С. С. Гончаров

ВЫЧИСЛИМЫЕ БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ И СЛОЖНОСТЬ ИДЕАЛА ФРЕШЕ

Вопросы вычислимости булевых алгебр лежат в русле многих исследований в теории конструктивных и вычислимых моделей, которая была инициирована А. И. Мальцевым и активно развивается в настоящее время. Мы исследуем один из давно обсуждаемых вопросов о разрешимости идеала Фреше и связи с разрешимостью множества атомов.

Посвящается 115–летнему юбилею основателя Сибирской школы алгебры и логики академика А. И. Мальцева

1. Введение

В статье [**1**] Мальцева было положено начало систематического изучения конструктивных моделей. Мальцев ввел [**2**] понятие рекурсивной модели. В современной литературе чаще используется термин *вычислимость* вместо *рекурсивности*. Соответственно, рекурсивные модели также часто называют вычислимыми. Мальцев отметил, что понятия конструктивной модели и вычислимой модели эквивалентны. В настоящее время общепринятым становится термин *вычислимая алгебраическая структура*.

Отметим два перспективных направления в исследованиях вычислимости алгебраических структур. Одно направление связано с проблемой существования вычислимых представлений алгебраических систем. Второе относится к исследованиям автоустойчивости алгебраических структур и их алгоритмических размерностей [**3**]. Эта проблематика активно изучалась для булевых алгебр [**4**] и присутствовала во многих работах, посвященных изучению ограниченной n–разрешимости, а также различных алгоритмических свойств и их взаимосвязей в вычислимых булевых алгебрах и их обогащениях. В частности, Фейнер [**5**] инициировал изучение вопроса о существовании вычислимых представлений позитивных булевых алгебр. Для отрицательного решения этой проблемы Фейнер построил новую иерархию подмножеств множества натуральных чисел, вычислимых над теорией стандартной модели арифметики. Эта иерархия, которую стали называть *фейнеровской иерархией*, показала свою эффективность также при исследовании вопроса о существовании разрешимых представлений вычислимых булевых алгебр.

В данной статье мы исследуем вопрос о разрешимости идеала Фреше в булевых алгебрах. Мы используем стандартные определения и обозначения из монографии [**4**], в которой рассматриваются счетные, а также вычислимые и разрешимые булевы алгебры и изучаются их связи с общей проблематикой теории конструктивных моделей [**3**]. Определения и результаты теории вычислимости можно найти в [**6**], а теории моделей — в [**7**].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No. 23-11-00170, https://rscf.ru/project/23-11-00170/.

С. С. Гончаров: Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, s.s.goncharov@math.nsc.ru.

Английский перевод опубликован в *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 72–82 (2024).

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра или алгебраическая система некоторой сигнатуры σ. Заметим, что булевы алгебры в разных применениях могут рассматриваться в разных сигнатурах [**4**]. Мы используем стандартное определение булевой алгебры как алгебры подмножеств некоторого множества, замкнутой относительно объединений, пересечений и взятия дополнений, что эквивалентно обычному алгебраическому определению через выполнимость тождеств.

Обозначим через $\mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ элементарную теорию рассматриваемой алгебраической системы. Если ν — нумерация основного множества алгебраической системы $\mathfrak{B}$, то назовем пару $(\mathfrak{B},\nu)$ *нумерованной алгебраической системой*. Для нумерованной алгебраической системы $(\mathfrak{B},\nu)$ рассмотрим обогащение $\mathfrak{B}_\nu$ структуры $\mathfrak{B}$ до сигнатуры σ_N, положив в качестве значения константы a_i элемент $\nu(i)$ для любого $i \in N$.

Определение 2.1. Нумерованная алгебраическая система $(\mathfrak{B},\nu)$ называется *конструктивной*, если множество истинных бескванторных формул в структуре $D(\mathfrak{B},\nu) \leftrightharpoons \{\varphi(c_{m_1},\ldots,c_{m_k} \mid \varphi(x_1,\ldots,x_{m_k})$ является бескванторной формулой и выполнено условие $\mathfrak{B} \models \varphi(\nu m_1,\ldots,\nu m_k)\}$ вычислимо, где формулы наряду с сигнатурными символами содержат также константные символы для элементов структуры.

Напомним эквивалентные понятия разрешимой [**8**] и вычислимой (рекурсивной) алгебраической системы [**2**]. Последние были определены без нумераций, но на вычислимых основных множествах, которые являются подмножествами множества натуральных чисел или совпадают с множеством натуральных чисел.

Замечание 2.1. Вопросы изучения разрешимости различных фрагментов теорий также играют важную роль в теории вычислимых алгебраических систем. При рассмотрении фрагмента позитивных бескванторных формул возникает класс позитивных структур, исследование которых играет существенную роль не только в математической теории, но и для приложений в программировании.

Определение 2.2 (Мальцев [**2**]). Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *вычислимой* (*рекурсивной*), если множество A рекурсивно и операции и отношения на ней вычислимы.

