-

В. М. Бухштабер, Ф. Ю. Попеленский

КОГОМОЛОГИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Получено описание когомологической структуры последовательности нильмногообразий Гейзенберга $M_H^{2n-1} \to M_H^{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, в терминах биградуированных симплектических структур на торах T^{2n}, соответствующих $\mathfrak{sl}_2$–представлений на когомологиях торов T^{2n} и спектральной последовательности Бухштабера (Bss).

1. Введение

Нильмногообразие Гейзенберга M_H^{2n+1} — замечательный пример контактного многообразия, определенного канонической симплектической структурой на торе T^{2n}. Конструкция этих многообразий использует переход от канонической скобки Пуассона на $\mathbb{R}^{2n}$ к простейшей скобке Ли на $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Задача вычисления когомологий многообразий M_H^{2n+1} широко известна (см. [**1**]–[**7**]). Интерес к этой задаче и подходы к ее решению основаны на глубоких связях теории нильмногообразий с фундаментальными результатами теорий симплектических и контактных многообразий, гомологической алгебры, представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, нелинейных дифференциальных уравнений и математической физики. В основе нашего исследования лежит развитие взаимосвязей этих подходов и результатов.

В центре внимания настоящей статьи нильмногообразия Гейзенберга M_H^{2n+1}, их вложения $M_H^{2n-1} \to M_H^{2n+1}, n = 1, 2, \ldots$, и биградуированные симплектические структуры на торах $T^{2n}, n \geqslant 1$. Наш подход использует спектральную последовательность Бухштабера (Bss) и последовательность расслоений $M_H^{2n+1} \to T^{2n-k}$ со слоем M_H^{2l+1} при $k = 2l$ и $M_H^{2l-1} \times S^1$ при $k = 2l - 1$, где $k = 0, \ldots, 2n - 1$.

В статье

- теория спектральной последовательности Bss развита на основе результатов алгебраической и гомологической теорий алгебр Хопфа и алгебр Ли;
- описано действие дифференциалов в Bss для многообразий M_H^{2n+1} и преобразования Bss, индуцированные вложениями $M_H^{2n-1} \to M_H^{2n+1}$;
- введены и вычислены биградуированные кольца когомологий $H^{*,*}(M_H^{2n+1})$ как модули над биградуированной внешней алгеброй $H^{*,*}(T^{2n})$, а также гомоморфизмы
$$H^{*,*}(M_H^{2n+1}) \to H^{*,*}(M_H^{2n-1});$$
- показано, что мультипликативными образующими колец $H^{*,*}(M_H^{2n+1})$ являются образующие групп $H^1(M_H^{2n+1})$ и $H^{n+1}(M_H^{2n+1})$;

В. М. Бухштабер: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия, buchstab@mi-ras.ru.
Ф. Ю. Попеленский: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, popelens@mech.math.msu.su.

Английский перевод опубликован в *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 17–58 (2024).

- все элементы группы $H^{n+1,*}(M_H^{2n+1})$ реализованы в виде нетривиальных тройных произведений Масси.

Статья содержит демонстрацию наших результатов, в том числе явные формулы полиномов Пуанкаре биградуированных когомологий для многообразий Гейзенберга M_H^{2n+1}, $n = 1, 2, 3, 4$.

В начале статьи приведены необходимые факты и конструкции из теории нильмногообразий и спектральной последовательности Бухштабера. В заключительной части отмечено направление исследований, связанное с реализацией многообразия Гейзенберга M_H^{2n+1} в виде пространства расслоения над n−мерным абелевым многообразием.

Если специально не указано, то речь идет о когомологиях с рациональными коэффициентами.

2. Нильмногообразия

Напомним, что нильмногообразие — это компактное однородное пространство конечномерной односвязной нильпотентной группы Ли (над $\mathbb{R}$). Согласно классическим результатам Мальцева [**8**] для данной односвязной нильпотентной группы Ли нильмногообразие существует тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли обладает базисом с рациональными структурными константами. По теореме Номидзу алгебра когомологий де Рама нильмногообразия изоморфна алгебре когомологий соответствующей нильпотентной алгебры Ли (см. [**9**]).

В настоящее время известна классификация нильпотентных алгебр Ли в небольших размерностях. В размерностях до 6 включительно таких алгебр Ли конечное число (см. [**10**]). В размерностях 7 и 8 классификация тоже получена, но в этих размерностях имеются семейства попарно неизоморфных нильпотентных алгебр Ли, зависящих от непрерывного параметра. Литература, посвященная этому вопросу, требует отдельного обзора, что выходит за рамки настоящей статьи. Среди работ, относящихся к классификации нильпотентных алгебр над произвольными полями характеристики, отличной от 2, отметим работу [**11**].

В настоящее время специалисты склоняются к мнению, что имеющиеся теоретические методы не позволяют получить обозримую классификацию нильпотентных алгебр Ли в произвольных размерностях. В связи с этим естественно конкретизировать задачи классификации и рассмотреть классы нильпотентных алгебр Ли с дополнительными условиями на их структуру.

Определение 2.1. Алгебра Ли $\mathcal{V}^k$ размерности n_k с фиксированным базисом $\{e_\alpha : \alpha \in I_k, |I_k| = n_k\}$ называется *оснащенной*.

Определение 2.2. *Последовательностью алгебр Ли* называется бесконечная последовательность $\ldots \subset \mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{k+1} \subset \ldots$ вложений оснащенных алгебр Ли, соответствующих вложениям $I_k \subset I_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

2.1. Нильмногообразия Гейзенберга. Рассмотрим группу $\mathcal{H}^{2n+1}$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

с вещественными x_j, y_j и z. Обратной к такой матрице является матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n & -z + \sum x_i y_i \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & -y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & -y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

Пространство группы $\mathcal{H}^{2n+1}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^{2n+1}$. Ее алгебра Ли L_H^{2n+1} состоит из матриц

$$
A = \begin{pmatrix}
0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \\
0 & & & 0 & 0 & y_{n-1} \\
0 & & \cdots & 0 & 0 & y_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

с вещественными x_j, y_j и z. Введем в L_H^{2n+1} базис $e_0, e_{\pm 1}, \ldots, e_{\pm n}$ такой, что

$$
A = x_1 e_{-1} + \ldots + x_n e_{-n} + y_1 e_1 + \ldots + y_n e_n + z e_0 = \sum_{j=1}^{n} x_j e_{-j} + \sum_{j=1}^{n} y_j e_j + z e_0.
$$

Прямая проверка показывает, что в L_H^{2n+1} все коммутаторы базисных элементов равны нулю, кроме $[e_{-j}, e_j] = e_0$, $j = 1, \ldots, n$. Тем самым алгебра Ли L_H^{2n+1} нильпотентна, и ее структурные константы суть целые числа. Алгебры Ли L_H^{2n+1} образуют последовательность в смысле определения 2.2 при $I_n = \{-n, \ldots, 0, \ldots, n\}$.

Группа $\mathcal{H}^3$ известна как группа Гейзенберга. Группы $\mathcal{H}^{2n+1}$ при $n \geqslant 2$ называются *обобщенными группами Гейзенберга*. Соотношения в алгебре Ли L_H^{2n+1} соответствуют замене канонической скобки Пуассона пространства $\mathbb{R}^{2n}$ на коммутатор, а единицы — на элемент e_0, который играет роль постоянной Планка.

В $\mathcal{H}^{2n+1}$ имеется решетка Γ_H^{2n+1}, состоящая из матриц с целочисленными x_j, y_j и z. Однородное пространство $M_H^{2n+1} = \mathcal{H}^{2n+1}/\Gamma_H^{2n+1}$ называется *нильмногообразием Гейзенберга*.

Нильмногообразия M_H^{2n+1} образуют последовательность

$$
S^1 = M_H^1 \xrightarrow{i_0} M_H^3 \xrightarrow{i_1} M_H^5 \xrightarrow{i_2} \ldots,
$$

индуцированную вложениями групп

$$
\mathcal{H}^1 \xrightarrow{i_0} \mathcal{H}^3 \xrightarrow{i_1} \mathcal{H}^5 \to \ldots,
$$

где $i_n : \mathcal{H}^{2n+1} \xrightarrow{i_n} \mathcal{H}^{2n+3}$ задается формулой

$$
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\
\vdots & & \ddots & & \vdots & \\
0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\
0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\mapsto
\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 & z \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & y_1 \\
\vdots & & \ddots & & 0 & \vdots & \\
0 & & & 1 & 0 & 0 & y_{n-1} \\
0 & & \cdots & 0 & 1 & 0 & y_n \\
0 & & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}.
$$

При таком вложении образующие $e_0, e_{\pm 1}, \ldots, e_{\pm n}$ алгебры L_H^{2n+1} переходят в $e_0, e_{\pm 1}, \ldots, e_{\pm n} \in L_H^{2n+3}$ в соответствии с определением 2.2. Обратим внимание, что в литературе используется и другой выбор индексации образующих, при котором вложения i_n меняют индексы. Пример такой индексации см. в п. 6.1.

Отметим, что в каждой группе $\mathcal{H}^{2n+1}$ имеются другие решетки, не эквивалентные Γ_H^{2n+1}. Тем не менее и при любом другом согласованном выборе решеток $\Gamma^{2n+1} \subset \mathcal{H}^{2n+1}$ получается последовательность нильмногообразий

$$
\ldots \to \mathcal{H}^{2n+1}/\Gamma^{2n+1} \xrightarrow{i_n} \mathcal{H}^{2n+3}/\Gamma^{2n+3} \to \ldots,
$$

у которых по теореме Номидзу те же вещественные когомологии и те же индуцированные гомоморфизмы $i_n^* : H^*(\mathcal{H}^{2n+3}/\Gamma^{2n+3}, \mathbb{R}) \to H^*(\mathcal{H}^{2n+1}/\Gamma^{2n+1}, \mathbb{R})$.

2.2. Расслоения нильмногообразий M_H^{2n+1} над торами T^{2n-k}. С нильмногобразиями Гейзенберга связаны несколько замечательных расслоений над торами, многие из них используются в вычислениях групп $H^*(M_H^{2n+1})$ и в исследовании кольцевой структуры когомологий.

2.2.1. $\pi_{n,2k} : M_H^{2n+1} \to T^{2(n-k)}$. Начнем с описания расслоения $M_H^{2n+1} \to T^{2(n-k)}$ со слоем M_H^{2k+1}.

Сопоставим матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{k+1} & \cdots & x_n & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 & & & y_{k+1} \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & & & 1 & y_n \\ 0 & & \cdots & 0 & & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем гомоморфизм групп $\pi_{n,2k} : \mathcal{H}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2(n-k)}$, где $\mathbb{R}^{2(n-k)}$ рассматривается со стандартной структурой абелевой группы. Под действием гомоморфизма $\pi_{n,2k}$ решетка Γ_H^{2n+1} отображается на решетку $\mathbb{Z}^{2(n-k)} \subset \mathbb{R}^{2(n-k)}$. Переходя к факторам, получаем локально тривиальное расслоение

$$\pi_{n,2k} : M_H^{2n+1} \to T^{2(n-k)}.$$

Действие фундаментальной группы базы в когомологиях слоя тривиально, т.е. это расслоение, как говорят, гомологически простое.

Действительно, рассмотрим петлю $\gamma : S^1 \to T^{2(n-k)}$, $\gamma(1) = 0 \in T^{2(n-k)}$, в базе расслоения. Обратный образ $\gamma^*(\pi_{n,2k})$ является расслоением над S^1 со слоем M_H^{2k-1}. Обход по S^1 определяет диффеоморфизм слоя на себя, который задается сопряжением матрицы вида A, у которой $x_{k+1} = \ldots = x_n = y_{k+1} = \ldots = y_n = 0$, матрицей B с целыми коэффициентами. Но легко проверить, что $B^{-1}AB = A$, т.е. расслоение $\gamma^*(\pi_{n,2k})$ над S^1 тривиально.

Таким образом, второй член спектральной последовательности Лере — Серра этого расслоения имеет вид

$$E_2^{p,q} = H^p(T^{2(n-k)}, H^q(M_H^{2k+1})).$$

Особый интерес представляет расслоение $\pi_{n,0} : M_H^{2n+1} \to T^{2n}$ со слоем окружность. Дело в том, что в спектральной последовательности этого расслоения по соображениям размерности нетривиальным может быть только дифференциал d_2, а в силу мультипликативности он определяется значением на образующей $\omega_0 \in E_2^{0,1} = H^1(S^1)$. Легко проверить, что $d_2\omega_0 = \sum_{j=1}^{n} \omega_{-k} \wedge \omega_k$. Здесь ω_k — образующие одномерных когомологий, двойственные элементам e_k, подробнее о них будет сказано ниже.

Далее, рассмотренная спектральная последовательность соответствует спектральной последовательности Хохшильда — Серра с коэффициентами в тривиальном модуле $\mathbb{R}$ для подалгебры L_H^{2k+1} в L_H^{2n+1}. Эта подалгебра является идеалом, соответствующая факторалгебра — абелева алгебра Ли $\mathfrak{t}^{2(n-k)}$. В этом случае второй член спектральной последовательности Хохшильда — Серра имеет вид

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{t}^{2(n-k)}, H^q(L_H^{2k+1})).$$

Вычисление этой спектральной последовательности для $k = 0$ см. в п. 4.2, а для $k = n - 1$ — в п. 7.1.

2.2.2. $\pi_{n,2k+1} : M_H^{2n+1} \to T^{2(n-k)-1}$. Опишем расслоение $M_H^{2n+1} \to T^{2(n-k)-1}$ со слоем $M_H^{2k+1} \times S^1$.

Сопоставим матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_{k+2} & \cdots & x_n & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 & & & & y_{k+1} \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & & & & 1 & y_n \\ 0 & & \cdots & 0 & & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем гомоморфизм $\pi_{n,2k+1} : \mathcal{H}^{2n+1} \to \mathbb{R}^{2(n-k)-1}$. Под действием этого гомоморфизма решетка Γ_H^{2n+1} отображается на решетку $\mathbb{Z}^{2(n-k)-1} \subset \mathbb{R}^{2(n-k)-1}$. Переходя к факторам, получаем локально тривиальное расслоение

$$\pi_{n,2k+1} : M_H^{2n+1} \to T^{2(n-k)-1}.$$

Его слой, как нетрудно проверить, диффеоморфен $M_H^{2k+1} \times S^1$, где окружность S^1 возникает из факторизации по целым числам направления, заданного координатой x_{k+1}.

В этом случае действие фундаментальной группы базы в когомологиях слоя нетривиально. Действительно, рассмотрим петлю $\gamma : S^1 \to T^{2(n-k)-1}$, $\gamma(1) = 0 \in T^{2(n-k)-1}$, в базе расслоения и расслоение $\gamma^*(\pi_{n,2k+1})$ над S^1 со слоем $M_H^{2k+1} \times S^1$. Как и ранее, обход по S^1 определяет диффеоморфизм слоя на себя, который задается сопряжением матрицы вида A матрицей B с целыми коэффициентами. Однако в данном случае в базе имеется петля, которая действует на слое нетривиальным образом.

Рассмотрим матрицу вида B, у которой $x_{k+2} = \cdots = x_n = y_{k+2} = \ldots = y_n = 0$, а $y_{k+1} = 1$. Тогда в результате сопряжения матрицы вида A, у которой $x_{k+2} = \ldots = x_n = y_{k+1} = \ldots = y_n = 0$, этой матрицей B изменится только правый верхний угол матрицы A: вместо z там появится $z + x_{k+1}$. На уровне двойственных коцепей (или дифференциальных форм) это означает замену ω_0 на $\omega_0 + \omega_{-k-1}$.

Итак, второй член спектральной последовательности Лере — Серра этого расслоения имеет вид

$$E_2^{p,q} = H^p(T^{2(n-k)-1}, (H^q(M_H^{2k+1} \times S^1))^{tw}).$$

Особый интерес представляет расслоение $\pi_{n,0} : M_H^{2n+1} \to S^1$ со слоем $M_H^{2n-1} \times S^1$. Дело в том, что во втором члене этой спектральной последовательности

$$E_2^{p,q} = H^p(S^1, (H^q(M_H^{2n-1} \times S^1))^{tw})$$

всего два ненулевых столбца: нулевой и первый, а значит все дифференциалы d_r, $r \geqslant 2$, нулевые. Мы покажем, что лишь для $q = n$ группы $E_2^{0,n}$ и $E_2^{1,n}$ вычисляются как когомологии базы S^1 с нетривиальной локальной системой коэффициентов, а для остальных q локальная система постоянна (см. п. 7.2).

3. Спектральная последовательность Bss для нильпотентных алгебр Ли

В [**12**] развита теория спектральной последовательности Бухштабера (Bss) для градуированных алгебр Хопфа. Ее применение в контексте нильпотентных алгебр Ли приводит к понятию

Bss–глубины нильпотентной алгебры Ли. Дадим соответствующие определения из [**12**], адаптировав их к нашей ситуации.

Напомним, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определен нижний центральный ряд $\mathfrak{g} \supset \gamma_2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \ldots \supset \gamma_p(\mathfrak{g}) \supset \ldots$, где $\gamma_p(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \gamma_{p-1}(\mathfrak{g}_n)]$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной*, если найдется число p, для которого $\gamma_p(\mathfrak{g}) = 0$, и называется *остаточно нильпотентной*, если $\bigcap\limits_p \gamma_p(\mathfrak{g}) = 0$.

