматику G в ϵ -грамматику G' без непродуктивных символов такую, что $L(G) = L(G')$.*

В дальнейшем предполагаем, что МКС-грамматики не содержат непродуктивных символов.

Определение 4.6. МКС-грамматика называется *ациклической*, если у нее нет производного правила вида $A \rightarrow f[A_1, \dots, A_i, A, B_1, \dots, B_j]$, т.е. правила, в котором нетерминальный символ из левой части встречается в правой части.

В доказательстве нижней оценки используются следующие задачи.

Задача А. Дана ациклическая МКС-грамматика G с алфавитом терминальных символов $T = \{a\}$. Проверить, принадлежит ли языку $L(G)$ пустое слово.

Задача В. Дана ациклическая ЛКССП G с алфавитом терминальных символов $T = \{a, b\}$. Проверить, принадлежит ли языку $L(G)$ слово, начинающееся с b (т.е. непусто ли пересечение $L(G) \cap b\{a, b\}^*$).

Предложение 4.2. *Задача А является PSPACE-трудной.*

Доказательство. Доказательство является модификацией доказательства из [11, приложение А.1], где доказана EXPTIME-трудность следующей задачи: по данной МКС-грамматике G проверить, принадлежит ли ϵ языку $L(G)$. Далее будет описана конструкция из [11] и предложена ее модификация.

Допустим, что задана $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, \Delta, q_S, Q_F, Q_U, Q_E) \in \text{ASPACE}(p(n))$, где $p(n)$ — многочлен. Заддим нумерацию на элементах Γ , а именно: $\Gamma = \{c_1, \dots, c_u\}$. Определим функцию пары: $\langle k, c_j \rangle = (k-1)u + j$ (для $k = 1, \dots, p(n)$ и $j = 1, \dots, u$). Введем обозначение $U = up(n)$.

Будем говорить, что набор слов $(v_1, \dots, v_U) \in (a^*)^U$ в алфавите $\{a\}$ *представляет слово* $\alpha \in \Gamma^{p(n)}$, если $\alpha(k) = c \implies v_{\langle k, c \rangle} = \epsilon$. Например, если $\Gamma = \{c_1, c_2, c_3\}$ и $p(n) = 3$, то слово $c_2c_1c_3$ представляется набором $(a, \epsilon, aa, \epsilon, aaa, \epsilon, aa, a, \epsilon)$, как и любым другим набором, в котором во второй, четвертой и девятой координатах находится пустое слово.

Допустим, что на вход дано слово $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$. По АМТ M и по w будем строить МКС-грамматику G . Для каждого $q \in Q$ и для каждого $k \in \{1, \dots, p(n)\}$ вводится нетерминальный символ $A_{q,k}$ с размерностью $\dim(A_{q,k}) = U$; также вводится стартовый символ S с $\dim(S) = 1$.

Для $c, c' \in \Sigma$ и для $1 \leq k \leq p(n)$ определим функцию $f_{cc'k} : (T^*)^U \rightarrow (T^*)^U$ следующим образом: $\langle r, b \rangle$ -я компонента значения функции $f_{cc'k}(x_1, \dots, x_U)$ равна $x_{\langle r, b \rangle}$, если $r \neq k$; его $\langle k, c \rangle$ -я компонента равна $x_{\langle k, c' \rangle}$. Остальные его компоненты равны a . Определим также функцию

$$\text{CONCAT}_r((x_{11}, \dots, x_{1U}), \dots, (x_{r1}, \dots, x_{rU})) = (x_{11}x_{21} \dots x_{r1}, \dots, x_{1U}x_{2U} \dots x_{rU}).$$

Правила МКС-грамматики G таковы:

- (1) $S \rightarrow f_0[A_{q_S, 1}]$, где $f_0(x_1, \dots, x_U) = x_{\langle 1, w_1 \rangle} \dots x_{\langle n, w_n \rangle} x_{\langle n+1, B \rangle} \dots x_{\langle p(n), B \rangle}$;
- (2) $A_{q,k} \rightarrow e[]$, где $q \in Q_F$ и $e() = (\epsilon, \dots, \epsilon)$;
- (3) $A_{q,k} \rightarrow f_{cc'k}[A_{q', k+1}]$ для каждого $1 \leq k < p(n)$, если $(q, c, q', c', R) \in \Delta$ и $q \in Q_E$;
- (4) $A_{q,k} \rightarrow f_{cc'k}[A_{q', k-1}]$ для каждого $1 < k \leq p(n)$, если $(q, c, q', c', L) \in \Delta$ и $q \in Q_E$;
- (5) $A_{q,k} \rightarrow h[A_{q'_1, k+1}, \dots, A_{q'_{n_R}, k+1}, A_{q''_1, k-1}, \dots, A_{q''_{n_L}, k-1}]$, где $q \in Q_U$, а (q, c, q'_i, c'_i, R) (при $i = 1, \dots, n_R$) и (q, c, q''_i, c''_i, L) (при $i = 1, \dots, n_L$) — это все инструкции M , первыми двумя компонентами которых являются q, c . Определение функции h дано ниже:

$$h(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_{n_R}, \vec{z}_1, \dots, \vec{z}_{n_L}) = \text{CONCAT}_{n_R+n_L}(f_{cc'_1k}(\vec{y}_1), \dots, f_{cc'_{n_R}k}(\vec{y}_{n_R}), f_{cc''_1k}(\vec{z}_1), \dots, f_{cc''_{n_L}k}(\vec{z}_{n_L})).$$

Одно правило данной грамматики соответствует одному шагу работы альтернирующей машины Тьюринга. Грамматика G удовлетворяет следующему условию [11, Утверждение А.1]:

$$(q, k, \alpha) \in \text{ACC}(M) \iff \text{существует набор } \vec{v} \in L_{A_{q,k}}(G), \text{ который представляет } \alpha.$$

Это утверждение доказывается в обе стороны непосредственной индукцией. Как следствие, ε порождается грамматикой $G \iff$ существует набор $\vec{v} \in L_{A_{q_S,1}}(G)$, у которого координаты с номерами $\langle 1, w_1 \rangle, \dots, \langle n, w_n \rangle, \langle n+1, B \rangle, \dots, \langle p(n), B \rangle$ равны ε (это следует из определения f_0) \iff существует набор $\vec{v} \in L_{A_{q_S,1}}(G)$, представляющий $wB^{p(n)-n} \iff M$ допускает w . На этом месте завершается описание конструкции из [11].

Преобразуем МКС-грамматику G в МКС-грамматику G' следующим образом. Нетерминальные символы G' — это S и $A_{q,k}^{(i)}$, где $i \in \{0, \dots, p(n)\}$. Будем называть число i индексом символа $A_{q,k}^{(i)}$. Правило (4) заменим на $S \rightarrow f[A_{q_S,1}^{(0)}]$; правило типа (4) заменим на правила $A_{q,k}^{(i)} \rightarrow e[]$ при $i = 0, \dots, p(n)$; правила типов (4), (4) и (4) преобразуем так: если исходное правило имеет вид $A \rightarrow g[A_1, \dots, A_l]$, то оно заменяется на правила $A^{(i)} \rightarrow g[A_1^{(i+1)}, \dots, A_l^{(i+1)}]$ для всех $i = 0, \dots, p(n) - 1$. Символ $A_{q,k}^{(i)}$ сообщает следующую информацию: АМТ M находится в состоянии q , управляющее устройство находится на позиции k , и прошло i шагов с начала работы M . При применении правила индекс символа увеличивается на 1. Очевидно, грамматика G' ациклическая, поскольку индексы нетерминальных символов в правой части любого производного правила строго больше индекса символа в левой части этого правила.

Индукцией по t несложно доказать следующую эквивалентность:

$$(q, k, \alpha) \in \text{ACC}_t(M) \iff \text{существует } \vec{v} \in L_{A_{q,k}^{(t)}}(G'), \text{ представляющий } \alpha \text{ такой, что } t' = p(n) - t.$$

Достаточно сравнить рекурсивное определение $\text{ACC}_t(M)$ с правилами грамматики G' .

Допустим, что $M \in \text{ATIME}(p(n))$ задает PSPACE-полный язык $L(M)$. В таком случае: $\varepsilon \in L(G) \iff$ существует набор $\vec{v} \in L_{A_{q_S,1}^{(0)}}(G')$ такой, что его $\langle 1, w_1 \rangle$ -я, \dots , $\langle n, w_n \rangle$ -я, $\langle n+1, B \rangle$ -я, \dots , $\langle p(n), B \rangle$ -я компоненты равны $\varepsilon \iff (q_S, 1, wB^{p(n)-n})$ принадлежит $\text{ACC}_{p(n)}(M) = \text{ACC}(M) \iff w \in L(M)$. Это доказывает, что задача A PSPACE-трудна. \square

Предложение 4.3. *Задача A сводится за полиномиальное время к задаче B.*

Доказательство. Пусть $G = \langle N, \{a\}, P, S \rangle$ — ациклическая МКС-грамматика. Определим ЛКССП $\tilde{G} = \langle \tilde{N}, \{a, b\}, \tilde{P}, \tilde{S} \rangle$.

- Положим $\tilde{N} := N \cup \{\tilde{S}\}$ и определим функцию $\widetilde{\dim}(A) := \dim(A) + 1$ при $A \in N$, а также $\widetilde{\dim}(\tilde{S}) = 1$.
- По МКС-функции $f : (T^*)^{d_1} \times \dots \times (T^*)^{d_k} \rightarrow (T^*)^{d_0}$ определим МКС-функцию $\tilde{f} : (T^*)^{d_1+1} \times \dots \times (T^*)^{d_k+1} \rightarrow (T^*)^{d_0+1}$ следующим образом. Для каждого $i = 1, \dots, d_0$ положим i -ю компоненту значения функции

$$\tilde{f}((x_{11}, \dots, x_{1d_1}, x_{1(d_1+1)}), \dots, (x_{k1}, \dots, x_{kd_k}, x_{k(d_k+1)}))$$

равной соответствующей компоненте $f((x_{11}, \dots, x_{1d_1}), \dots, (x_{k1}, \dots, x_{kd_k}))$; положим $(d_0 + 1)$ -ю компоненту равной $x_{1(d_1+1)}x_{2(d_2+1)} \dots x_{k(d_k+1)}z_1 \dots z_l$, где z_1, \dots, z_l — все неиспользуемые переменные в f . (Если $k = 0$, то эта компонента равна ε .) Очевидно, что у функции \tilde{f} нет неиспользуемых переменных. Определим также МКС-функцию $g : (T^*)^2 \rightarrow T^*$: $g(x_1, x_2) = x_1bx_2$.

- Определим $\tilde{P} = \{A \rightarrow \tilde{f}[A_1, \dots, A_k] \mid (A \rightarrow f[A_1, \dots, A_k]) \in P\} \cup \{\tilde{S} \rightarrow g[S]\}$.