Выбрав для каждого элемента в конструктивной системе наименьший номер и индуцируя на эту систему структуру нашей модели, получим вычислимую алгебраическую систему. Причем, если первоначальная алгебраическая система была сильно конструктивной, то полученная система будет разрешимой. Обратно, по вычислимой алгебраической системе легко построить ее конструктивизацию, взяв в качестве нумерации любое рекурсивное перечисление основного множества A, причем конструктивизация будет сильной, если исходная алгебраическая система разрешима.

В данной статье мы продолжаем изучение алгоритмических свойств вычислимых булевых алгебр, которые исследовались, в частности, в [**5, 4, 9**]. Отметим, что много вопросов об алгоритмических свойствах все еще остаются открытыми.

3. Множество атомов и идеал Фреше в булевых алгебрах

Один из давно поставленных, но нерешенных вопросов — выяснение взаимосвязей между сложностью множества атомов и идеала Фреше, состоящего из всех элементов булевой алгебры, которые равны объединениям конечных множеств атомов и нуля булевой алгебры.

Заметим, что для вычислимых суператомных булевых алгебр не только идеал Фреше, но и итерированные идеалы Фреше можно сделать вычислимыми. Однако это не так для произвольных вычислимых булевых алгебр.

Отметим, что имеются открытые вопросы о вычислимости булевых алгебр с выделенными идеалами как определимыми в булевой алгебре, так и произвольными, а также некоторые вопросы из теории вычислимых алгебраических структур в таких обогащениях булевых алгебр. Остаются пока открытыми и некоторые интересные вопросы, связанные с обогащениями подалгебр и автоморфизмами.

В данной статье нас будут интересовать свойства фильтров Фреше для булевых алгебр. Докажем следующие простые свойства, связанные с атомами. Сначала напомним определения и понятия, применяемые в технике порождающих деревьев для булевых алгебр [**4**]. Заметим, что эта техника применялась при изучении счетных булевых алгебр.

В [**4**] для построения порождающих множеств счетных булевых алгебр использовались подмножества множества натуральных чисел с частичным порядком $\preceq$. В этом случае в качестве наибольшего элемента принимался 0 и для каждого элемента n из N ниже определялись два меньших элемента $L(n) = 2n+1$ и $R(n) = 2n+2$. Тем самым на N задавался частичный порядок, определяющий 2-ветвящееся дерево.

Определение 3.1. Подмножество $D \subseteq N$ называется *деревом*, если для любого $n \in D$ все бóльшие элементы лежат в D, а для любого ненулевого элемента $n \in D$ его сосед $S(n)$ также лежит в D, где

$$S(2m+1) \rightleftharpoons 2m+2, \quad S(2m+2) \rightleftharpoons 2m+1.$$

В [**4**] показано, что для любой счетной булевой алгебры B существуют дерево D и вложение g из D в B такие, что $g(0) = 1_B$, для любого $n \in D$ значение $g(n)$ отлично от нуля булевой алгебры B, если $L(n) \in D$, то по условию $R(n) \in D$ выполнены равенства

$$g(2n+1) \cup g(2n+2) = g(n),$$

$$g(2n+1) \cap g(2n+2) = 0_B$$

и для любого ненулевого элемента булевой алгебры существуют элемент $b \in B$ и конечное подмножество K в дереве D такие, что

$$b = \bigcup_{n \in K} g(n).$$

Таким образом, каждый ненулевой элемент равен конечному объединению элементов дерева $g(D)$, порождающего булеву алгебру B.

Заметим, что концевые элементы дерева D, под которыми уже нет элементов дерева D, в точности определяют атомы булевой алгебры B. В [**4**] по любому вычислимо перечислимому дереву D построены вычислимая булева алгебра B_D и вычислимая функция g, которая отображает D в B_D и определяет порождающее дерево $g(D)$ в B_D. Заметим также, что по любой вычислимой булевой алгебре можно определить эффективно вычислимо перечислимое дерево и вычислимую функцию g, определяющую для этой булевой алгебры это порождающее дерево.

Лемма 3.1. *Если B — вычислимая булева алгебра с вычислимо перечислимым множеством атомов, то множество атомов вычислимо, а множество элементов идеала Фреше вычислимо перечислимо.*

Доказательство. Из вычислимой перечислимости множества атомов и определимости множества неатомов $\exists$–формулой по теореме Поста получаем вычислимость множества атомов и вычислимость порождающего дерева. Из перечислимости множества атомов непосредственно следует перечислимость множества элементов идеала Фреше. Если мы будем перечислять конечные объединения подмножеств всех перечисленных к этому шагу атомов, то вычислимая перечислимость очевидна для этого вычислимого представления с вычислимо перечислимым множеством атомов. Лемма доказана. $\square$

Воспользуемся техникой порождающих деревьев из [**4**] для доказательства следующего свойства алгоритмической сложности множества атомов в различных представлениях булевой алгебры с бесконечным вычислимым множеством атомов.