Далее $\mathfrak{g}$ обозначает конечномерную нильпотентную алгебру Ли, определенную над полем $\Bbbk$. Пусть $U\mathfrak{g}$ — универсальная обертывающая алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и V — некоторый $\mathfrak{g}$–модуль. Тогда по определению $H^*(\mathfrak{g}, V) = \operatorname{Ext}^*_{U\mathfrak{g}}(\Bbbk, V)$ и равно когомологиям комплекса $\operatorname{Hom}^*_{U\mathfrak{g}}(C_*(\mathfrak{g}), V)$, где $C_*(\mathfrak{g})$ — резольвента Шевалле — Эйленберга. Напомним, что комплекс $C_*(\mathfrak{g})$ с дифференциалом d_{CE} задается формулами

$$
\begin{aligned}
&C_s(\mathfrak{g}) = U\mathfrak{g} \otimes \Lambda^s \mathfrak{g},\\
&d_{CE} : C_s(\mathfrak{g}) \to C_{s-1}(\mathfrak{g}),\\
&d_{CE}(u \otimes g_1 \wedge \ldots \wedge g_s) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{i-1} u g_i \otimes g_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{g_i} \wedge \ldots \wedge g_s\\
&\qquad\qquad + \sum_{i,j} (-1)^{i+j} u \otimes [g_i, g_j] \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{g_i} \wedge \ldots \wedge \widehat{g_j} \wedge \ldots \wedge g_s.
\end{aligned}
$$

Универсальная обертывающая алгебра $U\mathfrak{g}$ является алгеброй Хопфа, у которой диагональ на образующих $g \in \mathfrak{g}$ задается формулой $\Delta(g) = 1 \otimes g + g \otimes 1$. Тогда на $(U\mathfrak{g})^*$ определена структура $\mathfrak{g}$–модуля. Легко проверить, что когомологии $H^*(\mathfrak{g}, (U\mathfrak{g})^*)$ тривиальны, точнее $H^0(\mathfrak{g}, (U\mathfrak{g})^*) = \Bbbk$, а $H^i(\mathfrak{g}, (U\mathfrak{g})^*) = 0$ для $i \neq 0$.

В алгебре Хопфа $(U\mathfrak{g})^*$ определена возрастающая *фильтрация Бухштабера* (см. [**13**])

$$\Bbbk = N_0 \subset N_1 \subset \ldots \subset N_p \subset \ldots \subset (U\mathfrak{g})^*, \tag{3.1}$$

которая задается по индукции следующим образом:

$$N_{p+1} = \{x \in (U\mathfrak{g})^* \ : \ g \cdot x \in N_p \quad \forall\, g \in \mathfrak{g}\}. \tag{3.2}$$

Эта фильтрация в случае нильпотентной алгебры Ли является исчерпывающей. Действительно, условие $\bigcup\limits_p N_p = (U\mathfrak{g})^*$ равносильно условию $\bigcap\limits_p I^p = 0$, где I — идеал аугментации алгебры $U\mathfrak{g}$ (см. [**12**, п. 3.2]). В свою очередь, условие $\bigcap\limits_p I^p = 0$ равносильно остаточной нильпотентости алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. [**14**, следствие 3.5]). Конечномерная остаточно нильпотентная алгебра Ли нильпотентна.

Фильтрация N_p универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{g}$ индуцирует фильтрацию $\mathcal{N}_p$ в комплексе $\operatorname{Hom}^*_{U\mathfrak{g}}(C_*(\mathfrak{g}), (U\mathfrak{g})^*)$, а значит задает спектральную последовательность — так называемую спектральную последовательность Бухштабера Bss. Фильтрация $\mathcal{N}_p$ является исчерпывающей, поэтому Bss сходится к $H^*(\mathfrak{g}, (U\mathfrak{g})^*)$, т.е. к тривиальному модулю. В случае, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является градуированной, то как и в случае градуированных алгебр Хофпа, Bss триградуирована. Если же алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не градуирована, то Bss биградуирована. Перечислим несколько ее свойств (подробности см. в [**12**]):

(1) $E_1^{p,q} = H^{-p-q}(\mathfrak{g}, \Bbbk) \otimes (N_p/N_{p-1})$, в частности, $E_1^{p,-p} = N_p/N_{p-1}$,

(2) дифференциал d_r является гомоморфизмом $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p-r,q+r-1}$,

(3) $E_1^{p,q} = 0$ при $p < 0$ или при $p + q > 0$,

(4) $E_1^{0,q} = H^{-q}(\mathfrak{g}, \Bbbk)$ (по построению фильтрации).

Теорема 3.1 ([**12**, п. 3.7])**.** *Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, причем $\gamma_n(\mathfrak{g}) = 0$. Тогда в Bss все дифференциалы d_r при $r \geqslant n$ нулевые, в частности, $E_n^{*,*} = E_\infty^{*,*}$.*

Введем фильтрацию в $H^*(\mathfrak{g})$, используя дифференциалы Bss. В нулевом столбце $E_1^{0,-q}$ расположены группы $H^q(\mathfrak{g})$, при этом по соображениям размерности все дифференциалы на группах

$E_r^{0,-q}$ тривиальны. Поскольку Bss сходится к тривиальному модулю $E_\infty^{0,-q}=0$, $q\geqslant 1$, нулевой столбец Bss должен исчерпываться образами дифференциалов d_r, $r\geqslant 1$, в следующем смысле: на $H^q(\mathfrak{g})=E_1^{0,-q}$ имеется возрастающая фильтрация $\Phi^r=\Phi^r H^q(\mathfrak{g})$ такая, что

(i) $\Phi^0=\Bbbk=E_\infty^{0,0}$,

(ii) $E_r^{0,-q}=H^q(\mathfrak{g})/\Phi^{r-1}$,

(iii) $\Phi^r/\Phi^{r-1}\subset H^q(\mathfrak{g})/\Phi^{r-1}$ совпадает с образом дифференциала $d_r: E_r^{r,q-r+1}\to E_r^{0,-q}$,

(iv) по теореме 3.1 фильтрация Φ^r стабилизируется: $\Phi^n=\Phi^{n+1}=\ldots$.

Фильтрация Φ^r функториальна в следующем смысле.

Теорема 3.2. *Пусть $f:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}'$ — гомоморфизм алгебр Ли и определены индуцированные гомоморфизмы $Uf:U\mathfrak{g}\to U'g'$ и $(Uf)^*:(U\mathfrak{g}')^*\to(U\mathfrak{g})^*$ алгебр Хопфа. Тогда $(Uf)^*$ согласован с фильтрациями* (3.1) *в $(U\mathfrak{g}')^*$ и в $(U\mathfrak{g})^*$, т.е. $(Uf)^*(N_p(\mathfrak{g}'))\subset N_p\mathfrak{g}$, а следовательно, определен гомоморфизм $f^*: E_*^{*,*}(\mathfrak{g}')\to E_*^{*,*}(\mathfrak{g})$ соответствующих спектральных последовательностей. Таким образом, $f^*(\Phi^r H^q(\mathfrak{g}'))\subset\Phi^r H^q(\mathfrak{g}')$.*

Доказательство для общего случая Bss для алгебр Хопфа можно найти в [**12**].

Определение 3.1. *Bss–глубиной* конечномерной нильпотентной алгебры Ли называется наибольшее r, для которого дифференциал d_r в ее Bss нетривиален.

Из теоремы 3.1 следует, что если $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра k-й ступени нильпотентности (т.е. $\gamma_k(\mathfrak{g})\neq 0$ и $\gamma_{k+1}(\mathfrak{g})=0$), то Bss–глубина не превосходит k.

4. Когомологии многообразий Гейзенберга

В литературе имеется много работ о когомологиях нильмногообразий Гейзенберга M_H^{2n+1} (см. [**1**]–[**7**], [**15, 16**] и списки цитирований в них). В этом параграфе мы собрали и систематизировали необходимую нам информацию о когомологиях многообразий M_H^{2n+1}.

4.1. Числа Бетти. По теореме Номидзу кольцо вещественных когомологий нильмногообразия M_H^{2n+1} изоморфно алгебре когомологий $H^*(L_H^{2n+1})$ соответствующей алгебры Ли L_H^{2n+1}.

Обозначим через $\omega_k\in(L_H^{2n+1})^*$ элемент, двойственный к $e_k\in L_H^{2n+1}$. Тогда дифференциал в комплексе Шевалле — Эйленберга $C^*_{CE}(L_H^{2n+1})=\Lambda(\omega_0,\omega_{\pm1},\ldots,\omega_{\pm n})$ задается формулами

$$d\omega_{\pm1}=\ldots=d\omega_{\pm n}=0,\quad d\omega_0=\sum_{k=1}^n\omega_{-k}\wedge\omega_k.$$

Многообразия M_H^{2n+1} компактны и ориентируемы, а значит для них имеет место двойственность Пуанкаре. В когомологиях алгебры L_H^{2n+1} двойственность Пуанкаре задается спариванием

$$\langle[\theta],[\eta]\rangle=B(\theta,\eta),\quad \theta\wedge\eta=B(\theta,\eta)\,\omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_{-n}\wedge\omega_n. \tag{4.1}$$

Многообразия M_H^{2n+1} несут естественную контактную структуру, заданную контактной формой ω_0: форма $\omega_0\wedge(d\omega_0)^n$ задает образующую в $H^{2n+1}(M_H^{2n+1})$.

В явном виде числа Бетти $b_p=\dim H^p(L_H^{2n+1})$ были найдены в [**1**]. Достаточно вычислить числа Бетти $b_p=\dim H^p(L_H^{2n+1})$ для $p=0,\ldots,n$, так как в силу двойственности Пуанкаре $b_p=b_{2n+1-p}$.

Теорема 4.1 (см. [**1**]). (i) *$b_p=\binom{2n}{p}-\binom{2n}{p-2}$ для всех $p\leqslant n$.*

(ii) *Пространство точных p–форм порождено формами вида*

$$\omega_{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_p},\quad i_1<\ldots<i_p,\quad i_j\neq 0\quad\forall\, j.$$

(iii) *Пространство замкнутых p–форм порождено формами вида*

$$d\omega_0\wedge\omega_{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_{p-2}},\quad i_1<\ldots<i_{p-2},\quad i_j\neq 0\quad\forall\, j.$$

Доказательство использует индукцию по n и следующую конструкцию, связывающую группы $H^*(L_H^{2n-1})$ и $H^*(L_H^{2n+1})$. Обозначим временно через L алгебру Ли, полученную из L_H^{2n+1} добавлением соотношения $e_n = 0$. Легко видеть, что $L = L_H^{2n-1} \oplus \mathbb{R}e_{-n}$, где $\mathbb{R}e_{-n}$ — одномерная алгебра Ли с образующей e_{-n}. Когомологии алгебры Ли L выражаются через $H^*(L_H^{2n-1})$ по формуле Кюннета. Связь групп $H^*(L)$ и $H^*(L_H^{2n+1})$ устанавливается с помощью длинной точной последовательности Диксмье (частный случай спектральной последовательности Хохшильда — Серра) для идеала L коразмерности 1 алгебры Ли L_H^{2n+1}:

$$\ldots \to H^{k-1}(L) \to H^k(L_H^{2n+1}) \to H^k(L) \to H^k(L) \to H^{k+1}(L_H^{2n+1}) \to \ldots$$

(подробности построения этой точной последовательности см. в [**17**]).

Задолго до [**1**] была опубликована работа [**18**], в которой были вычислены когомологии нильрадикалов алгебр Ли. Этот подход был использован в недавней работе [**2**], где алгебра Ли L_H^{2n+1} была реализована как нильрадикал некоторой параболической подалгебры в $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$.

Когомологии алгебры Ли L_H^{2n+1}, заданной над полем $\Bbbk$ конечной характеристики, были вычислены в [**3**] и [**4**]. Приведем соответствующие результаты.

Теорема 4.2. (a) *Для* $\operatorname{char} \Bbbk = 2$ *полином Пуанкаре когомологий* $H^*(L_H^{2n+1})$ *равен* (см. [**3**])

$$\sum_{j=0} H^j(L_H^{2n+1})\, t^j = \frac{(1+t^3)(1+t)^{2n} + (t+t^2)(2t)^n}{1+t^2}.$$

(b) *Для* $\operatorname{char} \Bbbk \geqslant 2$ *и* $j \leqslant n$ *имеет место равенство* (см. [**4**])

$$\dim H^m(L_H^{2n+1}) = \binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-2} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2p} \rfloor} \binom{2n+1}{m-2jp+1} - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2p} \rfloor} \binom{2n+1}{m-2jp-1}.$$

Замечание 4.1. Пункт (b) включает (a) как частный случай. Кроме того, теорема 4.1 вытекает из теоремы 4.2, (b) — для этого нужно рассмотреть достаточно большое p.

В [**15**] была разработана оригинальная техника вычисления когомологий расширений групп, которая, как указано в [**15**], позволяет явным образом выяснить, как именно последовательные факторы фильтрации заданной спектральной последовательностью расширения определяют группы (ко)гомологий. Эта техника позволила в [**15**] для групп Γ_H^{2n+1} выписать в явном виде коциклы, представляющие классы когомологий и тем самым получить еще одно доказательство теоремы 4.1.

Задача вычисления целочисленных когомологий решетки Γ_H^{2n+1}, т.е. целочисленных когомологий пространства $M_H^{2n+1} = \mathcal{H}^{2n+1}/\Gamma_H^{2n+1}$ была решена в [**7**]. В этой работе показано, что в целочисленных когомологиях M_H^{2n+1} имеется большая подгруппа элементов конечного порядка. Отметим, что в [**7**] вычислены только группы $H^*(\Gamma_H^{2n+1},\mathbb{Z})$, а мультипликативная структура не обсуждается.

Как отмечено выше, группа $\mathcal{H}^{2n+1}$ содержит решетки, не эквивалентные решетке Γ_H^{2n+1}, но тем не менее согласно теореме Номидзу вещественные когомологии соответствующих нильмногообразий изоморфны когомологиям многообразия M_H^{2n+1}. Подчеркнем, что на целочисленные когомологии теорема Номидзу не распространяется.

Теорема 4.3 ([**7**]). *Группа* $H^k(\Gamma_H^{2n+1},\mathbb{Z})$ *изоморфна*

- $\mathbb{Z}^{\binom{2n}{k}-\binom{2n}{k-2}} \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{[k/2]} (\mathbb{Z}/j)^{\binom{2n}{k-2j}-\binom{2n}{k-2j-2}} \right)$ *при* $0 \leqslant k \leqslant n$,
- $\mathbb{Z}^{\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-2}} \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{[(n+1)/2]} (\mathbb{Z}/j)^{\binom{2n}{n+1-2j}-\binom{2n}{n+1-2j}} \right)$ *при* $k = n+1$,
- $\mathbb{Z}^{\binom{2n}{k-1}-\binom{2n}{k+1}} \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{[(2n-k+2)/2]} (\mathbb{Z}/j)^{\binom{2n}{k+2j-2}-\binom{2n}{k+2j}} \right)$ *при* $n+2 \leqslant k \leqslant 2n+1$,
- 0 *при* $k \geqslant 2n+2$.

4.2. Кольца когомологий. Мультипликативная структура когомологий $H^*(M_H^{2n+1}, R)$, где R — коммутативное кольцо с единицей, достаточно сложна даже в случае вещественных коэффициентов $R = \mathbb{R}$. Длинная точная последовательность Гизина

$$\ldots \to H^{k-2}(T^{2n}, R) \overset{\Omega\wedge -}{\to} H^k(T^{2n}, R) \overset{\pi^*}{\to} H^k(M_H^{2n+1}, R)$$

$$\overset{\pi_*}{\to} H^{k-1}(T^{2n}, R) \overset{\Omega\wedge -}{\to} H^{k+1}(T^{2n}, R) \to \ldots \tag{4.2}$$

расслоения $S^1 \to M_H^{2n+1} \to T^{2n}$ распадается в короткие точные последовательности

$$0 \to \operatorname{coker} \Omega \overset{\pi^*}{\to} H^k(M_H^{2n+1}, R) \overset{\pi_*}{\to} \ker \Omega \to 0. \tag{4.3}$$

Отметим важное обстоятельство: рассматриваемые группы когомологий несут естественную структуру модулей над алгеброй $H^*(T^{2n}, R)$, причем точные последовательности (4.2) и (4.3) являются точными последовательностями $H^*(T^{2n}, R)$–модулей — это дает частичную информацию о структуре умножения в кольце $H^*(M^{2n+1}, R)$. Имеет место следующий важный факт.

Теорема 4.4 ([**16**]). *Пусть $S^m \to X \overset{\pi}{\to} T$ — ориентируемое сферическое расслоение над тором, и пусть $\Omega \in H^{m+1}(T, \mathbb{Z})$ — его характеристический класс. Тогда для любого k точная последовательность*

$$0 \to \operatorname{coker} \Omega \overset{\pi^*}{\to} H^k(X, \mathbb{Z}) \overset{\pi_*}{\to} \ker \Omega \to 0$$

расщепляется как последовательность $H^*(T, \mathbb{Z})$–модулей.

Для целочисленных коэффициентов это утверждение достаточно нетривиально, оно требует анализа когомологического препятствия к расщеплению короткой точной последовательности и доказательства того, что это препятствие равно 0.

С другой стороны, для вещественных коэффициентов это утверждение легко выводится с использованием представления алгебры $\mathfrak{sl}_2$ в когомологиях тора T^{2n}, заданного симплектической структурой $d\omega_0 = \Omega = \sum_{k=1}^{n} \omega_{-k} \wedge \omega_k$ (подробности см. в п. 4.2.1 ниже).