Легко видеть, что МКС-функции в G и в \tilde{G} различаются только в дополнительной последней компоненте, которая есть у функций из \tilde{G} . В частности, правило вида $S \rightarrow h[]$, где $h() = (\varepsilon, \tau)$ при некотором $\tau \in T^*$, является производным в грамматике \tilde{G} , если и только если правило $S \rightarrow h'[]$, где $h'() = \varepsilon$, является производным в G . Последнее эквивалентно тому, что $\varepsilon \in L(G)$. В свою очередь, правило $S \rightarrow h[]$, где $h() = (\varepsilon, \tau)$, является производным в \tilde{G} тогда и только тогда, когда $\tilde{S} \rightarrow f[]$ является производным в \tilde{G} , где $f() = g(h()) = b\tau$. Подводя итог, $\varepsilon \in L(G)$ тогда и только тогда, когда при некотором $\tau \in T^*$ верно, что $b\tau \in L(\tilde{G})$.

Остается заметить, что \tilde{G} ациклическая. Действительно, в правилах из \tilde{P} , за исключением $\tilde{S} \rightarrow g[S]$, те же левые и правые части, что и в правилах из P . При этом символ \tilde{S} не встречается в правых частях правил из \tilde{P} , поэтому правило $\tilde{S} \rightarrow g[S]$ не нарушает ациклическость грамматики. \square

Далее будет показано, как задача В сводится за полиномиальное время к задаче распознавания, является ли данная грамматика слияния сохраняющей связность. Введем конструкцию, кодирующую МКС-правило гиперграфом определенного вида. В дальнейшем будем предполагать, что дана ациклическая ЛКССП $G = (N, T, P, S)$, где $T = \{a, b\}$. Определим функцию $\text{type} : N \cup T \rightarrow \mathbb{N}$: $\text{type}(A) = 4 \dim(A)$ для каждого $A \in N$; $\text{type}(a) = 4$, $\text{type}(b) = 3$.

Определение 4.7. Пусть $r = A_0 \rightarrow f[A_1, \dots, A_k]$ — МКС-правило, где $f : (T^*)^{d_1} \times \dots \times (T^*)^{d_k} \rightarrow (T^*)^{d_0}$ — МКС-функция, заданная равенством (4.1) из определения 4.1, у которой нет неиспользуемых переменных. Напомним, что (4.1) имеет вид

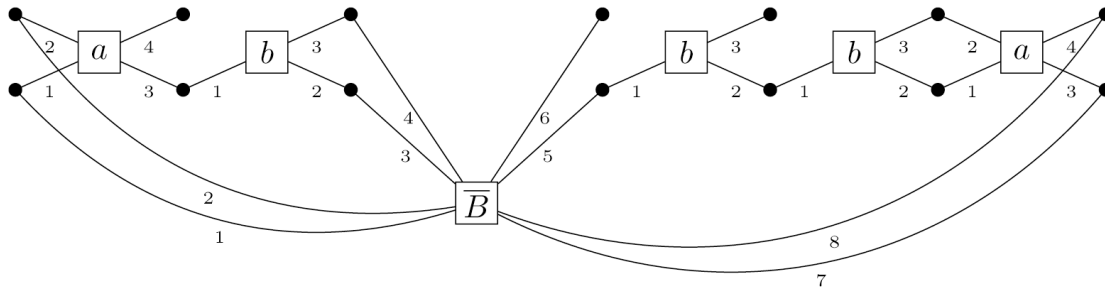
$$f((x_{11}, \dots, x_{1d_1}), \dots, (x_{k1}, \dots, x_{kd_k})) = (y_{11} \dots y_{1l_1}, \dots, y_{d_0 1} \dots y_{d_0 l_{d_0}}).$$

Построим гиперграф $H(r) = (V, E, \text{att}, \text{lab})$ следующим образом.

- Множество вершин $H(r)$ состоит из элементов вида $v(i, j, \delta)$, где $i = 1, \dots, d_0$, $j = 0, \dots, l_i$, $\delta = 0, 1$. Элемент $v(i, j, \delta)$ следует мыслить просто как тройку (i, j, δ) ; символ v здесь не является обозначением функции, а несет декоративную роль.
- Добавим в $H(r)$ гиперребра e_0, e_1, \dots, e_k и определим $\text{lab}(e_0) = \overline{A_0}$, $\text{lab}(e_i) = A_i$ при $i = 1, \dots, k$. Функция прикрепления для данных гиперребер будет определена далее.
- Будем по очереди рассматривать символы y_{pq} , входящие в правую часть равенства (4.1), при $p = 1, \dots, d_0$, $q = 1, \dots, l_p$.
 - Если $y_{pq} = a$, то добавим в $H(r)$ новое гиперребро e и положим $\text{att}(e) = v(p, q - 1, 0)v(p, q - 1, 1)v(p, q, 0)v(p, q, 1)$, $\text{lab}(e) = a$.
 - Если $y_{pq} = b$, то добавим в $H(r)$ новое гиперребро e и положим $\text{att}(e) = v(p, q - 1, 0)v(p, q, 0)v(p, q, 1)$, $\text{lab}(e) = b$.
 - Если $y_{pq} = x_{ij}$, то положим $\text{att}(e_i)(4j - 3) = v(p, q - 1, 0)$, $\text{att}(e_i)(4j - 2) = v(p, q - 1, 1)$, $\text{att}(e_i)(4j - 1) = v(p, q, 0)$, $\text{att}(e_i)(4j) = v(p, q, 1)$.
- Для каждого $i = 1, \dots, d_0$ положим $\text{att}(e_0)(4i - 3) = v(i, 0, 0)$, $\text{att}(e_0)(4i - 2) = v(i, 0, 1)$, $\text{att}(e_0)(4i - 1) = v(i, l_i, 0)$, $\text{att}(e_0)(4i) = v(i, l_i, 1)$.

Непосредственной проверкой определения 4.7 можно убедиться, что $H(r)$ связан.

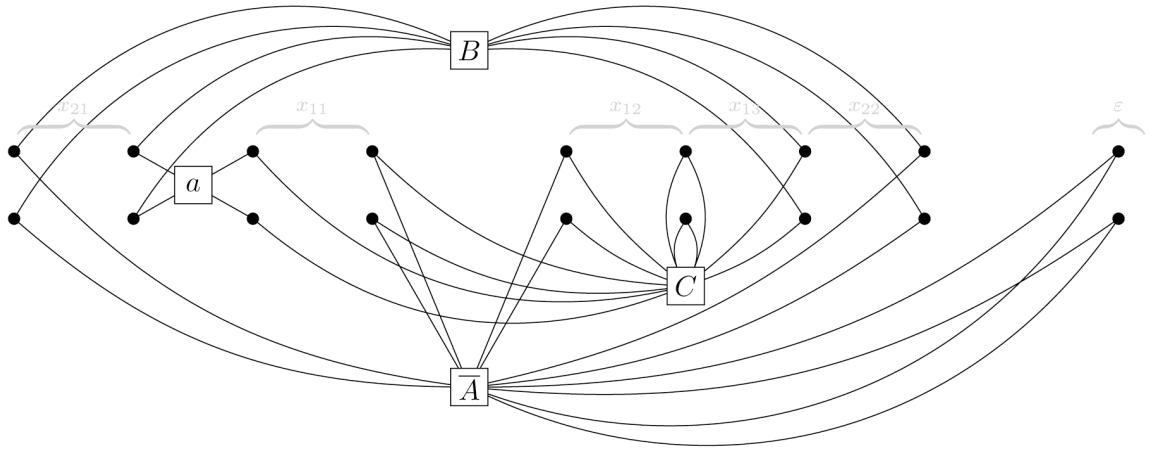
Пример 4.1. Дано МКС-правило $r_2 = B \rightarrow g[\]$, где $g() = (ab, bba)$ (здесь $\dim(B) = 2$). Гиперграф $H(r_2)$ представлен ниже.



Пример 4.2. Дано МКС-правило $r_1 = A \rightarrow f[C, B]$, где

$$f((x_{11}, x_{12}, x_{13}), (x_{21}, x_{22})) = (x_{21}ax_{11}, x_{12}x_{13}x_{22}, \varepsilon)$$

(здесь $\dim(A) = \dim(C) = 3$, $\dim(B) = 2$). Гиперграф $H(r_1)$ имеет следующий вид:



Чтобы не загромождать данное изображение, в нем опущена нумерация линий, ведущих от гиперребра к вершинам прикрепления; как и в предыдущем примере, эти линии нумеруются снизу вверх, слева направо. Гиперребро e_0 — то, которое имеет метку \bar{A} ; гиперребро e_1 — то, которое имеет метку C ; гиперребро e_2 — то, которое имеет метку B .

Для большей ясности изображение выше содержит дополнительную разметку, показывающую, какие вершины каким переменным соответствуют. Скажем, согласно определению правила r_1 , y_{11} равна x_{21} . Поэтому, по определению 4.7, $att(e_2)(1) = v(1, 0, 0)$, $att(e_2)(2) = v(1, 0, 1)$, $att(e_2)(3) = v(1, 1, 0)$, $att(e_2)(4) = v(1, 1, 1)$. На изображении вершины $v(1, 0, 0)$, $v(1, 0, 1)$, $v(1, 1, 0)$, $v(1, 1, 1)$ — это вершины под фигурной скобкой с подписью x_{21} . Отметим, что гиперребро e_2 с меткой B действительно прикреплено к этим вершинам.

Поскольку третья компонента f равна пустому слову, l_3 равно 0. Согласно определению 4.7, гиперграф $H(r_1)$ содержит вершины $v(3, 0, 0)$, $v(3, 0, 1)$ такие, что $att(e_0)(9) = v(3, 0, 0)$, $att(e_0)(10) = v(3, 0, 1)$, $att(e_0)(11) = v(3, 0, 0)$, $att(e_0)(12) = v(3, 0, 1)$. Эти две вершины на изображении находятся под фигурной скобкой с подписью ε .

Замечание 4.1. Очевидно следующее важное наблюдение, формальное доказательство которого, впрочем, было бы бессмысленно громоздким. Допустим, что возможно слияние гиперграфов $H(r_1)$ и $H(r_2)$, причем, без ограничения общности, гиперребро с меткой из F , участвующее в слиянии, принадлежит $H(r_1)$, а гиперребро с комплементарной меткой из \bar{F} , участвующее в слиянии, принадлежит $H(r_2)$. Тогда правило r_1 имеет вид $A \rightarrow f[A_1, \dots, A_{i-1}, B, A_{i+1}, \dots, A_k]$, правило r_2 имеет вид $B \rightarrow g[B_1, \dots, B_m]$, и результат слияния (с точностью до изоморфизма) — это гиперграф $H(r)$, где $r = A \rightarrow h[A_1, \dots, A_{i-1}, B_1, \dots, B_m, A_{i+1}, \dots, A_k]$ (h определяется равенством (4.2)). Читателю предлагается проверить это утверждение на примере, применив слияние к гиперграфам $H(r_1)$ и $H(r_2)$ из двух предыдущих примеров и сопоставив результат слияния с композицией правил r_1 и r_2 .

Определение 4.8. Определим гиперграф L следующим образом:

- $V_L = \{v(0, 0), v(0, 1), v(1, 0), v(1, 1)\}$;
- $E_L = \{e_0, e_1\}$;
- $att_L(e_0) = v(0, 0)v(0, 1)v(1, 0)v(1, 1)$, $att_L(e_1) = v(0, 1)$;
- $lab_L(e_0) = S$, $lab_L(e_1) = c$.

