Сириус • Математический журнал Сириус *Том 1, No. 1, 54–85 (2024)*

М. Концевич, В. Пестун, Ю. Чинкель

ЭКВИВАРИАНТНАЯ БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И МОДУЛЯРНЫЕ СИМВОЛЫ

Вводятся новые инварианты в эквивариантной бирациональной геометрии и изучается их связь с модулярными символами и когомологиями арифметических групп.

1. Введение

Пусть G — конечная абелева группа и $A = G^\vee = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ — группа характеров группы G. Фиксируем целое число $n \geqslant 2$ и рассмотрим $\mathbb{Z}$-модуль $\mathcal{B}_n(G)$, порожденный символами $[a_1, \dots, a_n]$, $a_i \in A$, такими, что $a_1, \dots, a_n$ порождают A, т.е. $\sum\limits_i \mathbb{Z}a_i = A$, и удовлетворяют следующим соотношениям:

(S) для всех перестановок $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ и $a_1, \dots, a_n \in A$

$$[a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}] = [a_1, \dots, a_n],$$

(B) для всех $2 \leqslant k \leqslant n$, $a_1, \dots, a_k \in A$, и $b_1, \dots, b_{n-k} \in A$ таких, что $\sum\limits_i \mathbb{Z}a_i + \sum\limits_j \mathbb{Z}b_j = A$,

$$[a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k}]$$
$$= \sum_{1 \leqslant i \leqslant k, a_i \neq a_{i'},\ \forall i' < i} [a_1 - a_i, \dots, a_i (\text{на } i\text{-й позиции}), \dots, a_k - a_i, b_1, \dots, b_{n-k}].$$

Имеем

$$\mathcal{B}_1(G) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\varphi(N)}, & G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \quad N \geqslant 1, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Например, при $n = 4$, $k = 3$, $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = a' \neq a$, $b_1 = b$ соотношение (B) принимает вид

$$[a, a, a', b] = [a, 0, a' - a, b] + [a - a', a - a', a', b]. \tag{1.1}$$

В случае $n = 2$ имеется лишь одна возможность для k, а именно: $k = 2$.

Пример 1.1. Группа $\mathcal{B}_2(G)$ порождается символами $[a_1, a_2]$ такими, что $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, НОД $(a_1, a_2, N) = 1$, и выполнены следующие соотношения:

$[a_1, a_2] = [a_2, a_1]$,

$[a_1, a_2] = [a_1, a_2 - a_1] + [a_1 - a_2, a_2]$, $a_1 \neq a_2$,

$[a, a] = [a, 0]$ для всех $a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, НОД $(a, N) = 1$.

Третий автор частично поддержан грантом NSF No. 1601912. Данное исследование финансово поддержано Европейским исследовательским советом [European Research Council (ERC)] по программе the European Union's Horizon 2020 research and innovation program (QUASIFT grant agreement 677368).

М. Концевич: Институт высших научных исследований, Бюр-сюр-Иветт, Франция, maxim@ihes.fr.
В. Пестун: Институт высших научных исследований, Бюр-сюр-Иветт, Франция, vasily.pestun@ihes.fr.
Ю. Чинкель: Институт математических наук имени Куранта, Нью-Йорк, США, tschinkel@cims.nyu.edu.

Перевод с англ. *J. Eur. Math. Soc.* **25**, 153–202 (2023).

Для простого числа $p \geqslant 5$ $\mathbb{Q}$-ранг группы $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ равен

$$\frac{p^2+23}{24}. \tag{1.2}$$

Для нас это первый звонок о роли автоморфных форм в этой теории. Связь с модулярными символами мы обсудим в § 11.

Замечание 1.1. Группа $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ может иметь кручение. Например, при $p = 37$ существует ℓ-кручение для $\ell = 3$ и $\ell = 19$.

В случае $n \geqslant 3$ система соотношений в $\mathcal{B}_n(G)$ сильно переопределена. Тем не менее компьютерные вычисления показывают, что нетривиальные решения существуют. Например, при $G = \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ или $G = \mathbb{Z}/43\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$-ранг группы $\mathcal{B}_4(G)$ равен 1.

Пусть X — гладкое неприводимое проективное алгебраическое многообразие размерности $n \geqslant 2$ над фиксированным алгебраически замкнутым полем характеристики 0 (например, $\mathbb{C}$), снабженное бирациональным свободным в общей точке действием группы G. После G-эквивариантного разрешения особенностей можно считать, что действие группы G регулярно. Многообразию X мы сопоставим элемент группы $\mathcal{B}_n(G)$ по следующему правилу. Пусть

$$X^G = \coprod_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha \tag{1.3}$$

является множеством G-неподвижных точек; это объединение непересекающихся замкнутых гладких неприводимых подмногообразий многообразия X. Положим $\dim(F_\alpha) = n_\alpha \leqslant n-1$. На каждой неприводимой компоненте F_α зафиксируем точку $x_\alpha \in F_\alpha$ и рассмотрим действие группы G в ее касательном пространстве $\mathcal{T}_{x_\alpha}X$ в X; оно разбивается на собственные пространства характеров $a_{1,\alpha}, \ldots, a_{n,\alpha}$, определенных с точностью до перестановки индексов (здесь мы отождествляем алгебраические характеры группы G с $\mathbb{C}^\times$-значными характерами). Поскольку действие группы G свободное в общей точке, справедливо разложение

$$\sum_i \mathbb{Z}a_{i,\alpha} = A,$$

которое не зависит от выбора $x_\alpha \in F_\alpha$. Размерность (F_α) равна количеству нулей в последовательности $a_{i,\alpha}$. Таким образом, для каждого α имеем символ $[a_{1,\alpha}, \ldots, a_{n,\alpha}] \in \mathcal{B}_n(G)$. Положим

$$\beta(X) := \sum_\alpha [a_{1,\alpha}, \ldots, a_{n,\alpha}]. \tag{1.4}$$

Один из главных результатов данной статьи состоит в том, что выражение (1.4), рассматриваемое как элемент группы $\mathcal{B}_n(G)$, является инвариантом относительно G-эквивариантных раздутий.

Теорема 1.1. *Класс $\beta(X) \in \mathcal{B}_n(G)$ является G-эквивариантным бирациональным инвариантом.*

Теперь введем другой $\mathbb{Z}$-модуль $\mathcal{M}_n(G)$, порожденный символами $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ такими, что $a_1, \ldots, a_n$ порождают A и удовлетворяет соотношениям, почти идентичным соотношениям для $\mathcal{B}_n(G)$:

(S) для всех $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$

$$\langle a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}\rangle = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle,$$

(M) для всех $2 \leqslant k \leqslant n$, $a_1, \ldots, a_k \in A$ и $b_1, \ldots, b_{n-k} \in A$ таких, что $\sum_i \mathbb{Z}a_i + \sum_j \mathbb{Z}b_j = A$,

$$\begin{aligned}&\langle a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{n-k}\rangle \\ &\quad= \sum_{1\leqslant i\leqslant k} \langle a_1 - a_i, \ldots, a_i (\text{на } i\text{-й позиции}), \ldots, a_k - a_i, b_1, \ldots, b_{n-k}\rangle.\end{aligned}$$

Отметим, что мы исключили ограничение $a_i \neq a_{i'}$ для $i' < i$ из суммирования. Ясно, что

$$\mathcal{M}_1(G) = \begin{cases}\mathbb{Z}^{\varphi(N)}, & G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\quad N \geqslant 1,\\ 0 & \text{в ином случае.}\end{cases}$$

Для $n = 4$, $k = 3$, $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = a' \neq a$, $b_1 = b$ соотношение (M) принимает вид

$$\langle a, a, a', b\rangle = \langle a, 0, a' - a, b\rangle + \langle 0, a, a' - a, b\rangle + \langle a - a', a - a', a', b\rangle, \tag{1.5}$$

где правая часть равна $2\langle a, 0, a'-a, b\rangle + \langle a-a', a-a', a', b\rangle$ ввиду отношений симметрии. Подчеркнем, что имеются различия между (1.5) и (1.1).

В § 6 мы покажем, что соотношение (M) вытекает из случая $k = 2$.

Введенные группы допускают естественно определенные коммутирующие линейные операторы $T_{\ell,r} : \mathcal{M}_n(G) \to \mathcal{M}_n(G)$ для всех простых чисел ℓ, взаимно простых с порядком группы G и всех $1 \leqslant r \leqslant n$. Эти операторы называются *операторами Гекке*. Можно рассмотреть спектр для $\mathcal{M}_n(G) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ или $\mathcal{M}_n(G) \otimes \overline{\mathbb{F}}_p$, где p — произвольное простое число, не делящее порядок $\#G$ группы G. Мы ожидаем, что совместный спектр $T_{\ell,r}$ связан с автоморфными формами и дадим обоснование нашего предположения в § 9 и 11.

Рассмотрим отображение $\mu : \mathcal{B}_n(G) \to \mathcal{M}_n(G)$, которое определяется на символах

($\boldsymbol{\mu}_1$) $[a_1, \dots, a_n] \mapsto \langle a_1, \dots, a_n\rangle$, если все $a_1, \dots, a_n \neq 0$,

($\boldsymbol{\mu}_2$) $[0, a_2, \dots, a_n] \mapsto 2\langle 0, a_2, \dots, a_n\rangle$, если все $a_2, \dots, a_n \neq 0$,

($\boldsymbol{\mu}_3$) $[0, 0, a_3, \dots, a_n] \mapsto 0$ для всех $a_3, \dots, a_n$

и продолжается по $\mathbb{Z}$-линейности.

Теорема 1.2. *Отображение μ является корректно определенным гомоморфизмом, сюръективным по модулю 2-кручения.*

Имеем $\langle 0, 0, a_3, \dots, a_n\rangle = 0 \in \mathcal{M}_n(G)$, что следует из соотношений при $k = 2$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_i = a_{i+2}$ для всех $i = 1, \dots, n-2$.

Мы ожидаем, что μ является изоморфизмом по модулю кручения (см. гипотезы 3.1 и 3.2).[1)]

Обозначения $\mathcal{B}_n(G)$ и $\mathcal{M}_n(G)$ имеют смысл **бирациональный** vs **мотивный/модулярный.**

Данная статья состоит из двух частей. В части I мы приводим доказательства теорем 1.1 и 1.2. Мы переопределим группы $\mathcal{M}_n(G)$ в терминах соотношений типа ножниц на решетках с конусами, введем фактор-группы $\mathcal{M}_n^-(G)$ групп $\mathcal{M}_n(G)$, а также умножение и коумножение на этих фактор-группах и сформулируем ряд гипотез о сведéнии структуры $\mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{Q}$ к ее примитивным частям. Кроме того, мы введем операторы Гекке на $\mathcal{M}_n(G)$, совместные с гипотетическим разложением, и опишем результаты компьютерных вычислений с уравнениями для новых инвариантов.

В части II мы приводим различные обобщения групп $\mathcal{B}_n(G)$ и $\mathcal{M}_n(G)$, не обязательно связанные друг с другом, что отражает имеющееся расхождение бирациональной и автоморфной точек зрения. Наши конструкции приводят к новому вопросу (см. вопрос 9.1) и потенциально новой точке зрения на программу Ленглендса, основанной на обобщении модулярных символов для бóльших размерностей. Мы отождествляем $\mathcal{M}_n^-(G)$ с когомологией арифметической группы с коэффициентами в одномерном представлении. В случае $n = 2$ мы также воспользуемся связями между нашими группами символов и классическими символами Манина для модулярных форм веса 2.

При подготовке данной статьи к печати мы узнали о работе [**2**] Борисова и Ганнелса, которые изучали конструкции, связанные с модулярностью при $n = 2$, и поставили вопрос об обобщениях на случай $n \geqslant 3$ [**3**, замечание 7.15].

Благодарности

Мы благодарны Алексу Барнетту [Alex Barnett] и Нику Каррьеро [Nick Carriero] из института Флэтайрона фонда Саймонса за их помощь с компьютерными вычислениями, а также Авнеру Эшу [Avner Ash] и Александру Гончарову за их интерес и полезные комментарии.

---

1) Этот факт установлен в теореме 1.2 из [**1**].

Часть I

2. Инвариантность относительно раздутий

Будем использовать обозначения и соглашения из введения. Пусть X — гладкое неприводимое проективное n-мерное многообразие, снабженное свободным в общей точке регулярным действием конечной абелевой группы G и $W \subset X$ — замкнутое гладкое неприводимое G-устойчивое подмногообразие, $0 \leqslant \dim(W) \leqslant n-2$. Пусть $\pi : \widetilde{X} = \mathrm{Bl}_W(X) \to X$ — раздутие X в W. Согласно теореме о G-эквивариантной слабой факторизации гладкие проективные G-бирациональные модели X связаны итерированными раздутиями такого типа.

Для доказательства теоремы 1.1 достаточно показать, что $\beta(\widetilde{X}) = \beta(X) \in \mathcal{B}_n(G)$. Выберем неприводимую компоненту $Z \subseteq W^G$. Достаточно рассмотреть структуру множеств неподвижных точек исключительных дивизоров в окрестности Z. Пусть $F = F(Z) \subseteq X^G$ — единственная неприводимая компонента, содержащая Z; она равна одной из компонент F_α в (1.3). Пусть $z \in Z$ — точка и $\mathcal{T}_z X = T_1 \oplus T_2 \oplus R_1 \oplus R_2$ — разложение касательного расслоения в точке z, где T_i — тривиальное представление, а R_1 и R_2 имеют лишь нетривиальные характеры,

$$\mathcal{T}_z X^G = T_z F = T_1 \oplus T_2, \quad \mathcal{T}_z W = T_2 \oplus R_1.$$

Пусть $d_1 := \dim(T_1)$, $d_2 = \dim(T_2)$, $d_3 = \dim(R_1)$, $d_4 = \dim(R_2)$. Спектр действия группы G в $\mathcal{T}_z$ принимает вид

$$\underbrace{0,\dots,0}_{d_1} \mid \underbrace{0,\dots,0}_{d_2} \mid b_1,\dots,b_{d_3} \mid \underbrace{a^1,\dots,a^1}_{\varkappa_1},\dots,\underbrace{a^m,\dots,a^m}_{\varkappa_m},$$

где $b_j \in A \setminus 0$, $a^1,\dots,a^m \in A \setminus 0$ попарно различны и $\varkappa_1 + \dots + \varkappa_m = d_4$, $\varkappa_i \geqslant 1, m \geqslant 0$. Имеем

- $d_2 = \dim(Z)$,
- $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = n$,
- $1 \leqslant d_3 + d_4$, так как $\operatorname{codim}(X^G) \geqslant 1$,
- $2 \leqslant d_1 + d_4$, так как $\operatorname{codim}(W) \geqslant 2$.

Мы рассмотрим несколько случаев с соответствующими геометрическими конфигурациями.

(I) $d_1 = 0$, $d_4 \geqslant 2$. Геометрически это означает, что W содержит компоненту Z многообразия X^G. С помощью раздутия W получим новые вклады в формулу (1.4). Новое множество неподвижных точек с m неприводимыми компонентами состоит из подмногообразий исключительного дивизора, проективного расслоения над W. Эти подмногообразия, в свою очередь, суть тотальные пространства проективных расслоений над Z со слоями $\mathrm{P}^{\varkappa_i - 1}$, $i = 1,\dots,m$. Соответствующий вклад в $\beta(\widetilde{X})$ задается формулой

$$\sum_{i=1}^{m} [\underbrace{0,\dots}_{d_2}, b_1,\dots,b_{d_3}, \underbrace{a^1 - a^i,\dots}_{\varkappa_1},\dots,a_i,\underbrace{0,\dots}_{\varkappa_i - 1},\dots,\underbrace{a^m - a^i,\dots}_{\varkappa_m}].$$

Полагая

$$a_1,\dots,a_k = \underbrace{a^1,\dots}_{\varkappa_1},\dots,\underbrace{a^m,\dots}_{\varkappa_m}, \quad b_1,\dots,b_{n-k} = b_1,\dots,b_{d_3},\underbrace{0,\dots}_{d_2},$$

находим, что эта формула согласована с соотношением (B), если последовательность $\overline{a} = a_1,\dots,a_k$ не содержит нулей.

(II) $d_1, d_4 \geqslant 1$. Геометрически это означает, что касательные пространства множества неподвижных точках и W не порождают все касательное пространство, а вблизи Z компонента F не содержится в W. В раздутии мы будем иметь компоненту множества неподвижных точек, бирациональную F, а также новые компоненты, которые будут проективными расслоениями $\mathrm{P}^{\varkappa_1 - 1},\dots,\mathrm{P}^{\varkappa_m - 1}$ над Z. Надо показать, что вклад этих m членов нулевой в $\mathcal{B}_n(G)$. Пусть

$$\overline{b} = b_1,\dots,b_{n-k} = b_1,\dots,b_{d_3},\underbrace{0,\dots}_{d_2}.$$

Новые компоненты дают вклад

$$\sum_{i=1}^{m}[\underbrace{-a^i,\ldots,}_{d_1}\underbrace{a^1-a^i,\ldots,}_{\varkappa_1}\ldots,a_i,\underbrace{0,\ldots,}_{\varkappa_i-1}\ldots,\underbrace{a^m-a^i,\ldots,}_{\varkappa_m}\overline{b}].$$

Покажем, что эта сумма равна нулю в $\mathcal{B}_n(G)$. Действительно, рассмотрим соотношение (B) для последовательностей

$$\overline{a}=a_1,\ldots,a_k=\underbrace{0,\ldots,}_{d_1}\underbrace{a^1,\ldots,}_{\varkappa_1}\ldots,\underbrace{a^m,\ldots}_{\varkappa_m}$$

и $\overline{b}$. Левая часть (B) равна

$$[\overline{a},\overline{b}]=[a_1,\ldots,a_k,\overline{b}]=[\underbrace{0,\ldots,}_{d_1}\underbrace{a^1,\ldots,}_{\varkappa_1}\ldots,\underbrace{a^m,\ldots,}_{\varkappa_m}\overline{b}],$$

а правая часть есть сумма $(m+1)$ слагаемых. Первое слагаемое, соответствующее $a_i=a_1=0$, совпадает с левой частью. Остальные слагаемые такие же, как выше.

(III) $d_1\geqslant 2$, $d_3\geqslant 1$, $d_4=0$. В этом случае никаких новых членов в формуле (1.4) не появляется.

Теорема 1.1 доказана.