Лемма 3.2. *Если B — вычислимая булева алгебра с бесконечным вычислимым множеством атомов, то для этой булевой алгебры существует другое вычислимое представление B', в котором множество атомов не вычислимо, но идеал Фреше вычислимо перечислим.*

Доказательство. Пусть задана вычислимая булева алгебра B. Ввиду отмеченных выше свойств порождающих деревьев мы можем рассмотреть вычислимо перечислимое порождающее дерево D для нашей булевой алгебры и вычислимую функцию g, определяющую это порождающее дерево в булевой алгебре B. Из вычислимости множества атомов в булевой алгебре B получаем перечислимость концевых элементов в дереве D. Отсюда очевидно, что это дерево вычислимо. Рассмотрим все концевые точки A в дереве D и вычислимо перечислимое не вычислимое подмножество $X \subseteq N$ [**6**]. Так как множество A вычислимо, можно взять вычислимую функцию f, отображающую N на A в порядке возрастания элементов A. Определим дерево

$$D' \rightleftharpoons D \cup \{L(n), R(n) | n \in f(X)\},$$

т.е. под концевые элементы дерева D добавим по два лежащих ниже элемента. Тем самым мы определяем дерево $D' \supseteq D$.

Определим булеву алгебру $B_{D'}$ по порождающему дереву D' и в ней — подалгебру B_D с порождающим деревом D. Очевидно, что булевы алгебры B изоморфны, так как порождаются одним и тем же деревом D, а булева алгебра $B_{D'}$ согласно [**4**, предложение 1.7.2] изоморфна булевой алгебре B_D и, следовательно, B. Однако в булевой алгебре $B_{D'}$ множество атомов не вычислимо, так как множество концевых элементов дерева D' не вычислимо из-за того, что подмножество элементов множества $A \setminus f(X)$ не вычислимо перечислимо по построению. Таким образом, мы построили для B другое вычислимое представление, в котором множество атомов не вычислимо. Однако множество элементов фильтра Фреше в дереве D' состоит из элементов в идеале Фреше дерева D и добавленных элементов $\{L(n), R(n) | n \in f(X)\}$, так как мы расщепили элементы из образа вычислимо перечислимого не вычислимого множества X на пары концевых элементов; элементы из фильтра Фреше в дереве там и остались, а эти пары атомов добавились. Теперь объединения конечных элементов из идеала Фреше в дереве определяют идеал Фреше, который будет вычислимо перечислимым также в булевой алгебре $B_{D'}$. Итак, мы построили вычислимую булеву алгебру, изоморфную B, с вычислимо перечислимым идеалом Фреше, но при этом атомы уже не образуют вычислимо перечислимое множество. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, из вычислимой перечислимости идеала Фреше вывести вычислимую перечислимость множества атомов в той же алгебре не получится. Для вычислимой булевой алгебры с вычислимым бесконечным множеством атомов можно показать, что существуют также другие вычислимые представления. Заметим, что если в булевой алгебре число атомов конечно, то идеал Фреше и множество атомов всегда конечны и вычислимы, так что вопросы о вычислимости не возникают. Представляет интерес лишь случай с бесконечным числом атомов.

Лемма 3.3. *Если B — вычислимая булева алгебра с бесконечным множеством атомов и идеал Фреше вычислимо перечислим, то для этой булевой алгебры существует другое вычислимое представление B', в котором множество атомов вычислимо.*

Доказательство. Вновь воспользуемся конструкцией порождающих деревьев для булевых алгебр. Рассмотрим для булевой алгебры вычислимо перечислимое дерево D, которое задает в B порождающее дерево. Пусть g задает отображение D в B и $g(D)$ — порождающее дерево в B.

Построим новое дерево, которое будет определять ту же булеву алгебру, но множество атомов у нее будет вычислимо. Для этого достаточно построить дерево, в котором множество концевых вершин будет вычислимо.

Мы будем строить новое дерево так, чтобы деревья различались лишь на элементах из идеалов Фреше для строящихся по ним булевых алгебр. По условию идеал Фреше у нашей булевой алгебры вычислимо перечислим. Поэтому множество элементов дерева, которые определяют в булевой алгебре элементы идеала Фреше, также будет вычислимо перечислимо. Рассмотрим подмножество F из D, образы элементов которого попадают в идеал Фреше. Так как в булевой алгебре бесконечное число атомов, все они являются элементами идеала Фреше и им соответствуют концевые элементы дерева, подмножество F в дереве D бесконечно и существует вычислимое перечисление элементов F без повторений $a_0, a_1, a_n, \ldots$.

По построению порождающее дерево D, построенное по вычислимой булевой алгебре B, вычислимо перечислимо, и мы можем для него построить вычислимую последовательность конечных деревьев

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \ldots, D_n, \ldots$$

и последовательность подмножеств

$$\varnothing = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots, F_n, \ldots,$$

которые состоят из элементов идеала Фреше булевой алгебры B, перечисленных к шагу n, а именно
$$F_n \rightleftharpoons \{x \in D_n | (\exists i < n) x \preceq a_i\}.$$
Определим D_{n+1} так, что $\{a_0, a_1, , a_n\} \subseteq D_{n+1}$.