Построим сведение задачи В к задаче проверки несохранения связности. Дана ациклическая ЛКССП $G = (N, T, P, S)$ без непродуктивных символов. Определим грамматику слияния $Z(G)$ таким образом: $Z(G) = \{H(r) \mid r \in P\} \cup \{L\}$.

Лемма 4.1. *Грамматика $Z(G)$ сохраняет связность тогда и только тогда, когда $L(G) \cap b\{a, b\}^* = \emptyset$.*

Доказательство. Из замечания 4.1 следует, что применения слияний к гиперграфам из $\{H(r) \mid r \in P\}$ дают в точности гиперграфы из $\{H(r) \mid r \in \text{der}(G)\}$; все эти гиперграфы связные, так что

в процессе их получения связность сохраняется. Слияние между гиперграфом L и гиперграфом вида $H(r)$ возможно тогда и только тогда, когда $r = S \rightarrow f[A_1, \dots, A_k]$. В таком случае слияние приводит к тому, что в $H(r)$ удаляется гиперребро с меткой \bar{S} , а ко второй вершине прикрепления удаленного гиперребра присоединяется гиперребро с меткой c . Обозначим получившийся гиперграф через $H'(r)$. Далее, слияние гиперграфа вида $H'(r_1)$ и $H(r_2)$ приводит к гиперграфу $H'(r_3)$, где r_3 — композиция правил r_1 и r_2 .

Важное наблюдение: слияние внутри $H(r)$ невозможно, поскольку грамматика G ациклическая и, как следствие, в $H(r)$ нет гиперребер с комплементарными метками. Слияние внутри $H'(r)$ также невозможно попросту потому, что в данном гиперграфе нет меток из \bar{F} .

Заметим, что если $r = S \rightarrow f[A_1, \dots, A_k]$, то f действует во множество T^* . Гиперграф $H'(r)$ связан тогда и только тогда, когда первый символ в определении f (см. равенство (4.1)) не является символом b . Действительно, если первый символ — это b , то в $H'(r)$ содержится компонента связности с гиперребром, имеющим метку c , и еще как минимум одна компонента связности, скажем, та, которой принадлежит гиперребро с меткой b . Если первый символ — это a либо переменная, то гиперребро с меткой c входит в единственную компоненту связности гиперграфа $H'(r)$.

- (1) Если $L(G) \cap b\{a, b\}^* \neq \emptyset$, то существует слово вида $bw \in L(G)$, т.е. для функции $h() = bw$ верно, что $r = S \rightarrow h[] \in \text{der}(G)$. Тогда гиперграф $H(r)$ порождается грамматикой $Z(G)$, а из него и L применением слияния получается несвязный гиперграф $H'(r)$. Это показывает, что грамматика $Z(G)$ не является сохраняющей связность.
- (2) Пусть $L(G) \cap b\{a, b\}^* = \emptyset$. Все гиперграфы вида $H(r)$, порождаемые этой грамматикой, связаны. Если же данная грамматика породила гиперграф $H'(r)$, то $r = S \rightarrow f[A_1, \dots, A_k] \in \text{der}(G)$, причем первым символом в определении f не может быть b . Действительно, в противном случае, пользуясь тем фактом, что A_1, \dots, A_k не являются непродуктивными, можно получить из S слово, начинающееся с b , которое, таким образом, принадлежит $L(G)$; это приводит к противоречию. Получается, что любой гиперграф $H'(r)$, порождаемый грамматикой $Z(G)$, связан, значит, данная грамматика сохраняет связность.

Лемма доказана. □

Если в задачах А и В не требовать ациклическости грамматик, то можно аналогичными методами доказать, что обе эти задачи EXPTIME-трудные. Однако неясно, как исправить доказательство леммы 4.1, если грамматика G не ациклическая. Действительно, если слияние внутри $H(r)$ возможно, оно может приводить к несвязному гиперграфу. Например, в таком простом случае, когда $r = A \rightarrow h[A]$, где $\dim(A) = 1$ и $h(x) = x$, слияние в $H(r)$ дает несвязный граф без гиперребер и с четырьмя вершинами.

5. Заключение

Доказана разрешимость задачи распознавания свойства сохранения связности при применении слияний к произвольному числу изоморфных копий гиперграфов из данного конечного множества. Были даны верхняя и нижняя оценки сложности данной задачи. Оказалось, что наличие свойства сохранения связности эквивалентно отсутствию решения в натуральных числах у некоторой системы линейных уравнений и неравенств. Также оказалось, что данная задача является PSPACE-трудной, так что в предположении $P \neq PSPACE$ не существует полиномиальных алгоритмов ее решения. Безусловно, интересно определить точную сложность данной задачи, как и других алгоритмических задач, относящихся к грамматикам слияния. Разработанные к настоящему моменту методы не позволили окончательно ответить на этот вопрос, и он остается предметом будущих исследований.

Благодарности

Автор благодарен рецензенту статьи за ценные замечания, которые позволили сделать изложение более ясным.

Литература

1. H.-J. Kreowski, S. Kuske, A. Lye, “Fusion grammars: a novel approach to the generation of graph languages”, *Lect. Notes Comput. Sci.* **10373**, 90–105 (2017).
2. H.-J. Kreowski, S. Kuske, A. Lye, “Relating DNA computing and splitting/fusion grammars”, *Lect. Notes Comput. Sci.* **11629**, 159–174 (2019).
3. A. Lye, *Generalization of Natural Computing Models: Variants of Fusion Grammars and Reaction Systems over Categories*, University of Bremen (2021).
4. F. Drewes, H.-J. Kreowski, A. Habel, “Hyperedge replacement graph grammars”, In: *Handbook of Graph Grammars and Computing by Graph Transformations. Vol. 1: Foundations*, pp. 95–162 World Scientific, Singapore (1997).
5. A. Lye, “Deciding non-emptiness of hypergraph languages generated by connection-preserving fusion grammars is NP-complete”, *Lect. Notes Comput. Sci.* **12638**, 97–108 (2021).
6. T. Pshenitsyn, “On decidability and expressive power of fusion grammars”, *Theor. Comput. Sci.* **1052**, Article ID 115420 (2025).
7. D. Kozen, “On parallelism in Turing machines”, In: *17th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Houston, TX, USA* pp. 89-97 (1976).
8. C. H. Papadimitriou, “On the complexity of integer programming”, *J. Assoc. Comput. Mach.* **28**, No. 4, 765–768 (1981).
9. L. Kallmeyer, *Parsing Beyond Context-Free Grammars*, Springer, Berlin etc. (2010).
10. A. V. Aho, J. D. Ullman, *The Theory of Parsing, Translation, and Compiling*, Prentice-Hall (1972).
11. Y. Kaji, R. Nakanishi, H. Seki, T. Kasami, “The computational complexity of the universal recognition problem for parallel multiple context-free grammars”, *Comput. Intell.* **10**, No. 4, 440–452 (1994).

Статья поступила в редакцию 4 апреля 2025 г.

Принята к публикации 20 октября 2025 г.

Н.-П. Скоруппа

ПОЛНОТА ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ВЕЙЛЯ ДЛЯ КОНЕЧНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ МОДУЛЕЙ

Приводится очень короткое концептуальное доказательство того, что любое представление группы $SL(2, \mathbb{Z})$ с ядром в виде конгруэнц-подгруппы вкладывается в представление Вейля, построенное по подходящему конечному квадратичному модулю. Аналогичный результат доказывается для нетривиального центрального двойного накрытия группы $SL(2, \mathbb{Z})$.

1. Введение

Пусть \mathbf{M} — конечный квадратичный модуль, т.е. пара (M, Q) , где M — конечная абелева группа, отображение $Q : M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ удовлетворяет условию $Q(ax) = a^2Q(x)$ для всех целых чисел a и $x \in M$, $Q(x, y) := Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$ является \mathbb{Z} -билинейной формой, причем равенство $Q(M, x) = 0$ возможно только при $x = 0$. Для любого такого модуля \mathbf{M} найдется ассоциированное представление Вейля $\omega_{\mathbf{M}}$ свободной группы F с двумя образующими \mathbf{s} и \mathbf{t} со значениями в группе автоморфизмов комплексного векторного пространства $\mathbb{C}[M]$ отображений из M в \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} \{\omega_{\mathbf{M}}(\mathbf{s})f\}(x) &= \frac{\sigma(\mathbf{M})}{\sqrt{\text{card}(\mathbf{M})}} \sum_{y \in M} \epsilon(-Q(x, y))f(y), \\ \{\omega_{\mathbf{M}}(\mathbf{t})f\}(x) &= \epsilon(Q(x))f(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $f \in \mathbb{C}[M]$, $x \in M$,

$$\sigma(\mathbf{M}) = \text{card}(\mathbf{M})^{-1/2} \sum_{x \in M} \epsilon(-Q(x)) \tag{1.2}$$

и $\epsilon(\dots) = e^{2\pi i \dots}$. Несложно показать, что

$$\omega_{\mathbf{M}}(\mathbf{s})^2 = \omega_{\mathbf{M}}(\mathbf{st})^3, \quad \omega_{\mathbf{M}}(\mathbf{s})^4 = \sigma(\mathbf{M})^4. \tag{1.3}$$

Поскольку любой конечный квадратичный модуль изоморфен дискриминантному модулю некоторой решетки [1, § 6], по формуле Милграма [2] $\sigma(\mathbf{M})$ является корнем восьмой степени из единицы, а также корнем четвертой степени из единицы, если $\text{card}(\mathbf{M})$ нечетно, хотя последнее условие не является необходимым (в качестве примера см. конечные квадратичные модули \mathbf{H}_ℓ ниже, где $\sigma(\mathbf{H}_\ell) = 1$ для любого целого положительного ℓ).

Группа $G := SL(2, \mathbb{Z})$ имеет представление в виде $[\mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{s}^2 = (\mathbf{st})^3, \mathbf{s}^4 = 1]$ (см., например, [3, теорема 1.2.5]). Более точно, ядро группового гомоморфизма $F \rightarrow G$, задаваемого отображениями $\mathbf{s} \mapsto S := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{t} \mapsto T := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, порождается элементами $\mathbf{s}^2(\mathbf{st})^{-3}$ и \mathbf{s}^4 . Следовательно, если $\sigma(\mathbf{M})^4 = 1$, то $\omega_{\mathbf{M}}$ можно рассматривать как представление группы G . Однако в общем случае $\sigma(\mathbf{M})$ является корнем восьмой степени из единицы, и тогда $\omega_{\mathbf{M}}$ факторизуется через группу $\mathfrak{G} = [\mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{s}^2 = (\mathbf{st})^3, \mathbf{s}^8 = 1]$. Если $\sigma(\mathbf{M})^4 = 1$, то будем рассматривать $\omega_{\mathbf{M}}$ как представление Вейля группы G .

Основная цель статьи — удивительно короткое доказательство следующей теоремы.

Н.-П. Скоруппа: Институт математики Хэнаньской академия наук, Чжэнчжоу, Китай; Университет Зигена, Зиген, Германия; nils.skoruppa@gmail.com.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 266–273 (2025).