Замечание 2.1. Имеется уточнение группы $\mathcal{B}_n(G)$, связывающее ее с группой Бернсайда многообразий, изученной в [**4**]. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Пусть $\mathrm{Bir}_{n-1,m}(K)$, $0\leqslant m\leqslant n-1$, — множество классов эквивалентности $(n-1)$-мерных неприводимых многообразий над K по модулю K-бирациональной эквивалентности, которые K-бирациональны относительно произведений $W\times\mathbb{A}^m$, но не являются таковыми относительно $W'\times\mathbb{A}^{m+1}$ для любого W'. Пусть

$$\mathcal{B}_n(G,K):=\bigoplus_{m=0}^{n-1}\bigoplus_{[Y]\in\mathrm{Bir}_{n-1,m}(K)}\mathcal{B}_{m+1}(G),$$

$$\mathcal{B}_1(G)=\begin{cases}\bigoplus\limits_{a\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times}\mathbb{Z}, & G=\mathbb{Z}/N\mathbb{Z},\quad N\geqslant 2,\\ 0, & G\ \text{нециклическая}.\end{cases}$$

Пусть X — неприводимое K-многообразие, снабженное свободным в общей точке действием группы G. Как и в § 1, можно считать, что действие группы G регулярно. Пусть $X^G=\bigsqcup_\alpha F_\alpha$ — разложение множества неподвижных точек на неприводимые непересекающиеся компоненты. Спектр G-действия в касательном пространстве к X в любой точке $x_\alpha\in F_\alpha$ задается формулой

$$a_1,\ldots,a_{n-\dim(F_\alpha)},\ \underbrace{0,\ldots}_{\dim(F_\alpha)},\quad a_i\neq 0.$$

Принимая во внимание бирациональные типы множества неподвижных точек, определим $\beta_K(X)\in\mathcal{B}_n(G,K)$ для G следующим образом. Положим $Y_\alpha:=F_\alpha\times\mathbb{A}^{n-1-\dim(F_\alpha)}$. Пусть $m_\alpha\in\mathbb{Z}_{>0}$ — максимальное целое число такое, что $Y_\alpha\sim Z_\alpha\times\mathbb{A}^{m_\alpha}$. Очевидно, что $m_\alpha\geqslant n-1-\dim(F_\alpha)$. Тогда

$$\beta_K(X)=\sum_\alpha\beta_\alpha(X),$$

где

$$\beta_\alpha(X)=\Big[a_1,\ldots,a_{n-\dim(F_\alpha)},\ \underbrace{0,\ldots}_{m_\alpha+1-n+\dim(F_\alpha)}\Big]\in\ \text{копии}\ \mathcal{B}_{m_\alpha+1}(G),$$

помеченное бирациональным типом Y_α.

Инвариантность относительно раздутий следует из того, что все $(n-1)$-мерные бирациональные типы, возникающие как метки в каждом частном случае при доказательстве теоремы 1.1, совпадают друг с другом.

Замечание 2.2. Подобным образом можно было бы ввести бирациональные инварианты для действий, но это направление в данной статье не рассматривается.

3. Сравнение

В этом параграфе мы рассмотрим отображение

$$\mu : \mathcal{B}_n(G) \to \mathcal{M}_n(G), \tag{3.1}$$

определенное в § 1. Доказательство того, что это отображение есть корректно определенный гомоморфизм, представляет собой длинную цепь по существу тривиальных шагов.

Сначала мы выпишем несколько следствий, вытекающих из определяющих соотношений для группы $\mathcal{M}_n(G)$:

(1) $\langle 0, 0, \ldots \rangle = 0$,

(2) $\langle a, a, \ldots \rangle = 2\langle a, 0, \ldots \rangle$,

(3) $\langle a, a, 0, \ldots \rangle = 0$,

(4) $\langle a, a, a', a', \ldots \rangle = 0$,

(5) $\langle a, a, a, \ldots \rangle = 0$,

(6) $\langle a, -a, \ldots \rangle = 0$;

здесь $\ldots$ означает произвольные последовательности элементов A такие, что множество всех элементов символа порождает все A. В доказательствах ниже мы часто используем отношение симметрии (S).

(1) Используем (M) при $k = 2$ и $a_1 = a_2 = 0$: $\langle 0, 0, \ldots \rangle = \langle 0, 0, \ldots \rangle + \langle 0, 0, \ldots \rangle$.

(2) Используем (M) при $k = 2, a_1 = a_2 = a$.

(3) Используем (2) и (1): $\langle a, a, 0, \ldots \rangle \overset{(2)}{=} 2\langle a, 0, 0, \ldots \rangle + \langle 0, 0, \ldots \rangle \overset{(1)}{=} 0$.

(4) Опять используем (2) и (1): $\langle a, a, a', a', \ldots \rangle \overset{(2)}{=} 4\langle a, 0, a', 0, \ldots \rangle \overset{(1)}{=} 0$.

(5) Используем (M) для $k = 3$ и $a_1 = a_2 = a_3 = a$, а затем (1): $\langle a, a, a, \ldots \rangle = 3\langle a, 0, 0, \ldots \rangle \overset{(1)}{=} 0$.

(6) Используем (M) для $k = 2, a_1 = a, a_2 = 0$: $\langle a, 0, \ldots \rangle = \langle a, -a, \ldots \rangle + \langle a, 0, \ldots \rangle$.

Далее перейдем к доказательству теоремы 1.2. Основной момент доказательства — это проверка уравнения совместности

$$\mu([a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{n-k}]) = \sum_{i, a_i \neq a_{i'} \text{ при } i < i'} \mu([a_1 - a_i, \ldots, a_i, \ldots, a_k - a_i, b_1, \ldots, b_{n-k}]). \tag{3.2}$$

Для удобства мы иногда пишем

$$[a_1, \ldots, a_k \mid b_1, \ldots, b_{n-k}] = [a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_{n-k}] \in \mathcal{B}_n(G)$$

и аналогично для символа из $\mathcal{M}_n(G)$, указывая позицию раздела переменных a и b в последующих соотношениях.

Выделим три случая в зависимости от числа нулей в последовательности $\overline{b} := b_1, \ldots, b_{n-k}$.

(C0) $\overline{b}$ не содержит нулей.

(C1) $\overline{b}$ содержит в точности один нуль.

(C2) $\overline{b}$ содержит не менее двух нулей.

Случай (C2) очевиден в силу (1), так как все члены равны нулю по определению ($\boldsymbol{\mu}_2$) в § 1.

Случай (C1) распадается на два случая:

(C10) последовательность $\overline{a} := a_1, \ldots, a_k$ не содержит нулей,

(C11) последовательность $\overline{a}$ содержит хотя бы один нуль.

В случае (C11) левая часть отображается в нуль при отображении ($\boldsymbol{\mu}_2$): $\mu([0, \ldots \mid 0, \ldots]) = 0$. Члены в правой части (B) делятся на два типа соответственно $a_i = 0$ или $a_i = a \neq 0$. Если $a_i = 0$, то член вида $[\underline{0}, \ldots \mid 0, \ldots]$ переходит в нуль при отображении ($\boldsymbol{\mu}_2$). Подчеркнутый нуль означает, что a_i остается на своем месте в соотношении (B). Если $a_i = a \neq 0$, то соответствующий член в правой части (B) имеет вид $[-a, \cdots, \underline{a}, \ldots \mid 0, \ldots]$ и отображается в $c \cdot \langle -a, \ldots, a, \ldots 0, \ldots \rangle$, где $c = 0$ или $c = 2$ и символ в $\mathcal{M}_n(G)$ равен нулю в силу (6).

Случай (C10) распадается на два случая:

(C10$\neq$) все члены в $\overline{a}$ попарно различны,

(C10$=$) существуют по крайней мере два равных члена в $\overline{a}$.

В случае (C10$\neq$) все символы в левой и правой частях соотношения (B) имеют в точности по одному нулю. Таким образом, при отображении ($\boldsymbol{\mu}_1$) они переходят в аналогичные символы в $\mathcal{M}_n(G)$, умноженные на 2. Так как каждый элемент $\overline{a}$ входит единожды, выражения в правых частях соотношений (B) и (M) состоят из согласованных членов.

В случае (C10$=$) левая часть (B) равна $[a, a, \ldots \mid 0, \ldots] \in \mathcal{B}_n(G)$ и образ ее при отображении μ равен $2\langle a, a, \ldots, 0, \ldots\rangle \in \mathcal{M}_n(G)$, который обращается в нуль в силу (3). Мы покажем, что все члены в правой части соотношения (B) отображаются в нуль. Действительно каждый член имеет вид либо $[\underline{a}, 0, \ldots \mid 0, \ldots]$, либо $[a - a', a - a', \ldots, \underline{a'}, \ldots \mid 0, \ldots]$, $a' \neq a$. Образ этого символа пропорционален $\langle a, 0, \ldots, 0, \ldots\rangle$ либо $\langle a - a', a - a', \ldots, a', \ldots, 0, \ldots\rangle$, которые равны нулю в силу (1) либо (3) соответственно.

Случай (C0) распадается на три случая:

(C00) $\overline{a}$ не содержит нулей,

(C01) $\overline{a}$ содержит в точности один нуль,

(C02) $\overline{a}$ содержит по меньшей мере два нуля.

Напомним, что $\overline{b}$ не содержит нулей в случае (C0).

Сначала рассмотрим (C02). Левая часть (B) принимает вид $[0, 0, \ldots \mid \ldots]$ и, следовательно, отображается в нуль при отображении ($\boldsymbol{\mu}_2$). Проверим, что все члены в правой части (B) также отображаются в нуль. Эти символы имеют вид $[\underline{0}, 0, \ldots \mid \ldots]$ либо $[-a, -a, \ldots, \underline{a}, \ldots \mid \ldots]$, $a \neq 0$, которые отображаются в элементы $\mathcal{M}_n(G)$, пропорциональные $\langle 0, 0, \ldots\rangle$ либо $\langle -a, -a, \ldots, a, \ldots\rangle$ и равные нулю в силу (1) либо (6) соответственно.

Случай (C01) распадается на два случая:

(C01$\neq$) все члены в $\overline{a}$ попарно различны,

(C01$=$) существуют по меньшей мере два равных члена в $\overline{a}$.

В случае (C01$=$) левая часть (B) принимает вид $[0, a, a, \ldots \mid \ldots]$, $a \neq 0$, и отображается в нуль в силу (3). Правая часть содержит члены вида $[\underline{0}, a, a, \ldots \mid \ldots]$, либо $[-a, \underline{a}, 0, \ldots \mid \ldots]$, либо $[-a', a - a', a - a', \ldots, \underline{a'}, \ldots \mid \ldots]$, $a' \neq a, 0$. Их образы при отображении μ пропорциональны $\langle 0, a, a, \ldots\rangle$, либо $\langle -a, -a, 0, \ldots\rangle$, либо $\langle -a', a - a', a - a', \ldots, a', \ldots\rangle$, которые равны нулю в силу (3), (6), (6) соответственно.

В случае (C01$\neq$) левая часть (B) принимает вид $[0, a_2, \ldots, a_k \mid \ldots]$ для попарно различных $a_i \neq 0, i \geqslant 2$, $b_j \neq 0$. Согласно ($\boldsymbol{\mu}_1$) ее образ при отображении μ равен $2\langle 0, a_2, \ldots, a_k, \ldots\rangle$. Правая часть (B) равна сумме

$$[\underline{0}, a_2, \ldots, a_k \mid \ldots] + [-a_2, \underline{a_2}, \ldots, a_k - a_2 \mid \ldots] + [-a_3, a_2 - a_3, \underline{a_3}, \ldots \mid \ldots] + \cdots,$$

где первое слагаемое в силу ($\boldsymbol{\mu}_1$) переходит в $2\langle 0, a_2, \ldots, a_k, \ldots\rangle$, а все другие члены отображаются в нуль в силу (6), что доказывает (C01$\neq$).

Осталось рассмотреть случай (C00), когда все элементы последовательностей $\overline{a}$ и $\overline{b}$ отличны от нуля. Возможны два случая:

(C00$\neq$) все члены $\overline{a}$ попарно различны,

(C00$=$) по меньшей мере два члена $\overline{a}$ равны.

В случае (C00$\neq$) левая и правая части (B) не содержат символов с нулями. Поэтому можно использовать ($\boldsymbol{\mu}_0$), и соотношение (B) переходит в точности в соответствующее соотношение (M).

Случай (C00$=$) распадается на три случая:

(C00= 2) $\overline{a}$ имеет только одну пару равных членов, т.е. $\overline{a} = a, a, a_3, \ldots, a_k$, где $a_3, \ldots, a_k$ попарно различны и не равны a,

(C00= $2,2$) $\overline{a}$ имеет вид $\overline{a} = a, a, a', a', a_5, \ldots, a_k$, где $a \neq a'$ и $a_5, \ldots, a_k$ попарно различны и отличны от a и a',

(C00= 3) $\overline{a}$ имеет вид $\overline{a} = a, a, a, \ldots$.

Сначала рассмотрим случай (C00= 3). Левая часть (B) отображается в нуль в силу (5), а правая часть имеет члены вида $[\underline{a}, 0, 0, \ldots \mid \ldots]$ или $[a-a', a-a', a-a', \ldots, \underline{a}', \ldots \mid \ldots]$, $a \neq a'$. Они переходят в члены, пропорциональные $\langle a, 0, 0, \ldots\rangle$ либо $\langle a-a', a-a', a-a', \ldots\rangle$, которые равны нулю в силу (1) или (5) соответственно.

В случае (C00= $2,2$) левая часть (B) отображается в элемент $\langle a, a, a', a', \ldots\rangle$, равный нулю в силу (4), а правая часть содержит члены трех видов:

$[a, 0, a'-a, a'-a, \ldots \mid \ldots]$,

$[a-a', a-a', \underline{a}', 0, \ldots \mid \ldots]$, $a \neq a'$,

$[a-a'', a-a'', a'-a'', a'-a'', \ldots, \underline{a}'', \ldots \mid \ldots]$, где a, a', a'' попарно различны.

Их образы пропорциональны

$\langle a, 0, a'-a, a'-a, \ldots\rangle$,

$\langle a-a', a-a', \underline{a}', 0, \ldots\rangle$, $a \neq a'$,

$\langle a-a'', a-a'', a'-a'', a'-a'', \ldots, \underline{a}'', \ldots\rangle$, где a, a', a'' попарно различны,

которые равны нулю в силу (3), (3), (4) соответственно.

В последнем случае (C00= 2) соотношение (B) принимает вид

$$[a, a, a_3, \ldots, a_k \mid \ldots] = [\underline{a}, 0, a_3-a, \ldots, a_k-a \mid \ldots] + [a-a_3, a-a_3, \underline{a_3}, \ldots, a_k-a_3 \mid \ldots] + [a-a_4, a-a_4, a_3-a_4, \underline{a_4}, \ldots \mid \ldots] + \cdots .$$

Левая часть отображается в $\langle a, a, a_3, \ldots\rangle$, а правая — в $2\langle \underline{a}, 0, a_3-a, \ldots, a_k-a \mid \ldots\rangle + \langle a-a_3, a-a_3, \underline{a_3}, \ldots, a_k-a_3 \mid \ldots\rangle + \cdots$, где первое слагаемое получается из $(\boldsymbol{\mu}_1)$, а остальные — из $(\boldsymbol{\mu}_0)$. Мы видим, что по модулю соотношения (S) образ правой части (B) совпадает с правой частью (M) в $\mathcal{M}_n(G)$, что завершает доказательство теоремы 1.2.

Предложение 3.1. *Гомоморфизм*

$$\mu : \mathcal{B}_2(G) \to \mathcal{M}_2(G) \tag{3.3}$$

является инъекцией с коядром, которое аннулируется фактором $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\varphi(N)}$*, если* $G \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ *— циклическая группа*; *в ином случае* μ *— изоморфизм.*

Доказательство. Введем порождающие и соотношения для $\mathcal{B}_2(G)$ и $\mathcal{M}_2(G)$.

- *Порождающие*:
  - ("невырожденные") символы $[a_1, a_2]$ (соответственно, $\langle a_1, a_2\rangle$), где $a_1, a_2 \in A \setminus 0$ такие, что $\mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 = A$,
  - ("вырожденные") символы $[a, 0]$ (соответственно, $\langle a, 0\rangle$), где $a \in A \setminus 0$ такое, что $\mathbb{Z}a = A$.
- *Соотношения*:
  (1) $[a_1, a_2] = [a_2, a_1]$ (соответственно, $\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_2, a_1\rangle$) для $a_1, a_2 \in A \setminus 0$,
  (2) $[a_1, a_2] = [a_1, a_2 - a_1] + [a_1 - a_2, a_2]$ (соответственно, $\langle a_1, a_2\rangle = \langle a_1, a_2 - a_1\rangle + \langle a_1 - a_2, a_2\rangle$) для $a_1, a_2 \in A \setminus 0$, $a_1 \neq a_2$,
  (3) $[a, a] = [a, 0]$ (соответственно, $\langle a, a\rangle = 2\langle a, 0\rangle$), $a \neq 0$.

Первые два соотношения идентичны и включают только невырожденные символы $[a_1, a_2]$ (соответственно, $\langle a_1, a_2\rangle$), когда оба элемента a_1 и a_2 не равны нулю. В случае $\mathcal{B}_2(G)$ соотношение (3) лишь отождествляет вырожденный символ $[a, 0]$ с невырожденным символом $[a, a]$, где, как и в случае $\mathcal{M}_2(G)$, добавляется половина невырожденного символа $\langle a, a\rangle$. Очевидно, что если мы добавим к любой абелевой группе дополнительную порождающую, равную половине любого заданного элемента этой группы, то новая группа будет содержать исходную и фактор аннулируется фактор-группой $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Утверждение предложения немедленно следует, так как функция Эйлера $\varphi(N)$ есть число вырожденных элементов $[a,0]$, когда $G \simeq A \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. $\square$

Гипотеза 3.1. *При $n \geqslant 3$ гомоморфизм*

$$\mu : \mathcal{B}_n(G) \to \mathcal{M}_n(G) \tag{3.4}$$

является изоморфизмом по модулю кручения.

Эта гипотеза означает следующее. Для любого целого числа $N \geqslant 2$ элемент $[0,0,1] \in \mathcal{B}_3(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ является элементом кручения. Действительно, если бы эта гипотеза подтвердилась, то любой символ $[0,0,\ldots]$ должен обращаться в нуль по модулю кручения и, повторив все шаги доказательства теоремы 1.2, мы могли бы построить обратный морфизм из $\mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{Q}$ в $\mathcal{B}_n(G) \otimes \mathbb{Q}$.