В процессе построения искомого дерева будем строить по шагам вычислимую последовательность конечных деревьев
$$D_0^* \subseteq D_1^* \subseteq D_2^* \subseteq \ldots, D_n^*, \ldots$$
и последовательность концевых точек
$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots, A_n, \ldots$$
строящегося дерева
$$D^* \rightleftharpoons \bigcup_{n \in N} D_n^*.$$

Шаг 0. Определим $D_0 \rightleftharpoons \{0\}$ и $A_0 \rightleftharpoons \varnothing$.

Шаг $n+1$. Пусть D_n^* и концевые точки A_n в D_n^* уже построены и $D_n^*, \mathcal{A}_n \subseteq D_n$.

Согласно нашему предположению к шагу $n+1$ в D_n^* уже перечислены элементы $a_0, \ldots, a_n$. Определим дерево
$$D_{n+1}^{'} \rightleftharpoons D_n^* \cup \{x \in D_{n+1} | (\exists y)((x \preceq y \& y \ \text{— концевой элемент в } D_n^*) \& \neg(y \in A_n))\}.$$
Теперь расширим множество D'_{n+1} до множества D_{n+1}^*: для каждого концевого элемента a в $D_{n+1}^{'}$, который не лежит в множестве A_n, найдется элемент z из $\{a_0, \ldots, a_n\}$ такой, что $a \preceq z$; этот элемент добавляем в D_{n+1}^*. Добавим оба элемента $L(a)$ и $R(a)$ в множество A_{n+1}, т.е. эти элементы становятся концевыми элементами дерева, и элементы под ними уже не добавляются в дерево.

Таким образом, мы добавляем в D_{n+1}^* элементы, которые, возможно, не лежат в D и предшествующий элемент n, лежащий в идеале Фреше в D, остается в идеале Фреше в строящемся дереве D^*. Возможно, что эти элементы попадут в D позже, но они уже объявлены атомами в D^* и элементы ниже этих элементов уже в дальнейшем не добавятся в D^*. Заметим также, что если элемент дерева D не лежит в идеале Фреше этого дерева, то он попадет в дерево D^*. Случай, когда элемент не лежит в D и попадает в D^*, возможен лишь тогда, когда он построен для концевого элемента дерева D и сразу же при добавлении объявляется концевым в дереве D^*.

Из построения следует, что множество $D^{**} \rightleftharpoons D \cap D^*$ является деревом и в нем под любым его концевым элементом лежит конечное число элементов из D и D^*. По теореме Реммеля (см. [**4**]) все три булевы алгебры $B_{D^{**}}$, B_{D^*} и B_D изоморфны, а множество концевых элементов в D^* перечислимо и, следовательно, множество атомов также вычислимо перечислимо в B_{D^*}, откуда по теореме Поста следует его вычислимость. Лемма доказана. □

Из доказанных лемм мы сразу получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Булева алгебра имеет вычислимое представление с вычислимо перечислимым множеством атомов тогда и только тогда, когда для нее существует вычислимое представление с вычислимо перечислимым идеалом Фреше.*

Рассмотрим следующий вопрос: Будет ли из разрешимости атомов в некотором представлении следовать разрешимость в некотором вычислимом представлении идеала Фреше? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к важной классификации функций, вычислимых с оракулом множества $\varnothing^\omega$, что совпадает со сложностью теории стандартной модели арифметики. Эта классификация предложена Фейнером [**5**] и уже эффективно применялась для исследования многих важных вопросов в теории булевых алгебр [**4**] и других вопросов теории вычислимости.

4. Иерархия Фейнера

Напомним кратко эту важную конструкцию — иерархию Фейнера [**5**]. Фейнер ввел тонкую классификацию множеств, вычислимых относительно $\varnothing^\omega$, но не по уровням арифметических формул, определяющих сложность фрагмента арифметической сложности для определения вычислимости, а так, чтобы при необходимости можно было бы использовать сложности, равномерно растущие в зависимости от уровня вычислимости функции на начальном отрезке.

Следуя [**6**], для любого множества A определим скачок A' как $\{n \,|\, \varphi_n^A(n)$ определена$\}$, где $\{\varphi_n^A(x), n \in N\}$ — универсальная вычислимая нумерация всех частично вычислимых функций с оракулом A. Начиная с пустого множества, определим $\varnothing^0 \rightleftharpoons \varnothing$ и $\varnothing^{n+1} \rightleftharpoons (\varnothing^n)'$, а для ординала ω положим $\varnothing^\omega \rightleftharpoons \{(n,m)|m \in \varnothing^n\}$.