Теорема 1.1. *Каждое представление группы $SL(2, \mathbb{Z})$ с ядром в виде конгруэнц-подгруппы вкладывается в некоторое представление Вейля.*

Напомним, что конгруэнц-подгруппой группы $G = SL(2, \mathbb{Z})$ называется подгруппа, содержащая одну из групп $\Gamma(\ell) = \{A \in G : A \equiv 1 \pmod{\ell}\}$, где ℓ — положительное целое число. Естественное отображение редукции по модулю ℓ индуцирует изоморфизм $G/\Gamma(\ell) \cong G_\ell := SL(2, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$. Хорошо известно (хотя в общем случае доказательство весьма сложно; см., например, [4]), что любое представление Вейля группы G на конечном квадратичном модуле \mathbf{M} уровня¹⁾ ℓ факторизуется через группу G_ℓ . Однако в нашем доказательстве этот факт не используется. В [5] для любой степени простого числа p^n получено разложение на неприводимые представления Вейля группы G на конечных квадратичных модулях уровня p^n и ранга 2 (а также более высокого ранга для $p = 2$). Подсчитав полученные таким образом неизоморфные неприводимые представления и сравнив их число с числом классов сопряженности группы $G_{p^n} = SL(2, \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$, авторы [5] обнаружили, что фактически получили все неприводимые представления G_{p^n} . Несложно показать, что их результат также включает теорему 1.1. Опять же, наше короткое доказательство не зависит от довольно сложных результатов работы [5].

Статья организована следующим образом. Параграф 2 содержит доказательство теоремы 1.1. В § 3 мы обсуждаем следствия и обобщения нашего доказательства. В последнем параграфе рассматриваются представления Вейля $\omega_{\mathbf{M}}$ в случае $\sigma(\mathbf{M})^4 \neq 1$. Мы увидим, что в этом случае $\omega_{\mathbf{M}}$ факторизуется через нетривиальное центральное расширение \mathfrak{G} группы G . Мы вкратце рассмотрим расширение \mathfrak{G} , введем понятие конгруэнц-подгруппы в \mathfrak{G} и покажем, как теорема 1.1 может быть обобщена на представления группы \mathfrak{G} с ядром, содержащим конгруэнц-подгруппу группы \mathfrak{G} .

2. Короткое доказательство теоремы 1.1

Для доказательства теоремы 1.1 зафиксируем положительное целое число ℓ . Пусть \mathbf{H}_ℓ — конечный квадратичный модуль $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ с квадратичной формой $Q(x, y) = xy/\ell$. Во-первых, отметим, что $\sigma(\mathbf{H}_\ell) = 1$ и ядро представления $\omega_{\mathbf{H}_\ell}$ совпадает с $\Gamma(\ell)$. Последнее верно, так как $\omega_{\mathbf{H}_\ell}$ изоморфно естественному представлению ν_ℓ группы G на $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}]$, заданному формулой

$$\{\nu_\ell(A)f\}(x, y) = f((x, y)A).$$

Изоморфизм задается отображением $f \mapsto \Phi f$ по формуле

$$\{\Phi f\}(x, y) = \sum_{r \pmod{\ell}} f(x, r) e(ry/\ell).$$

Таким образом, далее можно рассматривать $\omega_{\mathbf{H}_\ell}$ как точное представление группы G_ℓ .

Во-вторых, отметим, что $\omega_{\mathbf{H}_\ell}$ содержит тривиальное представление. Действительно, функция $f(x, y)$, равная 1 при $y = 0$ и 0 в противном случае, инвариантна относительно действия S и T и, следовательно, относительно $\omega_{\mathbf{H}_\ell}(A)$ для всех A . Поэтому, если два представления группы G_ℓ вложены²⁾ в $\omega_{\mathbf{H}_\ell}^{\otimes m}$ и $\omega_{\mathbf{H}_\ell}^{\otimes n}$ соответственно, то их сумма вложена в $\omega_{\mathbf{H}_\ell}^{\otimes(m+n)}$. Однако $\omega_{\mathbf{H}_\ell}^{\otimes m}$ изоморфно $\omega_{m\mathbf{H}_\ell}$, где $m\mathbf{H}_\ell$ — m -кратное прямое произведение \mathbf{H}_ℓ .³⁾ Таким образом, чтобы доказать теорему 1.1, достаточно показать, что любое заданное неприводимое представление группы G_ℓ вложено в некоторую степень $\omega_{\mathbf{H}_\ell}^{\otimes n}$. Это вложение вытекает из следующего общего факта о представлениях групп.

Теорема 2.1. *Пусть ω — точное представление конечной группы \mathcal{G} на конечномерном векторном пространстве. Тогда каждое неприводимое представление группы \mathcal{G} вложено в $\omega^{\otimes n}$, где n строго меньше, чем число классов сопряженности группы \mathcal{G} .*

¹⁾ Уровнем ℓ модуля $\mathbf{M} = (M, Q)$ называется наименьшее положительное целое число такое, что $\ell Q = 0$.

²⁾ Как обычно, для представлений ρ_j группы \mathcal{G} в $GL(V_j)$ ($j = 1, 2$) мы обозначаем через $\rho_1 \otimes \rho_2$ представление в $GL(V_1 \otimes V_2)$, заданное формулой $(\rho_1 \otimes \rho_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = \rho_1(g)(v_1) \otimes \rho_2(g)(v_2)$. Аналогично определяем тензорное произведение более чем двух представлений и обозначаем через $\rho^{\otimes n}$ n -кратное тензорное произведение ρ на себя.

³⁾ Для любых двух конечных квадратичных модулей $\mathbf{M} = (M, Q)$ и $\mathbf{N} = (N, R)$ их прямая сумма определяется как $\mathbf{M} + \mathbf{N} = (M \times N, (x, y) \mapsto Q(x) + R(y))$. Кроме того, отображение $(f, g) \mapsto f * g$, $(f * g)(x, y) = f(x)g(y)$ индуцирует изоморфизм $\omega_{\mathbf{M}} \otimes \omega_{\mathbf{N}}$ с $\omega_{\mathbf{M} + \mathbf{N}}$, т.е. изоморфизм $\Psi : \mathbb{C}[M] \otimes \mathbb{C}[N] \rightarrow \mathbb{C}[M \times N]$ такой, что $\Psi(\omega_{\mathbf{M}} \otimes \omega_{\mathbf{N}}) = \omega_{\mathbf{M} + \mathbf{N}}\Psi$.

Доказательство. Пусть \mathcal{C} — множество представителей классов сопряженности группы \mathcal{G} , отличных от $\{1\}$, ch_ω — характер представления ω и

$$\tau := \text{card}(\mathcal{G}) \prod_{C \in \mathcal{C}} \frac{\text{ch}_\omega - \text{ch}_\omega(C)}{\text{ch}_\omega(1) - \text{ch}_\omega(C)}. \quad (2.1)$$

Ввиду точности ω имеем $\omega(C) \neq \omega(1)$ и, следовательно, $\text{ch}_\omega(C) \neq \dim \omega = \text{ch}_\omega(1)$. Таким образом, определение τ корректно. Очевидно, что $\tau(1) = \text{card}(\mathcal{G})$ и $\tau(g) = 0$ для всех $g \neq 1$ в \mathcal{G} . Другими словами, τ является характером регулярного представления группы \mathcal{G} .

Поскольку $\text{ch}_\omega^n = \text{ch}_{\omega^{\otimes n}}$, раскрывая правую часть (2.1), мы видим, что τ является линейной комбинацией характеров тензорных степеней $\omega^{\otimes n}$, где n строго меньше числа классов сопряженности группы \mathcal{G} .

Поскольку любой заданный неприводимый характер ρ группы \mathcal{G} содержится в характере τ регулярного представления, на основе соотношений ортогональности мы заключаем, что найдется степень ch_ω^n , для которой скалярное произведение с ρ отлично от нуля. Но тогда $\omega^{\otimes n}$ включает подпредставление с характером ρ , что доказывает теорему. \square

Чтобы проверить, что заданное неприводимое представление группы \mathcal{G} с характером ρ вкладывается в некоторую степень $\omega^{\otimes n}$ (хотя и без ограничения на n), можно было бы воспользоваться непосредственно соотношениями ортогональности. А именно, для кратности μ_n представления с характером ρ в $\omega^{\otimes n}$ имеем

$$\mu_n = \frac{1}{\text{card}(G_\ell)} \sum_{A \in G_\ell} \text{ch}_\omega(A)^n \bar{\rho}(A) \sim \frac{\text{ch}_\omega(1)^n}{\text{card}(G_\ell)} \rho(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

(поскольку $|\text{ch}_\omega(A)| < \text{ch}_\omega(1)$ для $A \in G_\ell$, $A \neq 1$ по условию), откуда следует $\mu_n > 0$ для достаточно больших n .

3. Дальнейшие следствия доказательства теоремы 1.1

В § 2 мы фактически доказали больше, чем необходимо для нашей цели. А именно, используя тот факт, что $\omega_{\mathbf{H}_\ell}$ включает тривиальное представление, можно сделать следующий вывод.

Теорема 3.1. *Для любого заданного представления ρ группы $G_\ell = \text{SL}(2, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ существует целое неотрицательное число n_0 такое, что ρ вкладывается в $\omega_{\mathbf{H}_\ell}^{\otimes n}$ при всех $n \geq n_0$. Если ρ неприводимо, то n_0 можно выбрать строго меньшим, чем число классов сопряженности группы G_ℓ .*

Для доказательства теоремы 1.1 мы выбрали квадратичный модуль \mathbf{H}_ℓ , поскольку в этом случае легко определить ядро соответствующего представления Вейля и указать инвариант. На самом деле, для заданного ℓ можно использовать другие конечные квадратичные модули \mathbf{M} уровня ℓ ($\sigma(\mathbf{M})^4 = 1$). Действительно, как уже упоминалось в § 1, для любого такого \mathbf{M} представление $\omega_{\mathbf{M}}$ факторизуется через G_ℓ . Оказывается, что оно является точным представлением группы G_ℓ при условии, что ℓ также является экспонентой⁴⁾ модуля \mathbf{M} . Автору неизвестно простое доказательство первого утверждения, однако не может не вызывать удивления тот факт, что можно получить столь краткое доказательство точности на основе данного выше определения $\omega_{\mathbf{M}}$ в терминах образующих и соотношений группы G .⁵⁾

Лемма 3.1. *Пусть \mathbf{M} имеет уровень ℓ и экспоненту e , и пусть $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$. При этих условиях*

$$|\text{ch}_{\omega_{\mathbf{M}}}(A)| = \text{card}(\mathbf{M})$$

тогда и только тогда, когда $a \equiv d \equiv 1 \pmod{e}$ и $b \equiv c \equiv 0 \pmod{\ell}$.

⁴⁾ Экспонента $\mathbf{M} = (M, Q)$ — это экспонента группы M , т.е. наименьшее целое положительное число e такое, что $eM = 0$.

⁵⁾ Однако можно следовать оригинальной работе Вейля [6], определив $\omega_{\mathbf{M}}$ как представление группы G_ℓ (относительно этого подхода см. также препринт *Explicit Formulas for Weil Representations of $SL(2)$* Х. Боялана и Н.-П. Скоруппы).