При $N \leqslant 23$ компьютерные вычисления дают основание выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 3.2. *Для $N \geqslant 2$ элемент $[0,0,1] \in \mathcal{B}_3(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ имеет порядок 1, т.е. $[0,0,1] = 0 \in \mathcal{B}_3(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, если N — составное число или $N = 2,3,5$, и аннулируется величиной $\dfrac{p^2-1}{24}$, если $N = p \geqslant 7$ — простое число.*[2)]

4. О порождающих и соотношениях для $\mathcal{M}_n(G)$

В этом параграфе G — конечная абелева группа с группой характеров $A = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ и $n \geqslant 2$ — целое число. Дадим геометрическое определение порождающих и соотношений для $\mathcal{M}_n(G)$. Начнем со следующих данных:

- решетка (без кручения) $\mathbf{L} \simeq \mathbb{Z}^n$ ранга n,
- элемент $\chi \in \mathbf{L} \otimes A$ такой, что индуцированный гомоморфизм $\mathbf{L}^\vee \to A$ сюръективен,
- базисный симплициальный конус, т.е. строго выпуклый конус $\Lambda \in \mathbf{L}_\mathbb{R}$, порожденный базисом в $\mathbf{L}$; он изоморфен стандартному октанту $\mathbb{R}^n_{\geqslant 0}$ для $\mathbf{L} = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Для каждого класса эквивалентности тройки $(\mathbf{L}, \chi, \Lambda)$ определим с точностью до изоморфизма символ $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda) \in \mathcal{M}_n(G)$ следующим образом. Выберем базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbf{L}$, порождающий Λ, и запишем

$$\chi = \sum_{i=1}^n e_i \otimes a_i. \tag{4.1}$$

Положим $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in \mathcal{M}_n(G)$. Неоднозначность выбора отражается в действии симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ на базисных элементах и, следовательно, объясняется условием (S). Соотношение (M) имеет следующий геометрический смысл. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — упорядоченный базис в $\mathbf{L}$, порождающий Λ:

$$\Lambda := \mathbb{R}_{\geqslant 0} e_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geqslant 0} e_n. \tag{4.2}$$

Зафиксируем целое число $2 \leqslant k \leqslant n$. Тогда

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k, \tag{4.3}$$

где

$$\Lambda_i := \mathbb{R}_{\geqslant 0} e_1 + \cdots + \underbrace{\mathbb{R}_{\geqslant 0}(e_1 + \cdots e_k)}_{i\text{-я позиция}} + \cdots + \mathbb{R}_{\geqslant 0} e_n,$$

т.е. мы заменяем i-ю порождающую e_i на $(e_1 + \cdots e_k)$; это множество максимальных конусов в звездных подразбиениях грани, порожденное элементами $e_1, \ldots, e_k$. Конусы Λ_i также являются базисными симплициальными конусами, и их внутренности не пересекаются. Запишем

$$\chi = e_1 \otimes a_1 + \cdots + e_k \otimes a_k + e_{k+1} \otimes b_1 + \cdots + e_n \otimes b_{n-k},$$

как в (4.1), т.е. $a_{k+i} = b_i$ для всех $i = 1, \ldots, n-k$. Тогда χ можно записать в базисе из Λ_i как

$$e_1 \otimes (a_1 - a_i) + \cdots + (e_1 + \cdots + e_k) \otimes a_i + \cdots e_k \otimes (a_k - a_i) + \sum_{j=1}^{n-k} e_{k+j} \otimes b_j.$$

---

2) Этот факт установлен в [**1**].

Мы видим, что соотношение (M) можно выразить как тождество

$$\psi(\mathbf{L},\chi,\Lambda)=\sum_{i=1}^{k}\psi(\mathbf{L},\chi,\Lambda_i), \tag{4.4}$$

которое можно считать аналогом соотношений ножниц. Наш следующий результат утверждает, что это соотношение получается из частного случая $k=2$. Этот факт вытекает из общего результата о симплициальных подразбиениях базисных симплициальных конусов. Именно, рассмотрим $\mathbb{Z}$-модуль $\mathcal{F}_{\mathbf{L},\mathbb{Z}}$, порожденный символами $[\Lambda]$, где Λ — базисный симплициальный конус, по модулю соотношений (R_k), $k\geqslant 2$:

(R_k) $[\Lambda]=[\Lambda_1]+\dots+[\Lambda_k]$,

где Λ и Λ_i такие же, как выше, $e_1,\dots,e_n$ — произвольный базис в Λ.

Лемма 4.1. *Отношения* (R_k) *при* $k\geqslant 3$ *следуют из отношений* (R_2).

Доказательство. Применим индукцию. Предположив, что утверждение верно для $k-1$, докажем его для $k\geqslant 3$, т.е. $[\Lambda_1]+\dots+[\Lambda_k]=[\Lambda]$. По индукции $[\Lambda_k]=[\Lambda'_1]+\dots+[\Lambda'_{k-1}]$, где Λ'_i — конусы

$$\mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1+\dots+\underbrace{\mathbb{R}_{\geqslant 0}(e_1+\dots+e_{k-1})}_{i\text{-я позиция}}+\dots+\underbrace{\mathbb{R}_{\geqslant 0}(e_1+\dots+e_k)}_{k\text{-я позиция}}+\dots+\mathbb{R}_{\geqslant 0}e_n.$$

Действительно, это соотношение (R_{k-1}), записанное в базисе $e_1,\dots,e_{k-1},(e_1+\dots+e_k),e_{k+1},\dots e_n$. Поэтому

$$[\Lambda_1]+\dots+[\Lambda_k]=([\Lambda_1]+[\Lambda'_1])+\dots+([\Lambda_{k-1}]+[\Lambda'_{k-1}]).$$

Для каждого $i=1,\dots,k-1$ имеем соотношение (R_2): $[\Lambda_i]+[\Lambda'_i]=[\Lambda''_i]$ в подходящем базисе, где

$$\Lambda''_i:=\mathbb{R}_{\geqslant 0}e_1+\dots+\underbrace{\mathbb{R}_{\geqslant 0}(e_1+\dots+e_{k-1})}_{i\text{-я позиция}}+\dots+\mathbb{R}_{\geqslant 0}e_n.$$

Наконец, (R_{k-1}) в базисе $e_1,\dots,e_n$ приобретает вид $[\Lambda''_1]+\dots+[\Lambda''_{k-1}]=[\Lambda]$, откуда следует требуемое утверждение. □

Теперь мы можем рассмотреть заведомо другую группу, порожденную символами $[\Lambda]$, где Λ — любой строго выпуклый рациональный многогранный конус полной размерности, удовлетворяющий соотношениям $[\Lambda]=[\Lambda]_1+\dots+[\Lambda_k]$, где Λ — объединение конусов Λ_i с непересекающимися внутренностями (здесь k может быть любым целым числом, не меньше целого числа $\geqslant 2$). Согласно торическому аналогу слабой факторизации естественный гомоморфизм, действующий из $\mathcal{F}_{\mathbf{L},\mathbb{Z}}$ в эту группу, является изоморфизмом. В этой терминологии лемма 4.1 утверждает, что достаточно рассмотреть раздутия с центрами в коразмерности 2.

В результате заключаем, что $\mathcal{M}_n(G)$ допускает альтернативное описание как группа, порожденная символами $\psi(\mathbf{L},\chi,\Lambda)$, зависящими только от классов изоморфизма троек $(\mathbf{L},\chi,\Lambda)$, где $\mathbf{L}$ и χ такие же, как выше, а Λ — конечно порожденный выпуклый рациональный конус полной размерности, удовлетворяющий соотношениям (4.4), если имеет место разложение $\Lambda=\Lambda_1\cup\dots\cup\Lambda_k$, как выше. Очевидно, что вышесказанное распространяется на невыпуклые конусы.

Рассмотрим иной вариант приведенных выше конструкций. Вместо $\chi\in\mathbf{L}\otimes A=\mathrm{Hom}(\mathbf{L}^\vee,A)$ рассмотрим $\chi^*\in\mathrm{Hom}(\mathbf{L},A)$, опять же предполагая сюръективность χ^*. По аналогии можно ввести группу $\mathcal{M}^*_n(G)$, которую будем называть *ковекторным* вариантом (*векторного* варианта) $\mathcal{M}_n(G)$. Эта группа порождается символами $\langle a_1,\dots,a_n\rangle^*$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

(S^*) для всех $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ и $a_1,\dots,a_n\in A$

$$\langle a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n)}\rangle^*=\langle a_1,\dots,a_n\rangle^*,$$

(M^*) для всех $2\leqslant k\leqslant n$, $a_1,\dots,a_k\in A$ и $b_1,\dots,b_{n-k}\in A$ таких, что $\sum\limits_i\mathbb{Z}a_i+\sum\limits_j\mathbb{Z}b_j=A$,

$$\langle a_1,\dots,a_k,b_1,\dots,b_{n-k}\rangle^*=\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\langle a_1,\dots,\sum_{j=1}^{k}a_j(\text{на } i\text{-й позиции}),\dots,a_k,b_1,\dots,b_{n-k}\rangle^*.$$

Как и выше, соотношения для $k = 2$ влекут все остальные.

Нетрудно показать, что $\mathbb{Q}$-ранги $\mathcal{M}_n(G)$ и $\mathcal{M}_n^*(G)$ одинаковы. Действительно, в силу формулы обращения типа Мёбиуса можно свести вопрос к расширениям групп $\mathcal{M}_n(G)$ и $\mathcal{M}_n^*(G)$, исключив условие сюръективности отображения $\chi : \mathbf{L}^\vee \to A$ (соответственно, $\chi^* : \mathbf{L} \to A$). Тогда конечное преобразование Фурье (после выбора идентификации $G \simeq A$) отождествляет два комплексных векторных пространства, образованных гомоморфизмами из двух расширенных групп в $\mathbb{C}$.

5. Умножение и коумножение

В этом параграфе мы рассматриваем только векторный случай. Ковекторный случай рассматривается аналогично. Рассмотрим $\mathcal{M}_n(G)$ с двумя переменными $n \geqslant 1$ и G. Определим отображения умножения и коумножения и изучим их свойства. Важную роль будет играть группа $\mathcal{M}_n^-(G)$, которая определяется *только для нетривиальных групп* G как фактор-группа $\mathcal{M}_n(G)$ по отношению

$$\langle -a_1, \dots, a_n \rangle = -\langle a_1, \dots, a_n \rangle. \tag{5.1}$$

Обозначим через $\langle a_1, \dots, a_n \rangle^- \in \mathcal{M}_n^-(G)$ образ $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ при естественной проекции

$$\mu^- : \mathcal{M}_n(G) \to \mathcal{M}_n^-(G). \tag{5.2}$$

Рассмотрим короткие точные последовательности конечных абелевых групп

$$0 \to G' \to G \to G'' \to 0$$

и соответствующие короткие точные последовательности групп характеров

$$0 \to A'' \to A \to A' \to 0.$$

Пусть $n = n' + n''$ и $n', n'' \geqslant 1$. Определим $\mathbb{Z}$-билинейное отображение “умножения”

$$\nabla : \mathcal{M}_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}(G'') \to \mathcal{M}_{n'+n''}(G),$$

заданное на порождающих формулой

$$\langle a'_1, \dots, a'_{n'} \rangle \otimes \langle a''_1, \dots, a''_{n''} \rangle \mapsto \sum \langle a_1, \dots, a_{n'}, a''_1, \dots, a''_{n''} \rangle, \tag{5.3}$$

где сумма берется по всем подъемам $a_i \in A$ элемента $a'_i \in A'$ и a''_i понимаются как элементы A с учетом вложения $A'' \hookrightarrow A$.

Совместность с определяющими соотношениями (S) и (M) очевидна. Тот факт, что элементы в каждом слагаемом в правой части порождают A, следует из соответствующего условия в левой части для групп A' и A''. Заметим, что ∇ спускается до $\mathbb{Z}$-билинейного отображения соответствующих фактор-групп $\nabla^- : \mathcal{M}_{n'}^-(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}^-(G'') \to \mathcal{M}_{n'+n''}^-(G)$, где G' и G'' нетривиальны.

Далее, определим отображение “коумножения”

$$\Delta : \mathcal{M}_{n'+n''}(G) \to \mathcal{M}_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}^-(G''),$$

где группа G'' нетривиальна, заданное на порождающих формулой

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mapsto \sum \ \langle a_{I'} \mod A'' \rangle \otimes \langle a_{I''} \rangle^-. \tag{5.4}$$

Здесь полагаем

$$\langle a_{I'} \mod A'' \rangle = \langle a_{i_1} \mod A'', \dots, a_{i_{n'}} \mod A'' \rangle, \quad I' := \{i_1, \dots, i_{n'}\},$$

и аналогично для $\langle a_{I''} \rangle$, используя отношение симметрии (S). Сумма берется по всем подразбиениям $\{1, \dots, n\} = I' \sqcup I''$, $\#I' = n'$, $\#I'' = n''$, таким, что

- для всех $j \in I''$ имеем $a_j \in A'' \subset A$, и в первом члене в правой части элементы a_i, $i \in I'$, заменяются их образами в $A' = A/A''$,
- (условие порождения) элементы a_j, $j \in I''$, порождают A''.

Заметим, что при данном условии порождения в каждом члене из правой части формулы выражение $\langle a_{I'} \mod A'' \rangle^-$ является символом, так как $\sum \mathbb{Z} a_i = A$ влечет $\sum\limits_{i \in I'} (a_i \mod A'') = A'$. Поэтому условие порождения для первого члена выполняется автоматически.

Предложение 5.1. *Отображение Δ продолжается до корректно определенного $\mathbb{Z}$–линейного гомоморфизма.*

Доказательство. По лемме 4.1 достаточно проверить 2-членные отношения (R_2). Надо показать, что образ отношения

$$\langle a_1, a_2, \ldots\rangle = \langle a_1 - a_2, a_2, \ldots\rangle + \langle a_1, a_2 - a_1, \ldots\rangle$$

в левой части является соотношением в правой части и члены в правой части удовлетворяют условию порождения (линейные комбинации элементов порождают соответствующую группу). Представляет интерес лишь тот случай, когда первые два аргумента распределяются над различными множителями в (5.4), так что

$$\langle a_1, a_2, \ldots\rangle \mapsto \delta^{\mathrm{gen}}_{a_1 \in A''} \cdot \langle a_2 \mod A'', \ldots\rangle \otimes \langle a_1, \ldots\rangle^- + \delta^{\mathrm{gen}}_{a_2 \in A''} \cdot \langle a_2 \mod A'', \ldots\rangle \otimes \langle a_2, \ldots\rangle^-, \quad (5.5)$$

где для $a \in A$

$$\delta^{\mathrm{gen}}_{a \in A''} := \begin{cases} 1, & a \in A'', \quad \mathbb{Z}a + \sum\limits_{j \in J''} \mathbb{Z}a_j = A'', \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Возможны четыре случая:

(1) $a_1 \in A''$, $a_2 \in A''$,

(2) $a_1 \in A''$, $a_2 \notin A''$,

(3) $a_1 \notin A''$, $a_2 \in A''$,

(4) $a_1 \notin A''$, $a_2 \notin A''$.

Зафиксируем непересекающиеся подмножества $J' := I' \cap \{3, \ldots, n\}$ и $J'' := I'' \cap \{3, \ldots, n\}$ мощности $n' - 1$ и $n'' - 1$ соответственно. Для каждого символа в левой части (5.4) существует не более двух ненулевых членов в правой части (в зависимости от условия порождения) соответственно случаю $a_1 \in I'$, $a_2 \in I''$ или $a_1 \in I''$, $a_2 \in I'$.

В случае (1)

$$\langle a_1, a_2, \ldots\rangle \mapsto \delta^{\mathrm{gen}}_{a_1 \in A''} \cdot \langle 0, \ldots\rangle \otimes \langle a_1, \ldots\rangle^- + \delta^{\mathrm{gen}}_{a_2 \in A''} \cdot \langle 0, \ldots\rangle \otimes \langle a_2, \ldots\rangle^-$$

и

$$\begin{aligned} &\langle a_1 - a_2, a_2, \ldots\rangle + \langle a_1, a_2 - a_1, \ldots\rangle \\ &\qquad \mapsto \delta^{\mathrm{gen}}_{a_1 - a_2 \in A''} \cdot \langle 0, \ldots\rangle \otimes \langle a_1 - a_2, \ldots\rangle^- + \delta^{\mathrm{gen}}_{a_2 \in A''} \cdot \langle 0, \ldots\rangle \otimes \langle a_2, \ldots\rangle^- \\ &\qquad + \delta^{\mathrm{gen}}_{a_1 \in A''} \cdot \langle 0, \ldots\rangle \otimes \langle a_1, \ldots\rangle^- + \delta^{\mathrm{gen}}_{a_2 - a_1 \in A''} \cdot \langle 0, \ldots\rangle \otimes \langle a_2 - a_1, \ldots\rangle^-. \end{aligned}$$

Первый и последний члены в правой части сокращаются в силу (5.1), а второй и третий члены являются образами $\langle a_1, a_2, \ldots\rangle$.

В случае (2)

$$\langle a_1, a_2, \ldots\rangle \mapsto \delta^{\mathrm{gen}}_{a_1 \in A''} \cdot \langle a_2 \mod A'', \ldots\rangle \otimes \langle a_1, \ldots\rangle^-$$

и

$$\langle a_1 - a_2, a_2, \ldots\rangle + \langle a_1, a_2 - a_1, \ldots\rangle \mapsto \delta^{\mathrm{gen}}_{a_1 \in A''} \cdot \langle a_2 - a_1 \mod A'', \ldots\rangle \otimes \langle a_1 - a_2, \ldots\rangle^-.$$

Правые части обоих выражений совпадают, так как $a_2 = a_2 - a_1 \bmod A''$.

Случай (3) аналогичен случаю (2).