Сопоставление матрице (2.1) матрицы того же вида, но с $z = 0$ задает отображение $\pi : M_H^{2n+1} \to T^{2n}$, которое является локально тривиальным расслоением со слоем S^1 (см. п. 2.2.1). Используя теорему Номидзу, получаем, что это отображение индуцирует морфизм комплексов Шевалле — Эйленберга

$$\pi^* : (\Lambda(\omega_{\pm k} \,:\, 1 \leqslant k \leqslant n), d_{CE} = 0) \to (\Lambda(\omega_0, \omega_{\pm k} \,:\, 1 \leqslant k \leqslant n), d_{CE}),$$

причем значения d_{CE} на всех образующих нулевые, исключая $d_{CE}(\omega_0) = \sum_{k=1}^{n} \omega_{-k} \wedge \omega_k$.

Второй член когомологической спектральной последовательности расслоения $\pi : M_H^{2n+1} \to T^{2n}$ с коэффициентами в кольце R имеет очень простой вид

$$E_2^{pq} = H^p(T^{2n}, H^q(S^1, R)).$$

Для $R = \mathbb{R}$ эта спектральная последовательность совпадает со спектральной последовательностью Хохшильда — Серра одномерного идеала, порожденного элементом e_0, в алгебре Ли L_H^{2n+1}. Подход к вычислению $H^*(M_H^{2n+1}, R)$, основанный на расслоении $\pi : M_H^{2n+1} \to T^{2n}$, удобнее подхода, основанного на теореме Номидзу, тем, что позволяет рассматривать произвольные коэффициенты.

По соображениям размерности и мультипликативности вся структура спектральной последовательности определяется единственным дифференциалом

$$d_2 : H^1(S^1, R) = E_2^{0,1} \to E_2^{0,2} = H^2(T^{2n}, R),$$

его значение на образующей $\omega_0 \in H^1(S^1, R)$ обозначим Ω. Легко видеть, что

$$\Omega = d_{CE}\omega_0 = \sum_{k=1}^{n} \omega_{-k} \wedge \omega_k, \tag{4.4}$$

где мы одним и тем же символом обозначаем класс когомологий и представляющую его коцепь в случаях, когда это не вызовет путаницы. Теперь воспользуемся отождествлением

$$\alpha : E_2^{p,0} \to E_2^{p,1}, \quad \alpha : \theta \mapsto \omega_0 \wedge \theta.$$

Композиция $d_2 \circ \alpha^{-1} : H^p(T^{2n}, R) \to H^{p+2}(T^{2n}, R)$ задается простой формулой $\theta \mapsto \Omega \wedge \theta$. Значит $E_\infty^{*,0} = E_3^{*,0}$ является фактором $H^*(T^{2n})$ по идеалу, порожденному Ω, а $E_\infty^{*,1} = E_3^{*,1}$ является аннулятором Ω, т.е. состоит из таких классов $\theta \in H^*(T^{2n})$, для которых $\Omega \wedge \theta = 0$. Для простоты будем обозначать операцию умножения на Ω этим же символом. Тогда задача вычисления спектральной последовательности сводится к вычислению $\ker \Omega = \mathrm{Ann}\, \Omega$ и $\mathrm{coker}\, \Omega$.

В случае $R = \mathbb{R}$ имеется красивая теория, которая позволяет описать группы $\ker \Omega$ и $\mathrm{coker}\, \Omega$ с точки зрения теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ на внешней алгебре симплектического пространства. Этот подход был реализован в [**5, 6**]. Наше изложение геометрии внешней алгебры симплектического векторного пространства следует первому разделу обзора [**19**] (см. также книгу [**20**]; там же читатель найдет доказательства, которые мы не приводим). Разумеется, речь идет о классических результатах теории комплексных многообразий (см. [**21**]). Затем мы вернемся к обсуждению кольца когомологий де Рама $H^*(M_H^{2n+1})$.

4.2.1. *Представление $\mathfrak{sl}_2$ на $\Lambda(\omega_{\pm 1}, \ldots, \omega_{\pm n})$.* Пусть V — вещественная $2n$–мерная коммутативная алгебра Ли. Рассмотрим в V базис вида $e_{\pm 1}, \ldots, e_{\pm n}$. Элементы двойственного базиса пространства V^* обозначим через $\omega_{\pm 1}, \ldots, \omega_{\pm n}$. Дифференциал Шевалле — Эйленберга на внешней алгебре ΛV^* в этом случае нулевой, поэтому алгебра ΛV^* изоморфна алгебре когомологий $H^*(T^{2n})$ тора T^{2n}. Форма $\Omega = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_{-k} \wedge \omega_k$ задает на V симплектическую структуру.

Определим оператор $E^- : \Lambda^k V^* \to \Lambda^{k+2} V^*$ по формуле $E^-(\theta) = \Omega \wedge \theta$. С помощью бивектора $X_\Omega = \sum\limits_{k=1}^{n} e_{-k} \wedge e_k \in \Lambda^2 V$ зададим оператор $E^+ : \Lambda^k V^* \to \Lambda^{k-2} V^*$ по формуле $E^+(\theta) = X_\Omega \lrcorner \theta$, где $X_\Omega \lrcorner \theta$ — внутреннее произведение формы θ с бивектором X_Ω. Наконец, рассмотрим оператор $H = [E^+, E^-]$.

Утверждение 4.1. *Имеют место соотношения*
$$[H, E^+] = 2E^+, \quad [H, E^-] = -2E^-. \tag{4.5}$$

Соотношения (4.5) вместе с определением $H = [E^+, E^-]$ показывают, что выбор симплектической структуры Ω на V задает на внешней алгебре ΛV^* представление алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Напомним, что в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$ имеется стандартный базис H, E^+, E^- с коммутационными соотношениями $[E^+, E^-] = H$, $[H, E^+] = 2E^+$, $[H, E^-] = -2E^-$.

Все конечномерные $\mathfrak{sl}_2$–представления разлагаются в прямую сумму неприводимых. Каждое конечномерное неприводимое $\mathfrak{sl}_2$–представление определяется своей размерностью. Таким образом, имеется по одному такому представлению в каждой размерности. Эти представления легко описать явно (см., например, [**22**], где нормировка базисных векторов отличается от нашей). Пусть W_m — векторное пространство с базисом $v_0, v_1, \ldots, v_m$. Положим
$$\begin{aligned} &H(v_k) = (m - 2k) v_k, \\ &E^-(v_k) = v_{k+1}, \quad k < m, \quad E^-(v_m) = 0, \\ &E^+(v_k) = k(m - k + 1) v_{k-1}, \quad k > 0, \quad E^+(v_0) = 0. \end{aligned}$$
Легко проверяется, что такие формулы задают $(m+1)$–мерное неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в пространстве W_m.

Итак, внешняя алгебра ΛV^* разлагается в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$–представлений. Описание пространства ΛV^* как прямой суммы неприводимых $\mathfrak{sl}_2$–представлений опирается на следующие факты о действии операторов $E^\pm$ и H в ΛV^*.

Утверждение 4.2. *Пусть $\theta \in \Lambda^s V^*$. Тогда $H\theta = (n - s)\theta$.*

Утверждение 4.3. *Отображение $E^+ : \Lambda^s(V^*) \to \Lambda^{s-2}(V^*)$ является мономорфизмом при $s \geqslant n + 1$. Отображение $E^- : \Lambda^s(V^*) \to \Lambda^{s+2}(V^*)$ является мономорфизмом при $s \leqslant n - 1$.*

Внешняя форма $\theta \in \Lambda^s V^*$, где $s \leqslant n$, называется *примитивной*, если $E^+(\theta) = 0$. Из этого определения легко выводится следующее утверждение о разложении Ходжа (также его называют разложением Ходжа — Лепажа).

Теорема 4.5. *Для любой формы $\theta \in \Lambda^s(V^*)$ имеет место разложение*

$$\theta = \theta_0 + E^-(\theta_1) + (E^-)^2(\theta_2) + \ldots = \theta_0 + \Omega \wedge \theta_1 + \Omega \wedge \Omega \wedge \theta_2 + \ldots,$$

где $\theta_j \in \Lambda^{s-2j}(V^*)$ — однозначно определенные примитивные формы.

Утверждение 4.4. *Отображения $(E^+)^s : \Lambda^{n+s}V^* \to \Lambda^{n-s}V^*$ и $(E^-)^s : \Lambda^{n-s}V^* \to \Lambda^{n+s}V^*$ являются изоморфизмами, причем для любой примитивной формы $\theta \in \Lambda^{n-s}$ выполнено равенство $(E^+)^s \circ (E^-)^s(\theta) = (s!)^2\theta$.*

Вернемся к обсуждению спектральной последовательности расслоения $\pi : M_H^{2n+1} \to T^{2n}$. Второй член этой спектральной последовательности (с коэффициентами в $\mathbb{R}$) имеет вид

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
1 & \omega_0 H^0(T^{2n}) \arrow[drr] & \omega_0 H^1(T^{2n}) & \omega_2 H^2(T^{2n}) & \dots & \omega_0 H^{2n}(T^{2n}) \\
0 & H^0(T^{2n}) & H^1(T^{2n}) & H^2(T^{2n}) & \dots & H^{2n}(T^{2n}) \\
 & 0 & 1 & 2 & \dots & 2n
\end{tikzcd}$$

Дифференциал d_2, показанный на диаграмме стрелкой, действует по формуле

$$d_2(\omega_0) = \sum_{k=0}^{m} \omega_{-k} \wedge \omega_k.$$

На других группах $E_2^{*,1}$ дифференциал d_2 определен по мультипликативности. По утверждению 4.3 дифференциал $d_2 : E_2^{1,s} \to E_2^{0,s+2}$ является мономорфизмом при $s \leqslant n-1$, значит $E_3^{1,s} = 0$ при $s \leqslant n-1$ и $E_3^{0,s} = (\operatorname{coker} E^-)^s$ при $s \leqslant n$. По утверждению 4.4 дифференциал $d_2 : E_2^{1,s} \to E_2^{0,s+2}$ является эпиморфизмом при $s \geqslant n-1$. Значит $E_3^{0,s} = 0$ при $s \geqslant n+1$ и $E_3^{1,s} = (\ker E^-)^s$ при $s \geqslant n$. Таким образом, $E_3^{*,*} = E_\infty^{*,*}$ имеет следующую структуру:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
1 & 0 & \dots & 0 & E_\infty^{n,1} & E_\infty^{n+1,0} & \dots & E_\infty^{2n,1} \\
0 & E_\infty^{0,0} & \dots & E_\infty^{n-1,0} & E_\infty^{n,0} & 0 & \dots & 0 \\
\hline
 & 0 & \dots & n-1 & n & n+1 & \dots & 2n
\end{array}$$

Итак, мы доказали аналог теоремы 4.4 для когомологий с вещественными коэффициентами. Сформулируем этот результат.

Теорема 4.6. (a) $A = \bigoplus\limits_{j=0}^{n} H^j(M_H^{2n+1})$ *является подкольцом в $H^*(M_H^{2n+1})$, изоморфным фактор-кольцу внешней алгебры $\Lambda^*(\omega_{\pm 1}, \ldots, \omega_{\pm n}) = H^*(T^{2n})$ по идеалу, порожденному Ω. Иными словами, $A = \operatorname{coker} \Omega$ как кольцо со структурой $H^*(T^{2n})$–модуля.*

(b) $B = \bigoplus\limits_{j=n+1}^{2n+1} H^j(M_H^{2n+1})$ *состоит в точности из тех классов $\omega_0 \Lambda^*(\omega_{\pm 1}, \ldots, \omega_{\pm n})$, которые лежат в ядре умножения на Ω. Иными словами, $B = \operatorname{coker} \Omega$ как группа со структурой $H^*(T^{2n})$–модуля. Произведение любых двух элементов из B равно 0 по соображениям размерности.*

(c) *Произведение ab, где $a \in A$ и $b \in B$, принадлежит B и задает представление кольца A на модуле B. Таким образом, $H^*(M_H^{2n+1})$ получается расширением кольца A по действию A на B.*

(d) *Расщепление* $H^*(M_H^{2n+1}) = A \oplus B$ *является расщеплением в прямую сумму* $H^*(T^{2n})$*–модулей.*

Следствие 4.1. (i) *Как* $H^*(T^{2n})$*–модуль когомологии,* $H^*(M_H^{2n+1})$ *порождены* $1 \in H^0(M_H^{2n+1})$ *и образующими группы* $H^{n+1}(M_H^{2n+1})$.

(ii) *Как кольцо когомологии,* $H^*(M_H^{2n+1})$ *порождены образующими* $\omega_{\pm 1}, \ldots, \omega_{\pm n}$ *группы* $H^1(M_H^{2n+1})$ *и образующими группы* $H^{n+1}(M_H^{2n+1})$.

5. Когомологические характеристики нильмногообразий

Хорошо известны следующие характеристики.

Категория Люстерника — Шнирельмана $\operatorname{cat} X$ топологического пространства X — это наименьшее целое n, для которого существует покрытие пространства X открытыми множествами $U_0, \ldots, U_n$, стягиваемыми в X.

Когомологическая длина (над $\mathbb{Q}$) пространства X — это наибольшее число k такое, что существуют классы когомологий $x_i \in H^{n_i}(X;\mathbb{Q})$, $n_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, для которых произведение $x_1 x_2 \ldots x_k$ отлично от 0; эта характеристика обозначается $\operatorname{cupp}_{\mathbb{Q}} X$.

Известно, что $\operatorname{cat} M \geqslant \operatorname{cupp}_{\mathbb{Q}} M$ для любого ориентированного многообразия M (см., например, [**23**]). Отметим, что если M — ориентируемое многообразие размерности n, то $\operatorname{cat} M \leqslant n$.

В знаменитой короткой работе [**24**] было сформулировано утверждение, что категория Люстерника — Шнирельмана произвольного нильмногообразия равна его размерности. Полное доказательство было опубликовано в [**25**].

Утверждение 5.1. *Для многообразия* M_H^{2n+1}

(a) Bss*–глубина равна* 2*,*

(b) *категория Люстерника — Шнирельмана равна* $2n+1$*,*

(c) *когомологическая длина равна* $n+1$.

Утверждение (a) следует из того, что $\gamma_2(L_H^{2n+1}) = 0$, и нетривиальности второго дифференциала в Bss для L_H^{2n+1} (см. [**12**]). Утверждение (b) доказано в [**25**].

Для доказательства (c) заметим, что ненулевое произведение $n+1$ класса существует. Можно рассмотреть класс когомологий $\omega_0 \omega_1 \ldots \omega_n \in H^{n+1}(M_H^{2n+1})$ и классы когомологий $\omega_{-1}, \ldots, \omega_{-n} \in H^1(M_H^{2n+1})$. Произведение этих классов с точностью до знака совпадает с образующей группы $H^{2n+1}(M_H^{2n+1})$. С другой стороны, произведение любых $n+2$ классов равно 0. По соображениям размерности среди перемножаемых классов имеется самое большее один класс размерности не меньше $n+1$. Тогда оставшиеся $n+1$ сомножителей лежат в A и их произведение равно 0, так как A не содержит элементов степени выше n.

6. Расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга

Сделаем небольшое отступление. Предположим, что некоторый коцепной комплекс $(C^\bullet, d)$ расщепляется в прямую сумму подкомплексов $C^\bullet = \bigoplus\limits_\alpha C^\bullet_\alpha$. Тогда наряду с эйлеровой характеристикой

$$\chi = \sum_i (-1)^i \dim C^i = \sum_i (-1)^i \dim H^i(C^\bullet, d)$$

можно рассматривать набор эйлеровых характеристик

$$\chi_\alpha = \sum_i (-1)^i \dim C^i_\alpha = \sum_i (-1)^i \dim H^i(C^\bullet_\alpha, d).$$

Ясно, что $\chi = \sum\limits_\alpha \chi_\alpha$.

Особенно интересна ситуация, когда комплекс $(C^\bullet, d)$ является дифференциальной градуированной алгеброй, снабженной дополнительной градуировкой, инвариантной относительно d:

$$C^i = \bigoplus_j C^{i,j}, \quad d\colon C^{i,j} \to C^{i+1,j}, \quad C^{i_1,j_1} \cdot C^{i_2,j_2} \subset C^{i_1+i_2, j_1+j_2}.$$

Удобно ввести производящие функции Пуанкаре

$$P_C(t,q) = \sum_{i,j} t^i q^j \dim C^{i,j}, \quad P_{H(C)}(t,q) = \sum_{i,j} t^i q^j \dim H^{i,j}(C^\bullet). \tag{6.1}$$

Обычные функции Пуанкаре, т.е. не учитывающие вторую градуировку, равны $P_C(t,1)$ и $P_{H(C)}(t,1)$ соответственно.

Эйлеровы характеристики подкомплексов вида $C^{*,j}$ являются коэффициентами при q^j в полиноме $P_C(-1,q) = P_{H(C)}(-1,q)$. Этот полином называется *полиномиальной* (см. [**26**]) или *градуированной* (см. [**27**], где в таком виде был представлен полином Джонса) *эйлеровой характеристикой* комплекса $(C^\bullet, d)$.

Комплекс Шевалле — Эйленберга алгебры Ли L_H^{2n+1} допускает по меньшей мере три различные биградуировки, каждая из которых несет дополнительную информацию о кольце когомологий.

6.1. Алгебра Гейзенберга — Ли L_H^{2n+1} с соотношениями $[\widehat{e}_i, \widehat{e}_{2n+1-i}] = \widehat{e}_{2n+1}$**.** Для алгебры Гейзенберга — Ли L_H^{2n+1} известна индексация образующих, отличная от той, которую мы ввели в п. 2.1. Переобозначим элементы $e_1, \dots, e_n$ как $\widehat{e}_{2n}, \dots, \widehat{e}_{n+1}$, элементы $e_{-n}, \dots, e_{-1}$ — как $\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_n$ и элемент e_0 — как $\widehat{e}_{2n+1}$. Тогда коммутационные соотношения $[e_{-n}, e_n] = e_0$ примут вид $[\widehat{e}_i, \widehat{e}_{2n+1-i}] = \widehat{e}_{2n+1}$.