Замечание 3.1. Таким образом, для любого \mathbf{M} уровня и экспоненты ℓ соответствующее представление Вейля $\omega_{\mathbf{M}}$ факторизуется через точное представление группы G_{ℓ} .

Доказательство леммы 3.1. Пусть $\mathbf{M} = (M, Q)$. Для $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ в G и $\mathbf{v} = (x, y) \in M \times M$ положим

$$\varphi_A(\mathbf{v}) = \mathbf{e}(abQ(x) + bcQ(x, y) + cdQ(y)).$$

Прямым вычислением получаем⁶⁾ $\varphi_A(\mathbf{v})\varphi_B(\mathbf{v}A) = \varphi_{AB}(\mathbf{v})$ для всех A, B в G и \mathbf{v} в $M \times M$. Следовательно,

$$\{\rho(A)f\}(\mathbf{v}) = \varphi_A(\mathbf{v})f(\mathbf{v}A)$$

определяет представление ρ группы G на $\mathbb{C}[M \times M]$. Имеем

$$\text{ch}_{\rho}(A) = \sum_{\mathbf{v}A=\mathbf{v}} \varphi_A(\mathbf{v}),$$

где суммирование проводится по всем таким $\mathbf{v} \in M \times M$, которые остаются неподвижными относительно A . Очевидно, что $\text{ch}_{\rho}(A) = \text{card}(\mathbf{M})^2$ тогда и только тогда, когда указанные сравнения выполнены для a, b, c, d .

Отсюда следует утверждение леммы, поскольку $\omega_{\mathbf{M}} \otimes \bar{\omega}_{\mathbf{M}}$ изоморфно ρ . Изоморфизм задается формулой

$$\{\Psi f\}((x, y)) = \sum_s f(x + s, s) \mathbf{e}(Q(s, y)),$$

в чем можно убедиться непосредственно, проверив равенства $\Psi \circ (\omega_{\mathbf{M}}(A) \otimes \bar{\omega}_{\mathbf{M}}(A)) = \rho(A) \circ \Psi$ для $A = S$ и $A = T$. \square

Заметим, что для любого \mathbf{M} с нечетным уровнем приведенное выше доказательство можно упростить. А именно, имеем $\bar{\omega}_{\mathbf{M}} = \omega_{\mathbf{M}(-1)}$, где $\mathbf{M}(-1) = (M, -Q)$, откуда заключаем, что ρ эквивалентно $\omega_{\mathbf{M}} \otimes \omega_{\mathbf{M}(-1)}$, т.е. $\omega_{\mathbf{M}+\mathbf{M}(-1)}$. Однако последнее, как легко видеть, эквивалентно произведению $\omega_{\mathbf{N}_d}$, где d делит e .

Нетрудно проверить, что экспонента заданного конечного квадратичного модуля уровня ℓ либо равна ℓ , либо четна и равна $\ell/2$. В частности, любое представление Вейля для \mathbf{M} с нечетным уровнем ℓ (и $\sigma(\mathbf{M})^4 = 1$) факторизуется через точное представление группы G_{ℓ} . В качестве примера представления Вейля, не обеспечивающего точного представления, укажем $2\mathbf{N}$, где $\mathbf{N} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2/4)$ — конечный квадратичный модуль уровня 4 с экспонентой 2 и $\sigma(\mathbf{N}) = \mathbf{e}(-1/8)$ (см. следующий параграф).

Наконец, отметим, что для любого \mathbf{M} , обеспечивающего точное представление, тензорное произведение $\omega_{n\mathbf{M}} = \omega_{\mathbf{M}}^{\otimes n}$ обладает ненулевыми инвариантами для всех достаточно больших целых чисел n , в чем можно убедиться, рассуждая так же, как в последнем абзаце предыдущего параграфа (или теореме 2.1) с заменой ω и ρ на $\omega_{\mathbf{M}}$ и тривиальное представление.

Как и в предыдущем параграфе, мы приходим к следующему заключению.

Теорема 3.2. Для любого конечного квадратичного модуля \mathbf{M} уровня ℓ и $\sigma(\mathbf{M})^4 = 1$ любое заданное представление ρ группы $G_{\ell} = \text{SL}(2, \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})$ вкладывается в $\omega_{n\mathbf{M}} = \omega_{\mathbf{M}}^{\otimes n}$ для всех достаточно больших n . Если ρ неприводимо, то оно вкладывается в $\omega_{n\mathbf{M}}$ для некоторого n , строго меньшего, чем число классов сопряженности группы G_{ℓ} .

4. Нетривиальное двукратное центральное расширение группы $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$

Имеет место аналог теоремы 3.2, если мы рассматриваем представления $\omega_{\mathbf{M}}$, где $\sigma(\mathbf{M})$ — примитивный корень восьмой степени из единицы. Однако такое представление уже не может рассматриваться как представление группы G . Вместо этого оно факторизуется через группу $\mathfrak{G} = [\mathbf{s}, \mathbf{t}; \mathbf{s}^2 = (\mathbf{st})^3, \mathbf{s}^8 = 1]$, что следует из тождеств (1.3). Заметим, что элемент \mathbf{s}^4 коммутирует со всеми элементами группы \mathfrak{G} (поскольку он коммутирует с \mathbf{t} : $(\mathbf{st})^6 = \mathbf{s}^4$ влечет $\mathbf{sts}^4 = (\mathbf{st})^7 = \mathbf{s}^4\mathbf{st}$, откуда $\mathbf{ts}^4 = \mathbf{s}^4\mathbf{t}$).

⁶⁾ Для $\mathbf{v} = (x, y)$ в $M \times M$ и $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in G$ мы пишем $(x, y)A = (ax + cy, bx + dy)$.

Группа \mathfrak{G} является центральным расширением второго порядка группы G . Более конкретно, имеем точную последовательность

$$1 \rightarrow \langle \mathfrak{s}^4 \rangle \xrightarrow{c} \mathfrak{G} \xrightarrow{p} G \rightarrow 1,$$

где p — гомоморфизм групп такой, что $\mathfrak{s} \mapsto S$, $\mathfrak{t} \mapsto T$. Поскольку G не содержит ни одного элемента порядка 8, расширение \mathfrak{G} не может быть изоморфно $G \times \langle \pm 1 \rangle$ и, следовательно, является нетривиальным расширением группы G .

Фактически, это единственное нетривиальное центральное расширение порядка 2 группы G (с точностью до изоморфизма расширений). Действительно, если $\mathfrak{F} \rightarrow G$ — нетривиальное центральное расширение порядка 2, скажем, с ядром ε , то можно выбрать прообразы \mathfrak{s} и \mathfrak{t} элементов S и T такие, что $\mathfrak{s}^2 = (\mathfrak{st})^3$ (заметим, что для любых двух прообразов либо выполняется это тождество, либо $\mathfrak{s}^2 = \varepsilon(\mathfrak{st})^3$; в последнем случае заменим \mathfrak{t} на $\varepsilon\mathfrak{t}$). Имеем $\mathfrak{s}^4 = 1$ или $\mathfrak{s}^4 = \varepsilon$. В первом случае \mathfrak{F} содержит сечение группы G и изоморфно $G \times \langle \varepsilon \rangle$. Во втором случае \mathfrak{F} изоморфно (как расширение группы G) группе \mathfrak{G} .

Более удобно реализовать \mathfrak{G} , используя явный 2-коцикл со значениями в $\{\pm 1\}$. Для матриц $A, B \in G$ положим

$$\varkappa(A, B) = \frac{j(A, Bz)j(B, z)}{j(AB, z)},$$

где z — любое комплексное число с положительной мнимой частью. Для матрицы $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ мы используем обозначение $j(A, z)$ для квадратного корня из $cz + d$, который лежит в полуплоскости комплексных чисел с положительной вещественной частью или на положительной мнимой оси. Очевидно, что \varkappa принимает значения в $\{\pm 1\}$, не зависит от выбора z и определяет 2-коцикл группы G .

Альтернативно можно определить \varkappa , используя эта-функцию Дедекинда

$$\eta(z) = \mathfrak{e}(z/24) \prod_{n \geq 1} (1 - \mathfrak{e}(nz)).$$

Так как для любого $A \in G$ существует комплексное число ζ_A такое, что $\eta(Az) = \zeta_A j(A, z) \eta(z)$, заменив $j(A, Bz)$ в определении \varkappa выражением $\eta(ABz)/(\zeta_A \eta(Bz))$ и выполнив аналогичные замены для $j(B, z)$ и $j(AB, z)$, получим

$$\varkappa(A, B) = \frac{\zeta_{AB}}{\zeta_A \zeta_B}.$$

В [7] рассмотрены 2-коциклы для $\mathrm{SL}(2, _)$ над локальными полями. В частности, показано, что $(A, B) \mapsto (t_A t_{AB}, t_B t_{AB})_\infty$ определяет нетривиальный коцикл группы $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, где $t_A = c$, если $c \neq 0$, и $t_A = d$ в противном случае, а $(a, b)_\infty$ обозначает символ Гильберта на бесконечности, т.е. $(a, b)_\infty = -1$, если $a, b < 0$, и $(a, b)_\infty = +1$ в противном случае. Можно доказать непосредственно (хотя доказательство будет довольно длинным), что для любых $A, B \in G$

$$\varkappa(A, B) = (t_A t_{AB}, t_B t_{AB})_\infty s(A) s(B) / s(AB),$$

где $s(A) = 1$, если $c \neq 0$, и $s(A) = \mathrm{sgn}(d)$ в противном случае. (Для доказательства допустим, что z в первой формуле для \varkappa стремится к $i\infty$ вдоль мнимой оси и перепишем полученную формулу в терминах символа Гильберта вещественных чисел.)

Поскольку \varkappa является коциклом, множество пар (A, s) ($A \in G$, $s \in \{\pm 1\}$) вместе с законом композиции $(A, s)(B, t) = (AB, st \varkappa(A, B))$ образует группу $[G, \varkappa]$, причем очевидная проекция на первый фактор является центральным расширением группы G порядка 2. Имеем $(S, 1)^4 = (1, -1)$, откуда следует, что \mathfrak{G} изоморфно $[G, \varkappa]$ посредством гомоморфизма групп, определенного как $\mathfrak{s} \mapsto (S, 1)$ и $\mathfrak{t} \mapsto (T, 1)$. Далее будем отождествлять \mathfrak{G} с $[G, \varkappa]$ и интерпретировать $\omega_{\mathbf{M}}$ для \mathbf{M} с $\sigma(\mathbf{M})^4 \neq 1$ как представление группы $\mathfrak{G} = [G, \varkappa]$.