В случае (4) имеем $\langle a_1, a_2, \ldots\rangle \mapsto 0$ и

$$\begin{aligned} \langle a_1 - a_2, a_2, \ldots\rangle + \langle a_1, a_2 - a_1, \ldots\rangle \mapsto\ & \delta^{\mathrm{gen}}_{a_1 - a_2 \in A''} \cdot \langle a_2 \mod A'', \ldots\rangle \otimes \langle a_1 - a_2, \ldots\rangle^- \\ &+ \delta^{\mathrm{gen}}_{a_2 - a_1 \in A''} \cdot \langle a_1 \mod A'', \ldots\rangle \otimes \langle a_2 - a_1, \ldots\rangle^-; \end{aligned}$$

члены в правой части сокращаются в силу (5.1). $\square$

Легко проверить, что Δ спускается до $\mathbb{Z}$-линейного гомоморфизма

$$\Delta^- : \mathcal{M}^-_{n'+n''}(G) \to \mathcal{M}^-_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}^-_{n''}(G''). \tag{5.6}$$

Построения выше приводят к естественному комплексу. Обозначим через $\mathcal{G}_\bullet$ флаг подгрупп

$$0 = G_{\leqslant 0} \subsetneq G_{\leqslant 1} \subsetneq \ldots \subsetneq G_{\leqslant r} = G$$

и через r — его длину. Рассмотрим диаграмму гомоморфизмов

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^-_n(G) &\rightleftarrows \bigoplus_{\substack{n_1+n_2=n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } 2}} \mathcal{M}^-_{n_1}(\mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}^-_{n_2}(\mathrm{gr}_2(\mathcal{G}_\bullet)) \\ &\rightleftarrows \bigoplus_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } 3}} \mathcal{M}^-_{n_1}(\mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}^-_{n_2}(\mathrm{gr}_2(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}^-_{n_3}(\mathrm{gr}_3(\mathcal{G}_\bullet)) \rightleftarrows \cdots, \end{aligned}$$

где правые стрелки означают естественные симплициальные расширения коумножения Δ^- (заданные знакопеременными суммами), а левые стрелки — соответствующие расширения отображений умножения. Получаем два комплекса $\mathcal{C}^{\bullet,-}(G,n)$ и $\mathcal{C}^-_\bullet(G,n)$ с дифференциалами d_{Δ^-} и d_{∇^-} степени $(+1)$ и (-1) соответственно.

Теорема 5.1. *Пусть G — конечная циклическая группа. Тогда когомологии обоих комплексов $\mathcal{C}^{\bullet,-}(G,n)$ и $\mathcal{C}^-_\bullet(G,n)$ (после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$) сконцентрированы в степени* 0.

Доказательство. Условие цикличности группы G будет использоваться только на последнем шаге доказательства. Пусть $\mathcal{M}^\sim_n(G)$ — $\mathbb{Q}$-векторное пространство, порожденное символами $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle^\sim$, удовлетворяющими условию симметрии (S) и такими, что $a_1,\ldots,a_n$ порождают A и $a_j \neq 0$ для всех j. Существует естественное отображение $\mathbb{Q}$-векторных пространств $\mathcal{M}^\sim_n(G) \to \mathcal{M}^-_n(G) \otimes \mathbb{Q}$, заданное формулой

$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle^\sim \mapsto \langle a_1,\ldots,a_n\rangle^-. \tag{5.7}$$

Рассмотрим коумножение

$$\Delta^\sim : \mathcal{M}^\sim_{n'+n''}(G) \to \mathcal{M}^\sim_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}^\sim_{n''}(G''),$$

определенное формулой

$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle^\sim \mapsto \sum \langle a_{I'} \mod A''\rangle^\sim \otimes \langle a_{I''}\rangle^\sim, \tag{5.8}$$

где $I', I'' \subsetneq I$ — непустые подмножества такие, что

- $I' \sqcup I'' = \{1,\ldots,n\}$,
- $I'' = \Big\{ i \mid a_i \in A'', \sum\limits_{i\in I''} \mathbb{Z}a_i = A'' \Big\}$.

Отображение умножения $\nabla^\sim : \mathcal{M}^\sim_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}^\sim_{n''}(G'') \to \mathcal{M}^\sim_{n'+n''}(G')$ определяем аналогами формул (5.3). Как и выше, получим два комплекса $\mathcal{C}^{\bullet,\sim}(G,n)$ и $\mathcal{C}^\sim_\bullet(G,n)$ с соответствующими дифференциалами $d_{\nabla^\sim}$ и $d_{\Delta^\sim}$. Получаем естественные сюръективные гомоморфизмы комплексов $\mathcal{C}^{\bullet,\sim}(G,n) \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{\bullet,-}(G,n)\otimes\mathbb{Q}$ и $\mathcal{C}^\sim_\bullet(G,n) \twoheadrightarrow \mathcal{C}^-_\bullet(G,n)\otimes\mathbb{Q}$, индуцированные отображениями $\langle a_1,\ldots,a_{n_i}\rangle^\sim \mapsto \langle a_1,\ldots,a_{n_i}\rangle^-$. Ясно, что эти отображения согласованы с соответствующими дифференциалами; здесь мы использовали тот факт, что символы $\langle a_1,\ldots,a_{n_i}\rangle^-$ обращаются в нуль по модулю кручения, если $a_j = 0$ по крайней мере для одного j.

Рассмотрим следующие утверждения:

(1) $H^{>0}(\mathcal{C}^{\bullet,\sim}(G,n)) = 0$,

(2) оператор $\boldsymbol{\Delta}^\sim = d_{\Delta^\sim}\circ d_{\nabla^\sim} + d_{\nabla^\sim}\circ d_{\Delta^\sim}$ обратим в степенях >0,

(3) оператор $\boldsymbol{\Delta}^- = d_{\Delta^-}\circ d_{\nabla^-} + d_{\nabla^-}\circ d_{\Delta^-}$ обратим в степенях >0,

(4) $H^{>0}(\mathcal{C}^{\bullet,-}(G,n)) = 0$ и $H_{>0}(\mathcal{C}^-_\bullet(G,n)) = 0$.

Имеет место последовательность импликаций

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4).$$

Действительно, утверждения (1) и (2) эквивалентны, так как дифференциалы $d_{\nabla^\sim}$ и $d_{\Delta^\sim}$ сопряжены относительно положительно определенной квадратичной формы, заданной единичной матрицей в естественном базисе.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) верна, так как мы имеем сюръективный гомоморфизм комплексов.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) верна, так как лапласиан $\mathbf{\Delta}^-$ является эндоморфизмом обоих комплексов $\mathcal{C}^{\bullet,-}(G,n)\otimes\mathbb{Q}$ и $\mathcal{C}^-_\bullet(G,n)\otimes\mathbb{Q}$, который гомотопен нулю для обоих комплексов. Обратимость этого эндоморфизма в степенях >0 влечет обратимость в когомологиях в степенях >0 и, следовательно, когомологии равны нулю в этих степенях.

Осталось доказать утверждение (1). Для этого построим гомотопию $h: C_j^\sim(G,n)\to C_{j-1}^\sim(G,n)$, $j=1,\ldots,$ такую, что

$$\mathbf{\Delta}_h^\sim := h\circ d_{\Delta^\sim} + d_{\Delta^\sim}\circ h \tag{5.9}$$

обратим в степенях >0.

Напомним, что $C_j^\sim(G,n)$, $j\geqslant 0$, является прямой суммой членов, отмеченных флагами подгрупп $0=G_{\leqslant 0}\subsetneq G_{\leqslant 1}\subsetneq \ldots \subsetneq G_r = G$, $r=j+1$. Перейдя к характерам, получим цепочку сюръективных гомоморфизмов

$$0 = A_{\leqslant 0} \overset{\neq}{\twoheadleftarrow} A_{\leqslant 1} \overset{\neq}{\twoheadleftarrow} \cdots \overset{\neq}{\twoheadleftarrow} A_{\leqslant r} = A.$$

Определим h формулой

$$\mathcal{M}_{n_1}^\sim(A_{\leqslant 1})\otimes\mathcal{M}_{n_2}^\sim(\mathrm{Ker}\,(A_{\leqslant 2}\twoheadrightarrow A_{\leqslant 1}))\otimes\cdots\to\mathcal{M}_{n_1+n_2}^\sim(A_{\leqslant 2})\otimes\cdots,$$

который действует как тождественный оператор на пропущенных множителях и как

$$\langle a_1,\ldots,a_{n_1}\rangle^\sim\otimes\langle b_1,\ldots,b_{n_2}\rangle^\sim\mapsto\langle\psi(a_1),\ldots,\psi(a_{n_1}),b_1,\ldots,b_{n_2}\rangle^\sim$$

на первых двух членах, где $\psi: A_{\leqslant 1}\to A_{\leqslant 2}$ — сечение естественной сюръекции, определенной ниже.

Теперь воспользуемся предположением цикличности группы G (следовательно, всех $A_{\leqslant j}$). Запишем

$$G=\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}=\prod_i \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}$$

и отождествим $\mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}=\{0,\ldots,p_i-1\}^{k_i}$, рассматривая последовательность цифр по базе p_i. В такой постановке имеется естественный подъем $\psi: A_{\leqslant 1}\to A_{\leqslant 2}$, полученный *добавлением* нулей к соответствующим последовательностям цифр для всех p_i. Заметим, что дифференциал $d_{\Delta^\sim}$ задается *удалением* цифр из этого представления. Оператор $\mathbf{\Delta}_h^\sim - \mathrm{Id}$ (см. уравнение (5.9)), действующий на $C^{j,\sim}(G,n)$, $j\geqslant 1$, *нильпотентный*, так как он строго увеличивает число нулей в нашем множестве цифровых последовательностей. Поэтому $\mathbf{\Delta}_h^\sim$ обратим в степенях $\geqslant 1$. $\square$

Замечание 5.1. Для *нециклической* группы G структура когомологий $\mathcal{C}^{\bullet,-}$ более сложная. Пусть $G=(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. В этом случае комплекс имеет вид

$$\mathcal{M}_2^-(G)\to\bigoplus_{p+1\,\text{копий}}\mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\otimes\mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Покажем, что это отображение не будет сюръективным при $p\geqslant 3$. Действительно, достаточно построить нетривиальный функционал в правой части, обращающийся в нуль на образе дифференциала d_{Δ^-}. Мы можем описать $\mathrm{Coker}\,(d_{\Delta^-})\otimes\mathbb{Q}$ как пространство $\mathbb{Q}$-значных функций f на парах линейно независимых векторов $a_1,a_2\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ таких, что

- $f(a_1,a_2)=-f(-a_1,a_2)=-f(a_1,-a_2)=f(a_1,a_2+\lambda a_1)$ для всех $\lambda\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,
- $f(a_1,a_2)+f(a_2,a_1)=0$.

Первое свойство описывает функционалы на $C^{1,-}(G,2)$, а второе означает, что f принадлежит $\mathrm{Ker}\,(d_{\Delta^-})$. Здесь определяющее соотношение (M) для $\mathcal{M}_2(G)$ не используется. Решения этой системы функциональных уравнений задаются отображениями $f(a_1,a_2)=g(a_1\wedge a_2)$, где g — любое отображение вида $g:=(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times=\wedge^2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2\setminus 0\to\mathbb{Q}$, которое нечетно, т.е. $g(-\lambda)=-g(\lambda)$ для всех λ. Следовательно,

$$H^1(\mathcal{C}^{\bullet,-}(G,2))\otimes\mathbb{Q}\simeq\mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}=\mathbb{Q}^{(p-1)/2}.$$

Определим

$$\mathcal{M}^-_{n,\mathrm{prim}}(G) := \mathrm{Ker}\left(\mathcal{M}^-_n(G) \to \bigoplus_{\substack{n'+n''=n,\ n',n''\geqslant 1\\ 0\subsetneq G'\subsetneq G}} \mathcal{M}^-_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}^-_{n''}(G/G')\right). \tag{5.10}$$

Это когомологии комплекса $\mathcal{C}^{\bullet,-}(G,n)$ в нулевой степени с дифференциалом d_Δ.

Определим

$$\mathcal{M}^-_{n,\mathrm{coprim}}(G) := \mathrm{Coker}\left(\mathcal{M}^-_n(G) \leftarrow \bigoplus_{\substack{n'+n''=n,\ n',n''\geqslant 1\\ 0\subsetneq G'\subsetneq G}} \mathcal{M}^-_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}^-_{n''}(G/G')\right). \tag{5.11}$$

Это когомологии комплекса $\mathcal{C}^-_\bullet(G,n)$ в нулевой степени с дифференциалом d_∇. В силу теоремы 5.1 для циклической группы G

$$\dim(\mathcal{M}^-_{n,\mathrm{prim}}(G)\otimes\mathbb{Q}) = \dim(\mathcal{M}^-_{n,\mathrm{coprim}}(G)\otimes\mathbb{Q}), \tag{5.12}$$

$$\dim(\mathcal{M}^-_n(G)\otimes\mathbb{Q}) = \sum_r \sum_{\substack{n_1+\dots+n_r=n\\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } r}} \prod_{i=1}^r \dim(\mathcal{M}^-_{n_i,\mathrm{prim}}(\mathrm{gr}_i(\mathcal{G}_\bullet))\otimes\mathbb{Q}). \tag{5.13}$$

Используя ∇^-, можно получить гомоморфизм векторных пространств

$$\mathcal{M}^-_{n_1,\mathrm{prim}}(\mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \dots \otimes \mathcal{M}^-_{n_r,\mathrm{prim}}(\mathrm{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathbb{Q} \to \mathcal{M}^-_n(G)\otimes\mathbb{Q}.$$

Аналогично, используя Δ^-, получим гомоморфизм $\mathbb{Q}$-векторных пространств

$$\mathcal{M}^-_{n_1,\mathrm{coprim}}(\mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \dots \otimes \mathcal{M}^-_{n_r,\mathrm{coprim}}(\mathrm{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathbb{Q} \leftarrow \mathcal{M}^-_n(G)\otimes\mathbb{Q}.$$

Ввиду (5.12) и (5.13) заманчиво предположить, что эти отображения являются изоморфизмами $\mathbb{Q}$-векторных пространств.

Теперь рассмотрим диаграмму гомоморфизмов

$$\mathcal{M}_n(G) \to \bigoplus_{\substack{n_1+n_2=n\\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } 2}} \mathcal{M}_{n_1}(\mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}^-_{n_2}(\mathrm{gr}_2(\mathcal{G}_\bullet))$$

$$\to \bigoplus_{\substack{n_1+n_2+n_3=n\\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } 3}} \mathcal{M}_{n_1}(\mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}^-_{n_2}(\mathrm{gr}_2(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}^-_{n_3}(\mathrm{gr}_3(\mathcal{G}_\bullet)) \to \cdots,$$

где

- $\mathcal{G}_\bullet$ — флаг подгрупп типа $0 = G_{\leqslant 0} \subseteq G_{\leqslant 1} \subsetneq \ldots \subsetneq G_{\leqslant r} = G$, $r \geqslant 1$, со строгими вложениями, за исключением первого шага,
- крайний левый множитель в каждом члене является полной группой, а не фактор-группой по отношению (5.1).

Здесь дифференциал использует *оба* отображения Δ и Δ^-. Мы опять получим комплекс, который обозначим $\mathcal{C}^\bullet(G,n)$. Отметим, что здесь нет двойственного дифференциала в другом направлении.

Теорема 5.2. *Пусть G — конечная циклическая группа. Тогда когомологии комплекса $\mathcal{C}^\bullet(G,n)$ (после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$) сконцентрированы в степени* 0.

Доказательство. Рассуждаем так же, как в доказательстве теоремы 5.1. Ключевой момент состоит в том, что для конечных циклических групп проекция μ^-, определенная в (5.2), допускает сечение

$$\nu : \mathcal{M}^-_n(G) \to \mathcal{M}_n(G), \tag{5.14}$$

которое на символах задается формулой

$$\langle a_1,\dots,a_n\rangle^- \mapsto \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n} (-1)^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_n} \langle \varepsilon_1 a_1,\dots,\varepsilon_n a_n\rangle, \tag{5.15}$$

где $\varepsilon_i \in \{+1,-1\}$ и сумма берется по всем возможным вариантам.

При $n=1$ этот факт очевидно совместен. Чтобы проверить определяющие соотношения в общем случае, достаточно рассмотреть случай $n=2$. Для $a, b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, НОД $(a,b,N)=1$, уравнение (5.15) принимает вид

$$\langle a,b\rangle^- \mapsto \langle a,b\rangle + \langle -a,-b\rangle - \langle -a,b\rangle - \langle a,-b\rangle. \tag{5.16}$$

Надо проверить, что соотношение $\langle a,b\rangle^- = \langle a,b-a\rangle^- + \langle a-b,b\rangle^-$ отображается в соотношение в $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Для каждого члена в (5.16) выпишем соотношение

$$\begin{aligned}\langle a,b\rangle + &\langle -a,-b\rangle - \langle -a,b\rangle - \langle a,-b\rangle \\ &\stackrel{?}{=} \langle a,b-a\rangle + \langle -a,a-b\rangle - \langle -a,b-a\rangle - \langle a,a-b\rangle \\ &+ \langle a-b,b\rangle + \langle b-a,-b\rangle - \langle b-a,b\rangle - \langle a-b,-b\rangle.\end{aligned}$$

Первые члены на каждой строке (а также вторые, которые рассматриваются по отдельности) дают соотношение в $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Достаточно проверить, что

$$-\langle -a,b\rangle - \langle a,-b\rangle \stackrel{?}{=} -\langle -a,b-a\rangle - \langle a,a-b\rangle - \langle b-a,b\rangle - \langle a-b,-b\rangle.$$

Заменим $a \mapsto -a$. Надо показать, что

$$\langle a,b\rangle + \langle -a,-b\rangle \stackrel{?}{=} \langle a,b+a\rangle + \langle -a,-a-b\rangle + \langle b+a,b\rangle + \langle -a-b,-b\rangle.$$

Так как $\langle a,b+a\rangle = \langle a,b\rangle + \langle -b,b+a\rangle$ и $\langle -a,-b-a\rangle = \langle -a,-b\rangle + \langle b,-b-a\rangle$, достаточно показать, что

$$\boldsymbol{\delta}(a+b,b) := \langle a+b,b\rangle + \langle -(a+b),b\rangle + \langle a+b,-b\rangle + \langle -(a+b),-b\rangle \stackrel{?}{=} 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}),$$

т.е. $\boldsymbol{\delta}(a,b) \stackrel{?}{=} 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Заметим, что $\boldsymbol{\delta}(a+b,b) = \boldsymbol{\delta}(a+b,a)$ и $\boldsymbol{\delta}(a,b) = \boldsymbol{\delta}(-a,b) = \boldsymbol{\delta}(b,a)$. Следовательно, $\boldsymbol{\delta}$ инвариантно относительно матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которые порождают группу $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, откуда следует, что $\boldsymbol{\delta}(a,b)$ — константа. Рассматривая среднее и применяя определяющее соотношение к каждому члену, получим

$$\boldsymbol{S} := \sum_{a,b} \boldsymbol{\delta}(a,b) = 2\boldsymbol{S},$$

откуда следует $\boldsymbol{S} = 0$.