Обратим внимание, что при такой индексации вложения $i_n : \mathcal{H}^{2n+1} \xrightarrow{i_k} \mathcal{H}^{2n+3}$ не удовлетворяют определению 2.2, так как образующие $\widehat{e}_k$ алгебры L_H^{2n+1} переходят в образующие алгебры L_H^{2n+3} с другими индексами.

Для элементов $\widehat{e}_j$, $j = 1, \dots, 2n+1$, обозначим двойственные к ним элементы через $\widehat{\omega}_j$. Припишем элементу $\widehat{\omega}_j$ биградуировку $(1, j)$. В этом случае дифференциал сохраняет вторую градуировку

$$d\widehat{\omega}_{2n+1} = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\omega}_j \wedge \widehat{\omega}_{2n+1-j}.$$

При этой биградуировке образующих алгебры Гейзенберга — Ли L_H^{2n+1} соответствующий полином Пуанкаре алгебры $\Lambda(\widehat{e}_1, \dots, \widehat{e}_{2n+1})$ принимает вид

$$\widetilde{P}_n(t,q) = \prod_{j=1}^{2n+1} (1 + tq^j).$$

Коэффициенты полинома Пуанкаре $\widetilde{P}_n(t,q)$ имеют интересную комбинаторную интерпретацию. Положим

$$\widetilde{P}_n(t,q) = \sum a(i,j,n) t^i q^j.$$

Тогда коэффициент $a(i,j,n)$ равен числу способов разложения числа j в сумму i различных слагаемых, каждое из которых не превосходит $2n+1$.

Напомним q–биномиальную формулу Коши

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j t) = \sum_{k=0}^{n} q^{k(k-1)/2} \binom{n}{k}_q t^k,$$

где $\binom{n}{k}_q$ — q–биномиальный коэффициент

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(1-q^n)\dots(1-q^{n-k+1})}{(1-q)\dots(1-q^k)}.$$

Тогда

$$\widetilde{P}_n(t,q) = \sum_{k=0}^{2n+1} q^{k(k+1)/2} \binom{2n+1}{k}_q t^k. \tag{6.2}$$

Разложим q–биномиальный коэффициент по степеням q:

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{j=0}^{k(n-k)} p_i(n,k)q^i.$$

Последовательность коэффициентов симметрична: $p_i(n,k) = p_{(n-k)k-i}(n,k)$. В классической работе [**28**] методами теории инвариантов доказана унимодальность последовательности коэффициентов

$$p_0(n,k) \leqslant p_1(n,k) \leqslant \ldots \leqslant p_{a-1}(n,k) \leqslant p_a(n,k) \geqslant p_{a+1}(n,k) \geqslant \ldots \geqslant p_{k(n-k)}.$$

Удивительно, что комбинаторное доказательство этого факта было получено относительно недавно [**29**]. Наконец, в [**30**] была доказана строгая унимодальность этой последовательности коэффициентов.

Биградуированные числа Бетти когомологий алгебры L_H^{2n+1} легко описать.

Утверждение 6.1. (a) *Биградуированная двойственность Пуанкаре имеет вид*

$$\dim H^{i,j}(M_H^{2n+1}) = \dim H^{2n+1-i,n(n+1)/2-j}(M_H^{2n+1}). \tag{6.3}$$

(b) *Полином Пуанкаре* $\widetilde{P}_n^H(t,q) = \sum\limits_{i,j} \dim H^{i,j}(M_H^{2n+1})t^iq^j$ *когомологий* $H^{i,j}(M_H^{2n+1})$ *вплоть до степени* t^n *совпадает с* $\prod\limits_{j=1}^{2n}(1+tq^j)(1-t^2q^{2n+1})$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 4.1.

6.2. Алгебра Гейзенберга — Ли L_H^{2n+1} с соотношениями $[e_{-i}, e_i] = e_0$. Вернемся к алгебре L_H^{2n+1} с образующими $e_{-n},\ldots,e_n$ и соотношениями $[e_{-k}, e_k] = e_0$.

Присвоим элементу e_k биградуировку $(1,k)$, так что биградуировка элемента $\omega_{i_1}\wedge\ldots\wedge\omega_{i_k}$ равна $(k, \sum i_j)$. Легко видеть, что дифференциал d_{CE} сохраняет вторую градуировку (напомним, xnj $d_{CE}\omega_k = 0$ при $k\neq 0$ и $d_{CE}\omega_0 = \sum\limits_{k=1}^{n}\omega_{-k}\wedge\omega_k$). Для такой биградуировки полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга $\Lambda(\omega_{-n},\ldots,\omega_n)$ равен полиному Лорана $P_n(t,q) = \prod\limits_{j=-n}^{n}(1+tq^j)$.

Связь полиномов Пуанкаре комплекса $\Lambda(L_H^{2n+1})^*$, снабженного двумя разными биградуировками, описывается следующим утверждением. Напомним, что

$$\widetilde{P}_n(t,q) = \sum_{k=0}^{2n+1} q^{k(k+1)/2}\binom{2n+1}{k}_q t^k.$$

Утверждение 6.2. *Пусть* $P_n(t,q) = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} q^{k(k+1)/2}t^kh_k(n,q)$. *Тогда*

$$\binom{2n+1}{k}_q = h_k(n,q)\cdot q^{-(n+1)k}. \tag{6.4}$$

Иными словами, коэффициенты биградуированных полиномов Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга алгебры L_H^{2n+1} совпадают с точностью до сдвига размерности по q, причем для каждой степени t этот сдвиг свой.

Доказательство. Представим произведение

$$\prod_{k=1}^{2n+1}(1+q^kt) = \sum_{k=0}^{2n+1} q^{k(k+1)/2}t^k\binom{2n+1}{k}_q$$

в виде

$$\prod_{j=1}^{n}(1+q^jt)\cdot\prod_{k=1}^{n+1}(1+q^k(q^nt)).$$

Применив к каждому из этих двух произведений формулу q–бинома (6.2), получим

$$\left(\sum_{j=0}^{n} q^{j(j+1)/2} t^j \binom{n}{j}_q\right)\left(\sum_{i=0}^{n+1} q^{i(i+1)/2} q^{ni} t^i \binom{n+1}{i}_q\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} t^k \sum_{i+j=k} q^{j(j+1)/2} q^{i(i+1)/2} q^{ni} \binom{n}{j}_q \binom{n+1}{i}_q. \tag{6.5}$$

Представим полином Лорана

$$P_n(t,q) = \prod_{k=-n}^{n} (1+q^k t) = \sum_{k=0}^{2n+1} q^{k(k+1)/2} t^k h_k(n,q)$$

в виде

$$\prod_{i=0}^{n} (1+q^i t) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} (1+q^j(q^{-n}t)).$$

Применив к каждому из этих двух произведений формулу q–бинома, получим

$$\left(\sum_{i=0}^{n+1} q^{i(i-1)/2} t^i \binom{n+1}{i}_q\right)\left(\sum_{j=0}^{n} q^{j(j-1)/2} q^{-nj} t^j \binom{n}{j}_q\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{2n+1} t^k \sum_{i+j=k} q^{j(j-1)/2} q^{i(i-1)/2} q^{-nj} \binom{n}{j}_q \binom{n+1}{i}_q. \tag{6.6}$$

Легко проверить, что разность показателей, с которыми q входит формулы (6.5) и (6.6), равна $i+j+n(i+j) = (n+1)k$, откуда следует

$$h_k(n,q) = q^{(n+1)k} \binom{2n+1}{k}_q.$$

Утверждение доказано. □

Биградуированные числа Бетти для L_H^{2n+1} с выбранной в этом параграфе биградуировкой описываются следующим утверждением.

Утверждение 6.3. (a) *Биградуированная двойственность Пуанкаре имеет вид*

$$\dim H^{i,j}(M_H^{2n+1}) = \dim H^{2n+1-i,-j}(M_H^{2n+1}). \tag{6.7}$$

(b) *Полином Пуанкаре* $P_n^H = \sum_{i,j} \dim H^{i,j}(M_H^{2n+1}) t^i q^j$ *когомологий* $H^{i,j}(M_H^{2n+1})$ *вплоть до степени* t^n *совпадает с* $\Big(\prod_{j=1}^{n}(1+tq^j)(1+tq^{-j})\Big)(1-t^2)$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 4.1.

6.3. Расщепление инволюцией $I : e_k \mapsto -e_{-k}$**.** Рассмотрим на L_H^{2n+1} инволюцию $I : e_k \mapsto -e_{-k}$, она согласована с коммутатором: для всех $k > 0$ выполнено равенство $[I(e_{-k}), I(e_k)] = I(e_0)$.

Выберем в L_H^{2n+1} другой базис (заметим, что он неоднороден по отношению к каждой из двух биградуировок, рассмотренных выше):

$$f_k = e_{-k} + e_k, \quad g_k = e_k - e_{-k}, \quad h_0 = 2e_0.$$

Ненулевыми являются только коммутаторы $[f_k, g_k] = h_0$, $k = 1, \ldots, n$. Построенный базис расщепляет алгебру L_H^{2n+1} в собственные подпространства инволюции I:

$$I(f_k) = -f_k, \quad I(g_k) = g_k, \quad I(h_0) = -h_0.$$

Двойственные формы обозначим φ_k, η_k, θ_0 соответственно. В комплексе Шевалле — Эйленберга

$$\Lambda(L_H^{2n+1})^* = \Lambda(\varphi_k, \eta_k, \theta_0 \,:\, k = 1, \ldots, n)$$

дифференциал определяется соотношениями

$$d_{CE}\varphi_k = d_{CE}\eta_k = 0, \quad d_{CE}\theta_0 = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \wedge \eta_k.$$

Припишем образующим φ_k и θ_0 биградуировку $(1,1)$, а образующим η_k — биградуировку $(1,0)$, причем будем считать, что вторая градуировка принимает значение в группе $\mathbb{Z}/2$. Тогда соответствующий производящий полином для $\Lambda(\varphi_k, \eta_k, \theta_0 \,:\, k = 1,\dots,n)$ равен $\widehat{P}_n(t,\alpha) = (1+t)^n(1+t\alpha)^{n+1}$. При этом для подсчета размерностей однородных по второй градуировке компонент нужно считать, что $\alpha^2 = 1$. Но для удобства можно поступить иначе: можно считать α полиномиальной переменной, а сумму коэффициентов при четных и нечетных степенях α находить соответственно по формулам

$$\widehat{P}_n^{\mathrm{even}}(t) = \frac{1}{2}(\widehat{P}_n(t,1) + \widehat{P}_n(t,-1)), \quad \widehat{P}_n^{\mathrm{odd}}(t) = \frac{1}{2}(\widehat{P}_n(t,1) - \widehat{P}_n(t,-1)).$$

Утверждение 6.4. (a) *Биградуированная двойственность Пуанкаре имеет вид*

$$\dim H^{i,even}(M_H^{2n+1}) = \dim H^{2n+1-i,odd}(M_H^{2n+1}),$$
$$\dim H^{i,odd}(M_H^{2n+1}) = \dim H^{2n+1-i,even}(M_H^{2n+1}).$$

(b) *Полином Пуанкаре* $\widehat{P}_n^H(t,\alpha) = \sum\limits_{i,j} \dim H^{i,j}(M_H^{2n+1}) t^i \alpha^j$ *когомологий* $H^{i,j}(M_H^{2n+1})$ *вплоть до степени* t^n *совпадает с* $(1+t)^n(1+t\alpha)^n(1-t^2\alpha)$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 4.1.

Числа Бетти $b_k(M_H^{2n+1})$ разлагаются в сумму

$$b_k(M_H^{2n+1}) = b_k^{\mathrm{even}}(M_H^{2n+1}) + b_k^{\mathrm{odd}}(M_H^{2n+1}). \tag{6.8}$$

Производящие полиномы четных и нечетных частей, т.е.

$$P^{\mathrm{even}}_{H^*(M_H^{2n+1})}(t) = \sum_{j=0}^{2n+1} b_k^{\mathrm{even}}(M_H^{2n+1}) t^j,$$

$$P^{\mathrm{odd}}_{H^*(M_H^{2n+1})}(t) = \sum_{j=0}^{2n+1} b_k^{\mathrm{odd}}(M_H^{2n+1}) t^j$$

вплоть до степени n совпадают, соответственно, с

$$A^{\mathrm{even}} = \frac{1}{2}((1+t)^n(1+t)^n(1-t^2) + (1+t)^n(1-t)^n(1+t^2)), \tag{6.9}$$

$$A^{\mathrm{odd}} = \frac{1}{2}((1+t)^n(1+t)^n(1-t^2) - (1+t)^n(1-t)^n(1+t^2)). \tag{6.10}$$

Теорема 6.1. (a) *Для* $2k+1 \leqslant n$ *имеет место равенство* $b_{2k+1}^{\mathrm{even}} = b_{2k+1}^{\mathrm{odd}}$.

(b) *Для* $2k \geqslant n+1$ *имеет место равенство* $b_{2k}^{\mathrm{even}} = b_{2k}^{\mathrm{odd}}$.

Доказательство. Для доказательства (a) достаточно показать, что коэффициенты при нечетных степенях t в полиномах (6.9) и (6.10) равны. Для этого рассмотрим разность этих полиномов и убедимся, что она является четной функцией:

$$A^{\mathrm{even}} - A^{\mathrm{odd}} = (1+t)^n(1-t)^n(1+t^2) = (1-t^2)^n(1+t^2).$$

Пункт (b) следует из (a) по двойственности Пуанкаре из утверждения 6.4. $\square$

6.4. Замечания. Подсказанная соображениями симметрии инволюция I не согласована ни с одной из рассмотренных нами биградуировок. Отметим, что I не является единственно возможной инволюцией, расщепляющей комплекс Шевалле — Эйленберга. Например, интересна любая инволюция J, которая меняет знак e_0, а также в каждой паре $e_{\pm k}$ меняет знак в точности у одного из элементов. Дадим формальное определение. Зафиксируем набор знаков $\varepsilon = \{\varepsilon_j = \pm 1 : j = 1, \ldots, n\}$. Положим $J_\varepsilon(e_0) = -e_0$, $J_\varepsilon(e_k) = \varepsilon_k e_k$ для $k > 0$, $J_\varepsilon(e_k) = -\varepsilon_k e_k$ при $k < 0$.

Инволюция J_ε согласована с коммутатором, $[J_\varepsilon(e_{-k}), J_\varepsilon(e_k)] = J_\varepsilon(e_0)$, и поэтому определяет инволюцию на $\Lambda(\omega_{-n}, \ldots, \omega_n)$:

$$J_\varepsilon(\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_k}) = J_\varepsilon(\omega_{i_1}) \wedge \ldots \wedge J_\varepsilon(\omega_{i_k}).$$

Таким образом, мономы $\omega_{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{i_k}$ помимо второй градуировки $\sum i_j$ получают третью градуировку со значениями в $\mathbb{Z}/2$, которая равна $|\{j = 1, \ldots, k \mid \varepsilon_{i_j} \leqslant 0\}| \mod 2$.

Тем самым комплекс Шевалле — Эйленберга $\Lambda^*(\omega_{-n}, \ldots, \omega_n)$ расщепляется в прямую сумму подкомплексов

$$\Lambda^*(\omega_{-n}, \ldots, \omega_n) = \bigoplus_w (\Lambda^{*,w,\mathrm{even}}(L_H^{2n+1}) \oplus \Lambda^{*,w,odd}(L_H^{2n+1})),$$

а значит имеет место соответствующее расщепление когомологий, в частности, биградуированные числа Бетти $b_k(q)$ расщепляются в сумму $b_k(q) = b_k^{\mathrm{even}}(q) + b_k^{\mathrm{odd}}(q)$, причем при подстановке $q = 1$ получается формула (6.8).

Расщепление комплекса Шевалле — Эйленберга некоторыми из инволюций J_ε по всей видимости должно иметь интересную комбинаторную интерпретацию. Напомним, что полином Пуанкаре биградуированной внешней алгебры $\Lambda(\omega_{-n}, \ldots, \omega_n)$ равен

$$\sum_{i,j} t^i q^j \dim \Lambda^{i,j}(\omega_{-n}, \ldots, \omega_n) = \sum_{t=0}^{2n+1} t^k q^{k(k+1)/2} q^{-(n+1)k} \binom{n}{k}_q. \tag{6.11}$$

Расщепление внешней алгебры инволюцией J_ε приводит к расщеплению коэффициентов в формуле (6.11)

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}_q^{\mathrm{even}} + \binom{n}{k}_q^{\mathrm{odd}},$$

которое зависит от выбора J_ε. Тем самым возникает следующая задача: Найти инволюции J_ε, которые допускают интересные комбинаторные интерпретации слагаемых $\binom{n}{k}_q^{\mathrm{even}}$ и $\binom{n}{k}_q^{\mathrm{odd}}$, а также инволюции, которые имеют интерпретацию с точки зрения топологии.

Заканчивая этот параграф, отметим, что имеется еще одно семейство инволюций, не согласованных, вообще говоря, ни с одной из рассмотренных вторых градуировок на L_H^{2n+1}. Такая инволюция меняет знак у e_0, а в каждой паре e_{-k}, e_k либо меняет знак у одной из образующих, либо переводит одну в другую и наоборот (меняет знак у индекса образующих: $e_{\pm k} \to e_{\mp k}$ или $e_{\pm k} \to -e_{\mp k}$).