Пусть $e \in N$ и $(a,b) \in N^2$. Введем класс функций $\Phi(a,b)$, вычислимых с оракулом $\varnothing^\omega$, считая, что функция $\varphi_e^{\varnothing^\omega}$ имеет тип $\Phi(a,b)$, если она определена для всех натуральных чисел $x \in N$ и при вычислении значения $\varphi_e^{\varnothing^\omega}(x)$ на элементе x не задает оракулу $\varnothing^\omega$ вопрос "$(m,n) \in \varnothing^\omega$" для любых m, n таких, что $m > a + xb$. В этом случае запись $\varphi_e^{\varnothing^\omega} \in \Phi(a,b)$ означает, что для $\varnothing^\omega$-номера вычислимой с оракулом $\varnothing^\omega$ функции выполнено условие принадлежности этой функции классу $e \in \Phi(a,b)$.

Подмножество $X \subseteq N$ принадлежит классу Фейнера $\Phi(a,b)$ подмножеств N, если для характеристической функции χ_X этого множества есть $\varnothing^\omega$-номер вычислимой с оракулом $\varnothing^\omega$ функции, для которого выполнено условие принадлежности этой функции классу $e \in \Phi(a,b)$.

Фейнер установил существование вычислимых функций, определяющих сложность уровня арифметической иерархии по аргументу, нужному для проверки условия принадлежности соответствующему классу иерархии, а также построил близкие по сложности определения множества, которые не входят в заданный уровень иерархии. Приведем эти три результата, которые потребуются для нашей конструкции булевой алгебры.

Фейнер [**5**] дал ясное и элегантное описание классов иерархии.

Предложение 4.1 ([**5**]). *Если f — вычислимая функция, отображающая N на N, то $X \rightleftharpoons \{n|(\exists z_1)(\forall z_2)\ldots f(\langle z_1, z_2, \ldots, z_{a+nb}\rangle) = 1\}$ тогда и только тогда, когда $X \in \Phi(a,b)$.*

Для множеств, которые не лежат в фиксированном классе, но близки по вычислительным характеристикам, на основе этого подхода получен метод построения таких множеств. Для этого была рассмотрена равномерно вычислимая аппроксимация оракула $\varnothing^\omega$ множествами

$$\varnothing^{\omega n} \rightleftharpoons \{\langle x, m\rangle | x \in \varnothing^m \& m \leqslant n\}.$$

Определим искомое множество

$$X(a,b) \rightleftharpoons \{n|n \text{ четно и } n/2^{\varnothing^{\omega\, a+nb}}(n) = 0\}.$$

Конструкция Фейнера дает возможность рассматривать вычислимую последовательность некоторых аргументов, на которых определяется оценка, тогда как на остальных она не важна, но такие множества уже не лежат в данном уровне иерархии Фейнера. В этом случае в качестве такой последовательности берется последовательность четных чисел. Это множество обладает следующими свойствами.

Предложение 4.2 ([**5**]). 1. *Существует вычислимая функция f, отображающая N на N и такая, что $2m \in X(2,2)$ тогда и только тогда, когда*

$$\{(\exists i)(\exists^\omega z_1)\ldots(\exists^\omega z_{2m})\ldots f(\langle i, z_1, z_2, \ldots, z_{2m}\rangle) = 1\}.$$

2. *Если $Y \subseteq N$ и симметрическая разность $X(2,2) \triangle Y$ содержит только нечетные числа, то $Y \notin \Phi(2,2)$.*

Теорема 4.1. *Существует позитивная атомная булева алгебра, у которой нет вычислимого представления.*

Доказательство. Будем следовать конструкции Фейнера с небольшими изменениями. Для этого вначале оценим в иерархии Фейнера характеристику вычислимой атомной булевой алгебры с вычислимым представлением относительно модифицированного свойства Фейнера с заменой условия слагаемого в булевой алгебре безатомных элементов на элементы, рассмотренные в $1 + \omega \times \eta$ вместо элементов типа $1 + \eta$.

Определим свойства булевой алгебры $\mathcal{B}$ и последовательности идеалов Фреше $F_n(\mathcal{B})$, $n \in N$, где $F_0(\mathcal{B}) \rightleftharpoons \{0_{\mathcal{B}}\}$ и $F_1(\mathcal{B})$ — идеал Фреше, состоящий из объединения конечного числа атомов булевой алгебры $\mathcal{B}$, а $F_{n+1}(\mathcal{B})$ состоит из элементов b из $\mathcal{B}$ таких, что $b/F_n(\mathcal{B})$ лежит в идеале Фреше фактор–алгебры $\mathcal{B}/F_n(\mathcal{B})$:

(1) $\alpha_n(x) \rightleftharpoons x \in F_{n+1}(\mathcal{B})$,

(2) $\lambda_n \rightleftharpoons \neg\alpha_n(x)$,

(3) $\mathrm{Atomistic}_n(x) \rightleftharpoons x/F_n(\mathcal{B})$ — атомный элемент в $\mathcal{B}/F_{n+1}(\mathcal{B})$,

(4) $\gamma_n(x) \rightleftharpoons x(\mathcal{B}) \notin F_{n+1}(\mathcal{B})\&(\forall y)(y \leqslant_{\mathcal{B}} x \Rightarrow (y \in F_n(\mathcal{B})$, если y/F_1 — атомный элемент в $\mathcal{B}/F_1(\mathcal{B})\&$ существует бесконечно много элементов под x, принадлежащих $\mathcal{B}/F_n(\mathcal{B})$, но не принадлежащих $\mathcal{B}/F_{n-1}(\mathcal{B}))$,

(5) $\Psi_n \rightleftharpoons (\exists x)\gamma_n(x)$.