Для доказательства теоремы 5.2 надо установить сюръективность отображения

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \to \bigoplus_{N=N'N''} \mathcal{M}_{n'}(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{M}^-_{n''}(\mathbb{Z}/N''\mathbb{Z}), \quad n = n'+n'';$$

здесь сумма берется по всем точным последовательностям

$$0 \to \mathbb{Z}/N''\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/N'\mathbb{Z} \to 0, \quad N = N'N'', \quad N \geqslant 2,$$

конечных циклических групп. Теперь применим *обратный* оператор (после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$). Как уже отмечалось выше,

$$\widetilde{\nabla} : \mathcal{M}_{n'}(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{M}^-_{n''}(\mathbb{Z}/N''\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \quad n = n'+n'',$$

задается на порождающих формулой

$$\langle a_1', \ldots, a_{n'}'\rangle \otimes \langle b_1, \ldots, b_{n''}\rangle^- \mapsto \sum_{\substack{\text{все подъемы} \\ \varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n''}}} (-1)^{\varepsilon_1\cdots\varepsilon_{n''}} \langle a_1, \ldots a_{n'}, \varepsilon_1 b_1, \ldots, \varepsilon_{n''} b_{n''}\rangle,$$

где сумма берется по всем подъемам a_i в $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ элементов $a_i' \in \mathbb{Z}/N'\mathbb{Z}$ и всем возможным вариантам для $\varepsilon_j \in \{+1,-1\}$ (см. определение ν в (5.14)). Это согласуется с определяющими уравнениями. Теорема доказана. □

Теперь определим

$$\mathcal{M}_{n,\mathrm{prim}}(G) = \mathrm{Ker}\left(\mathcal{M}_n(G) \to \bigoplus_{\substack{n'+n''=n,\ n',n''\geqslant 1\\ 0\subsetneq G'\subsetneq G}} \mathcal{M}_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}^-_{n''}(G/G')\right). \tag{5.17}$$

Это когомологии комплекса в степени 0. Заметим, что вложение G' может быть тривиальным. Имеем $\mathcal{M}_1(G) = \mathcal{M}_{1,\mathrm{prim}}(G)$ для всех G. При $G = 1 = \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ имеем $\mathcal{M}_1(1) = \mathbb{Z}$ и $\mathcal{M}_n(1) = \mathcal{M}_{n,\mathrm{prim}}(1) = 0$, $n \geqslant 2$. Из теоремы 5.2 следует существование *неканонического* изоморфизма

$$\mathcal{M}_n(G)\otimes\mathbb{Q} \simeq \bigoplus_r \bigoplus_{\substack{n_1+\dots+n_r=n\\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } r}} \mathcal{M}_{n_1,\mathrm{prim}}(\mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet))\otimes\dots\otimes\mathcal{M}^-_{n_r,\mathrm{prim}}(\mathrm{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet))\otimes\mathbb{Q}.$$

Компьютерные вычисления (см. § 8) дают основание считать, что для всех $N \geqslant 1$

- $\mathcal{M}_{2,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q} = \mathcal{M}^-_{2,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}$ и равно размерности пространства параболических форм веса 2 для $\Gamma_1(N)$ (мы обсудим это в § 11),
- $\mathcal{M}_{3,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q} = \mathcal{M}^-_{3,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}$ и равно числу некоторых параболических автоморфных представлений относительно конгруэнц-подгруппы группы $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z})$, порожденных вектором, инвариантным относительно конгруэнц-подгруппы,
- $\mathcal{M}_{n,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q} = \mathcal{M}^-_{n,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q} = 0$, $n \geqslant 4$.

В силу теорем 5.1 и 5.2 мы можем вычислить $\mathbb{Q}$-ранги групп $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, используя

- функцию Эйлера

$$\dim(\mathcal{M}_{1,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}) = \varphi(N), \quad N \geqslant 1,$$

$$\dim(\mathcal{M}^-_{1,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}) = \begin{cases} 0, & N = 2,\\ \varphi(N)/2, & N \geqslant 3,\end{cases}$$

- хорошо известные размерности пространств параболических форм для группы $\Gamma_1(N)$, которые заданы замкнутыми формулами в N, например,

N	...	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...	180	181
	0	1	0	2	1	1	2	5	2	7	3	...	705	1276

- несколько мистические размерности в случае $n = 3$, например,

N	43	51	52	59	63	67	68	72	73	75	...	239	240
	1	1	1	1	2	2	1	1	8	4	...	3	22

Пример 5.1. Ввиду теоремы 5.2 получаем $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3^{n-1}\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}) = 1$, $n \geqslant 1$, из

$$\mathcal{M}_{1,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/1\mathbb{Z})\otimes\underbrace{\mathcal{M}^-_{1,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})\otimes\dots\otimes\mathcal{M}^-_{1,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})}_{(n-1)\text{ раз}}.$$

Очевидно, что коумножения Δ и Δ^- дают гомоморфизмы

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{M}^{(-)}_{n_1}(G),\mathbb{Q})\otimes\mathrm{Hom}(\mathcal{M}^{(-)}_{n_2}(G),\mathbb{Q}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{M}^{(-)}_{n}(G),\mathbb{Q}).$$

Используя явные ненулевые элементы

$$(\langle 0\rangle \mapsto 1) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{M}_1(\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}),\mathbb{Q}), \quad (\langle \pm 1 \mod 3\rangle^- \mapsto \pm 1) \in \mathrm{Hom}(\mathcal{M}^-_1(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}),\mathbb{Q}),$$

получим в явном виде функционал на $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3^{n-1}\mathbb{Z})$ такой, что

$$\langle 1 \mod 3^{n-1}, 3 \mod 3^{n-1},\dots,3^{n-1} \mod 3^{n-1}\rangle \mapsto 1$$

и, следовательно, ненулевой. В частности, $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3^{n-1}\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}) \geqslant 1$. Аналогично

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z})\otimes\mathbb{F}_2) \geqslant 1.$$

Таким образом, мы получаем в явном виде нетривиальные инварианты эквивариантных бирациональных действий группы $G = \mathbb{Z}/3^{n-1}\mathbb{Z}$ на n-мерных многообразиях. Удивительно, но численные эксперименты показывают, что нетривиальный инвариант в $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z}), \mathbb{F}_2)$ поднимается до тривиального элемента в $\mathrm{Hom}(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z}), \mathbb{F}_2)$ при $n = 2, 3, 4, 5$.

На основании численных экспериментов можно предположить, что

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = 0 \text{ для всех } N < 3^{n-1},$$

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2) = 0 \text{ для всех } N < 2^{n-1}.$$

Более того,

$$\dim(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2) = 0 \quad \text{для всех } N < \begin{cases} 2^n - 1, & n = 2, 3, \\ 2^{n-1}, & n \geqslant 4. \end{cases}$$

6. Операторы Гекке

В этом параграфе мы рассмотрим аналоги операторов Гекке на $\mathcal{M}_n(G)$. Зафиксируем простое число ℓ, не делящее $\#G$, и целое число $1 \leqslant r \leqslant n-1$. Положим

$$T_{\ell,r}(\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda)) := \sum_{\mathbf{L} \subset \mathbf{L}' \subset \mathbf{L} \otimes \mathbb{R}.\ \mathbf{L}'/\mathbf{L} \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^r} \psi(\mathbf{L}', \chi, \Lambda), \tag{6.1}$$

где χ теперь понимается как элемент $\mathbf{L}' \otimes A$. В силу вложения $\mathbf{L} \otimes A \subset \mathbf{L}' \otimes A$ сюръективность $\chi \in \mathbf{L}' \otimes A$ следует из сюръективности $\chi \in \mathbf{L} \otimes A$ и условия взаимной простоты ℓ и порядка группы G.

Предложение 6.1. *Операторы Гекке $T_{\ell,r}$ корректно определены на $\mathcal{M}_n(G)$ и коммутируют друг с другом.*

Предложение 6.1 следует из аддитивности уравнения (4.4) и определения (6.1).

Пример 6.1. Рассмотрим случай $n = 2$ и $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \simeq A$. Тогда $\mathcal{M}_n(G)$ порождается элементами $\langle a_1, a_2 \rangle$, $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, НОД $(a_1, a_2, N) = 1$, такими, что

- $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_2, a_1 \rangle$,
- $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, a_2 - a_1 \rangle + \langle a_1 - a_2, a_2 \rangle$ для всех a_1, a_2.

Приведем пример оператора Гекке на $\mathcal{M}_2(G)$. Для каждого ℓ, взаимно простого с N, имеется только один оператор Гекке $T_\ell = T_{\ell,1}$. Предположим, что N нечетно и $\ell = 2$. Рассмотрим стандартный октант $\mathbf{L} = \mathbb{Z}^2$, $\chi = (1,0) \otimes a_1 + (0,1) \otimes a_2$, $\Lambda = \mathbb{R}^2_{\geqslant 0}$. Имеются три надрешетки $\mathbf{L}$ индекса 2, соответствующие трем элементам $\mathrm{P}^1(\mathbb{F}_2)$:

- $\mathbf{L}'_0 := \mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{2}, 0) + \mathbb{Z} \cdot (0, 1)$,
- $\mathbf{L}'_1 := \mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z} \cdot (0, 1) = \mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z} \cdot (1, 0)$,
- $\mathbf{L}'_\infty := \mathbb{Z} \cdot (0, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z} \cdot (1, 0)$.

Соответствующие конусы в первом и третьем случаях будут базисными симплициальными, а во втором случае конус не базисный и может быть представлен как объединение двух базисных симплициальных конусов относительно $\mathbf{L}'_1$: $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, где $\Lambda_1 = \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cdot (1, 0) + \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cdot (1, 1)$ и $\Lambda_2 = \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cdot (1, 1) + \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cdot (0, 1)$. Поэтому

$$T_2(\langle a_1, a_2 \rangle) = \langle 2a_1, a_2 \rangle + (\langle a_1 - a_2, 2a_2 \rangle + \langle 2a_1, a_2 - a_1 \rangle) + \langle a_1, 2a_2 \rangle.$$

Средний член получается из равенств

$$e_1 \otimes a_1 + e_2 \otimes a_2 = e_1 \otimes (a_1 - a_2) + \frac{e_1 + e_2}{2} \otimes 2a_2 = \frac{e_1 + e_2}{2} \otimes 2a_1 + e_2 \otimes (a_2 - a_1).$$

Вывод аналогичных формул для действий T_3 на $\mathcal{M}_2(G)$ и T_2 на $\mathcal{M}_3(G)$ оставляем читателю в качестве упражнения.

Для определения операторов Гекке $T^*_{\ell,r}$ в ковекторном варианте рассмотрим подрешетки $\mathbf{L}' \subset \mathbf{L}$ индекса ℓ^r такие, что фактор изоморфен $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^r$. В частности, $T^*_2 = T^*_{2,1}$ задается на $\mathcal{M}^*_2(G)$ формулой

$$T^*_2([a_1, a_2]^*) = [2a_1, a_2]^* + [2a_1, a_1 + a_2]^* + [a_1 + a_2, 2a_2]^* + [a_1, 2a_2]^*,$$

а $T^*_{2,1}$ на $\mathcal{M}_3(G)$ — формулой

$$\begin{aligned} T^*_{2,1}([a_1, a_2, a_3]^*) = {} & [2a_1, a_2, a_3]^* + [a_1, 2a_2, a_3]^* + [a_1, a_2, 2a_3]^* + [2a_1, a_1 + a_2, a_3]^* \\ & + [a_1 + a_2, 2a_2, a_3]^* + [a_1, 2a_2, a_2 + a_3]^* + [a_1, a_2 + a_3, 2a_3]^* \\ & + [2a_1, a_2, a_1 + a_3]^* + [a_1 + a_3, a_2, a_3]^* + [2a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_3]^* \\ & + [a_1 + a_2, 2a_2, a_2 + a_3]^* + [a_1 + a_3, a_2 + a_3, 2a_3]^* + [a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + a_3]^*. \end{aligned}$$

Замечание 6.1. Гомоморфизмы Δ и ∇ совместны с действием операторов Гекке, в частности, группы $\mathcal{M}^-_{n,\mathrm{prim}}(G)$, определенные формулой (5.11), сохраняются под действием операторов Гекке.

7. Варианты

Рассмотрим неприводимое алгебраическое представление $\rho_\lambda : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(\mathsf{V}_\lambda)$ со старшим весом $\lambda = (\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Представление ρ_λ определяет функтор из группоида n-мерных $\mathbb{Q}$-векторных пространств в категорию $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}$ всех $\mathbb{Q}$-векторных пространств, который будем обозначать той же буквой. В частности, для любой решетки $\mathbf{L}$ ранга n мы можем говорить о $\rho_\lambda(\mathbf{L} \otimes \mathbb{Q}) \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}$. Например, если ρ_λ — m-я симметрическая степень $\mathrm{Sym}^m(V)$ стандартного представления, т.е. $\lambda = (0, \ldots, 0, m)$, то $\rho_\lambda(\mathbf{L} \otimes \mathbb{Q}) = \mathrm{Sym}^m(\mathbf{L} \otimes \mathbb{Q})$.

Рассмотрим $\mathbb{Q}$-векторное пространство $\mathcal{M}_n(G, \rho_\lambda)$, порожденное символами $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda, v)$ на классах изоморфизма четверок, где $\mathbf{L}$, χ, Λ такие же, как в § 6, а $v \in \rho_\lambda(\mathbf{L} \otimes \mathbb{Q})$, удовлетворяет следующим условиям:

- $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda, v_1 + v_2) = \psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda, v_1) + \psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda, v_2)$,
- $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda, v) = \sum\limits_{i=1}^{k} \psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda_i, v)$ для любого разложения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k$.

Здесь можно считать, что подконусы Λ_i базисные и симплициальные, а разложение стандартно, как в § 6, или просто Λ_i — конечно порожденные рациональные подконусы полной размерности с непересекающимися внутренностями. Действие операторов Гекке на $\mathcal{M}_n(G, \rho_\lambda)$ определяется так же, как в (6.1).

Ковекторный вариант этой конструкции очевиден.

Замечание 7.1. Мы ожидаем, что для $n = 2$, $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ и ρ_λ, заданного m-й симметрической степенью, $\mathbb{Q}$-векторные пространства $\mathcal{M}_n(G, \rho_\lambda)$, снабженные действием операторов Гекке $T_{\ell,r}$, связаны с модулярными формами веса $(m + 2)$ для конгруэнц-подгруппы $\Gamma_1(N)$.

8. Численные эксперименты

В этом параграфе мы приведем результаты численных экспериментов, выполненных с помощью программы Fast Linear Algebra Solver [**5**]. Мы вычислили размерности $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ и $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ над $\mathbb{Q}$ и другими различными конечными полями. Размеры (сильно разреженных) матриц растут как $\sim N^n$. Например, при $n = 5$ и $N = 81$ часть условий, соответствующих $k = 2$ в (B) или (M), приводит к $\sim 3 \cdot 10^8$ уравнениям с $\sim 3 \cdot 10^7$ переменными и $\sim 10^9$ ненулевыми коэффициентами. Эта переопределенная система имеет единственное (с точностью до скаляра) нетривиальное решение в $\mathbb{Q}$. Вычисление длилось около четырех часов. Мы получили следующие численные результаты.

- Для простого p

$$\dim(\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \frac{p^2 - 1}{24} + 1 = \frac{p^2 + 23}{24},$$

тогда как разность

$$\Delta_{2,\ell}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) := \dim\left(\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_\ell\right) - \frac{p^2+23}{24}$$

меняется существенно: имеют место частые скачки при $\ell \mid (p \pm 1)$, например,

$$\Delta_{2,31}(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}) = 1.$$

- В случае простого p

$$\Delta_{3,\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) := \dim\left(\mathcal{B}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}\right) - \frac{(p-5)(p-7)}{24} = 0$$

для всех простых чисел вплоть до 41, однако

$$\Delta_{3,\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 1, \quad p = 43, 59, \ldots .$$

- Разность

$$\Delta_{3,\ell}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) := \dim\left(\mathcal{B}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_\ell\right) - \frac{(p-5)(p-7)}{24}$$

также претерпевает скачки для многих $\ell \mid (p \pm 1)$.
- Для всех простых p, вплоть до числа 41, $\dim\left(\mathcal{B}_4(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}\right) = 0$, тогда как $\dim\left(\mathcal{B}_4(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}\right) = 1$ для $p = 43, 59, \ldots$.

Ниже мы систематизируем полученные результаты в виде таблиц размерностей. Все размерности для $\mathbb{Q}$-коэффициентов согласуются с гипотезами из § 5. Полужирным выделено наименьшее N, при котором ранг положителен.

- $\dim\left(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}\right) = \dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}\right)$ для $n = 2, 3$:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
n=2	0	**1**	1	2	2	3	3	5	4	6	7	8	7	13	10	13	12
n=3	0	0	0	0	0	0	0	**1**	0	1	2	2	1	5	3	5	5

N	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	...	180	181
n=2	16	17	23	16	23	23	30	22	34	31	36	...	989	1366
n=3	7	7	11	7	12	13	16	12	21	17	22	...	1740	1276

- $\dim\left(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}\right) = \dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}\right)$ для $n = 4$:

N	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	...	105	106	107
n=4	**1**	0	0	0	0	0	2	0	0	3	...	114	0	3

- $\dim\left(\mathcal{M}^-_{4,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}\right) = 0$ для $N \leqslant 242$.
- $\dim\left(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}\right) = \dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}\right)$ для $n = 5$:

N	$\ldots \leqslant 80$	81	82
n=5	0	**1**	0

- $\dim\left(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2\right)$ и $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2\right)$ для $n = 2, 3, 4, 5$:

N	2	3	4	5	6	7	8	...	16	...	32
$\mathcal{B}_2$	0	**1**	1	2	3	4	4	...	13	...	44
$\mathcal{M}_2$	**1**	2	3	5	5	8	8	...	21	...	60
$\mathcal{B}_3$	0	0	0	0	0	**1**	1	...	8	...	43
$\mathcal{M}_3$	0	0	**1**	1	3	2	5	...	21	...	87
$\mathcal{B}_4$	0	0	0	0	0	0	0	...	**1**	...	12
$\mathcal{M}_4$	0	0	0	0	0	0	**1**	...	9	...	55
$\mathcal{B}_5$	0	0	0	0	0	0	0	...	0	...	**1**
$\mathcal{M}_5$	0	0	0	0	0	0	0	...	**1**	...	13

Уравнения (B) из § 1 помечены парами положительных целых чисел n, k, где n — размерность и $2 \leqslant k \leqslant n$. Компьютерные вычисления продемонстрировали замечательное свойство наших уравнений: при заданных n *и* k сильно переопределенная подсистема линейных уравнений (B) или (M) (неявно предполагается выполненным свойство симметрии (S)) имеет очень большое пространство решений, обычно намного больше, чем для всей системы при заданном n, которая представляет собой конъюнкцию подсистем при $k = 2, \dots, n$ (либо подсистему при $k = 2$; см. лемму 4.1). У нас нет объяснений этому поразительному факту. Нет никаких очевидных действий операторов Гекке на пространствах решений для индивидуальных n, k при $k > 2$, и весьма удивительно, что сильно переопределенные системы вообще допускают какое-либо нетривиальное решение.