7. Спектральные последовательности расслоений многообразий Гейзенберга

В § 4 получены результаты о структуре кольца когомологий многообразий Гейзенберга M_H^{2n+1} как модулей над кольцом $H^*(T^{2n})$. В этом параграфе мы получим геометрическую интерпретацию этих результатов в терминах спектральных последовательностей расслоений (см. п. 2.2) и опишем отображения этих спектральных последовательностей.

В п. 7.1 мы используем тот факт, что вложение $M_H^{2n-1} \subset M_H^{2n+1}$ включается в коммутативную диаграмму расслоений со слоем S^1

$$\begin{array}{ccc} M_H^{2n-1} & \xrightarrow{i} & M_H^{2n+1} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi_{n-1,0}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_{n,0}} \\ T^{2n-2} & \xrightarrow{i} & T^{2n} \end{array}$$

В п. 7.2 для описания вложений $M_H^{2n-1} \subset M_H^{2n+1} \subset M_H^{2n+3}$ мы используем коммутативные диаграммы расслоений со слоем M_H^{2n-1}

$$\begin{tikzcd}
M_H^{2n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_2"] & M_H^{2n+3} \arrow[d, "\pi_1"] \\
T^2 \arrow[r, "i"] & T^4
\end{tikzcd}$$

7.1. Расслоение $M_H^{2n+1} \to T^2$ со слоем M_H^{2n-1}. Напомним, что это расслоение гомологически простое, поэтому его второй член описывается диаграммой

$$\begin{array}{c|ccc}
2n-1 & H^{2n-1} & \omega_{-n}H^{2n-1} \oplus \omega_n H^{2n-1} & \omega_{-n} \wedge \omega_n H^{2n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & H^n & \omega_{-n}H^{n} \oplus \omega_n H^{n} & \omega_{-n} \wedge \omega_n H^{n} \\
n-1 & H^{n-1} & \omega_{-n}H^{n-1} \oplus \omega_n H^{n-1} & \omega_{-n} \wedge \omega_n H^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & H^0 & \omega_{-n}H^{0} \oplus \omega_n H^{0} & \omega_{-n} \wedge \omega_n H^{0} \\
\hline
 & 0 & 1 & 2
\end{array}$$

Для краткости группа $H^s(M_H^{2n-1})$ обозначена через H^s. Одномерные образующие в когомологиях тора T^2 обозначены через $\omega_{\pm n}$. Как и выше, мы снова обозначаем одним символом как класс когомологий, так и представляющую его форму или коцикл.

Утверждение 7.1. *В спектральной последовательности расслоения $M_H^{2n+1} \to T^2$ все дифференциалы нулевые, исключая $d_2 : E_2^{0,n} \to E_2^{2,n-1}$ (обозначен на диаграмме стрелкой), который является изоморфизмом.*

Следствие 7.1. *Полиномы Пуанкаре $P_n(t)$ и $P_{n-1}(t)$ многообразий M_H^{2n+1} и M_H^{2n-1} связаны рекуррентным соотношением*

$$P_n(t) = (1+t)^2\, P_{n-1}(t) - \left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-3}\right)(1+t)\, t^n. \tag{7.1}$$

Доказательство. Положим $b_k = \dim\, H^k(L_H^{2n-1})$ и $\widehat{b}_k = \dim\, H^k(L_H^{2n+1})$. В силу двойственности Пуанкаре достаточно сравнить коэффициенты при t^k в (7.1) при $0 \leqslant k \leqslant n$.

Для $k=0$ или $k=1$ это совсем просто: $\widehat{b}_0 = b_0 = 1$, $\widehat{b}_1 = b_1 + 2 = 2n$.

Для $2 \leqslant k \leqslant n-1$ нужно проверить равенство $\widehat{b}_k = b_k + 2b_{k-1} + b_{k-2}$. Для этого запишем числа Бетти как разность двух биномиальных коэффициентов по теореме 4.1 и несколько раз воспользуемся формулой $\binom{N}{p} + \binom{N}{p-1} = \binom{N+1}{p}$. Следовательно, все дифференциалы d_2, расположенные ниже показанного на диаграмме, нулевые. По двойственности Пуанкаре нулевыми являются также дифференциалы d_2, расположенные выше показанного на диаграмме.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что $\widehat{b}_n$ не равно $b_n + 2b_{n-1} + b_{n-2} = 3b_{n-1} + b_{n-2}$. Это означает, что в рассматриваемой спектральной последовательности дифференциал $d_2 : E_2^{0,n+1} \to$

$E_2^{2,n}$ нетривиален. Покажем, что в действительности он является изоморфизмом. Для этого заметим, что $\widehat{b}_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$. Нетрудно проверить, что это равенство равносильно тождеству

$$\binom{2n}{n-2} + \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-2}{n-1} = \binom{2n}{n} + \binom{2n-1}{n-3} + \binom{2n-2}{n-3}.$$

Поэтому группы $E_3^{0,n+2}$ и $E_3^{2,n+1}$ нулевые, т.е. $d_2 : E_2^{0,n+2} \to E_2^{2,n+1}$ является изоморфизмом.

Полином Пуанкаре $\bigoplus\limits_{p+q=n} E_2^{p,q}$ равен $(1+t)^2\, P_{n-1}(t)$. При переходе к E_3 нужно учесть единственный нетривиальный дифференциал, т.е. от полученного выражения нужно отнять $b_{n-1}\,(1+t)\,t^n$. Поскольку $E_3 = E_\infty$, на этом доказательство формулы (7.1) закончено. $\square$

7.2. Расслоение $M_H^{2n+1} \to S^1$ со слоем $M_H^{2n-1} \times S^1$. Рассмотрим расслоение $M_H^{2n+1} \to S^1$ со слоем $M_H^{2n-1} \times S^1$, построенное в п. 2.2.2. Первый член этой спектральной последовательности имеет вид

$2n$	$C^0(S^1, (\omega_{-n} H^{2n-1})^{tw})$	$C^1(S^1, (\omega_{-n} H^{2n-1})^{tw})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	$C^0(S^1, (H^{n+1} \oplus \omega_{-n} H^{n})^{tw})$	$C^1(S^1, (H^{n+1} \oplus \omega_{-n} H^{n})^{tw})$
n	$C^0(S^1, (H^{n} \oplus \omega_{-n} H^{n-1})^{tw})$	$C^1(S^1, (H^{n} \oplus \omega_{-n} H^{n-1})^{tw})$
$n-1$	$C^0(S^1, (H^{n-1} \oplus \omega_{-n} H^{n-2})^{tw})$	$C^1(S^1, (H^{n-1} \oplus \omega_{-n} H^{n-2})^{tw})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$C^0(S^1, (H^0)^{tw})$	$C^1(S^1, (H^0)^{tw})$
	0	1

Здесь для краткости через H^s обозначена группа $H^s(M_H^{2n-1})$. Напомним, что ω_{-n} — одномерная образующая в когомологиях S^1 в слое, а ω_n — одномерная образующая в когомологиях базы S^1. Мы рассматриваем клеточное разбиение окружности, имеющее по одной клетке в размерностях 0 и 1. Через $(H^s \oplus \omega_{-n} H^{s-1})^{tw}$ обозначена локальная система коэффициентов на этом разбиении. На уровне коцепей, т.е. на уровне $\Lambda(M_H^{2n-1} \times S^1)$ она определяется тем, что при обходе по окружности в базе к элементам внешней алгебры от образующих $\omega_0, \omega_{\pm 1}, \ldots, \omega_{\pm n}$ применяется автоморфизм T, индуцированный соответствием $\omega_0 \mapsto \omega_0 + \omega_{-n}$. Автоморфизм в когомологиях, индуцированный T, будем обозначать тем же символом.

Из этого описания следует, что при $s \leqslant n-1$ автоморфизм T в когомологиях $H^s \oplus \omega_{-n} H^{s-1}$ тривиален, так как в этих размерностях представляющая класс когомологий дифференциальная форма не содержит ω_0, тем самым локальная система коэффициентов $(H^s \oplus \omega_{-n} H^{s-1})^{tw}$ является постоянной, а значит $E_2^{p,q} = H^p(S^1, H^q \oplus \omega_{-n} H^{q-1})$. Следовательно, $\dim E_2^{p,q} = \dim H^q + \dim H^{q-1}$. Это равенство соответствует формуле

$$\binom{2n}{q} - \binom{2n}{q-2} = \dim H^q(M^{2n+1}) = \dim E_2^{0,q} + \dim E_2^{1,q-1}.$$

При $s \geqslant n+1$ локальная система коэффициентов тоже тривиальна. Действительно, форма, представляющая класс из $H^s \oplus \omega_{-n} H^{s-1}$ при $s \geqslant n+1$, записывается в виде $\omega_0 A + \omega_{-n} \omega_0 B$. Под действием T она переходит в форму

$$(\omega_0 + \omega_{-n})A + \omega_{-n}(\omega_0 + \omega_{-n})B = (\omega_0 A + \omega_{-n}\omega_0 B) + \omega_{-n}A,$$

которая представляет тот же класс, так как в размерностях выше $n+1$ формы, не содержащие ω_0, являются кограницами.

При $s = n$ рассматриваемая локальная система коэффициентов нетривиальна. Действительно, автоморфизм T группы $H^n \oplus \omega_{-n}H^{n-1}$ отображает класс $\omega_0 A + \omega_{-n}B$ в $\omega A + \omega_{-n}(A+B)$. Коцепь из группы $C^0(S^1, (H^n \oplus \omega_{-n}H^{n-1})^{tw})$, принимающая на единственной 0–мерной клетке окружности значение x, под действием дифференциала d_1 переходит в коцепь, принимающую на одномерной клетке значение $x - T(x)$. Для $x = \omega_0 A + \omega_{-n}B$ это значение равно $\omega_{-n}A$. Следовательно, $E_2^{0,n} = \omega_{-n}H^{n-1}$ и $E_2^{1,n} = H^n$.

По соображениям размерности $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$, тем самым аддитивно рассматриваемая спектральная последовательность описана полностью.

7.3. Коммутативные диаграммы расслоений.

7.3.1. *Диаграмма для вложений $M_H^{2n-1} \subset M_H^{2n+1}$.* Рассмотрим отображение расслоений со слоем S^1. В следующей диаграмме горизонтальные отображения являются вложениями:

$$\begin{tikzcd}
M_H^{2n-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_{n-1,0}"] & M_H^{2n+1} \arrow[d, "\pi_{n,0}"] \\
T^{2n-2} \arrow[r, "i"] & T^{2n}
\end{tikzcd}$$

Имеет место отображение спектральных последовательностей $i^*: E_2^{*,*}(\pi_{n,0}) \to E_2^{*,*}(\pi_{n-1,0})$. В терминах соответствующих алгебр Ли это отображение можно понимать как отображение спектральных последовательностей одномерного идеала, порожденного элементом e_0, в алгебрах $L_H^{2n-1} \subset L_H^{2n+1}$. Гомоморфизм определяется соответствием, при котором $\omega_{\pm n} \mapsto 0$, а остальные образующие переходят в одноименные. На уровне членов E_2 оно индуцировано отображением баз

$$i^* : H^p(T^{2n}, H^q(M_H^{2n-1})) \to H^p(T^{2n-2}, H^q(M_H^{2n-1})).$$

Особенно интересно оно выглядит в третьем члене, который равен $E_\infty^{*,*}$. В третьем члене спектральной последовательности расслоения

$$M_H^{2n+1} \xrightarrow{\pi_{n,0}} T^{2n}$$

отличны от 0 только группы $E_3^{s,0}$ при $0 \leqslant s \leqslant n$ и группы $E_3^{s,1}$ при $n \leqslant s \leqslant 2n$, а в третьем члене спектральной последовательности расслоения

$$M_H^{2n-1} \xrightarrow{\pi_{n,0}} T^{2n-2}$$

отличны от 0 только группы $E_3^{s,0}$ при $0 \leqslant s \leqslant n-1$ и группы $E_3^{s,1}$ при $n-1 \leqslant s \leqslant 2n-2$. Отсюда немедленно следует, что гомоморфизм $i^* : H^k(M_H^{2n+2}) \to H^k(M_H^{2n-1})$ при $k = n$ является нулевым.

Это утверждение можно вывести также из теоремы 4.1 и двойственности Пуанкаре. Для $k = 2n$ и $k = 2n+1$ гомоморфизм i^* нулевой по тривиальным соображениям: в этих размерностях когомологии $H^k(M_H^{2n-1})$ нулевые.

7.3.2. *Диаграмма для вложений $M_H^{2n-1} \subset M_H^{2n+1} \subset M_H^{2n+3}$.* Тройку многообразий Гейзенберга $M_H^{2n-1} \subset M_H^{2n+1} \subset M_H^{2n+3}$ связывает коммутативная диаграмма расслоений

$$\begin{tikzcd}
M_H^{2n+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_2"] & M_H^{2n+3} \arrow[d, "\pi_1"] \\
T^2 \arrow[r, "i"] & T^4
\end{tikzcd}$$

со слоем M_H^{2n-1}. Соответствующее отображение спектральных последовательностей

$$i^* : E_r^{*,*}(\pi_1) \to E_r^{*,*}(\pi_2)$$

совпадает с отображением спектральных последовательностей Хохшильда — Серра, индуцированным отображением пар алгебра–подалгебра

$$(L_H^{2n+1}, L_H^{2n-1}) \to (L_H^{2n+3}, L_H^{2n-1}).$$

На уровне комплексов Шевалле — Эйленберга индуцированное отображение определено соответствием, при котором $\omega_{\pm(n+1)} \mapsto 0$, а остальные образующие переходят в одноименные.

Спектральная последовательность расслоения $\pi_2 : M_H^{2n+1} \to T^2$ показана на диаграмме в п. 7.1. Для расслоения $\pi_1 : M_H^{2n+3} \to T^4$ второй член спектральной последовательности имеет вид

$$\begin{array}{c|ccccc}
2n-1 & H^{2n-1} & HT^1 \otimes H^{2n-1} & HT^2 \otimes H^{2n-1} & HT^3 \otimes H^{2n-1} & HT^4 \otimes H^{2n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & H^n & HT^1 \otimes H^n & HT^2 \otimes H^n & HT^3 \otimes H^n & HT^4 \otimes H^n \\
n-1 & H^{n-1} & HT^1 \otimes H^{n-1} & HT^2 \otimes H^{n-1} & HT^3 \otimes H^{n-1} & HT^4 \otimes H^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\
0 & H^0 & HT^1 \otimes H^0 & HT^2 \otimes H^0 & HT^3 \otimes H^0 & HT^4 \otimes H^0 \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4
\end{array}$$

где $H^s = H^s(M_H^{2n-1})$ и $HT^k = H^k(T^4)$.

Столбцы $E_2^{3,*}$ и $E_2^{4,*}$ лежат в ядре i^*. Учитывая, что в когомологиях $H^k(M_H^{2n+3})$ формы, представляющие классы размерности $k \leqslant n+1$, не содержат ω_0, а формы, представляющие классы размерности $k \geqslant n+2$, делятся на ω_0, получаем, что в члене $E_\infty^{*,*}$ этой спектральной последовательности группы $E_\infty^{0,n}$, $E_\infty^{0,n+1}$, $E_\infty^{1,n}$, $E_\infty^{3,n-1}$, $E_\infty^{4,n-1}$, $E_\infty^{4,n-2}$ нулевые. Кроме того, подсчет чисел Бетти с помощью теоремы 4.1 показывает, что $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ при $q \leqslant n-1, p+q \leqslant n$, а также при $q \geqslant n$, $p+q \geqslant n+3$.

8. Дифференциалы в Bss для многообразий Гейзенберга

8.1. Произведения Масси. Напомним определение матричных произведений Масси. Детали, в том числе связь с формальными связностями и уравнением Маурера — Картана см. в [**31, 32**]. Знаки в формулах мы выбираем, следуя [**33**]. Для произвольного элемента x градуировки k положим $\overline{x} = (-1)^k x$.

Пусть C^* — градуированная дифференциальная алгебра над кольцом R, при этом считается, что дифференциал d повышает градуировку на 1. Когомологии комплекса C^* относительно дифференциала d в этом параграфе будем обозначать $H^*(C^*) = H^*(C^*, d)$.

8.1.1. *Скалярное трехместное произведение Масси.* Пусть для однородных классов когомологий $a_1, a_2, a_3 \in H^*(C^*)$ выполнены равенства $\overline{a}_1 a_2 = 0$ и $\overline{a}_2 a_3 = 0$. Пусть $x_i \in C^*$ — представитель соответствующего класса когомологий $a_i \in H^*(C^*)$. Тогда $\overline{x}_1 x_2$ и $\overline{x}_2 x_3$ являются кограницами, т.е. существуют элементы U и V такие, что $dU = \overline{x}_1 x_2$ и $dV = \overline{x}_2 x_3$. Легко проверить, что коцепь $y = \overline{U} x_3 + \overline{x}_1 V$ является коциклом, класс когомологий которого, вообще говоря, зависит от выбора представителей x_1, x_2, x_3 и элементов U и V. *Тройным произведением Масси* называется множество классов когомологий

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \{[\overline{U}x_3 + \overline{x}_1 V] \in H^*(C^*) \ : \ [x_i] = a_i \in H^*(C^*), dU = \overline{x}_1 x_2, dV = \overline{x}_2 x_3\}.$$

Как видно из определения, эта операция является частично определенной и многозначной. Действительно, класс когомологий $[a]$ зависит от выбора элементов U и V и нетрудно показать, что при другом выборе этих элементов определенный ими класс $[a']$ может, вообще говоря, отличаться от $[a]$. Более точно,

$$[a] - [a'] \in H^{\deg a_1 + \deg a_2 - 1}(C^*) a_3 + a_1 H^{\deg a_2 + \deg a_3 - 1}(C^*),$$

причем так может быть реализован любой элемент этой группы.