Ядро представления $\omega_{\mathbf{M}}$ для \mathbf{M} уровня ℓ (с $\sigma(\mathbf{M})$, являющимся примитивным корнем восьмой степени из единицы) содержит сечение $\Gamma(\ell)$ в \mathfrak{G} , т.е. подгруппу группы $\mathfrak{G} = [G, \varkappa]$, которая отображается инъективно на $\Gamma(\ell)$ с помощью указанного выше отображения расширения p . Действительно, если $A \in \Gamma(\ell)$, то $\omega_{\mathbf{M}}(A, 1) = \pm 1$. А именно, $\mathrm{ch}_{\omega_{\mathbf{M}}}(A, 1)^2 = \mathrm{ch}_{\omega_{2\mathbf{M}}}(A) = \mathrm{card}(\mathbf{M})^2$, где второе равенство следует из того, что $\sigma(2\mathbf{M}) = \sigma(\mathbf{M})^2$ является корнем четвертой степени из единицы, так что $\omega_{2\mathbf{M}}$ имеет ядро $\Gamma(\ell)$. С другой стороны, $\omega_{\mathbf{M}}(A, 1)$ сопряжено в $\mathrm{GL}(\mathrm{card}(\mathbf{M}), \mathbb{C})$

к диагональной матрице, элементы которой являются комплексными числами модуля 1. Последнее получается из того факта, что $\omega_{\mathbf{M}}$ унитарно относительно естественного скалярного произведения на $\mathbb{C}[M]$, что непосредственно следует из (1.1).

Пусть $\mathbf{N} := (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x^2/4)$ и $\Gamma(4)^*$ — сечение $\Gamma(4)$, содержащееся в ядре $\omega_{\mathbf{N}}$. Для любой подгруппы Γ группы $\Gamma(4)$ обозначим через Γ^* подгруппу всех $(A, s) \in \Gamma(4)^*$ таких, что $A \in \Gamma$.

Лемма 4.1. *Для любого \mathbf{M} , $\sigma(\mathbf{M})^4 \neq 1$, его уровень ℓ делится на 4. Ядро представления $\omega_{\mathbf{M}}$ содержит $\Gamma(\ell)^*$ и равно $\Gamma(\ell)^*$, если ℓ также является экспонентой \mathbf{M} .*

Доказательство. Корень из единицы $\sigma(\mathbf{M})^2 = \sigma(2\mathbf{M})$ по определению (1.2) лежит в циклотомическом поле, порожденном ℓ -ми корнями из единицы. Следовательно, если он является примитивным корнем четвертой степени из единицы, то 4 делит ℓ .

Далее, ядро представления $\omega_{\mathbf{M}}$ содержит сечение $\Gamma(\ell)$, как мы видели выше. С другой стороны, это ядро является подгруппой ядра $\omega_{\mathbf{N}}$, поскольку $\omega_{\mathbf{M}} \otimes \omega_{\mathbf{N}} = \omega_{\mathbf{M}+\mathbf{N}}$, так как представление группы G имеет ядро $\Gamma(\ell)$. Таким образом, $\omega_{\mathbf{M}}$ содержит $\Gamma(\ell)^*$, как утверждалось.

Легко проверить, что лемма 3.1 и ее доказательство остаются в силе для любого квадратичного модуля (т.е. без ограничения $\sigma(\mathbf{M})^4 = 1$) (где A следует заменить на (A, s)), откуда немедленно следует последнее утверждение леммы. \square

Поскольку $\omega_{n\mathbf{M}}$ для четных n является представлением группы G , можно установить, как и выше, что все достаточно большие четные степени $\omega_{\mathbf{M}}^{\otimes n}$ допускают ненулевые инварианты, если уровень и экспонента \mathbf{M} совпадают. По аналогии со следствием теоремы 2.1 сформулируем следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Для любого конечного квадратичного модуля \mathbf{M} уровня и экспоненты ℓ таких, что $\sigma(\mathbf{M})^4 \neq 1$, и любого конечномерного комплексного представления ρ группы \mathfrak{S} , ядро которого включает $\Gamma(\ell)^*$, существует n такое, что $\omega_{n\mathbf{M}} = \omega_{\mathbf{M}}^{\otimes n}$ включает ρ . Если ρ неприводимо, можно выбрать n строго меньшим, чем число классов сопряженности группы $\mathfrak{S}/\Gamma(\ell)^*$.*

С учетом этой теоремы можно определить конгруэнц-подгруппу группы \mathfrak{S} как подгруппу, содержащую $\Gamma(\ell)^*$ для некоторого ℓ (делящегося на 4). Можно дать явное описание $\Gamma(4)^*$ (и, следовательно, конгруэнц-подгрупп). В связи с этим напомним,⁷⁾ что $\omega_{\mathbf{N}}(A, 1)$ для любого $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \Gamma(4)$ равно умножению на обобщенный символ Лежандра $(\frac{c}{d})$. Следовательно, $\Gamma(4)^*$ является образом $\Gamma(4)$ при отображении $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto (\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, (\frac{c}{d}))$.

5. Замечания и открытые вопросы

Сделаем тривиальное, но полезное замечание: теорему 2.1 можно применить к любому (не обязательно точному) представлению, заменив \mathcal{G} на $\mathcal{G}/\ker \omega$. Тогда неприводимые представления в степенях ω будут иметь ядро, содержащее $\ker \omega$. Используя этот факт, мы можем вместо условия о совпадении уровня и экспоненты в теореме 3.2 предположить, что ядро рассматриваемого представления ρ содержит ядро представления $\omega_{\mathbf{M}}$. Аналогичное замечание относится также к теореме 4.1.

Заинтересованный читатель может попытаться точно вычислить ядра представлений $\omega_{\mathbf{M}}$ для тех \mathbf{M} , экспонента которых равна половине уровня.

Возможно, более сложным окажется вопрос, можно ли заменить число классов в теореме 3.2 на какую-нибудь меньшую оценку. Аналогичный вопрос имеет смысл для теорем 1.1 и 4.1.

Литература

1. С. Т. С. Wall, “Quadratic forms on finite groups, and related topics”, *Topology*, **2**, 281–298 (1963).

⁷⁾ Ввиду отсутствия удобных ссылок на этот хорошо известный результат мы укажем лишь [8, теорема 5.4], где проведен вывод этого результата из специально подобранных фактов.

2. J. W. Milnor and D. H. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Springer, Berlin etc. (1973).
3. R. A. Rankin, *Modular Forms and Functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge etc. (1977).
4. A. Nobs, “Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen $SL_2(\mathbb{Z}_p)$, insbesondere $SL_2(\mathbb{Z}_2)$, I [in German], *Comment. Math. Helv.* **51**, No. 4, 465–489 (1976).
5. A. Nobs and J. Wolfart, “Die irreduziblen Darstellungen der Gruppen $SL_2(\mathbb{Z}_p)$, insbesondere $SL_2(\mathbb{Z}_2)$, II” [in German], *Comment. Math. Helv.* **51**, No. 4, 491–526 (1976).
6. A. Weil, “Sur certains groupes d’opérateurs unitaires” [in French], *Acta Math.* **111**, 143–211 (1964).
7. T. Kubota, “Topological covering of $SL(2)$ over a local field”, *J. Math. Soc. Japan* **19**, 114–121 (1967).
8. R. E. Borcherds, “Reflection groups of Lorentzian lattices”, *Duke Math. J.* **104**, No. 2, 319–366 (2000).

Статья поступила в редакцию 15 декабря 2024 г.

Принята к публикации 7 марта 2025 г.

А. Б. Сухов

ТЕОРЕМА СЕПАРАТНОЙ АНАЛИТИЧНОСТИ ДЛЯ CR-ФУНКЦИЙ

Установлено свойство сепаратной аналитичности CR функций на многообразиях класса C^1 .

1. Введение

Пусть $E = \{z : \rho_j(z) = 0, j = 1, \dots, n\}$ — n -мерное вполне вещественное многообразие класса C^1 в окрестности начала координат пространства \mathbb{C}^n , где ρ_j — вещественные функции класса C^1 в окрестности начала координат. Поскольку вещественная размерность E равна n , условие вполне вещественности эквивалентно условию $\bar{\partial}\rho_1 \wedge \dots \wedge \bar{\partial}\rho_n \neq 0$ в окрестности E , т.е. E — порождающее многообразие.

Рассмотрим порождающие многообразия $E_j = \{z : \rho_k(z) = 0, k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ размерности $n+1$. Ясно, что каждое многообразие E_j содержит E .

Сформулируем основной результат данной статьи.

Теорема 1.1. *Пусть F — непрерывная CR функция на $\bigcup_{j=1}^n E_j$. Тогда F продолжается как голоморфная функция на окрестность начала координат в \mathbb{C}^n .*

Насколько известно автору, теорема 1.1 представляет новый результат в случае, когда многообразие E имеет регулярность в точности класса C^1 . При более высокой регулярности теорема 1.1 вытекает из известных результатов. В качестве следствия получаем хорошо известную теорему об острей клина.

Следствие 1.1. *Пусть F^+ и F^- — голоморфные функции в областях $\Omega^+ = \{\rho_j > 0, j = 1, \dots, n\}$ и $\Omega^- = \{\rho_j < 0, j = 1, \dots, n\}$ соответственно. Предположим, что функции F^+ и F^- непрерывно продолжаются на E и их значения совпадают на E . Тогда существует голоморфная функция F в окрестности E класса \mathbb{C}^n такая, что $F^+|_{\Omega^+} = F^+$ и $F^-|_{\Omega^-} = F^-$.*

Теорема 1.1 и следствие 1.1 имеют долгую историю. Например, классический случай $E = \mathbb{R}^n$ рассматривался в [1, 2]. Следствие 1.1 доказал Пинчук [3] и независимо Бедфорд [4] при дополнительных условиях. Дальнейшее обобщение принадлежит Штрабе [5].

Теорема 1.1 относится к результатам по сепаратной аналитичности и проблеме голоморфного продолжения CR-функций. Результаты такого типа получены Айрапетяном и Хенкиным [6, 7] с помощью теории интегральных представлений. Важный шаг в этом направлении сделан Айрапетяном [8] и Тумановым [9], применившим технику аналитических кругов (введенную Пинчуком [10]). Из результатов [8] и [9] можно получить теорему 1.1, когда E — многообразие гладкости C^s с вещественным $s > 1$. Таким образом, в данной статье мы рассматриваем оставшийся открытый вопрос, когда $s = 1$. Наш подход аналогичен подходу [8] и [9] и с точки зрения техники основан на развитом в [11] методе разрешимости уравнения Бишоп. Заметим, что дальнейшее развитие

Автор частично поддержан грантом Labex CEMPI.

А. Б. Сухов: Университет Лилля, Лилль, Франция; Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН, Уфа, Россия; sukhov@math.univ-lille.fr.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 302–309 (2025).

этой техники дает возможность получить аналоги других результатов из [8, 9] для многообразий класса C^1 .