- $\mathbb{Q}$-ранги частичных систем $\mathcal{B}_{n,k}$ и $\mathcal{M}_{n,k}$ для $k \geqslant 3$ и некоторых простых и составных чисел N:

N	2	3	5	7	11	13	17	19	23	9	12	27	36
$\mathcal{B}_{3,3}$	**1**	2	4	6	12	15	22	27	35	11	36	87	468
$\mathcal{M}_{3,3}$	0	**1**	3	3	7	10	15	18	24	9	40	78	480
$\mathcal{B}_{4,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	5	63
$\mathcal{M}_{4,3}$	0	0	0	0	1	2	5	7	12	**1**	5	24	121
$\mathcal{B}_{4,4}$	0	**3**	6	9	17	20	29	35	45	42	101	620	2515
$\mathcal{M}_{4,4}$	0	**3**	2	3	7	8	13	17	23	45	123	649	2716
$\mathcal{B}_{5,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**
$\mathcal{M}_{5,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**1**	7
$\mathcal{B}_{5,4}$ 0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**3**	4	55	267
$\mathcal{M}_{5,4}$	0	0	0	0	1	2	5	7	12	**5**	12	122	?
$\mathcal{B}_{5,5}$	**1**	3	9	12	22	26	37	44	56	30	161	572	?
$\mathcal{M}_{5,5}$	0	**1**	3	3	7	8	13	17	23	17	212	?	?

Часть II

9. Алгебраические варианты автоморфных форм

Конструкции из § 7 можно обобщить в следующем контексте. Пусть G — связная редуктивная группа над $\mathbb{Q}$. Напомним понятие допустимых модулей Хариш-Чандры $\mathcal{E}$ для $\mathsf{G}(\mathbb{R})$: это $\mathbb{C}$-векторные пространства счетной размерности, снабженные действием максимальной компактной подгруппы $\mathsf{K} \subset \mathsf{G}(\mathbb{R})$ и совместным действием комплексифицированной алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathrm{Lie}\,(G) \otimes \mathbb{C}$. Группа K действует на пространстве $\mathcal{E}$, разбивая его в счетную сумму конечномерных представлений K, каждое из которых входит в сумму с конечной кратностью. Предположим, что центр $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, называемый центральным характером модуля $\mathcal{E}$, действует скалярно. Группа $\mathsf{G}(\mathbb{R})$ действует на пополнении Шварца $\mathcal{S}(\mathcal{E})$. Пусть $\mathcal{S}(\mathcal{E})'$ — *непрерывное* двойственное пространство, которое является подпространством *алгебраического* двойственного пространства $\mathcal{E}^{\vee}$. Конгруэнц-подгруппы группы $\mathsf{G}(\mathbb{Q})$ имеют конечномерные инварианты в $\mathcal{S}(\mathcal{E})'$. Теорию автоморфных форм можно понимать как исследование таких конечномерных пространств инвариантов, снабженных действием алгебры Гекке. Заметим, что на последнем шаге мы рассматриваем $\mathcal{S}(\mathcal{E})'$ как $\mathsf{G}(\mathbb{Q})$-модуль, но не как $\mathsf{G}(\mathbb{R})$-модуль.

Почти все автоморфные формы не имеют отношения ни к мотивам, ни к представлениям Галуа. Те формы, которые фигурируют в теории чисел (*алгебраические* автоморфные формы), задаются определенным условием целочисленности на центральном характере.

Возвращаясь к нашим рассмотрениям, мы видим, что можно сымитировать теорию автоморфных форм с представлениями группы $\mathsf{G}(\mathbb{Q})$ в $\mathcal{S}(\mathcal{E})'$, рассмотрев *другой* класс представлений группы $\mathsf{G}(\mathbb{Q})$ над $\mathbb{Q}$. Предположим, что $\mathsf{G} = \mathrm{GL}_n$ над $\mathbb{Q}$. Пусть

$$\mathcal{F}_n = \langle \mathcal{X}_\Lambda \rangle \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{F}_{\mathbf{L},\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}, \quad \mathbf{L} = \mathbb{Z}^n, \tag{9.1}$$

является $\mathbb{Q}$-векторным пространством, порожденным характеристическими функциями $\mathcal{X}_\Lambda$ выпуклых конечно порожденных рациональных многогранных конусов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ по модулю функций с носителем размерности $\leqslant (n-1)$. Заметим, что $\mathcal{F}_n \subset \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство ограниченных измеримых функций. Ясно, что $\mathsf{G}(\mathbb{Q}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ действует на $\mathcal{F}_n$. Пусть $\rho = \rho_\lambda : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \to \mathrm{Aut}(\mathsf{V}_\lambda)$ — конечномерное неприводимое представление, как выше, и $\Gamma \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ — арифметическая подгруппа. Пространства инвариантов и, соответственно, коинвариантов

$$\begin{aligned} &H^0(\Gamma, \mathcal{F}_n^\vee \otimes \mathsf{V}_\lambda^\vee) = (\mathcal{F}_n^\vee \otimes \mathsf{V}_\lambda^\vee)^\Gamma, \\ &H_0(\Gamma, \mathcal{F}_n \otimes \mathsf{V}_\lambda) = (\mathcal{F}_n \otimes \mathsf{V}_\lambda)_\Gamma \end{aligned} \tag{9.2}$$

суть двойственные друг другу конечномерные пространства, так как модуль характеристических функций конечно порожден над групповым кольцом арифметической подгруппы Γ.

Например, при $n \geqslant 2$, если ρ — тривиальное представление и $\Gamma \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \mathrm{Aut}\,(\mathbf{L})$ — стабилизатор вектора $\chi = (1, 0, 0, \ldots) \in \mathbf{L} \otimes \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, то группа коинвариантов — это (с точностью до кручения) наша группа $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Аналогично, рассматривая стабилизатор координатного ковектора по модулю N, получим ковекторный вариант $\mathcal{M}_n^*(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

В более общем случае для любой конечной абелевой группы G с группой характеров A такой, что G порождается не менее, чем n элементами, выберем элемент $\chi \in \mathbf{L} \otimes A$, $\mathbf{L} = \mathbb{Z}^n$, так, чтобы индуцированный гомоморфизм $\mathbf{L}^\vee \to A$ был сюръективен. Определим $\Gamma(G, n) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ как стабилизатор χ. Заметим, что класс сопряженности стабилизатора не зависит от выбора χ. Тогда при $n \geqslant 2$ для группы G, порожденной не более, чем n элементами, имеем

$$\mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{Q} = H_0(\Gamma(G, n), \mathcal{F}_n). \tag{9.3}$$

Ключевое наблюдение заключается в том, что $\mathcal{F}_n$ — это $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$-модуль, *конечно порожденный* как $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-модуль. Более того,

$$\mathrm{Res}_{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})}^{\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})}(\mathcal{F}_n) \in \mathrm{Perf}\,(\mathbb{Q}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})] - \mathrm{mod}), \tag{9.4}$$

т.е. $\mathcal{F}_n$, рассматриваемый как $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$-модуль, допускает резольвенту конечной длины конечно порожденными проективными модулями над групповым кольцом группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ (см. предложение 9.1 ниже).

Вопрос 9.1. *Существуют ли другие интересные* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$*-модули, конечно порожденные как* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$*-модули, или более того, принадлежащие* $\mathrm{Perf}\,(\mathbb{Q}[\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})] - \mathrm{mod})$*?*

Можно поставить более общий вопрос: Можно ли найти ограниченный сверху комплекс представлений группы $\mathsf{G}(\mathbb{Q})$, который после сужения на $\mathsf{G}(\mathbb{Z})$ будет квазиизоморфным комплексу конечно порожденных проективных модулей над групповым кольцом?

Оба $\mathbb{Q}$-векторных пространства несут действия операторов Гекке, которые имеют алгебраические собственные значения в этих пространствах. В силу (9.4) имеем $\dim\,(H_i(\Gamma, \mathcal{F}_n \otimes \mathsf{V}_\lambda)) < \infty$ для всех $i \geqslant 0$, и пространства при $i \geqslant 1$ также несут действия операторов Гекке с алгебраическими собственными значениями.

Ниже мы увидим, что представление $\mathcal{F}_n$ распадается на хорошо изученные подклассы *когомологических* автоморфных форм, т.е. таких форм, которые реализуются в когомологиях арифметических групп с коэффициентами в конечномерных представлениях ρ.

Напомним определение модулей Стейнберга. Пусть $V/\mathbb{Q}$ — $\mathbb{Q}$-векторное пространство размерности $n \geqslant 0$ и $\mathcal{T}_n$ — симплициальный комплекс флагов $\mathbb{Q}$-векторных подпространств V, т.е. геометрическая реализация частично упорядоченного множества нетривиальных подпространств V. Положим

$$\mathrm{St}(V) := \begin{cases} H_{n-2}(\mathcal{T}_n, \mathbb{Z}), & n \geqslant 3, \\ \mathbb{Z}\text{-комбинации прямых в } V \text{ с общим весом } 0, & n = 2, \\ \mathbb{Z}, & n = 0, 1. \end{cases}$$

Это представление $\mathrm{Aut}\,(V)$, которое будем обозначить St_n в случае $V = \mathbb{Q}^n$. Одна из ролей модуля Стейнберга – это роль дуализирующего модуля в том смысле, что

$$H_i(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), \mathrm{St}_n \otimes M) = H^{n(n-1)/2-i}(\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}), M)$$

для любого представления M группы $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$.

Пусть, как и в (9.1), $\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_n$, где идентификация зависит от выбора базиса в V, разные выборы связаны действием группы $\mathrm{G}_n(\mathbb{Q})$ на $\mathcal{F}_n$. Имеем фильтрацию по подмодулям

$$0 \subset \mathcal{F}^{\leqslant 0}(V) \subset \mathcal{F}^{\leqslant 1}(V) \subset \cdots \subset \mathcal{F}^{\leqslant n}(V) = \mathcal{F}(V),$$

где $\mathcal{F}^{\leqslant i}(V)$ порождаются функциями, образы которых принадлежат фактор-пространствам размерности i. В частности,

$$\mathcal{F}^{\leqslant 0}(V) = \mathbb{Z} = \{\text{постоянные } \mathbb{Z}\text{-значные функции на } V\}.$$

Следующее утверждение, по-видимому, хорошо известно.

Предложение 9.1. $\mathrm{gr}^i(\mathcal{F}(V)) = \oplus_{V \twoheadrightarrow V', \dim(V')=i} \mathrm{St}(V') \otimes \mathrm{or}(V')$, *где* $\mathrm{or}(V')$ *— одномерный* $\mathbb{Z}$*-модуль той же ориентации, что и* V'*, т.е.* $\mathrm{GL}(V')$ *действует через знак детерминанта.*

Доказательство. Сначала докажем, что группа $\mathrm{gr}^n(\mathcal{F}(V)) = \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}^{\leqslant n-1}(V)$ изоморфна $\mathrm{St}(V) \otimes \mathrm{or}(V)$. Применим преобразование Фурье к элементам $\mathcal{F}(V)$, которые понимаются как распределения умеренного роста на $V \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$. Например, преобразование Фурье характеристической функции стандартного координатного октанта $(\mathbb{R}_{\geqslant 0})^n$ равно распределению

$$\prod_{i=1}^{n}(\sqrt{-1}\ \mathrm{v.p.}(1/x_i) + \pi\delta(x_i)) \prod_{i=1}^{n} |dx_i|$$

со значениями в формах объема, где $\mathrm{v.p.}(1/x)$ — единственное нечетное распределение со степенью однородности, равной -1 на $\mathbb{R}^1$ и $1/x$ на $\mathbb{R} \setminus 0$.

Образ $\mathcal{F}^{\leqslant n-1}(V)$ характеризуется тем, что носитель распределения содержится в конечном объединении гиперплоскостей. Поэтому фактор-группа $\mathcal{F}(V)/\mathcal{F}^{\leqslant n-1}(V)$ идентифицируется с абелевой группой, порожденной элементами объема на двойственном пространстве $(V \otimes \mathbb{R})^\vee$ вида

$$(\sqrt{-1})^n |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n|/(x_1 \cdots x_n),$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты в рациональном базисе в $(V \otimes \mathbb{R})^\vee$. Выбрав ориентацию в V (или, эквивалентно, в $V^\vee$) и разделив на $(\sqrt{-1})^n$, мы отождествим последнее пространство с мероморфными дифференциальными формами высшей степени на векторном пространстве $V^\vee$, которое рассматривается как *алгебраическое многообразие* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ над $\mathbb{Q}$, порожденное формами вида $\bigwedge_{i=1}^{n}(dx_i/x_i)$ с координатами в рациональном базисе. Это альтернативное описание модуля Стейнберга. Случай более глубоких членов фильтрации по размерностям рассматривается аналогично. □

Сказанное означает, что вычисление когомологии с коэффициентами из $\mathcal{F}(V)$, после тензорного умножения на конечномерные модули, и, в частности, коинвариантов, будет сводиться к вычислению когомологии St-модулей и их обратных образов из параболических подгрупп. Имеется обширная литература о когомологиях St-модулей (см., например, [**6**] и библиографию там же), однако она не отражает потенциально интересных данных о расширении $\mathcal{F}(V)$.

Подводя итог, мы заключаем, что имеется сюръективный гомоморфизм $\mathcal{F}_n \twoheadrightarrow \mathrm{St}_n \otimes \mathrm{or}_n$, где $\mathrm{or}_n : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \to \mathbb{Q}^\times$, $\gamma \mapsto \mathrm{sgn}(\det(\gamma))$, который приводит к сюръективному гомоморфизму $H_0(\Gamma(G,n), \mathcal{F}_n) \twoheadrightarrow H_0(\Gamma(G,n), \mathrm{St}_n \otimes \mathrm{or}_n)$.

Предложение 9.2. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} H_0(\Gamma(G,n),\mathcal{F}_n) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\simeq"'] & H_0(\Gamma(G,n),\mathrm{St}_n \otimes \mathrm{or}_n) \arrow[d, "\simeq"] \\ \mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{Q} \arrow[r, two heads, "\mu^-"] & \mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

где горизонтальные стрелки означают естественные сюръекции, левая вертикальная стрелка соответствует изоморфизму (9.3)*, а правая вертикальная стрелка также соответствует изоморфизму.*

Доказательство. Коммутативность диаграммы доказывается очевидным образом. Мы поясним лишь правый вертикальный изоморфизм. Напомним, что сужение представления Стейнберга St_n на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ порождается множеством $\mathbb{Z}$-базисов $\{(e_1, \ldots, e_n)\}$ по модулю соотношений

- $(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}) = (-1)^n(e_1,\dots,e_n)$, $\sigma\in\mathfrak{S}_n$,
- $(e_1,e_2,e_3\dots,e_n) = (e_1+e_2,e_2,e_3,\dots,e_n)+(e_1,e_1+e_2,\dots,e_n)$,
- $(e_1,\dots,e_n) = (-e_1,e_2,\dots,e_n)$

(см., например, [**7**, теорема B] и библиографию там же). Поэтому сужение $\mathrm{St}_n\otimes\mathrm{or}_n$ на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ опять же порождается множеством $\mathbb{Z}$-базисов $\{(e_1,\dots,e_n)\}$, но удовлетворяет другим соотношениям

- $(e_{\sigma(1)},\dots,e_{\sigma(n)}) = (e_1,\dots,e_n)$, $\sigma\in\mathfrak{S}_n$,
- $(e_1,e_2,e_3\dots,e_n) = (e_1+e_2,e_2,e_3,\dots,e_n)+(e_1,e_1+e_2,\dots,e_n)$,
- $(e_1,\dots,e_n) = -(-e_1,e_2,\dots,e_n)$.

Первое соотношение — это отношение симметрии (S), последнее соотношение — отношение антисимметрии (5.1) и второе соотношение становится соотношением (M) при $k=2$. □

Положим $\mathbb{H}_n := \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times_{>0}\cdot\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Для $n\geqslant 2$ и группы G, порожденной не более, чем n элементами, имеем

$$\mathcal{M}^-_n(G)\otimes\mathbb{Q} = H_0(\Gamma(G,n),\mathrm{St}_n\otimes\mathrm{or}_n) = H^{BM}_{n-1}(\Gamma(G,n)\backslash\mathbb{H}_n,\mathrm{or}_n)$$

$$= H^{\frac{n(n-1)}{2}}(\Gamma(G,n)\backslash\mathbb{H}_n,\mathrm{or}_n^{\otimes n}) = H^{\frac{n(n-1)}{2}}(\Gamma(G,n),\mathrm{or}_n^{\otimes n}).$$

Действительно, порождающая $(e_1,\dots,e_n)$ группы St_n, где $e_1,\dots,e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^n$, отображается в класс гомологии цепи Бореля — Мура

$$(\mathbb{R}^\times_{>0})^{n-1}\simeq\mathrm{Diag}_{>0,n}(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times_{>0}\subset\mathbb{H}_n.$$

Третий изоморфизм — это двойственность Пуанкаре.

Пусть $\Gamma\subset\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ — арифметическая группа. Параболическая часть когомологий с коэффициентами в конечномерном представлении ρ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ имеет вид

$$H^*_{\mathrm{cusp}}(\Gamma,\rho) := \mathrm{Image}\left(H^*_c(\Gamma\backslash\mathbb{H}_n,\rho)\to H^*(\Gamma\backslash\mathbb{H}_n,\rho)\right).$$

Заметим, что сужение or_n на $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ совпадает с алгебраическим представлением $\det_n:\gamma\mapsto\det(\gamma)$. Известно, что $H^i_{\mathrm{cusp}}(\Gamma,\rho)\neq 0$ только при условии

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2}-1}{2}-\frac{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{2}\leqslant i\leqslant\frac{\frac{n(n+1)}{2}-1}{2}+\frac{\left[\frac{n-1}{2}\right]}{2}.$$

Верхняя грань равна $[n(n-1)]/2$ при $n=1,2,3$ и строго меньше этой величины при $n\geqslant 4$. Наши компьютерные вычисления (см. § 8) дают основание предположить, что

$$\mathcal{M}^-_{n,\mathrm{prim}}(G) = H^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\mathrm{cusp}}(\Gamma(G,n),\mathrm{or}_n^{\otimes n}),$$

и, следовательно, $\mathcal{M}^-_{n,\mathrm{prim}}(G)$ обращаются в нуль при $n\geqslant 4$.