Трехместное произведение Масси называется *нетривиальным*, если оно не содержит нулевой класс когомологий.

Набор элементов x_1, x_2, x_3, U, V называется *определяющей системой* для элемента y. Ее удобно записывать в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & U & y \\ & x_2 & V \\ & & x_3 \end{pmatrix}.$$

Замечание 8.1. Введем двухместное произведение Масси по формуле $\langle a, b \rangle = \overline{a}\, b$. Оно определено для всех классов $a, b \in H^*(C^*)$, однозначно и отличается от обычного произведения в когомологиях знаком.

8.1.2. *Матричное произведение Масси.* Определено многоместное произведение Масси, компоненты которого являются матрицами из однородных элементов комплекса C^*, принадлежащих идеалу аугментации. Оно является естественным обобщением приведенного выше трехместного произведения Масси

В матричном произведении Масси на градуировки элементов матриц $a_1, a_2, \ldots, a_n$ накладываются условия, обеспечивающие однородность элементов произведений $a_k a_{k+1}$. Пусть $A = (a_{ij} \in C^* \ : \ 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant l)$ и $B = (b_{jk} \in C^* \ : \ 1 \leqslant j \leqslant l', 1 \leqslant k \leqslant n)$. Будем использовать произведение матриц A и B таких, что

(1) $l = l'$,

(2) для любых $1 \leqslant i \leqslant m$ и $1 \leqslant k \leqslant n$ величина $\deg a_{ij} + \deg b_{jk}$ не зависит от j.

При выполнении условий (1) и (2) произведение AB определено и его элементы являются однородными элементами комплекса C^*.

С каждой матрицей $A = (a_{ij} \in C^* \ : \ 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant l)$ связана целочисленная матрица степеней $D(A) = (\deg a_{ij} \ : \ 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant l)$. При выполнении условий (1) и (2) имеет место равенство

$$D(AB) = D(A) * D(B) = (\deg a_{ij} + \deg b_{jk} : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n).$$

Перейдем непосредственно к определению. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — набор матриц, составленных из однородных элементов когомологий $H^*(C^*)$, причем A_i и A_{i+1} удовлетворяют (1) и (2) для всех $i = 1, \ldots, n$. Будем говорить, что набор матриц $X(i,j)$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $(i,j) \neq (1,n)$, состоящих из однородных элементов C^*, образует *определяющую систему*, если

1) для всех i матрица $X(i,i)$ состоит из коциклов, представляющих соответствующие элементы матрицы A_i,

2) градуировки элементов матрицы $X(i,j)$ связаны с градуировками элементов матриц A_i, A_{i+1}, $\ldots$, A_j следующим образом: элементы матрицы $D(X(i,j))$ меньше соответствующих элементов матрицы $D(A_i) * D(A_{i+1}) * \ldots * D(A_j)$ в точности на $j - i + 1$,

3) $dX(i,j) = \sum\limits_{k=i}^{j-1} \overline{X(i,k)}\, X(k+1,j)$.

Если матрицы $X(i,j)$ образуют определяющую систему, то матрица $C(\{A_i\},\{X(i,j)\}) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \overline{X(i,k)}\, X(k{+}1,j)$ состоит из коциклов. Множество матриц, составленных из классов когомологий, представленных всевозможными матрицами коциклов $C(\{A_i\},\{X(i,j)\})$ для фиксированных $A_1,\dots,A_n$ называется *n–местным матричным произведением Масси* $\langle A_1, A_2, \dots, A_n\rangle$.

Матричное произведение Масси является многозначным и частично определенным [**31, 32**].

Нас интересует случай, когда $n=3$, A_1 — строка длины k, A_2 — матрица размеров $k\times m$, A_3 — столбец длины m. В этом случае $\langle A_1, A_2, A_3\rangle$ состоит из матриц размераов 1×1, т.е. из классов когомологий. Такое матричное произведение Масси называется *нетривиальным*, если оно не содержит нулевой класс когомологий.

Отметим, что для любой пары вектор–строк $(a_1,\dots,a_n)$, $(b_1,\dots,b_n)$ определено двухместное матричное произведение Масси

$$\langle (a_1,\dots,a_n),(b_1,\dots,b_n)^T\rangle = \sum_{k=1}^n \overline{a}_k\, b_k.$$

8.2. Дифференциалы d_1 и d_2 в Bss. Приведем некоторые основные свойства дифференциалов d_1 и d_2 в Bss для алгебр L_H^{2n+1}. Для случая общей нильпотентной алгебры Ли аналогичные утверждения нетрудно получить, следуя общей теории [**12**].

По соображениям размерности верен следующий факт.

Утверждение 8.1. *Дифференциал* $N_1/N_0 = E_1^{1,-1} \xrightarrow{d_1} E_1^{0,-1} = H^1(L_H^{2n+1})$ *является изоморфизмом.*

Действительно, абелева группа N_1/N_0 порождается элементами $(e_{\pm1})^*,\dots,(e_{\pm n})^*$. Дифференциал Шевалле — Эйленберга в комплексе $U(L_H^{2n+1})^*\otimes \Lambda(L_H^{2n+1})^*$ на таких элементах действует по формуле

$$(e_{\pm k})^*\otimes 1 \mapsto 1\otimes \omega_{\pm k}.$$

Для $q>1$ дифференциал $d_1 : N_1/N_0\otimes H^{q-1}(L_H^{2n+1}) = E_1^{1,-q} \to E_1^{0,-q} = H^q(L_H^{2n+1})$ действует следующим образом. Пусть

$$x = \sum_{k=1}^n (e_k^*\otimes a_k + e_{-k}^*\otimes a_{-k}),$$

где $a_{\pm i}\in H^{q-1}(L_H^{2n+1})$. Тогда

$$d_1(x) = d_{CE}(x) = 1\otimes \sum_{k=1}^n (\omega_k\wedge a_k + \omega_{-k}\wedge a_{-k}).$$

Заметим, что любой класс, представимый в виде

$$\sum_{k=1}^n (\omega_k\wedge a_k + \omega_{-k}\wedge a_{-k}),$$

лежит в образе дифференциала d_1, так как равен $d_1(x)$. Таким образом, член фильтрации Φ^1, т.е. образ дифференциала d_1 в когомологиях $H^*(L_H^{2n+1})$, состоит из элементов, представимых в виде двухместных матричных произведений Масси. В [**12**] показано, что эти произведения нетривиальны.

Рассмотрим элемент x группы $E_1^{2,-q} = N_2/N_1\otimes H^{q-2}(L_H^{2n+1})$. Если $d^1(x)=0$ в группе $E_1^{1,-q} = N_1/N_0\otimes H^{q-1}(L_H^{2n+1})$, то определен элемент $d_2x\in E_2^{0,-q+1}$. По лемме 8.1 (см. ниже) абелева группа N_2/N_1 порождена элементами e_0^* и $(e_ie_j)^*$, где $i\leqslant j$, $i,j\in\{\pm1,\dots,\pm n\}$. Следовательно, элемент x имеет вид

$$\alpha e_0^*\otimes a_0 + \sum \beta_{ij}(e_ie_j)^*\otimes a_{ij}.$$

Детальный анализ выражения

$$d_{CE}(x) = d_{CE}(\alpha e_0^*\otimes a_0 + \sum \beta_{ij}(e_ie_j)^*\otimes a_{ij})$$

и условия $d_1(x)=0$ показывает, что элемент $d_2(x)$ является представителем трехместного матричного произведения Масси $\langle A,B,C\rangle$, где A и B составлены из элементов $H^1(L_H^{2n+1})$ (см. [**12**]).

8.3. Bss**–фильтрация** Φ^r **в когомологиях алгебры Ли** L_H^{2n+1}**.** Приведем необходимые факты о Bss для алгебр Ли L_H^{2n+1} (детали см. в [**12**]).

Зафиксируем в универсальной обертывающей алгебре UL_H^{2n+1} базис

$$\{e_-^a e_+^b e_0^c = e_{-1}^{a_1}\dots e_{-n}^{a_n}e_1^{b_1}\dots e_n^{b_n}e_0^c\},$$

где $a=(a_1,\dots,a_n)$ и $b=(b_1,\dots,b_n)$, и канонический двойственный базис

$$\{(e_-^a e_+^b e_0^c)^*\}$$

в $(UL_H^{2n+1})^*$. Рассмотрим фильтрацию (3.1) в $(UL_H^{2n+1})^*$.

Лемма 8.1. *Положим*

$$p(a,b,c)=p(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_n,c)=2c+\sum_{j=1}^n a_j+\sum_{j=1}^n b_j.$$

(i) *Элемент* $(e_-^a e_+^b e_0^c)^*$ *принадлежит* N_p *и не принадлежит* N_{p-1}*, где* $p=p(a,b,c)$.

(ii) *Более того,* $N_p=N_{p-1}\oplus\mathbb{R}\langle(e_-^a e_+^b e_0^c)^* \,:\, p(a,b,c)=p\rangle$.

Доказательство см. в [**12**].

Следствие 8.1. *Производящий ряд последовательности* $\{k_0=1, k_p=\dim N_p/N_{p-1} \,:\, p=1,2,\dots\}$ *равен*

$$\sum_{p\geqslant 0}k_p x^p=\frac{1}{(1-x)^{2n}(1-x^2)}.$$

Напомним, что в § 3 мы с помощью дифференциалов Bss определили возрастающую фильтрацию Φ^p на когомологиях $H^k(L_H^{2n+1})$. В силу тривиальности дифференциалов d_k при $k\geqslant 3$ (см. теорему 3.1) фильтрация стабилизируется на Φ^2, а именно, $\Phi^2=\Phi^k$ для всех $k\geqslant 2$.

Теорема 8.1. (i) *Элементы групп когомологий* $H^k(L_H^{2n+1})$ *для* $1\leqslant k\leqslant n$ *принадлежат* Φ^1.

(ii) *Элементы группы когомологий* $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ *принадлежат* Φ^2*, но не принадлежат* Φ^1.

(iii) *Элементы групп когомологий* $H^k(L_H^{2n+1})$ *для* $n+2\leqslant k\leqslant 2n+1$ *принадлежат* Φ^1.

Доказательство. (i) Из утверждения 8.1 следует, что $H^1(L_H^{2n+1})\subset\Phi^1$.

Из теоремы 4.1 следует, что любой класс когомологий в размерностях $2\leqslant p\leqslant n$ имеет представителя в виде суммы $\omega_{-n}\wedge\theta_{-n}+\dots\omega_{-1}\wedge\theta_{-1}+\omega_1\wedge\theta_1+\dots+\omega_{n-p}\wedge\theta_{n-p}$, где разложение $(p-1)$–формы θ_k по стандартному базису внешней алгебры не содержит ни ω_0, ни ω_j для всех $j\leqslant k$. Легко проверить, что формы θ_k замкнуты. Тогда из описанного выше действия дифференциала d_1 следует, что соответствующий класс когомологий равен

$$d_1((e_{-n})^*\otimes\theta_{-n}+\dots+(e_{-1})^*\otimes\theta_{-1}+(e_1)^*\otimes\theta_1+\dots+(e_{n-p})^*\otimes\theta_{n-p}), \tag{8.1}$$

т.е. принадлежит Φ_1.

(ii) С другой стороны, образ $d_1\,:\,N_1/N_0\otimes H^n(L_H^{2n+1})\to H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ нулевой, поскольку любая коцепь, представляющая элемент размерности $n+1$, должна содержать в своей записи ω_0 — это следует из невырожденности спаривания (4.1). Следовательно, в группе $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ нет нетривиальных элементов фильтрации Φ^1.

Случай (iii) чуть более сложен. Проведем индукцию по n. В п. 7.1 была вычислена спектральная последовательность расслоения $\pi: M^{2n+1}\to T^2$ со слоем M_H^{2n-1}. Ее член $E_\infty^{p,q}$ имеет вид

$$
\begin{array}{c|ccc}
2n-1 & H^{2n-1} & \omega_{-n}H^{2n-1}\oplus\omega_n H^{2n-1} & \omega_{-n}\wedge\omega_n H^{2n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
n & 0 & \omega_{-n}H^{n}\oplus\omega_n H^{n} & \omega_{-n}\wedge\omega_n H^{n} \\
n-1 & H^{n-1} & \omega_{-n}H^{n-1}\oplus\omega_n H^{n-1} & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & H^{0} & \omega_{-n}H^{0}\oplus\omega_n H^{0} & \omega_{-n}\wedge\omega_n H^{0} \\
\hline
 & 0 & 1 & 2
\end{array}
$$

При $k \geqslant n+2$ в группе $H^k(M_H^{2n+1})$ определена трехчленная фильтрация, для которой присоединенная группа имеет вид

$$H^k(M_H^{2n-1}) \oplus \omega_{-n}H^{k-1}(M_H^{2n-1}) \oplus \omega_n H^{k-1}(M_H^{2n-1}) \oplus \omega_{-n}\wedge\omega_n H^{k-2}(M_H^{2n-1}),$$

применяя индукцию, получаем требуемое утверждение. Отметим, что это рассуждение верно также при $k \leqslant n$. $\square$

В [**33**] указаны элементы в группе $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$, представимые в виде матричных произведения Масси.

Утверждение 8.2 ([**33**, п. 2.5])**.** *Коцепи $\omega_0\wedge\omega_{\varepsilon_1\cdot 1}\wedge\omega_{\varepsilon_2\cdot 2}\wedge\ldots\wedge\omega_{\varepsilon_n\cdot n}$, где $\varepsilon_j=\pm1$, представляют собой линейно независимые классы когомологий в $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$, они не разлагаются в линейные комбинации нетривиальных произведений классов меньшей размерности, но представимы в виде нетривиальных трехместных матричных произведений Масси: класс коцикла $\omega_0\wedge\omega_{\varepsilon_1\cdot 1}\wedge\omega_{\varepsilon_2\cdot 2}\wedge\ldots\wedge\omega_{\varepsilon_n\cdot n}$ принадлежит*

$$\left\langle (\varepsilon_1\omega_{-\varepsilon_1\cdot 1},\ \varepsilon_2\omega_{-\varepsilon_2\cdot 2},\ \ldots,\ \varepsilon_n\omega_{-\varepsilon_n\cdot n}), \begin{pmatrix}\omega_{\varepsilon_1\cdot 1}\\ \omega_{\varepsilon_2\cdot 2}\\ \vdots\\ \omega_{\varepsilon_n\cdot n}\end{pmatrix}, \omega_{\varepsilon_1\cdot 1}\wedge\omega_{\varepsilon_2\cdot 2}\wedge\ldots\wedge\omega_{\varepsilon_n\cdot n}\right\rangle.$$

Для доказательства этого утверждения в обозначениях п. 8.1 достаточно положить $U=-\omega_0$ и $V=0$.

Легко указать, образами каких элементов под действием дифференциала d_2 накрываются элементы, описанные в утверждении 8.2.

Утверждение 8.3. *Класс когомологий из группы $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$, представленный коциклом $\omega_0\wedge\omega_{\varepsilon_1\cdot 1}\wedge\omega_{\varepsilon_2\cdot 2}\wedge\ldots\wedge\omega_{\varepsilon_n\cdot n}$, равен*

$$d_2\Big(\Big(e_0^* + \sum_k \delta^1_{\varepsilon_k}(e_{-k}e_k)^*\Big)\otimes\omega_{\varepsilon_1\cdot 1}\wedge\omega_{\varepsilon_2\cdot 2}\wedge\ldots\wedge\omega_{\varepsilon_n\cdot n}\Big),$$

где δ_i^j — символ Кронекера.

Достаточно заметить, что в комплексе $(UL_H^{2n+1})^*\otimes\wedge(\omega_{\pm1},\ldots,\omega_{\pm n},\omega_0)$ выполнены равенства

$$d((e_0)^*\otimes\omega) = 1\otimes\omega_0\wedge\omega - \sum_{k=1}^{n}(e_k)^*\otimes\omega_{-k}\wedge\omega,$$
$$d((e_{-k}e_k)^*\otimes\omega) = (e_k)^*\otimes\omega_{-k}\wedge\omega + (e_{-k})^*\otimes\omega_k\wedge\omega.$$

Обратим внимание, что количество классов, о которых идет речь в утверждениях 8.2 и 8.3, равно 2^n, а это меньше, чем соответствующее число Бетти b_{n+1}, которое в силу двойственности Пуанкаре и теоремы 4.1 равно $b_{n+1} = b_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}$. Иными словами, в группе $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ имеются элементы, не описанные в утверждениях 8.2 и 8.3. Согласно теореме 8.1 все ненулевые элементы $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ принадлежат Φ^2, но не принадлежат Φ^1. В **[12]** доказано, что такие элементы представимы в виде нетривиальных тройных матричных произведений Масси специального вида (см. также п. 8.2). В § 9 мы найдем явный вид этих представлений для остальных элементов группы $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ при $n = 2$ и $n = 3$.

9. Примеры

В этом параграфе для $n = 1, 2, 3, 4$ мы приводим полиномы Пуанкаре $\widetilde{P}_n(t, q)$ и $P_n(t, q)$ комплексов Шевалле — Эйленберга, соответствующих многообразиям M_H^{2n+1}, а также полиномы Пуанкаре когомологий $H^*(M_H^{2n+1})$, учитывающих расщепления биградуировками, описанными в § 6. Напомним, что коэффициенты при степенях t многочленов $\widetilde{P}_n(t, q)$ и $P_n(t, q)$ с точностью до умножения на подходящие степени q равны q-биномиальным коэффициентам Гаусса (см. пп. 6.1 и 6.2).