Рассмотрим несколько модифицированную конструкцию построения по линейно упорядоченному множеству L булевой алгебры $\mathcal{B}_L$. Рассмотрим вначале булеву алгебру $(P(L), \cup, \cap, C, 0, 1)$ всех подмножеств $P(L)$ основного множества L с операциями объединения, пересечения, взятия дополнения и выделенными элементами для пустого множества и всего основного множества L. Для любых элементов a, b из L определим полуоткрытые интервалы вида

$$]a, b] \rightleftharpoons \{x \in L | a \leqslant x \& x < b\},$$

$$]-\infty, b] \rightleftharpoons \{x \in L | x < b\},$$

$$[a, +\infty[\rightleftharpoons \{x \in L | a \leqslant x\}.$$

Рассмотрим подалгебру булевой алгебры $(P(L), \bigcup, \bigcap, C, 0, 1)$, порожденную всеми такими полуоткрытыми интервалами, и обозначим ее $\mathcal{B}_L$. Очевидно, что $\mathcal{B}_L$ — булева алгебра и она порождается множеством элементов $\{[a, +\infty[| a \in L\}$, которые упорядочены в ней по типу L. Кроме того, булева алгебра $\mathcal{B}_L$ счетна, если L — счетный линейный порядок.

В силу [**4**, лемма 3.5.1] для построенных изоморфизмов в булевой алгебре $\mathcal{B}_{\omega^{n+1}+\omega\times\eta}$ выполнена определенная нами формула Ψ_n, которая равна формуле Ψ_n^1 из [**4**].

Лемма 4.1. *Если атомная булева алгебра $\mathcal{B}$ вычислима, то справедливы следующие утверждения.*

0. *Формула $\alpha_0(x) \rightleftharpoons x \in F_1(\mathcal{B})$ выделяет вычислимое множество.*

1. *Формула $\alpha_{n+1}(x) \rightleftharpoons x \in F_{n+1}(\mathcal{B})$ выделяет Σ^0_{2n+2} множество в булевой алгебре $\mathcal{B}$.*

2. *Формула $\lambda_n \rightleftharpoons \neg\alpha_n(x)$ выделяет Π^0_{2n} множество в булевой алгебре $\mathcal{B}$.*

3. *Формула* $\mathrm{Atomistic}_k(x) \rightleftharpoons x/F_k(\mathcal{B})$ *— атомный элемент в $\mathcal{B}/F_k(\mathcal{B})$ выделяет Π^0_{2k+3} множество в булевой алгебре $\mathcal{B}$.*

4. *Формула $\gamma_n(x) \rightleftharpoons x \notin F_{n+1}(\mathcal{B})\&(\forall y)(y \leqslant_{\mathcal{B}} x) \Rightarrow (y \in F_n(\mathcal{B})$, если $y/F_1(\mathcal{B})$ — не атомный элемент & существует бесконечно много элементов, находящихся под x, принадлежащих $F_n(\mathcal{B})$, но не принадлежащих $F_{n-1}(\mathcal{B}))$ выделяет Π^0_{2n+1} множество в булевой алгебре $\mathcal{B}$.*

5. *Выполнимость последовательности формул $\Psi_n \rightleftharpoons (\exists x)\gamma_n(x), n \in N \& n \geqslant 4$ в булевой алгебре с вычислимым идеалом Фреше определяется последовательностью Σ^0_{2n+2} формул, проверкой выполнимости в булевой алгебре $\mathcal{B}$.*

6. *Множество $N(\mathcal{B}) \rightleftharpoons \{m | \mathcal{B} \models \Psi_m\}$ лежит в уровне $\Phi(2,2)$ иерархии Фейнера.*

Лемма доказывается простой проверкой истинности соответствующих формул и оценки их сложности, как в [**5**, предложение 3.5.3] и [**4**].

Следуя [**5**, лемма 4.5], можно доказать следующее предложение.

Предложение 4.3 ([**5**]). *Если δ — функция трех переменных из N такая, что для любых m, i, h задано подмножество $\delta(m,i,h) \leqslant (\omega \times \omega^{2m}0$ и $\omega^{2m-1} \leqslant \delta(m,i,h)$, то $\mathcal{B} \models \Psi_{2m}$ тогда и только тогда, когда $(\exists i)\neg(\exists^{\omega} h)(\delta(m,i,h) = \omega^{2m})$, где*

$$\mathcal{B} = \sum_{m\in\omega}\sum_{i\in\omega}\sum_{m\in\omega}(\delta(m,i,h) + 1 + \omega \times \eta).$$

Аналогично [**5**, § 5] определим вычислимый линейный порядок упорядоченного типа $\sum\limits_{m\in\omega}(\omega^{2m} + 1 + \omega \times \eta) \times \omega^2$, а затем для этой вычислимой атомной булевой алгебры определим вычислимо перечислимый идеал ∇, который и даст нам искомую позитивную атомную булеву алгебру, не допускающую вычислимых представлений.