2. Предварительные сведения

Пусть Ω — область в \mathbb{C}^n . Для положительного целого числа k обозначим через $C^k(\Omega)$ пространство комплекснозначных функций в Ω класса C^k . Кроме того, $C^k(\overline{\Omega})$ обозначает класс функций, частные производные которых вплоть до порядка k продолжаютя как непрерывные функции на $\overline{\Omega}$. Пусть $s > 0$ — вещественное нецелое число и k — его целая часть. Тогда $C^s(\Omega)$ обозначает пространство функций класса $C^k(\overline{\Omega})$ таких, что их частные производные порядка k (глобально) непрерывны по Гёльдеру с показателем $(s-k)$ в Ω . Эти производные автоматически удовлетворяют $(s-k)$ -условию Гёльдера $\overline{\Omega}$, так что мы используем обозначение $C^s(\overline{\Omega})$ для такого же пространства подходящих функций. Будем также использовать пространство $L^p(\Omega)$, $p > 1$, p -интегрируемых по Лебегу функций с обычной нормой $\|f\|_{L^p(\Omega)}$. Для вектор-функции $f = (f_1, \dots, f_m)$ положим

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \sum_{j=1}^m \|f_j\|_{L^p(\Omega)}.$$

Далее мы обозначаем через $W^{k,p}(\Omega)$ (соответственно $W_{\text{loc}}^{k,p}(\Omega)$) пространства Соболева (вектор-) функций с обобщенными производными порядка вплоть до k , которые p -интегрируемы по Лебегу (соответственно, локально) в Ω .

Обозначим через $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$ единичный круг в \mathbb{C} . Напомним, что в частном случае по теореме вложения Соболева при $\alpha = 1 - 2/p$ и $p > 2$ естественное вложение $W^{1,p}(\mathbb{D}) \rightarrow C^\alpha(\mathbb{D})$ является линейным ограниченным компактным оператором.

Будем говорить, что (замкнутое) вещественное подмногообразие E в области $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ принадлежит классу C^s (с вещественным $s \geq 1$), если для каждой точки $p \in E$ существуют открытая окрестность U точки p и отображение $\rho : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ максимального ранга $d < 2n$ класса C^s такие, что $E \cap U = \rho^{-1}(0)$. В этом случае ρ называется *локально определяющей* (вектор-) функцией многообразия E . Положительное целое число d есть вещественная коразмерность E . В наиболее важном частном случае $d = 1$ получаем класс вещественных гиперповерхностей.

Пусть J — стандартная комплексная структура на \mathbb{C}^n . Иными словами, J действует на вектор v умножением на i , т.е. $Jv = iv$. Для каждого $p \in E$ голоморфное касательное пространство $H_p E := T_p E \cap J(T_p E)$ является максимальным комплексным подпространством касательного пространства $T_p E$ к E в точке p . Ясно, что $H_p E = \{v \in \mathbb{C}^n : \partial\rho(p)v = 0\}$. Комплексная размерность $H_p E$ называется *CR-размерностью* E в точке p . Многообразие E называется *CR-многообразием Коши — Римана*, если его CR-размерность не зависит от $p \in E$.

Вещественное подмногообразие $E \subset \Omega$ называется *порождающим*, если комплексная линейная оболочка $T_p E$ совпадает с \mathbb{C}^n для всех $p \in E$. Заметим, что каждое порождающее многообразие вещественной коразмерности d является CR-многообразием CR-размерности $n - d$. Функция $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_d)$ определяет порождающее многообразие, если $\partial\rho_1 \wedge \dots \wedge \partial\rho_d \neq 0$. Особое значение имеют так называемые *вполне вещественные многообразия*, т.е. подмногообразия E , для которых $H_p E = \{0\}$ в каждой точке $p \in E$. Вполне вещественное многообразие \mathbb{C}^n является порождающим тогда и только тогда, когда его вещественная размерность равна n ; это максимальное из возможных значений размерности вполне вещественного многообразия.

Как обычно, под областью типа клина мы понимаем область вида

$$W = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi_j(z) < 0, j = 1, \dots, n\} \tag{2.1}$$

с острием (или углом)

$$E = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi_j(z) = 0, j = 1, \dots, n\}. \tag{2.2}$$

Предположим, что определяющие функции φ_j суть вещественные функции класса C^1 . Кроме того, пусть E — порождающее многообразие, т.е. $\partial\varphi_1 \wedge \dots \wedge \partial\varphi_n \neq 0$ в окрестности E . Ниже мы обычно будем считать, что $0 \in E$, т.е. $\varphi_j(0) = 0$ для каждого j .

При заданном $\delta > 0$ (предполагая δ достаточно малым) определим сжимающий клин

$$W_\delta = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \varphi_j - \delta \sum_{l \neq j} \varphi_l < 0, j = 1, \dots, n \right\} \subset W. \quad (2.3)$$

Этот клин имеет то же острие, что E . Заметим, что существует константа $C > 0$ такая, что в каждой точке $z \in W_\delta$

$$C^{-1} \text{dist}(z, bW) \leq \text{dist}(z, E) \leq C \text{dist}(z, bW). \quad (2.4)$$

3. Подклейка комплексных кругов ко вполне вещественным многообразиям класса C^1

Рассмотрим области типа клина (2.1) с острием (2.2). Нам понадобится известная конструкция заполнения клина W (или, более общо, клина W_δ) комплексными кругами, подклеенными к E вдоль открытой дуги.

Комплексный (аналитический или голоморфный) круг — это голоморфное отображение $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^n$, которое по меньшей мере непрерывно в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$. Будем говорить, что такой круг приклеен (или прикреплен) к подмножеству K класса \mathbb{C}^n вдоль (открытой непустой) дуги $\gamma \subset b\mathbb{D}$, если $f(\gamma) \subset K$.

Разобьем изложение на несколько шагов. Мы ограничимся формулировкой основных технических лемм, доказательство которых подробно изложено в [11].

3.1. Обобщенное уравнение Бишопы, существование и регулярность кругов. В данном разделе мы напомним основные технические результаты из [11].

Пусть E — n -мерное вполне вещественное многообразие класса C^1 в окрестности $0 \in \mathbb{C}^n$. Допустим, что $0 \in E$. Применяя комплексную линейную замену переменных и используя теорему о неявной функции, можно считать, что в окрестности Ω начала координат многообразие E определяется (векторным) уравнением

$$\varphi_j(z) = y_j - h_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

где вектор-функция $h = (h_1, \dots, h_n)$ принадлежит классу C^1 в окрестности $0 \in \mathbb{R}^n$ и удовлетворяет условиям

$$h_j(0) = 0, \quad \nabla h_j(0) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

Здесь и ниже ∇ обозначает градиент.

Как и выше, пусть E — вполне вещественное многообразие вида (2.2). Рассмотрим порождающие многообразия

$$E_j = \{z \in \Omega : \varphi_k(z) = 0, k \neq j\}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Каждое многообразие E_j имеет размерность $(n + 1)$ и содержит E в качестве подмногообразия.

Зафиксируем положительное нецелое число s . Рассмотрим преобразование Гильберта $T : u \rightarrow Tu$, сопоставляющее вещественной функции $u \in C^s(b\mathbb{D})$, гармоническую сопряженную функцию, равную нулю в начале координат. Иначе говоря, $u + iTu$ является следом на $b\mathbb{D}$ голоморфной функции на \mathbb{D} , принадлежит классу $C^s(\mathbb{D})$ и удовлетворяет условию $Tu(0) = 0$. Она однозначно определяется из условия, что функция $u + iT(u)$ является следом на $b\mathbb{D}$ голоморфной функции из \mathbb{D} и $T(u)$ обращается в нуль в начале координат.

Напомним, что преобразование Гильберта явно задается формулой

$$Tu(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \text{v. p.} \int_{-\pi}^{\pi} u(e^{it}) \cot\left(\frac{\theta - t}{2}\right) dt.$$

Это классический линейный сингулярный интегральный оператор. Он ограничен в пространстве $C^s(b\mathbb{D})$ для любого нецелого числа $s > 0$. Кроме того, для $p > 1$ оператор $T : L^p(b\mathbb{D}) \rightarrow L^p(b\mathbb{D})$ также является ограниченным линейным оператором. Обозначим через $\|T\|_p$ норму этого оператора.

Рассмотрим n открытых дуг $\Gamma_j = \{e^{i\theta}, \theta \in I_j\}$, $I_1 =]0, 2\pi/n[$, $I_{j+1} = I_j + 2\pi/n$, $j = 1, \dots, n - 1$, длины $2\pi/n$ в единичном круге. Зафиксируем C^∞ -гладкие вещественные функции ψ_j на $b\mathbb{D}$ такие,

что $\psi_j|_{\Gamma_j} < 0$ и $\psi_j|_{b\mathbb{D} \setminus \Gamma_j} = 0$, $j = 1, \dots, n$. Положим $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n)$. Рассмотрим *обобщенное уравнение Бишопа*

$$u(\zeta) = -Th(u(\zeta)) - tT\psi(\zeta) + c, \quad \zeta \in b\mathbb{D}, \quad (3.4)$$

где $c \in \mathbb{R}^n$ и $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ — вещественные параметры. Здесь и ниже мы используем обозначение $tT\psi = (t_1 T\psi_1, \dots, t_n T\psi_n)$. Докажем, что для любых $p > 2$ и c, t , достаточно близких к началу координат, это сингулярное интегральное уравнение имеет единственное решение $u(c, t)(\zeta)$ в классе Соболева $W^{1,p}(b\mathbb{D})$ вектор-функций. Такое решение принадлежит пространству $C^\alpha(b\mathbb{D})$, $\alpha = 1 - 2/p$, по вложению Соболева.

Сначала объясним, как такое решение связано с комплексными кругами, подклеенными к E_j вдоль Γ_j для каждого j . Действительно, рассмотрим функцию

$$U(c, t)(\zeta) = u(c, t)(\zeta) + ih(u(c, t)(\zeta)) + it\psi(\zeta).$$

Поскольку $T^2 = -Id$ и u — решение уравнения (3.4), функция U голоморфно продолжается на \mathbb{D} как функция

$$H(c, t)(\zeta) = PU(c, t), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad (3.5)$$

класса $C^\alpha(\mathbb{D})$. Здесь P обозначает оператор Пуассона от гармонически продолженной на \mathbb{D} функции:

$$PU(c, t)(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |\zeta|^2}{|e^{it} - \zeta|^2} U(c, t)(e^{it}) dt. \quad (3.6)$$

Для $j = 1, \dots, n$ функция ψ_k обращается в нуль на $b\mathbb{D} \setminus \Gamma_j$ при $k \neq j$. Таким образом, $H(c, t)(b\mathbb{D}^+) \subset E_j$ для всех (c, t) .

Удобно распространить уравнение (3.4) на все пространство \mathbb{C}^n . Зафиксируем функцию $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ класса C^∞ , равную 1 в единичном круге $\text{ball } \mathbb{B}^n$ и 0 на $\mathbb{R}^n \setminus 2\mathbb{B}^n$. Для достаточно малого $\delta > 0$ функция $h_\delta(x) = \lambda(x/\delta)h(x)$ естественно продолжается нулем на все пространство \mathbb{R}^n . Зафиксируем достаточно малое число $\tau > 0$, которое будет конкретизировано ниже. В силу (3.2) можно выбрать $\delta = \delta(\tau) > 0$ так, что градиент $\nabla h_\delta(x)$ будет малым на всем пространстве \mathbb{R}^n :

$$\|\nabla h_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \tau. \quad (3.7)$$

Сначала изучим глобальное уравнение

$$u(\zeta) = -Th_\delta(u(\zeta)) - tT\psi(\zeta) + c, \quad \zeta \in b\mathbb{D}. \quad (3.8)$$

Докажем, что решения этого уравнения непрерывно зависят от параметров (c, t) , что дает возможность локализовать решения и сделать соответствующие заключения для исходного уравнения (3.4).