9.1. Алгебра Ли L_H^3 и многообразие M_H^3. Группы когомологий $H^k(L_H^3)$ имеют следующие наборы базисных элементов:

$$\begin{array}{ll} k=0 & 1; \\ k=1 & \omega_{-1},\ \omega_1; \\ k=2 & \omega_{-1}\wedge\omega_0,\ \omega_1\wedge\omega_0; \\ k=3 & \omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_1. \end{array}$$

Теорема 8.1 показывает, что классы когомологий размерностей 1 и 3 принадлежат фильтрации Φ^1, а классы когомологий размерности 2 принадлежат фильтрации Φ^2. Явное представление классов размерности 2 в виде нетривиальных тройных произведений Масси и в виде дифференциалов d_2 в Bss получено в утверждениях 8.2 и 8.3.

9.1.1. *Базис* $\{\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2, \widetilde{e}_3\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\widetilde{P}_1(t, q) = q^6t^3 + (q^5 + q^4 + q^3)t^2 + (q^3 + q^2 + q)t + 1.$$

Полином Пуанкаре $\widetilde{P}_1^H(t, q) = \sum\limits_{i,j} \dim H^{i,j}(M_H^3)t^iq^j$:

$$q^6t^3 + (q^5 + q^4)t^2 + (q^2 + q)t + 1.$$

9.1.2. *Базис* $\{e_{\pm1}, e_0\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга $\Lambda(\omega_{-1}, \omega_1, \omega_0)$:

$$P_1(t, q) = t^3 + \Big(q + 1 + \frac{1}{q}\Big)t^2 + \Big(q + 1 + \frac{1}{q}\Big)t + 1.$$

Полином Пуанкаре когомологий M_H^3:

$$t^3 + \Big(q + \frac{1}{q}\Big)t^2 + \Big(q + \frac{1}{q}\Big)t + 1.$$

9.1.3. *Расщепление когомологий комплекса Шевалле — Эйленберга инволюцией I.* Полиномы Пуанкаре расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\widehat{P}^{\,\mathrm{even}}(t) = t^3 + t^2 + t + 1,$$

$$\widehat{P}^{\,\mathrm{odd}}(t) = 2t^2 + 2t.$$

Когомологии многообразия Гейзенберга $H(M_H^3)$, расщепленные инволюцией I:

$$P^{\mathrm{even}}_{H(M_H^3)} = t^2 + t + 1,$$

$$P^{\mathrm{odd}}_{H(M_H^3)} = t^3 + t^2 + t.$$

9.2. Алгебра Ли L^5_H и многообразие M^5_H. Группы когомологий $H^k(L^5_H)$ имеют следующие наборы базисных элементов:

$k=0$ $\quad 1;$

$k=1$ $\quad \omega_{-1},\ \omega_{-2},\ \omega_2,\ \omega_1;$

$k=2$ $\quad \omega_{-1}\wedge\omega_{-2},\ \omega_{-1}\wedge\omega_2,\ \omega_{-1}\wedge\omega_1=-\omega_{-2}\wedge\omega_2,\ \omega_{-2}\wedge\omega_1,\ \omega_1\wedge\omega_2;$

$k=3$ $\quad \omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_{-2},\ \omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_2,\ \omega_0\wedge\omega_{-2}\wedge\omega_1,\ \omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_2,\ \omega_0\wedge(\omega_{-1}\wedge\omega_1-\omega_{-2}\wedge\omega_2);$

$k=4$ $\quad \omega_0\wedge\omega_{-2}\wedge\omega_1\wedge\omega_2,\ \omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_1\wedge\omega_2,\ \omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_{-2}\wedge\omega_1,\ \omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_{-2}\wedge\omega_2;$

$k=5$ $\quad \omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_{-2}\wedge\omega_1\wedge\omega_2.$

Теорема 8.1 показывает, что классы когомологий размерностей 1, 2, 4 и 5 принадлежат фильтрации Φ^1, а классы когомологий размерности 3 принадлежат фильтрации Φ^2.

Элементы группы $H^3(L^5_H)$, представленные коциклами

$$\omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_{-2},\quad \omega_0\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_2,\quad \omega_0\wedge\omega_{-2}\wedge\omega_1,\quad \omega_0\wedge\omega_1\wedge\omega_2,$$

как показано в утверждениях 8.2 и 8.3, представимы в виде нетривиальных тройных произведений Масси, а также лежат в образе дифференциала d_2 спектральной последовательности Бухштабера.

Получим этот результат для класса, представленного коциклом $\omega_0\wedge(\omega_{-1}\wedge\omega_1-\omega_{-2}\wedge\omega_2)$.

Утверждение 9.1. (i) *Коцикл $\omega_0\wedge(\omega_{-1}\wedge\omega_1-\omega_{-2}\wedge\omega_2)$ является представителем нетривиального тройного матричного произведения Масси*

$$\left\langle (\omega_{-1}\ \ \omega_{-2}), \begin{pmatrix}\frac12\omega_1\\ \frac12\omega_2\end{pmatrix}, \omega_{-1}\wedge\omega_1-\omega_{-2}\wedge\omega_2\right\rangle.$$

(ii) *Класс, представленный формой $\omega_0\wedge(\omega_{-1}\wedge\omega_1-\omega_{-2}\wedge\omega_2)$, равен*

$$d_2((e_0)^*\otimes(\omega_{-1}\wedge\omega_1-\omega_{-2}\wedge\omega_2)-(e_2e_1)^*\otimes\omega_{-1}\wedge\omega_{-2}).$$

Доказательство. Для (i) используется следующая определяющая система:

$$A=(\omega_{-1}\ \ \omega_{-2})\qquad U=-\tfrac12\omega_0\qquad \omega_0\wedge(\omega_{-1}\wedge\omega_1-\omega_{-2}\wedge\omega_2)$$

$$B=\begin{pmatrix}\frac12\omega_1\\ \frac12\omega_2\end{pmatrix}\qquad V=\begin{pmatrix}-\frac12\omega_1\wedge\omega_0\\ \frac12\omega_2\wedge\omega_0\end{pmatrix}$$

$$C=\omega_{-1}\wedge\omega_1-\omega_{-2}\wedge\omega_2$$

Для (ii) используем прямое вычисление

$$d_{CE}((e_0)^*\otimes(\omega_{-1}\wedge\omega_1-\omega_{-2}\wedge\omega_2))=\omega_0\wedge(\omega_{-1}\wedge\omega_1-\omega_{-2}\wedge\omega_2)$$

$$+(e_1)^*\otimes\omega_{-1}\wedge\omega_{-2}\wedge\omega_2-(e_2)^*\otimes\omega_{-2}\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_1,$$

$$d_{CE}((e_2e_1)^*\otimes\omega_{-1}\wedge\omega_{-2})=(e_2)^*\otimes\omega_1\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_{-2}+(e_1)^*\otimes\omega_2\wedge\omega_{-1}\wedge\omega_{-2}.$$

Вычтем из первого соотношения второе и получим нужное равенство. □

9.2.1. *Базис* $\{\widetilde e_1,\widetilde e_2,\widetilde e_3,\widetilde e_4,\widetilde e_5\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\widetilde P_2(t,q)=q^{15}t^5+(q^{14}+q^{13}+q^{12}+q^{11}+q^{10})t^4+(q^{12}+q^{11}+2q^{10}+2q^9+2q^8+q^7+q^6)t^3$$

$$+(q^9+q^8+2q^7+2q^6+2q^5+q^4+q^3)t^2+(q^5+q^4+q^3+q^2+q)t+1.$$

Полином Пуанкаре когомологий:

$$q^{15}t^5+(q^{14}+q^{13}+q^{12}+q^{11})t^4+(q^{12}+q^{11}+q^{10}+q^9+q^8)t^3$$

$$+(q^7+q^6+q^5+q^4+q^3)t^2+(q^4+q^3+q^2+q)t+1.$$

9.2.2. *Базис* $\{e_{\pm 2}, e_{\pm 1}, e_0\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$P_2(t,q) = t^5 + \Big(q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\Big)t^4 + \Big(q^3 + q^2 + 2q + 2 + \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\Big)t^3 + \Big(q^3 + q^2 + 2q + 2 + \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\Big)t^2 + \Big(q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\Big)t + 1.$$

Полином Пуанкаре когомологий M_H^5:

$$t^5 + \Big(q^2 + q + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\Big)t^4 + \Big(q^3 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^3}\Big)t^3 + \Big(q^3 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^3}\Big)t^2 + \Big(q^2 + q + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\Big)t + 1.$$

9.2.3. *Расщепление когомологий комплекса Шевалле — Эйленберга инволюцией I.* Полиномы Пуанкаре расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\widehat{P}_2^{\mathrm{even}}(t) = 3t^4 + 6t^3 + 4t^2 + 2t + 1,$$
$$\widehat{P}_2^{\mathrm{odd}}(t) = t^5 + 2t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 3t.$$

Полиномы Пуанкаре когомологии:

$$P^{\mathrm{even}}_{H(M_H^5)} = 2t^4 + 3t^3 + 2t^2 + 2t + 1,$$
$$P^{\mathrm{odd}}_{H(M_H^5)} = t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t.$$

9.3. Алгебра Ли L_H^7 и многообразие M_H^7. Для $H^*(M_H^7)$ мы не будем приводить базис в группах когомологиях, вместо этого напомним, что по теореме 8.1 классы когомологий всех положительных размерностей, кроме 4, принадлежат фильтрации Φ^1, а классы когомологий размерности 4 принадлежат фильтрации Φ^2.

Утверждения 8.2 и 8.3 показывают, что классы когомологий, представленные коциклами вида $e_0 \wedge \omega_{\pm 1} \wedge \omega_{\pm 2} \wedge \omega_{\pm 3}$, представимы в виде тройных матричных произведений Масси, а также лежат в образе дифференциала d_2 в Bss.

С другой стороны, $b_4(M_H^7) = b_3(M_H^7) = \binom{6}{3} - \binom{6}{1} = 14$, поэтому в размерности 4 имеются еще 6 независимых классов когомологий. Их легко указать явно (для краткости вместо $\omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \ldots$ здесь мы пишем $(i_1, i_2, \ldots)$):

$$\begin{aligned}
&(0,-1,1,2) - (0,-3,3,2),\\
&(0,-2,1,2) - (0,-3,1,3),\\
&(0,-2,2,3) - (0,-1,1,3),\\
&(0,-2,-3,3) - (0,-1,1,-2),\\
&(0,-1,-3,3) - (0,-1,-2,2),\\
&(0,-1,-3,1) - (0,-2,-3,2).
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Каждый из них лежит в образе дифференциала d_2, а также представим нетривиальным тройным произведением Масси. Продемонстрируем это для элемента $(0,-1,1,2) - (0,-3,3,2)$, остальные пять случаев рассматриваются аналогично.

Сначала выпишем соответствующую определяющую систему

$$A = (\omega_{-1}\ \ \omega_{-2}\ \ \omega_{-3}) \qquad U = -\tfrac{1}{2}\omega_0 \qquad \omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_{-3} \wedge \omega_2 \wedge \omega_3)$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_1 \\ \frac{1}{2}\omega_2 \\ \frac{1}{2}\omega_3 \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 \end{pmatrix}$$

$$C = \omega_{-1} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_{-3} \wedge \omega_2 \wedge \omega_3$$

Покажем, что коцикл $(0,-1,1,2)-(0,-3,3,2)$ представим в виде

$$d_2((e_0)^*\otimes((-1,1,2)+(-3,2,3))+(e_1e_3)^*\otimes(-3,-1,2)+(e_{-2}e_2)^*\otimes((-3,2,3)+(-1,1,2))).$$

Для этого достаточно вычислить дифференциал Шевалле — Эйленберга от каждого из этих трех слагаемых:

$$d_{CE}((e_0)^*\otimes((-1,1,2)+(-3,2,3)))=(0,-1,1,2)+(0,-3,2,3)$$
$$-(e_2)^*\otimes(-2,-1,1,2)-(e_3)^*\otimes(-3,-1,1,2)-(e_1)^*\otimes(-1,-3,2,3)-(e_2)^*\otimes(-2,-3,2,3),$$

$$d_{CE}((e_1e_3)^*\otimes(-3,-1,2))=(e_1)^*\otimes(3,-3,-1,2)+(e_3)^*\otimes(1,-3,-1,2),$$

$$d_{CE}((e_{-2}e_2)^*\otimes((-3,2,3)+(-1,1,2)))=(e_{-2})^*\otimes((-2,-3,2,3)+(-2,-1,1,2)).$$

Осталось сложить эти три равенства.

9.3.1. *Базис* $\{\widetilde{e}_1,\ldots,\widetilde{e}_7\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\begin{aligned}\widetilde{P}_3(t,q)={}&q^{28}t^7+(q^{27}+q^{26}+q^{25}+q^{24}+q^{23}+q^{22}+q^{21})t^6\\&+(q^{25}+q^{24}+2q^{23}+2q^{22}+3q^{21}+3q^{20}+3q^{19}+2q^{18}+2q^{17}+q^{16}+q^{15})t^5\\&+(q^{22}+q^{21}+2q^{20}+3q^{19}+4q^{18}+4q^{17}+5q^{16}+4q^{15}+4q^{14}+3q^{13}+2q^{12}+q^{11}+q^{10})t^4\\&+(q^{18}+q^{17}+2q^{16}+3q^{15}+4q^{14}+4q^{13}+5q^{12}+4q^{11}+4q^{10}+3q^{9}+2q^{8}+q^{7}+q^{6})t^3\\&+(q^{13}+q^{12}+2q^{11}+2q^{10}+3q^{9}+3q^{8}+3q^{7}+2q^{6}+2q^{5}+q^{4}+q^{3})t^2\\&+(q^7+q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q)t+1.\end{aligned}$$

Полином Пуанкаре $\widetilde{P}_3^H(t,q)=\sum\limits_{i,j}\dim\,H^{i,j}(M_H^7)t^iq^j$ когомологий:

$$\begin{aligned}&q^{28}t^7+(q^{27}+q^{26}+q^{25}+q^{24}+q^{23}+q^{22})t^6\\&+(q^{25}+q^{24}+2q^{23}+2q^{22}+2q^{21}+2q^{20}+2q^{19}+q^{18}+q^{17})t^5\\&+(q^{22}+q^{21}+q^{20}+2q^{19}+2q^{18}+2q^{17}+2q^{16}+q^{15}+q^{14}+q^{13})t^4\\&+(q^{15}+q^{14}+q^{13}+2q^{12}+2q^{11}+2q^{10}+2q^{9}+q^{8}+q^{7}+q^{6})t^3\\&+(q^{11}+q^{10}+2q^{9}+2q^{8}+2q^{7}+2q^{6}+2q^{5}+q^{4}+q^{3})t^2\\&+(q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q)t+1.\end{aligned}$$

9.3.2. *Базис* $\{e_{\pm1},e_{\pm2},e_{\pm3},e_0\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\begin{aligned}P_3(t,q)={}&t^7+\Big(q^3+q^2+q+1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}\Big)t^6\\&+\Big(q^5+q^4+2q^3+2q^2+3q+3+\frac{3}{q}+\frac{2}{q^2}+\frac{2}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}\Big)t^5\\&+\Big(q^6+q^5+2q^4+3q^3+4q^2+4q+5+\frac{4}{q}+\frac{4}{q^2}+\frac{3}{q^3}+\frac{2}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\frac{1}{q^6}\Big)t^4\\&+\Big(q^6+q^5+2q^4+3q^3+4q^2+4q+5+\frac{4}{q}+\frac{4}{q^2}+\frac{3}{q^3}+\frac{2}{q^4}+\frac{1}{q^5}+\frac{1}{q^6}\Big)t^3\\&+\Big(q^5+q^4+2q^3+2q^2+3q+3+\frac{3}{q}+\frac{2}{q^2}+\frac{2}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{1}{q^5}\Big)t^2\\&+\Big(q^3+q^2+q+1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}\Big)t+1.\end{aligned}$$

Полином Пуанкаре когомологий M_H^7:

$$
\begin{aligned}
&t^7 + \Big(q^3 + q^2 + q + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\Big)t^6 \\
&+ \Big(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 2 + \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5}\Big)t^5 \\
&+ \Big(q^6 + q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 2 + \frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^6}\Big)t^4 \\
&+ \Big(q^6 + q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 2 + \frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^6}\Big)t^3 \\
&+ \Big(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 2 + \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5}\Big)t^2 \\
&+ \Big(q^3 + q^2 + q + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\Big)t + 1.
\end{aligned}
$$

9.3.3. *Расщепление когомологий комплекса Шевалле — Эйленберга инволюцией I.* Полиномы Пуанкаре расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$
\begin{aligned}
\widehat{P}_7^{\mathrm{even}}(t) &= t^7 + 3t^6 + 9t^5 + 19t^4 + 19t^3 + 9t^2 + 3t + 1, \\
\widehat{P}_7^{\mathrm{odd}}(t) &= 4t^6 + 12t^5 + 16t^4 + 16t^3 + 12t^2 + 4t.
\end{aligned}
$$

Полиномы Пуанкаре когомологий многообразия Гейзенберга $H(M_H^7)$, расщепленных инволюцией I:

$$
\begin{aligned}
P_{H(M_H^7)}^{\mathrm{even}} &= 3t^6 + 8t^5 + 7t^4 + 7t^3 + 6t^2 + 3t + 1, \\
P_{H(M_H^7)}^{\mathrm{odd}} &= t^7 + 3t^6 + 6t^5 + 7t^4 + 7t^3 + 8t^2 + 3t.
\end{aligned}
$$

9.4. Алгебра Ли L_H^9 и многообразие M_H^9. В случае M_H^9 мы приведем только биградуированные ряды Пуанкаре.