Теперь модифицируем конструкцию Фейнера с заменой порядка $N, \subset$ упорядоченного типа $1 + \eta$, где η — плотный счетный порядок без концов η, к которому добавлен первый элемент, на вычислимый порядок $N, \subset_1$ упорядоченного типа $1 + \omega \times \eta$.

Как и в конструкции Фейнера, определяем вычислимо перечислимый идеал ∇ на булевой алгебре $(B)_{\sum\limits_{m\in\omega}(\omega^{2m}+1+\omega\times\eta)\times\omega^2}$, как и в [**5**] позитивную, но уже атомную булеву алгебру такую, что в ней выполнена формула Φ_{2m} тогда и только тогда, когда $2m \in X(2,2)$. Отсюда следует требуемый результат: эта позитивная атомная булева алгебра не имеет вычислимого представления. Теорема доказана. □

Докажем основную теорему о существовании вычислимой атомной булевой алгебры с вычислимым множеством атомов и вычислимо перечислимым идеалом Фреше такой, что в любом ее вычислимом представлении идеал Фреше не вычислим.

Теорема 4.2. *Существует вычислимая атомная булева алгебра с вычислимым множеством атомов и вычислимо перечислимым идеалом Фреше такая, что ее фактор–алгебра по идеалу Фреше не имеет вычислимого представления и эта алгебра атомная.*

Доказательство. Для позитивной булевой алгебры $\mathcal{B}$ из построения атомной булевой алгебры в теореме Фейнера построим порождающее дерево. Пусть задана вычислимая последовательность всех номеров элементов B. Очевидно, что элементы этой последовательности могут встречаться многократно с одним и тем же элементом из B. Без ограничения общности будем считать, что каждый элемент имеет бесконечно много номеров и существует рекурсивно перечислимое множество $\mathrm{Zero} = \{z_0 < z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$ всех номеров нулевого элемента булевой алгебры. Зафиксируем для нашей позитивной булевой алгебры вычислимые функции $f_{\cup}$, $f_{\cap}$, f_C для определения значений операций объединения, пересечения и взятия дополнения соответственно.

Будем строить по шагам порождающее дерево, которое будет вычислимо перечислимым, и его вложение g^t из D^t в $\mathcal{B}$. По построению $D^t \subseteq D^{t+1}$ и $g^{t+1}(x) = g^t(x)$ для всех $x \in D^t$. Заметим, что множество Zero есть в точности перечисление идеала, по которому построена наша фактор–алгебра $\mathcal{B}$ из рекурсивной булевой алгебры $\mathcal{B}_{\sum\limits_{m\in\omega}(\omega^{2m}+1+\omega\times\eta)\times\omega^2}$.

Идея состоит в построении порождающего дерева для булевой алгебры $\mathcal{B}_{\sum\limits_{m\in\omega}(\omega^{2m}+1+\omega\times\eta)\times\omega^2}$ и элементов идеала для этого дерева. Однако в случае перечислимого идеала распознать элементы, попавшие в идеал, мы сможем не сразу, а лишь через конечное число шагов. Тогда мы будем перестраивать порождающее дерево таким образом, чтобы через конечное число шагов ниже элементов идеала было бы только конечное число элементов из дерева, а если в дереве встречается атом, то под ним была бы лишь одна бесконечная ветвь дерева. Мы также можем добиться, чтобы множество концевых точек в перестроенном дереве было вычислимым.

Мы построим дерево D_B, определяя на шаге t поддерево D_B^t и подмножество элементов F^t, g^t-образы которых попадают под элементы фильтра ∇^t, перечисленные к этому шагу в $\{z_0, \ldots, z_t\}$, или они сами лежат в этом множестве из идеала ∇, определяющего нашу фактор–алгебру $\mathcal{B}$. Эти элементы будут определять элементы фильтра Фреше для булевой алгебры, строящейся по дереву булевой алгебры B_D; причем они будут построены так, что для любого элемента, отмеченного в дереве D_B^t как g^t-прообраз элемента фильтра ∇^t, в дерево D_B будет добавлено после этого только конечное число вершин. При этом все конечные вершины в D_B, лежащие под таким элементом, будут отмечены меткой Atom в D_F на некотором шаге t и под ними больше элементы не появятся, т.е. они будут в построенной булевой алгебре по этому дереву определять атомы, а их конечные объединения — элементы фильтра Фреше в строящейся булевой алгебре по этому дереву. Эти атомы лежат также в идеале нашей булевой алгебры.

Пусть b_0 — номер единицы булевой алгебры $\mathcal{B}$.