В следующем параграфе мы увидим, что при $n=2$ главные роли играют модулярные формы веса 2 и суммы двух тейтовских мотивов, подкрученных характерами.

Возможны другие варианты определения $\mathcal{F}$:

- используя $\mathbb{Z}$ или конечные поля в качестве коэффициентов вместо $\mathbb{Q}$-коэффициентов, можно изучать эффекты кручения,
- можно отказаться от условия факторизации характеристическими функциями с носителем при размерности $\leqslant(n-1)$,
- если представление ρ определено на пространстве полиномов степени d, можно рассмотреть *полиномиальные сплайны* относительно некоторого полного рационального веера Σ на $\mathbb{R}^n$, т.е. функции на $\mathbb{R}^n$, которые кусочно полиномиальны на конусах для Σ с $\mathbb{Q}$-коэффициентами и обладают непрерывными производными порядка вплоть до некоторого фиксированного $d'<d$.

Последний вариант представляет особый интерес, поскольку такие представления реализуются в качестве подмодулей расширений модулей Стейнберга и коинварианты со значениями в таких модулях могли бы потенциально захватывать старшие группы гомологий модулей Стейнберга, делая их тем самым более приспособленными к компьютерным вычислениям.

Закончим этот параграф сложным вопросом, который касается возможности выйти за пределы когомологических (но все еще алгебраических) автоморфных форм, оставаясь при этом в рамках вопроса 9.1.

Вопрос 9.2. *Можно ли найти представление* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q})$, *сужение которого на* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *было бы конечно порождаемым, а спектр Гекке захватывал бы модулярные формы веса* 1 *и формы Мааса с собственным значением оператора Лапласа* $1/4$?

По всей видимости, такие модули должны реализоваться в классе нечетных/четных распределений на $\mathbb{R}^2$ со степенью однородности -1.

10. Теоретико-решеточный подход к умножению и коумножению

В этом параграфе мы дадим интерпретацию умножения и коумножения на $\mathcal{M}_n^-(G)$ в терминах решеток, которая отличается от определений, введенных в § 5.

Для любых $n \geqslant 1$ и нетривиальной конечной абелевой группы G введем конечномерный перестановочный модуль $\mathcal{E}_n(G) := \mathbb{Q}^{\{\mathrm{epi}\ \mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow G\}}$ группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$. Определим стек (с конечными стабилизаторами)

$$\mathbb{X}_n := \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \backslash \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{O}_n(\mathbb{R}).$$

Этот стек параметризует аракеловские расслоения ранга n на $\widehat{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$, т.е. пары $(\mathbf{L}, h)$, где $\mathbf{L}$ — решетка ранга n и h — положительно определенная квадратичная форма на $\mathbf{L} \otimes \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{L}_{n,G}$ — $\mathbb{Q}$-локальная система на $\mathbb{X}_n$, ассоциированная с представлением $\mathcal{E}_n(G) \otimes \mathrm{or}_n$. Тогда

$$\mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q} = H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}). \tag{10.1}$$

Умножение ∇^-, определенное в § 5, можно переопределить в этой терминологии следующим образом. Рассмотрим флаги $\mathcal{G}_\bullet$ подгрупп

$$0 = G_{\leqslant 0} \subsetneq G_{\leqslant 1} \subset \ldots \subsetneq G_{\leqslant r} = G, \quad r \geqslant 1,$$

и последовательности положительных целых чисел $n_1, \ldots, n_r$ таких, что $n_1 + \cdots + n_r = n$. Определим гомоморфизм

$$\bigotimes_{i=1}^{r} H_{n_i}^{BM}(\mathbb{X}_{n_i}, \mathcal{L}_{n_i, \mathrm{gr}_i(\mathcal{G}_\bullet)}) \to H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) \tag{10.2}$$

следующим образом. Рассмотрим график $\mathbb{Y}^{\nabla}_{n_1,\ldots,n_r} \subset (\mathbb{X}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{X}_{n_r}) \times \mathbb{X}_n$, замкнутого вложения (следовательно, собственного отображения) $\mathbb{X}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{X}_{n_r} \to \mathbb{X}_n$, заданного формулой

$$(\mathbf{L}_1, h_1), \ldots, (\mathbf{L}_r, h_r) \mapsto (\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{L}_r, h = h_1 \boxplus \cdots \boxplus h_r).$$

Справедлива диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Y}^{\nabla}_{n_1,\ldots,n} \arrow[dl, "\pi_{n_1,\ldots,n_r}"'] \arrow[dr, "\pi_n"] & \\ \mathbb{X}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{X}_{n_r} & & \mathbb{X}_n \end{tikzcd}$$

Здесь $\pi_{n_1,\ldots,n_r}$ — изоморфизм. Морфизм локальных систем

$$\pi^*_{n_1,\ldots,n_r}(\mathcal{L}_{n_1,\mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{L}_{n_r,\mathrm{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)}) \to \pi_n^* \mathcal{L}_{n,G}$$

задан в каждой точке

- канонической идентификацией ориентационных расслоений

$$\mathrm{or}(\mathbf{L}_1) \otimes \cdots \otimes \mathrm{or}(\mathbf{L}_r) \xrightarrow{\sim} \mathrm{or}(\mathbf{L}),$$

- морфизмом слоев локальных систем, ассоциированными с перестановочными модулями

$$\mathbb{Q}^{\{\mathrm{epi}\ \mathbf{L}_1^\vee \twoheadrightarrow A_1\}} \otimes \cdots \otimes \mathbb{Q}^{\{\mathrm{epi}\ \mathbf{L}_r^\vee \twoheadrightarrow A_r\}} \to \mathbb{Q}^{\{\mathrm{epi}\ \mathbf{L}^\vee \twoheadrightarrow A\}}. \tag{10.3}$$

Рассмотрим $\chi \in \mathbf{L} \otimes A := \mathrm{Hom}(\mathbf{L}^\vee, A)$ такой, что сужение χ на $\mathbf{L}_i^\vee \subset \mathbf{L}^\vee$ принимает значение в множестве характеров группы G, равных нулю на $G_{\leqslant i-1}$ для всех i; такие характеры индуцируют характеры группы $\mathrm{gr}_i(\mathcal{G}_\bullet)$ и гомоморфизмы $\chi_i : \mathbf{L}_i^\vee \to A_i := \mathrm{Hom}(\mathrm{gr}_i(\mathcal{G}_\bullet), \mathbb{C}^\times)$. Мы утверждаем, что χ_i сюръективны для всех i (тогда χ также будет сюръекцией). Характер χ определяет морфизм перестановочных модулей ранга 1, заданных элементарной матрицей с индексами $(\chi_1, \dots, \chi_r), \chi$. Суммируя по всем таким элементарным матрицам, получим требуемый гомоморфизм (10.3).

Коумножение Δ^-, определенное в § 5, также допускает геометрическую переформулировку. Мы имеем гомоморфизм

$$H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) \to \bigotimes_{i=1}^{r} H_{n_i}^{BM}(\mathbb{X}_{n_i}, \mathcal{L}_{n_i, \mathrm{gr}_i(\mathcal{G}_\bullet)}), \tag{10.4}$$

определенный по аналогии с (10.2), но вместо графика $\mathbb{Y}^\nabla_{n_1,\dots n_r}$ отображения рассмотрим *соответствие* $\mathbb{Y}^\Delta_{n_1,\dots,n_r} \subset \mathbb{X}_n \times (\mathbb{X}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{X}_{n_r})$. Это соответствие, этальное над $\mathbb{X}_n$ и *собственное* над $(\mathbb{X}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{X}_{n_r})$, можно рассматривать как график многозначного отображения. Более подробно, $\mathbb{Y}_{n_1,\dots,n_r}$ определяется

- решеткой $(\mathbf{L}, h)$ ранга n с метрикой, т.е. положительно определенной квадратичной формой h на $\mathbf{L} \otimes \mathbb{R}$, как выше,
- флагом $\mathbf{L}_\bullet$ полных подрешеток $0 = \mathbf{L}_{\leqslant 0} \subsetneq \mathbf{L}_{\leqslant 1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathbf{L}_{\leqslant r} = \mathbf{L}$,
- выбором изоморфизмов $\mathbf{L}_i \simeq \mathrm{gr}_i(\mathbf{L}_\bullet)$ таких, что индуцированные метрики на $\mathbf{L}_{n_i} \otimes \mathbb{R}$ совпадают с h_i.

Справедлива диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Y}^\Delta_{n_1,\dots,n} \arrow[dl, "\pi_n"'] \arrow[dr, "\pi_{n_1,\dots,n_r}"] & \\ \mathbb{X}_n & & \mathbb{X}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{X}_{n_r} \end{tikzcd}$$

Морфизм локальных систем на $\mathbb{Y}_n$

$$\pi_n^* \mathcal{L}_{n,G} \to \pi^*_{n_1,\dots,n_r} \left(\mathcal{L}_{n_1, \mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)} \oplus \cdots \mathcal{L}_{n_r, \mathrm{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)} \right)$$

задается в любой точке

- натуральным изоморфизмом ориентационных расслоений $\mathrm{or}(\mathbf{L}) \simeq \mathrm{or}(\mathbf{L}_1) \otimes \dots \otimes \mathrm{or}(\mathbf{L}_r)$,
- морфизмом слоев локальных систем, ассоциированным с перестановочными модулями

$$\mathbb{Q}^{\{\mathrm{epi}\ \mathbf{L}^\vee \twoheadrightarrow A\}} \to \mathbb{Q}^{\{\mathrm{epi}\ \mathbf{L}_1^\vee \twoheadrightarrow A_1\}} \otimes \dots \otimes \mathbb{Q}^{\{\mathrm{epi}\ \mathbf{L}_r^\vee \twoheadrightarrow A_r\}}. \tag{10.5}$$

Рассмотрим характер $\chi \in \mathbf{L} \otimes A := \mathrm{Hom}(\mathbf{L}^\vee, A)$, индуцирующий коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbf{L}^\vee = \mathbf{L}^{\mathrm{perp}}_{\leqslant 0} \arrow[d] & \supsetneq & \mathbf{L}^{\mathrm{perp}}_{\leqslant 1} \arrow[d] & \cdots & \supsetneq & \mathbf{L}^{\mathrm{perp}}_{\leqslant r} \arrow[d] \\ A = G^{\mathrm{perp}}_{\leqslant 0} & \supsetneq & G^{\mathrm{perp}}_{\leqslant 1} & \cdots & \supsetneq & G^{\mathrm{perp}}_{\leqslant r} \end{tikzcd}$$

т.е. $G^{\mathrm{perp}}_{\leqslant i} = \chi(\mathbf{L}^{\mathrm{perp}}_{\leqslant i})$, $i = 0, \dots, r-1$. Характер χ сюръективен (случай $i = 0$) и индуцирует сюръективные гомоморфизмы $\chi_i : \mathbf{L}_i^\vee \to A_i = \mathrm{Hom}(G_i)$, $i = 1, \dots, r$, где $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{\leqslant i}/\mathbf{L}_{\leqslant i-1}$ и $G_i = G_{\leqslant i}/G_{\leqslant i-1}$. Как и выше, такой характер χ определяет элементарную матрицу с индексами $\chi, (\chi_1, \dots, \chi_r)$. Суммируя по всем таким χ, получим требуемый гомоморфизм.

Предложение 10.1. *Используя идентификации* $\mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q} = H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G})$ *и формулы* (10.2) *и* (10.4)*, получаем такие же гомоморфизмы* $\mathcal{M}^-_{n_1}(G_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{M}^-_{n_r}(G_r) \otimes \mathbb{Q} \rightleftarrows \mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q}$, *как гомоморфизмы, индуцированные из* Δ *и* ∇ *в* § 5.

Доказательство. Случай произведения следует непосредственно из определения: Базис $e_1, \dots, e_n$ в $\mathbf{L}$ дает замкнутую цепь Бореля — Мура $\simeq \mathbb{R}^n_{>0}$, состоящую из диагональных форм h в этом базисе.

В случае копроизведения предположим, что $\mathbf{L} \simeq \mathbb{Z}^n$ — стандартная координатная решетка, с точностью до действия $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, переставляющего координаты и действующего посредством знака на каждую координату. Имеем каноническую замкнутую цепь Бореля — Мура

$$C_n \subset \mathrm{Chains}_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathbb{Z}), \quad \partial(C_n) = 0,$$

заданную образами положительных диагональных матриц. Для заданного флага

$$0 = \mathbf{L}_{\leqslant 0} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{L}_{\leqslant r} = \mathbf{L},$$

используя соответствие $\mathbb{Y}^{\Delta}_{n_1,\ldots,n_r}$, получим замкнутую цепь Бореля — Мура

$$C_{\mathbf{L}_\bullet} \subset \mathrm{Chains}_n^{BM}(\mathbb{X}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{X}_{n_r}, \mathbb{Z}).$$

Любой точке h в C_n сопоставим $(h_1, \ldots, h_r) \in \mathbb{X}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{X}_{n_r}$.

Главный момент состоит в том, что если флаг не согласован с выбранным координатным разложением, то соответствующая цепь будет границей. Отсюда следует, что только координатные флаги вносят вклад в формулу. $\square$

Следуя рассуждениям из § 5 (особенно (5.17)), определим $H^{BM}_{n,\mathrm{prim}}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) \subset H^{BM}_n(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G})$ как общее ядро всех нетривиальных гомоморфизмов коумножения ($r \geqslant 2$). Очевидно, что при такой идентификации $\mathcal{M}^-_{n,\mathrm{prim}}(G) \otimes \mathbb{Q} = H^{BM}_{n,\mathrm{prim}}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G})$.

Напомним топологическое определение параболических когомологий:

$$H_{n,\mathrm{cusp}}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) := \mathrm{Image}(H_n(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) \to H^{BM}_n(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G})).$$

Гипотеза 10.1. *Для каждой нетривиальной конечной абелевой группы G и каждого $n \geqslant 1$*

$$H^{BM}_{n,\mathrm{prim}}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) = H_{n,\mathrm{cusp}}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) \subset H^{BM}_n(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}).$$

Эта гипотеза по сути совпадает с нашим предположением, сформулированным неявно в § 5. Приняв эту гипотезу, мы получили бы следующую переформулировку.

Гипотеза 10.2. *Для каждой нетривиальной конечной абелевой группы G и каждого $n \geqslant 1$ естественный гомоморфизм*

$$\bigoplus_{r=1}^{n} \bigoplus_{\substack{n_1+\cdots+n_r=n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } r}} H_{n_1,\mathrm{cusp}}(\mathbb{X}_{n_1}, \mathcal{L}_{n_1,\mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)}) \otimes \cdots \otimes H_{n_r,\mathrm{cusp}}(\mathbb{X}_{n_r}, \mathcal{L}_{n_r,\mathrm{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)}) \to H^{BM}_n(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G})$$

является изоморфизмом.

Теория представлений предоставляет каноническое разложение когомологий арифметических групп в сумму параболической и всех остальных (эйзенштейновских) частей после тензорного умножения на $\mathbb{C}$. В наших рассмотрениях для $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ предполагается разложение над $\mathbb{Q}$. Именно, определим $H^{BM}_{n,\mathrm{coprim}}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G})$ как фактор по сумме образов всех нетривиальных отображений произведения (10.2). Весьма соблазнительно высказать сопутствующую гипотезу.

Гипотеза 10.3. *Для каждой нетривиальной конечной абелевой группы G и каждого $n \geqslant 1$ гомоморфизм*

$$H^{BM}_n(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) \to \bigoplus_{r=1}^{n} \bigoplus_{\substack{n_1+\cdots+n_r=n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } r}} H_{n_1,\mathrm{coprim}}(\mathbb{X}_{n_1}, \mathcal{L}_{n_1,\mathrm{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)}) \otimes \cdots \otimes H_{n_r,\mathrm{coprim}}(\mathbb{X}_{n_r}, \mathcal{L}_{n_r,\mathrm{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)})$$

является изоморфизмом.

Гипотеза 10.4. *Композиция*

$$H^{BM}_{n,\mathrm{prim}}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) \hookrightarrow H^{BM}_n(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) \twoheadrightarrow H^{BM}_{n,\mathrm{coprim}}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G})$$

является изоморфизмом.

Вышеизложенные соображения укладываются в общие рамки. Для $n \geqslant 1$ обозначим через R_n множество конечномерных неприводимых представлений $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, которые возникают как прямые слагаемые тензорных произведений

- представлений групп $\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}}) = \prod_p \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$,
- неприводимых алгебраических представлений $\rho_\lambda : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \to \mathsf{V}_\lambda$ со старшим весом λ.

Очевидно, что R_1 состоит из двух элементов и R_n — счетные бесконечные множества при $n \geqslant 2$.

Для заданных $\rho_1 \in R_{n_1}$, $\rho_2 \in R_{n_2}$, $\rho \in R_n$, $n = n_1 + n_2$, можно ввести пространство кратностей $\mathrm{mult}\,^{\rho}_{\rho_1,\rho_2} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ — конечномерное комплексное векторное пространство

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{Z})\times \mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{Z})}(\rho_{n_1} \boxtimes \rho_{n_2}, \rho_{|_{\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{Z})\times \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{Z})}}).$$

Соответствие $\mathbb{Y}^{\nabla}_{n_1,n_2}$ поднимается до естественного гомоморфизма

$$\mathrm{mult}^{\rho}_{\rho_1,\rho_2} \otimes H^{BM}_*(\mathbb{X}_n, \rho_{n_1}) \otimes H^{BM}_*(\mathbb{X}_{n_2}, \rho_{n_2}) \to H^{BM}_*(\mathbb{X}_n, \rho).$$

Такие соответствия можно организовать следующим образом. Пусть $\mathcal{C}$ — полупростая (в счетном смысле) $\mathbb{C}$-линейная тензорная категория со счетными суммами и тензорными произведениями, коммутирующими с суммами, и с простыми объектами ϵ_ρ, соответствующими $\rho \in \coprod_{n\geqslant 1} R_n$. Тензорное произведение задается формулой

$$\epsilon_{\rho_1} \otimes \epsilon_{\rho_2} = \oplus_\rho \ \mathrm{mult}\,^{\rho}_{\rho_1,\rho_2} \otimes_{\mathbb{C}} \epsilon_\rho,$$

где выражение в правой части бесконечно. Положим

$$\mathcal{A}_\bullet := \bigoplus_{n\geqslant 1} \bigoplus_{\rho \in R_n} H^{BM}_\bullet(\mathbb{X}_n, \rho \otimes \epsilon_\rho) \in \mathrm{Ob}\,(\mathcal{C}).$$

Объект $\mathcal{A}_\bullet$ несет структуру суперкоммутативной ассоциированной $\mathbb{Z}$-градуированной неунитарной алгебры в $\mathcal{C}$. Использование цепей приводит не к группам гомологий, а к коммутативной дифференциальной $\mathbb{Z}$-градуированной неунитарной алгебре, которую с помощью двойственности в смысле Кошули можно идентифицировать с дифференциальной градуированной алгеброй Ли (или L_∞-алгеброй). Следующий вопрос: Что это за алгебра или ее двойственная по Кошулю алгебра Ли?