9.4.1. *Базис* $\{\widetilde{e}_1, \ldots, \widetilde{e}_3\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$
\begin{aligned}
\widetilde{P}_4(t, q) = {} & q^{45}t^9 + (q^{44} + q^{43} + q^{42} + q^{41} + q^{40} + q^{39} + q^{38} + q^{37} + q^{36})t^8 \\
& + (q^{42} + q^{41} + 2q^{40} + 2q^{39} + 3q^{38} + 3q^{37} + 4q^{36} + 4q^{35} \\
& + 4q^{34} + 3q^{33} + 3q^{32} + 2q^{31} + 2q^{30} + q^{29} + q^{28})t^7 \\
& + (q^{39} + q^{38} + 2q^{37} + 3q^{36} + 4q^{35} + 5q^{34} + 7q^{33} + 7q^{32} + 8q^{31} + 8q^{30} \\
& + 8q^{29} + 7q^{28} + 7q^{27} + 5q^{26} + 4q^{25} + 3q^{24} + 2q^{23} + q^{22} + q^{21})t^6 \\
& + (q^{35} + q^{34} + 2q^{33} + 3q^{32} + 5q^{31} + 6q^{30} + 8q^{29} + 9q^{28} + 11q^{27} + 11q^{26} + 12q^{25} \\
& + 11q^{24} + 11q^{23} + 9q^{22} + 8q^{21} + 6q^{20} + 5q^{19} + 3q^{18} + 2q^{17} + q^{16} + q^{15})t^5 \\
& + (q^{30} + q^{29} + 2q^{28} + 3q^{27} + 5q^{26} + 6q^{25} + 8q^{24} + 9q^{23} + 11q^{22} + 11q^{21} + 12q^{20} \\
& + 11q^{19} + 11q^{18} + 9q^{17} + 8q^{16} + 6q^{15} + 5q^{14} + 3q^{13} + 2q^{12} + q^{11} + q^{10})t^4 \\
& + (q^{24} + q^{23} + 2q^{22} + 3q^{21} + 4q^{20} + 5q^{19} + 7q^{18} + 7q^{17} + 8q^{16} \\
& + 8q^{15} + 8q^{14} + 7q^{13} + 7q^{12} + 5q^{11} + 4q^{10} + 3q^9 + 2q^8 + q^7 + q^6)t^3 \\
& + (q^{17} + q^{16} + 2q^{15} + 2q^{14} + 3q^{13} + 3q^{12} + 4q^{11}
\end{aligned}
$$

$$+ 4q^{10} + 4q^9 + 3q^8 + 3q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 + q^3)t^2$$
$$+ (q^9 + q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)t + 1.$$

Полином Пуанкаре $\widetilde{P}_4^H(t,q) = \sum\limits_{i,j} \dim\, H^{i,j}(M_H^{2n+1})t^i q^j$:

$$t^9 + (q^{44} + q^{43} + q^{42} + q^{41} + q^{40} + q^{39} + q^{38} + q^{37})t^8$$
$$+ (q^{42} + q^{41} + 2q^{40} + 2q^{39} + 3q^{38} + 3q^{37} + 3q^{36} + 3q^{35} + 3q^{34} + 2q^{33} + 2q^{32} + q^{31} + q^{30})t^7$$
$$+ (q^{39} + q^{38} + 2q^{37} + 3q^{36} + 3q^{35} + 4q^{34} + 5q^{33} + 5q^{32}$$
$$+ 5q^{31} + 5q^{30} + 4q^{29} + 3q^{28} + 3q^{27} + 2q^{26} + q^{25} + q^{24})t^6$$
$$+ (q^{35} + q^{34} + q^{33} + 2q^{32} + 3q^{31} + 3q^{30} + 4q^{29} + 4q^{28} + 4q^{27}$$
$$+ 4q^{26} + 4q^{25} + 3q^{24} + 3q^{23} + 2q^{22} + q^{21} + q^{20} + q^{19})t^5$$
$$+ (q^{26} + q^{25} + q^{24} + 2q^{23} + 3q^{22} + 3q^{21} + 4q^{20} + 4q^{19} + 4q^{18}$$
$$+ 4q^{17} + 4q^{16} + 3q^{15} + 3q^{14} + 2q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10})t^4$$
$$+ (q^{21} + q^{20} + 2q^{19} + 3q^{18} + 3q^{17} + 4q^{16} + 5q^{15} + 5q^{14}$$
$$+ 5q^{13} + 5q^{12} + 4q^{11} + 3q^{10} + 3q^9 + 2q^8 + q^7 + q^6)t^3$$
$$+ (q^{15} + q^{14} + 2q^{13} + 2q^{12} + 3q^{11} + 3q^{10} + 3q^9 + 3q^8 + 3q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 + q^3)t^2$$
$$+ (q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)t + 1.$$

9.4.2. *Базис* $\{e_{\pm 4}, e_{\pm 3}, e_{\pm 2}, e_{\pm 1}, e_0\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга $\Lambda(e_{\pm 4}, e_{\pm 3}, e_{\pm 2}, e_{\pm 1}, e_0)$:

$$P_4(t,q) = t^9 + \Big(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4}\Big)t^8$$
$$+ \Big(q^7 + q^6 + 2q^5 + 2q^4 + 3q^3 + 3q^2 + 4q + 4 + \frac{4}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{2}{q^4} + \frac{2}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7}\Big)t^7$$
$$+ \Big(q^9 + q^8 + 2q^7 + 3q^6 + 4q^5 + 5q^4 + 7q^3 + 7q^2 + 8q + 8$$
$$+ \frac{8}{q} + \frac{7}{q^2} + \frac{7}{q^3} + \frac{5}{q^4} + \frac{4}{q^5} + \frac{3}{q^6} + \frac{2}{q^7} + \frac{1}{q^8} + \frac{1}{q^9}\Big)t^6$$
$$+ \Big(q^{10} + q^9 + 2q^8 + 3q^7 + 5q^6 + 6q^5 + 8q^4 + 9q^3 + 11q^2 + 11q + 12$$
$$+ \frac{11}{q} + \frac{11}{q^2} + \frac{9}{q^3} + \frac{8}{q^4} + \frac{6}{q^5} + \frac{5}{q^6} + \frac{3}{q^7} + \frac{2}{q^8} + \frac{1}{q^9} + \frac{1}{q^{10}}\Big)t^5$$
$$+ \Big(q^{10} + q^9 + 2q^8 + 3q^7 + 5q^6 + 6q^5 + 8q^4 + 9q^3 + 11q^2 + 11q + 12$$
$$+ \frac{11}{q} + \frac{11}{q^2} + \frac{9}{q^3} + \frac{8}{q^4} + \frac{6}{q^5} + \frac{5}{q^6} + \frac{3}{q^7} + \frac{2}{q^8} + \frac{1}{q^9} + \frac{1}{q^{10}}\Big)t^4$$
$$+ \Big(q^9 + q^8 + 2q^7 + 3q^6 + 4q^5 + 5q^4 + 7q^3 + 7q^2 + 8q + 8$$
$$+ \frac{8}{q} + \frac{7}{q^2} + \frac{7}{q^3} + \frac{5}{q^4} + \frac{4}{q^5} + \frac{3}{q^6} + \frac{2}{q^7} + \frac{1}{q^8} + \frac{1}{q^9}\Big)t^3$$

$$+\Big(q^7+q^6+2q^5+2q^4+3q^3+3q^2+4q+4+\frac{4}{q}+\frac{3}{q^2}+\frac{3}{q^3}+\frac{2}{q^4}+\frac{2}{q^5}+\frac{1}{q^6}+\frac{1}{q^7}\Big)t^2$$

$$+\Big(q^4+q^3+q^2+q+1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}\Big)t+1.$$

Полином Пуанкаре когомологий M_H^9:

$$t^9+\Big(q^4+q^3+q^2+q+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}\Big)t^8$$

$$+\Big(q^7+q^6+2q^5+q^4+2q^3+2q^2+3q+3+\frac{3}{q}+\frac{2}{q^2}+\frac{2}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{2}{q^5}+\frac{1}{q^6}+\frac{1}{q^7}\Big)t^7$$

$$+\Big(q^9+q^8+q^7+2q^6+2q^5+3q^4+4q^3+4q^2+4q+4$$

$$+\frac{4}{q}+\frac{4}{q^2}+\frac{4}{q^3}+\frac{3}{q^4}+\frac{2}{q^5}+\frac{2}{q^6}+\frac{1}{q^7}+\frac{1}{q^8}+\frac{1}{q^9}\Big)t^6$$

$$+\Big(q^{10}+q^8+q^7+2q^6+2q^5+3q^4+2q^3+4q^2+3q+4$$

$$+\frac{3}{q}+\frac{4}{q^2}+\frac{2}{q^3}+\frac{3}{q^4}+\frac{2}{q^5}+\frac{2}{q^6}+\frac{1}{q^7}+\frac{1}{q^8}+\frac{1}{q^{10}}\Big)t^5$$

$$+\Big(q^{10}+q^8+q^7+2q^6+2q^5+3q^4+2q^3+4q^2+3q+4$$

$$+\frac{3}{q}+\frac{4}{q^2}+\frac{2}{q^3}+\frac{3}{q^4}+\frac{2}{q^5}+\frac{2}{q^6}+\frac{1}{q^7}+\frac{1}{q^8}+\frac{1}{q^{10}}\Big)t^4$$

$$+\Big(q^9+q^8+q^7+2q^6+2q^5+3q^4+4q^3+4q^2+4q+4$$

$$+\frac{4}{q}+\frac{4}{q^2}+\frac{4}{q^3}+\frac{3}{q^4}+\frac{2}{q^5}+\frac{2}{q^6}+\frac{1}{q^7}+\frac{1}{q^8}+\frac{1}{q^9}\Big)t^3$$

$$+\Big(q^7+q^6+2q^5+q^4+2q^3+2q^2+3q+3+\frac{3}{q}+\frac{2}{q^2}+\frac{2}{q^3}+\frac{1}{q^4}+\frac{2}{q^5}+\frac{1}{q^6}+\frac{1}{q^7}\Big)t^2$$

$$+\Big(q^4+q^3+q^2+q+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}+\frac{1}{q^3}+\frac{1}{q^4}\Big)t+1.$$

9.4.3. *Расщепление когомологий комплекса Шевалле — Эйленберга инволюцией I.* Полиномы Пуанкаре расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\widehat{P}_4^{\text{even}}(t)=5t^8+20t^7+40t^6+60t^5+66t^4+44t^3+16t^2+4t+1,$$

$$\widehat{P}_4^{\text{odd}}(t)=t^9+4t^8+16t^7+44t^6+66t^5+60t^4+40t^3+20t^2+5t.$$

Полиномы Пуанкаре когомологий многообразия Гейзенберга $H(M_H^9)$, расщепленных инволюцией I:

$$P^{\text{even}}_{H(M_H^9)}=4t^8+15t^7+24t^6+20t^5+22t^4+24t^3+12t^2+4t+1,$$

$$P^{\text{odd}}_{H(M_H^9)}=t^9+4t^8+12t^7+24t^6+22t^5+20t^4+24t^3+15t^2+4t.$$

Заключение

Многообразие Гейзенберга M_H^{2n+1} имеет замечательную реализацию. Рассмотрим n–мерное абелево многообразие V с одномерным комплексным расслоением, соответствующим кэлеровой форме на V. Ассоциированное расслоение над V со слоем S^1 можно отождествить с расслоением $M_H^{2n+1}\to T^{2n}$ (см. пп. 2.2.1 и 4.2).

Описанная конструкция естественно приводит к вопросам о приложениях дифференциальной геометрии и алгебраической топологии многообразий Гейзенберга в задачах о неабелевых тэта–функциях, квантовых торах и комбинаторике коэффициентов q-полиномов Гаусса, которые обсуждаются в литературе в связи с проблемами математической и теоретической физики (см., например, [**34**]–[**37**]).

Развитию наших результатов в этом круге вопросов мы планируем посвятить следующие публикации.

Благодарности

Авторы выражают благодарность В. Рубцову за полезное обсуждение результатов этой работы.

Литература

1. L. J. Santharoubane, “Cohomology of Heisenberg Lie algebras”, *Proc. Am. Math. Soc.* **87**, No. 1, 23–28 (1983).
2. M. A. Alvarez, “The Betti numbers for Heisenberg Lie algebras”, *J. Algebr. Comb.* **52**, No. 4, 461–467 (2020).
3. E. Sköldberg, “The homology of Heisenberg Lie algebras over fields of characteristic two”, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **105**, No. 2, 47–49 (2005).
4. G. Cairns, S. Jambor, “The cohomology of the Heisenberg Lie algebras over fields of finite characteristic”, *Proc. Am. Math. Soc.* **136**, No. 411, 3803–3807 (2008).
5. R. Howe, “Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity–free actions and beyond”, In: *The Schur Lectures (1992)*, pp. 1–182, Bar–Ilan Univ., Ramat–Gan (1995).
6. В. В. Жаринов, “О когомологиях алгебры Гейзенберга”, *Тр. МИАН* **228**, 61–75 (2000); English translation: *Proc. Steklov Inst. Math.* **228**, 52–66 (2000).
7. S. T. Lee, J. A. Packer, “The cohomology of the integer Heisenberg groups”, *J. Algebra* **184**, No. 1, 230–250 (1996).
8. А. И. Мальцев, “Об одном классе однородных пространств”, *Изв. АН СССР, Сер. мат.* **13**, No. 1, 9–32 (1949); English translation: *Am. Math. Soc. Transl.* **39** (1951).
9. K. Nomizu, “On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups”, *Ann. Math. (2)* **59**, No. 3, 531–538 (1954).
10. В. В. Морозов, “Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка”, *Изв. ВУЗов, Мат.* No. 4, 161–171 (1958).
11. W. A. De Graaf, “Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2”, *J. Algebra* **309**, No. 2, 640–653 (2007).
12. В. М. Бухштабер, Ф. Ю. Попеленский, “Когомологии алгебр Хопфа и произведения Масси”, *Успехи мат. наук.* **79**, No. 4, 5–94 (2024).
13. В. М. Бухштабер, “Характер Чженя–Дольда в кобордизмах. I”, *Мат. сб.* **83**, No. 4, 575–595 (1970); English translation: *Math. USSR-Sb.* **12**, No. 14, 573–594 (1970).
14. D. Riley, H. Usefi, “The isomorphism problem for universal enveloping algebras of Lie algebras”, *Algebr. Represent. Theory* **10**, No. 6, 517–532 (2007).
15. A. M. DuPré, “Combinatorial extension cohomology. I: Groups”, *Adv. Math.* **106**, No. 1, 96–117 (1994).
16. A. J. Berrick, A. A. Davydov, “Splitting of Gysin extensions”, *Algebr. Geom. Topol.* **1**, No. 2, 743–762 (2001).
17. J. Dixmier, “Cohomologie des algèbres des Lie nilpotentes”, *Acta Sci. Math.* **16**, 246–250 (1955).
18. B. Kostant, “Lie algebra cohomology and the generalized Borel–Weil theorem”, *Ann. Math. (2)* **74**, No. 2, 329–387 (1961).

19. В. В. Лычагин, “Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка”, *Успехи мат. наук* **34**, No. 1, 137–165 (1979); English translation: *Russ. Math. Surv.* **34**, No. 1, 149–180 (1979).

20. A. Kushner, V. Lychagin, V. Rubtsov, *Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007).

21. Ш.-Ш. Чжэнь, *Комплексные многообразия*, ИЛ, М. (1961).

22. Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М. (2003).

23. G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Springer, Berlin etc. (1978).

24. S. Eilenberg, T. Ganea, “On the Lusternik–Schnirelmann category of abstract groups”, *Ann. Math. (2)* **65**, No. 3, 517–518 (1957).

25. J. Oprea, “The category of nilmanifolds”, *Enseign. Math., II. Sér.* **38**, No. 1–2, 27–40 (1992).

26. В. М. Бухштабер, “Полиномиальная эйлерова характеристика нильмногообразий”, *Функц. анал. прилож.* **58**, No. 1, 22–41 (2024); English translation: *Funct. Anal. Appl.* **58**, No. 1, 17–33 (2024).

27. M. Khovanov, “A categorification of the Jones polynomial”, *Duke Math. J.* **101**, No. 3, 359–426 (2000).

28. J. J. Sylvester, “ Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants”, *Phil. Mag. (5)*, **5**, No. 30, 178–188 (1878).

29. K. M. O’Hara, “Unimodality of Gaussian coefficients: A constructive proof”, *J. Comb. Theory* **53**, No. 1, 29–52 (1990).

30. I. Pak, G. Panova, “Strict unimodality of q–binomial coefficients”, *C. R., Math., Acad. Sci. Paris* **351**, No. 11–12, 415–418 (2013).

31. D. Kraines, “Massey higher products”, *Trans. Am. Math. Soc.* **124**, No. 3, 431–449 (1966).

32. J. P. May, “Matric Massey products”, *J. Algebra.* **12**, No. 4, 533–568 (1969).

33. И. К. Бабенко, И. А. Тайманов, “Произведения Масси в симплектических многообразиях”, *Мат. сб.* **191**, No. 8, 3–44 (2000); English translation: *Sb. Math.* **191**, No. 8, 1107–1146 (2000).

34. К. Кассель, *Квантовые группы*, Фазис, М. (1999).

35. F. Luef, Yu. I. Manin, “Quantum theta functions and Gabor frames for modulation spaces”, *Lett. Math. Phys.* **88**, No. 1–3, 131–161 (2009).

36. Yu. I. Manin, “Theta functions, quantum tori and Heisenberg groups”, *Lett. Math. Phys.* **56**, No. 3, 295–320 (2001).

37. A. S. Schwarz, “Theta functions on noncommutative tori”, *Lett. Math. Phys.* **58**, No. 1, 81–90 (2001).

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2024 г.