Шаг 0. Определим дерево $D^0_B \rightleftharpoons \{0\}$ и $g^0(0) = b_0$, а $D^0_F \rightleftharpoons \{0\}$.
На нулевом шаге определяем $g^0_B(0) \rightleftharpoons 0$ и $g^0_F(0) \rightleftharpoons 0$.

Шаг $t+1$. Заметим, что на каждом шаге t дерево D^t_B является поддеревом в D^t_F. Определим концевые элементы дерева, g^t–образы которых еще не попали под какой–либо элемент из ∇^t и не лежат в I^t, по индукционному предположению. Пусть это будут элементы $x_0, \ldots, x_k$. Рассмотрим элемент a_t из перечисления всех элементов этой позитивной булевой алгебры B. Положим

$$D^{t+1}_B \rightleftharpoons D^t_B \cup \{L(x_i), R(x_i) | 0 \leqslant i \leqslant k\}.$$

Теперь доопределим g^t до g^{t+1} на добавленных элементах, полагая

$$g^{t+1}(L(x_i)) \rightleftharpoons f_\cap(g^t(x_i), a_t),$$

$$g^{t+1}(L(x_i)) \rightleftharpoons f_\cap(g^t(x_i), f_C(a_t))$$

для каждого $i \in \{0 \leqslant i \leqslant k\}$. Рассмотрим множество $\nabla^{t+1} \rightleftharpoons \nabla^t \cup \{z_t\}$. Для каждого элемента i из D^{t+1}_B проверяем, нет ли в D^{t+1}_B элемента j над i в D^{t+1}_B такого, что $g^{t+1}(j) \in \nabla^{t+1}\nabla^{t+1}$. Каждый такой i добавляем в F^{t+1}, а если это концевой элемент в D^{t+1}_B, то ставим на него метку Atom. На следующих шагах под этот элемент элементы из D_B уже не смогут попасть. g-Образ этого элемента равен нулю в булевой алгебре $\mathcal{B}$, так как он лежит в идеале и только элементы, которым сопоставлен ненулевой элемент в $\mathcal{B}$ в нашем строящемся дереве, имеют бесконечно много элементов ниже в строящемся дереве. Как только мы узнаем, что какой-то из сопоставленных элементов попал в идеал, т.е. равен нулю в $\mathcal{B}$, все концевые элементы под ним объявляются атомами, если они не были объявлены атомами ранее.

Заметив, что в силу атомности булевой алгебры $\mathcal{B}$ под любым не равным нулю элементом на некотором шаге появится атом булевой алгебры $\mathcal{B}$, мы расщепляем каждый элемент в дереве, не равный нулю в алгебре, на две части, одна из которых попадет в идеал. Но, начиная с этого шага, под этим элементом построится поддерево лишь с одной бесконечной веткой, и этот элемент определит атом в фактор–алгебре по идеалу Фреше, оставаясь при этом атомом в алгебре $\mathcal{B}$. Любой ненулевой не атом дерева на некотором шаге расщепится на два ненулевых элемента, при этом до расщепления конечное число раз может отцепиться лишь элемент из идеала, который превратится в элемент из идеала Фреше.

По построению позитивная булева алгебра $\mathcal{B}$ изоморфна построенной булевой фактор-алгебре B_D/F по идеалу Фреше, а также изоморфна B_D/∇. Булева алгебра B_D является атомной булевой алгеброй с вычислимым множеством атомов, так как в дереве D при перечислении атомы отмечены меткой Atom в нашей конструкции, а идеал Фреше порожден этими атомами и, следовательно, вычислимо перечислим. Однако фактор-алгебра нашей алгебры изоморфна позитивной булевой алгебре, которая не имеет вычислимого представления. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Литература

1. А. И. Мальцев, “Конструктивные алгебры. I”, *Успехи мат. наук* **16**, No. 3, 3–60 (1961); English translation: *Russ. Math. Surv.* **16**, No. 3, 77–129 (1961).

2. А. И. Мальцев, “О рекурсивных абелевых группах”, *Докл. АН СССР* **146**, No. 5, 1009–1012 (1962); English translation: *Sov. Math., Dokl.* **3**, 1431–1434 (1962).

3. Ю. Л. Ершов, С. С. Гончаров, *Конструктивные модели*, Научная книга, Новосибирск (1999); English translation: *Constructuve Models*, Consultants Bureau, New York, NY (2000).

4. С. С. Гончаров, *Счетные булевы алгебры и разрешимость*, Научная книга, Новосибирск (1996); English translation: *Countable Boolean Algebras and Decidability*, Plenum, New York, NY (1997).
5. L. Feiner, "Hierarchies of Boolean algebras", *J. Symb. Log.* **35**, No. 3, 365–374 (1971).
6. H. J. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw–Hill, Maidenhead, Berksh (1967).
7. C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, North–Holland, Amsterdam etc. (1990).
8. M. Morley, "Decidable models", *Isr. J. Math.* **25**, No. 3–4, 233–240 (1976).
9. С. С. Гончаров, *Счетные булевы алгебры*, Наука, Новосибирск (1988).

Статья поступила в редакцию 13 мая 2024 г.