Пусть V — область в \mathbb{R}^m и $f \in L^p(V \times b\mathbb{D})$, $p > 1$. По теореме Фубини $Tf \in L^p(V \times b\mathbb{D})$ (переменные в V рассматриваются как параметры при действии оператора T). Используя то же обозначение, получим ограниченный линейный оператор $T : L^p(V \times b\mathbb{D}) \rightarrow L^p(V \times b\mathbb{D})$ с такой же нормой, как в пространстве $L^p(b\mathbb{D})$, которую будем обозначать по-прежнему через $\|T\|_p$.

Зафиксируем область $V \subset \mathbb{R}^{2n}$ параметров (c, t) .

Лемма 3.1. *При указанных выше условиях для любого $p > 1$ можно выбрать $\tau > 0$ в (3.7) и $\delta = \delta(\tau) > 0$ такие, что уравнение (3.8) допускает единственное решение $u(c, t)(\zeta) \in L^p(V \times b\mathbb{D})$.*

Ввиду произвольности V уравнение (3.8) допускает единственное решение $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{2n} \times b\mathbb{D})$, где последнее пространство понимается как пространство функций класса L^p на $K \times b\mathbb{D}$ для каждого измеримого (по Лебегу) компактного подмножества $K \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Ввиду теоремы вложения Соболева решение u принадлежит $C^{1-(2n+1)/p}(V \times b\mathbb{D})$, где V — открытое подмножество в \mathbb{R}^{2n} . В частности, построенное семейство кругов непрерывно по всем переменным при достаточно больших p .

Заметим, что при $t = 0$ уравнение (3.8) допускает решение в виде константы $u(c, 0)(\zeta) = c$. Если c достаточно близко к $0 \in \mathbb{R}^n$, это решение определяет точку $c + ih(c) \in E$. Ввиду

непрерывности и единственности решения существует окрестность V начала координат в \mathbb{R}^{2n} такая, что для $(c, t) \in V$ любое решение уравнения (3.8) является решением уравнения (3.4).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Лемма 3.2. *При заданном $p > 2$ существует окрестность V начала координат в \mathbb{R}^{2n} такая, что уравнение Бишопа (3.4) допускает единственное решение $u(c, t)(\zeta) \in W^{1,p}(V \times b\mathbb{D})$.*

Поскольку p произвольно, допускаются решения в классе Гёльдера $C^\alpha(V \times b\mathbb{D})$, где $\alpha = 1 - (2n + 1)/p$. Здесь V зависит от p (и, следовательно, от α).

3.2. Стабильность кругов. В предшествующих разделах геометрические свойства семейства (3.5) не рассматривались. В данном разделе мы рассмотрим некоторые геометрические свойства, которые будут полезны ниже.

Представим семейство (3.5) как малое возмущение в норме пространства $W^{1,p}$ некоторого модельного семейства. Модельный случай возникает, когда $E = \mathbb{R}^n$, т.е. $h = 0$ в (2.2). Тогда общее решение уравнения (3.4) принимает вид

$$u(\zeta) = -tT\psi(\zeta) + c, \quad \zeta \in b\mathbb{D}, \quad (3.9)$$

где, как обычно, $c \in \mathbb{R}^n$ и $t = (t_1, \dots, t_n)$, $t_j \geq 0$, — вещественные параметры. В этом случае семейство (3.5) принимает вид

$$H(c, t)(\zeta) = PU(c, t), \quad \zeta \in \mathbb{D}, \quad (3.10)$$

где

$$U(c, t)\zeta = -tT\psi(\zeta) + c + it\psi(\zeta). \quad (3.11)$$

С геометрической точки зрения, это семейство кругов получается из семейства комплексных прямых, пересекающих \mathbb{R}^n по вещественным прямым. Круги получаются биголоморфной репараметризацией соответствующих полупрямых единичным кругом. Эти прямые задаются формулой $l(c, t) : \zeta \mapsto t\zeta + c$, $\zeta \in \mathbb{C}$. Конформное отображение $-T\psi + i\psi$ отображает единичный круг в гладко ограниченную область в нижней полуплоскости и подклеивает $b\mathbb{D}^+$ к вещественной оси. Параметр t можно интерпретировать как направляющий вектор l . Ниже этот случай будем называть *плоским*, а круги (3.11) — *плоскими кругами*, которые геометрически устроены очень просто; подробное изложение (в более общем случае) можно найти, например, в [12].

Пусть E — вполне вещественное многообразие заданное формулами (3.1), (3.2). Для данного $d \in I \setminus \{0\}$, где $I \ni 0$ — достаточно малый открытый интервал в \mathbb{R} , рассмотрим многообразия E_d , заданные уравнениями

$$y = d^{-1}h(dx). \quad (3.12)$$

Заметим, что для каждого $d \neq 0$ многообразие E_d бигармонично многообразию E в силу изотропного растяжения $z \mapsto d^{-1}z$.

Положим $h(x, d) = d^{-1}h(dx)$, если $d \neq 0$, и $h(x, 0) = 0$. В последнем случае, т.е. при $d = 0$ имеем $E_0 = \{y = 0\} = \mathbb{R}^n = T_0(E)$, т.е. имеем плоский случай. Заметим, что функция $h(x, d)$ и ее частные производные первого порядка по x непрерывны относительно $d \in I$.

Итак, рассмотрим 1-параметрическое семейство E_d вполне вещественных многообразий, определенных уравнениями

$$y = h(x, d), \quad (3.13)$$

где

$$h_j(0, d) = 0, \quad \nabla_x h_j(0, d) = 0, \quad d \in I, \quad j = 1, \dots, n; \quad (3.14)$$

здесь градиент ∇_x рассматривается относительно x . Тогда для каждого (c, t, d) получаем круги $H(c, t, d)$, определенные уравнением (3.5). Ввиду единственности решения уравнения Бишопа семейство $H(c, t, 0)(\zeta)$ совпадает с (3.11).

Доказательство следующего утверждения можно найти в [11].

Лемма 3.3. *Для любого $p > 1$*

$$\| H(c, t, d)(\zeta) - H(c, t, 0)(\zeta) \|_{W^{1,p}(V \times \mathbb{D})} \rightarrow 0, \quad d \rightarrow 0.$$

4. Доказательство теоремы 1.1

Сначала рассмотрим случай, когда E определено уравнением (3.1). Применим конструкцию подклейки кругов к $\bigcup_j E_j$, описанную в § 3. Как и выше, рассмотрим растяжения и семейство многообразий E_d , полученных из многообразия $E_0 = \mathbb{R}^n$ малыми деформациями. Непосредственно проверяется, что плоские круги $H(c, t, 0)(\zeta)$, определенные уравнением (3.11), обладают следующим свойством: их центры $H(c, t, 0)(0)$ заполняют всю окрестность начала координат в \mathbb{C}^n . По непрерывности, обеспеченной леммой 3.3, таким же свойством обладают круги $H(c, t, d)(\zeta)$ при достаточно малом $d > 0$. Отсюда получаем (вернувшись к начальным координатам, перед растяжениями) семейство аналитических (достаточно малых) кругов, границы которых подклеены к $\bigcup_j E_j$ и центры которых заполняют всю окрестность начала координат в \mathbb{C}^n .

Пусть F — непрерывная CR-функция на $\bigcup_j E_j$. Согласно теореме Бавенди — Тревеса F равномерно аппроксимируется на $\bigcup_j E_j$ последовательностью голоморфных полиномов P_k (отметим, что этот результат верен для E класса C^1 [13]). В силу принципа максимума для каждого аналитического круга последовательность P_k равномерна ограничена в окрестности начала координат. Перейдя к сходящейся подпоследовательности в окрестности начала координат, заключаем, что предельная функция \widehat{F} представляет собой голоморфное продолжение F на всю окрестность начала координат в \mathbb{C}^n . Тем самым получаем требуемое утверждение в случае, когда многообразии E определено формулой (3.1).

В общем случае многообразии E (после линейной замены координат) определяется уравнением

$$\varphi_j(z) = y_j - h_j(x, y) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

где вектор-функция $h = (h_1, \dots, h_n)$ принадлежит классу C^1 в окрестности $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ и удовлетворяет условиям

$$h_j(0, 0) = 0, \quad \nabla h_j(0, 0) = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Поэтому для аналитических кругов аналог уравнения Бишопа (3.4) принимает вид

$$u(\zeta) = -Th(u(\zeta), Tu(\zeta)) - tT\psi(\zeta) + c, \quad \zeta \in b\mathbb{D}. \quad (4.3)$$

Приведенные выше рассуждения (а также доказательства лемм из [11]) показывают, что представленный метод решения этого уравнения дословно воспроизводится в данном случае, и круги будут иметь такие же свойства. Тогда требуемое утверждение доказывается так же, как выше. Тем самым теорема 1.1 доказана.

Для доказательства следствия 1.1 достаточно применить теорему к сужающемуся клину (2.3).

Литература

1. W. Rudin, *Lectures on the Edge-of-the Wedge Theorem*, Am. Math. Soc., Providence, RI (1971).
2. В. С. Владимиров, *Методы теории функций многих комплексных переменных*, Наука, М. (1964).
3. С. И. Пинчук, “Теорема Боголюбова об ‘острие клина’ для порождающих многообразий”, *Мат. сб.* **94**, No. 3, 468–482 (1974).
4. E. Bedford, “Holomorphic continuation at a totally real edge”, *Math. Ann.* **230**, 213–235 (1977).
5. E. Straube, “CR-distributions и analytic continuation at generating edges”, *Math. Z.* **189**, 131–142 (1985).
6. Р. А. Айрапетян, Г. М. Хенкин, “Аналитическое продолжение CR-функций через ‘острие клина’”, *ДАН СССР* **259**, No. 4, 777–781 (1981).
7. Р. А. Айрапетян, Г. М. Хенкин, “Интегральные представления дифференциальных форм на многообразиях Коши — Римана и теория CR-функций”, *Успехи мат. наук* **39**, No. 3, 39–106 (1984).

8. Р. А. Айрапетян, “Продолжение CR-функций с кусочно-гладких CR-многообразий”, *Мат. сб.* **134**, No. 1, 108–118 (1987).
9. А. Е. Туманов, “Продолжение CR-функций в клин”, *Мат. сб.* **181**, No. 7, 951–964 (1990).
10. С. И. Пинчук, “Граничная теорема единственности для голоморфных функций нескольких комплексных переменных”, *Мат. заметки* **15**, No. 2, 205–212 (1974).
11. А. Б. Сухов, “О голоморфных отображениях строго псевдовыпуклых областей”, *Мат. сб.* **213**, No. 11, 118–142 (2022).
12. A. Sukhov, “Pluripolar sets, real submanifolds и pseudoholomorphic discs”, *J. Aust. Math. Soc.* **109**, No. 2, 270–288 (2020).
13. A. Tumanov, “Analytic discs и the extendibility of CR functions”, *Lect. Notes Math.* **1684**, 123–141 (1998).

Статья поступила в редакцию 30 декабря 2024 г.

Принята к публикации 1 февраля 2025 г.



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТЕРРИТОРИЯ
«СИРИУС»