Сама категория $\mathcal{C}$, по-видимому, допускает описание как категория представлений определенного типа бесконечномерной полугруппы.

В первом модельном примере рассмотрим R^{fin}_n, состоящий из неприводимых представлений симметрической группы $\mathfrak{S}_n$. Тогда соответствующий аналог $\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$ категории $\mathcal{C}$ является подкатегорией категорий Делиня представлений $\mathfrak{gl}_t$, где t — параметр (дробная размерность).

Во втором модельном примере, более близком к нашим рассмотрениям, R^{alg}_n — множество неприводимых алгебраических представлений $\rho_\lambda : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \to \mathsf{V}_\lambda$ со старшим весом λ. Определив пространства кратностей $\mathrm{mult}\,^{\rho}_{\rho_1,\rho_2}$ аналогичным образом, получим категорию $\mathcal{C}^{\mathrm{alg}}$ представлений со старшим весом (хорошо известного) центрального расширения

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to \mathsf{G} \to \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})^\circ \to 1,$$

где $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})^\circ$ — связная компонента единицы группы $\{g \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{cont},\mathbb{C}-\mathrm{mod}}(\mathbb{C}^\infty)\}$, $\mathbb{C}^\infty := \mathbb{C}((t))$. Группа G действует на пространстве счетной размерности $\mathsf{V} := \oplus_{i\in\mathbb{Z}} \wedge^{\frac{\infty}{2}+i}(\mathbb{C}^\infty)$. Согласно аналогу двойственности Шура — Вейля для всех $n \geqslant 1$ группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ действует на $\mathsf{V}^{\otimes n}$, коммутируя с G-действием и идентифицируя представления со старшим весом группы G уровня n (т.е. такие, для которых центральное расширение действует с характером $z \mapsto z^n$) с алгебраическими неприводимыми представлениями группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Для наших целей важно отождествить в явном виде категорию $\mathcal{C}^{/p}$, простые объекты которой соответствуют неприводимым конечномерным представлениям групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, $n \geqslant 1$, с категорией $\mathcal{C}^p$, простые объекты которой соответствуют неприводимым конечномерным представлениям непрерывных групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $n \geqslant 1$.

Аналогично можно рассмотреть коумножение. Для заданных $\rho_1 \in R_{n_1}$, $\rho_2 \in R_{n_2}$, $\rho \in R_n$, $n = n_1 + n_2$, определим пространство коумножения $\mathrm{comult}\,^{\rho_1,\rho_2}_{\rho} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, конечномерное комплексное векторное пространство как $\mathrm{Hom}_{P_{n_1,n_2}(\mathbb{Z})}(\rho_{|_{P_{n_1,n_2}(\mathbb{Z})}}, \rho_{n_1} \boxtimes \rho_{n_2})$, где $P_{n_1,n_2} \subset \mathrm{GL}_{n_1}$ — стабилизатор флага $\mathbb{Z}^{n_1} \subset \mathbb{Z}^n$. Соответствие $\mathbb{Y}^{\Delta}_{n_1,n_2}$ поднимается до естественного гомоморфизма

$$\mathrm{comult}^{\rho}_{\rho_1,\rho_2} \otimes H^{BM}_*(\mathbb{X}_n,\rho) \to H^{BM}_*(\mathbb{X}_n,\rho_{n_1}) \otimes H^{BM}_*(\mathbb{X}_{n_2},\rho_{n_2}).$$

Мы получим коассоциативную коалгебру без единицы в тензорной категории, которая уже не будет заведомо симметрической.

Заметим, что возможны нетривиальные расширения между двумя представлениями из R_n, и это дает основания предположить, что определения категории $\mathcal{C}$ и алгебры $\mathcal{A}_\bullet$ можно было бы усилить, приняв во внимание дополнительные данные. Кроме того, категория $\mathcal{C}$ не является жесткой, и, следовательно, ее нельзя интерпретировать как категорию представлений группы, но лишь полугруппы.

Наконец, все проведенные выше рассуждения можно провести в случае числовых полей, заменив решетки нетривиальными конечно порожденными модулями без кручения.

11. Случай $n = 2$. Модулярные символы

Напомним определение модулярных символов веса 2 для

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \gamma = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mod N \right\}, \quad N \in \mathbb{Z}_{\geqslant 2}.$$

Пусть $\mathbb{M}_2(\Gamma_1(N))$ — $\mathbb{Q}$-векторное пространство, порожденное парами (c,d), где $c,d \in \mathbb{Z}/N$, НОД $(c,d,N) = 1$, и выполнены соотношения

(1) $(c,d) = -(d,-c)$ (и, следовательно, $= (-c,-d) = -(-d,c)$),

(2) $(c,d) + (d,-c-d) + (-c-d,c) = 0$.

Известно, что $\mathbb{M}_2(\Gamma_1(N))$ естественным образом отождествляет группу гомологий Бореля — Мура $H_1^{BM}(X_1(N),\mathbb{Q})$ с комплексной модулярной кривой $X_1(N) := \Gamma_1(N)\backslash\mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — верхняя полуплоскость. Символ (c,d) соответствует образу геодезического пути в $X_1(N)$ из $\mathbf{a}/\mathbf{c}$ в $\mathbf{b}/\mathbf{d}$, где

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N)$$

обозначает любой элемент такой, что $c,d = \mathbf{c},\mathbf{d} \mod N$.

В силу (1) можно записать (2) в виде

(2′) $(d,c) = (d,c-d) + (d-c,c)$.

Действительно, подставляя $c \mapsto -c$ в (2), получим

$$0 \overset{(2)}{=} (-c,d) + (d,c-d) + (c-d,-c) \overset{(1)}{=} -(d,c) + (d,c-d) + (c-d,-c)$$

$$\overset{(1)}{=} -(d,c) + (d,c-d) + (d-c,c).$$

На $\mathbb{M}_2(\Gamma_1(N))$ определена инволюция $\iota : (c,d) \mapsto (-c,d) \overset{(1)}{=} -(d,c)$, которая, записанная в виде $(c,d) \mapsto -(d,c)$, очевидно, сохраняет соотношение (2′) и соотношение циклической антисимметрии (1). Эта инволюция соответствует автоморфизму первой группе гомологий, полученной из антиголоморфной инволюции на $X_1(N)$, ассоциированной с отображением $\tau \mapsto -\overline{\tau}, \tau \in \mathcal{H}$ на универсальном покрытии. Обозначим через $\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))$ $(-)$-собственное пространство инволюции ι.

Размерности заданы следующим образом:

$$\dim(\mathbb{M}_2(\Gamma_1(N))) = 2g + C(N) - 1,$$

$$\dim(\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))) = g + \frac{C(N) - C_2(N)}{2},$$

где

- $g = g(N)$ — род модулярной кривой $\overline{X_1(N)}$, который совпадает с размерностью пространства параболических форм веса 2 для $\Gamma_1(N)$ (см. таблицу в § 5),
- $C(N)$ — число параболических точек или каспов (элементов $\mathrm{P}^1(\mathbb{Q})/\Gamma_1(N)$),

- $C_2(N)$ — число неподвижных параболических точек антиголоморфной инволюции, описанной выше.

Для $N = 1, 2, 3, 4$ имеем $C(N) = C_2(N) = 1, 2, 2, 3$, соответственно, а при $N \geqslant 5$ мощности $C(N)$ и $C_2(N)$ задаются формулами

$$C(N) = \frac{1}{2}\sum_{d|N} \varphi(d)\,\varphi(N/d),$$

$$C_2(N) = \begin{cases} \varphi(N) + \varphi(N/2), & N \text{ четно}, \\ \varphi(N), & N \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Теперь обсудим, как вышеизложенное связано с нашими группами символов $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ и $\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

Предложение 11.1. *$\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ и $\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))$ изоморфны.*

Доказательство. Действительно, подпространство $\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))$ (или, точнее, его фактор-пространство) можно описать в терминах порождающих и соотношений следующим образом:

(R1) $(a_1, a_2)^- = (a_2, a_1)^-$,

(R2) $(a_1, a_2)^- = (a_1, a_2 - a_1)^- + (a_1 - a_2, a_2)^-$,

(R3) $(a_1, a_2)^- = -(a_2, -a_1)^-$.

Здесь (R3) совпадает с (1), (R2) совпадает с (2') и (R1) — ι-инвариантность. Поэтому естественное отображение $\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))$, $\langle a_1, a_2\rangle^- \mapsto (a_1, a_2)^-$, является изоморфизмом, так как (R1), (R2), (R3) суть определяющие соотношения для $\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. □

Заметим, что $(a, 0)^- = (0, a)^- = 0 \in \mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))$ в силу (R1) и (R3). Кроме того, (R2) можно заменить ковекторной версией

(R2*) $(a_1, a_2)^- = (a_1 + a_2, a_2)^- + (a_1, a_1 + a_2)^-$.

Действительно, можно сделать замены $a_1 \mapsto a_1$ и $a_2 \mapsto a_1 + a_2$ в (R2) и воспользоваться диэдральной симметрией в силу (R1) и (R3).

В качестве следствия теорем 5.1, 5.2 и наших гипотез

$$\dim(\mathcal{M}_{2,\mathrm{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\mathcal{M}_{2,\mathrm{prim}}^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = g(N)$$

можно было бы получить формулу, вытекающую из предложения 11.1,

$$\dim(\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = g(N) + \frac{1}{4}\sum_{d|N, 3\leqslant d\leqslant N/3} \varphi(d)\,\varphi(N/d)$$

$$\overset{\text{для всех } N\geqslant 1}{=} \dim(\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))) = g(N) + \frac{C(N) - C_2(N)}{2},$$

а также *гипотетическую* формулу

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) \overset{?}{=} g(N) + \frac{1}{2}\sum_{d|N, d\geqslant 3} \varphi(d)\,\varphi(N/d) \overset{N\geqslant 5}{=} g(N) + C(N) - \frac{C_2(N)}{2}.$$

По-видимому, доказать последнюю формулу можно с помощью соотношения между модулем Стейнберга и модулем $\mathcal{F}_2$ (см. предложение 9.1). Для простого числа $N = p \geqslant 5$ формулы для размерностей упрощаются:

$$g(p) = \frac{(p-5)(p-7)}{24}, \quad C(p) = C_2(p) = p - 1,$$

$$\dim(\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(p))) = g(p),$$

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) \overset{?}{=} \frac{p^2 + 23}{24} = g(p) + \frac{p-1}{2}. \tag{11.1}$$

Оставшаяся часть параграфа посвящена прямому доказательству формулы (11.1).

Мы имеем два отображения

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow \mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad \langle a,b\rangle \mapsto \langle a,b\rangle^-, \tag{11.2}$$

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \stackrel{\Delta}{\to} \mathcal{M}_1(1)\otimes\mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \tag{11.3}$$

где (11.3) — (единственно возможное) отображение копроизведения

$$\langle a,b\rangle \mapsto (1-\delta_{a,0})\langle a\rangle^- + (1-\delta_{b,0})\langle b\rangle^-.$$

Отображение (11.2) сюръективно по определению, а (11.3) сюръективно с точностью до 2-кручения: после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$ правое обратное отображение, задается формулой

$$\langle a\rangle^- \mapsto \frac{1}{2}(\langle a,0\rangle - \langle -a,0\rangle). \tag{11.4}$$

Формула (11.1) вытекает из следующего утверждения.

Предложение 11.2. *Отображение, заданное суммой отображений* (11.2) *и* (11.3)*,*

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to \mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus \mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),$$

является изоморфизмом с точностью до кручения.

Доказательство. Мы проверим (после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$), что ядро отображения (11.2) порождается образом отображения (11.4). По определению (5.1) ядро отображения (11.2) порождается элементами $\langle a,b\rangle + \langle a,-b\rangle \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Лемма 11.1. *Для всех $a,b,\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $a\neq 0$,*

$$\langle a,b\rangle + \langle a,-b\rangle = 2\cdot\langle a,0\rangle \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Доказательство. Из (M) следует

$$\langle a,b\rangle = \langle a-b,b\rangle + \langle a,b-a\rangle,$$

$$\langle a-b,a\rangle = \langle -b,a\rangle + \langle a-b,b\rangle.$$

Для разности первой и второй строк справедливо равенство

$$\langle a,b\rangle + \langle -b,a\rangle = \langle a,b-a\rangle + \langle a,a-b\rangle,$$

которое с учетом (S) можно записать в виде

$$\langle a,b\rangle + \langle a,-b\rangle = \langle a,b-a\rangle + \langle a,-b+a\rangle.$$

Итерируя, находим

$$\langle a,b\rangle + \langle a,-b\rangle = \langle a,b-ma\rangle + \langle a,-b+ma\rangle, \quad m=1,\ldots,p.$$

Для $a\neq 0 \pmod p$ существует решение m уравнения $ma=b \pmod p$, откуда следует требуемое тождество

$$\langle a,b\rangle + \langle a,-b\rangle = 2\cdot\langle a,0\rangle. \tag{11.5}$$

Лемма доказана. □

Лемма 11.2. *Для всех $a\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $a\neq 0$,*

$$\langle a,0\rangle + \langle -a,0\rangle = 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}.$$

Доказательство. Заменив a на $-a$ в (11.1) и суммируя уравнения, получим

$$(\langle a,b\rangle + \langle -a,b\rangle) + (\langle a,-b\rangle + \langle -a,-b\rangle) = 2\cdot(\langle a,0\rangle + \langle -a,0\rangle).$$

Используя опять (11.1) с заменой a на b и, соответственно, $-b$, находим

$$2\cdot\big(\langle b,0\rangle + \langle -b,0\rangle\big) = 2\cdot\big(\langle a,0\rangle + \langle -a,0\rangle\big) \tag{11.6}$$

для всех $a,b\neq 0$. Покажем, что $\boldsymbol{\delta} := \langle 1,0\rangle + \langle -1,0\rangle \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}$ равно нулю. Для этого рассмотрим сумму

$$\sum_{a,b\neq 0}\big(\langle a,b\rangle + \langle b,-a\rangle\big) = 2(p-1)\cdot\sum_{b\neq 0}\langle b,0\rangle = (p-1)^2\boldsymbol{\delta},$$

где мы использовали равенства (11.5) и (11.6). Применим соотношение раздутия (M) к каждому члену и соотнесем результат к начальной сумме

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{(M)}}{=} \sum_{a,b\neq 0} \langle a-b,b\rangle + \sum_{a,b\neq 0} \langle a,b-a\rangle + \sum_{a,b\neq 0} /\langle b+a,-a\rangle + \sum_{a,b\neq 0} \langle b,-a-b\rangle \\
&\overset{\text{(S)}}{=} 4 \sum_{b\neq 0, a\neq -b} \langle a,b\rangle = 4\sum_{a,b\neq 0}\langle a,b\rangle + 4\sum_{a\neq 0}\langle a,0\rangle - 4\sum_{a\neq 0}\langle a,-a\rangle \\
&= 2(p-1)^2\,\boldsymbol{\delta} + 2(p-1)\,\boldsymbol{\delta} = 2p(p-1)\,\boldsymbol{\delta}.
\end{aligned}$$

После применения соотношения раздутия мы заменили переменные в суммировании, используя отношение симметрии, а затем вернулись к начальной области суммирования, учитывая недостающие члены, и далее воспользовались соотношениями

$$\sum_{a\neq 0}\big(\langle a,0\rangle + \langle -a,0\rangle\big) = (p-1)\,\boldsymbol{\delta},$$

$$\langle a,-a\rangle = 0 \quad \Longleftarrow \quad \langle a,0\rangle \overset{\text{(M)}}{=} \langle a,0\rangle + \langle a,-a\rangle.$$

В результате получаем $(p-1)^2\,\boldsymbol{\delta} = 2p(p-1)\,\boldsymbol{\delta}$, откуда следует

$$(p^2-1)\,\boldsymbol{\delta} = 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}). \tag{11.7}$$

Таким образом, для всех $a\neq 0$ имеем требуемое тождество $\langle a,0\rangle + \langle -a,0\rangle = 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}$. □

Теперь мы готовы закончить доказательство предложения 11.2. В силу леммы 11.1 ядро отображения (11.2) порождается (с точностью до кручения) элементами вида $\langle a,0\rangle$. Из леммы 11.2 следует, что эти элементы можно записать в виде

$$\langle a,0\rangle = \frac{1}{2}\big(\langle a,0\rangle - \langle -a,0\rangle\big) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\otimes\mathbb{Q}.$$

Таким образом, мы получаем образ правого обратного отображения (11.4). □

Замечание 11.1. Присутствие множителя (p^2-1) в (11.7) частично объясняет экспериментально наблюдаемое скачкообразное поведение $\dim\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\otimes\mathbb{F}_\ell\big)$ для простых чисел $\ell \mid (p\pm 1)$ (см. § 8).

Литература

1. A. Kresch, Yu. Tschinkel, “Arithmetic properties of equivariant birational types”, *Res. Number Theory* **7**, No. 2, Paper No. 27 (2021).
2. L. A. Borisov, P. E. Gunnells, “Toric modular forms and nonvanishing of L–functions”, *J. Reine Angew. Math.* **539**, 149–165 (2001).
3. L. A. Borisov, P. E. Gunnells, “Toric modular forms of higher weight”, *J. Reine Angew. Math.* **560**, 43–64 (2003).
4. M. Kontsevich, Yu. Tschinkel, “Specialization of birational types”, *Invent. Math.* **217**, No. 2, 415–432 (2019).
5. The SpaSM group, *SpaSM: a Sparse direct Solver Modulo p*, v1.2 (2017). http://github.com/cbouilla/spasm
6. A. Ash, A. Putman, S. V. Sam, “Homological vanishing for the Steinberg representation”, *Compos. Math.* **154**, No. 6, 1111–1130 (2018).
7. T. Church, A. Thomas, “The codimension–one cohomology of $\mathrm{SL}_n\mathbb{Z}$”, *Geom. Topol.* **21**, No. 2, 999–1032 (2017).

Английский вариант представлен в *J. Eur. Math. Soc.* 21 апреля 2019 г.

Русский вариант поступил в редакцию 20 апреля 2024 г.

