

Ю. В. Матиясевич

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА–ФУНКЦИИ РИМАНА ЧЕРЕЗ ЗНАЧЕНИЯ ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

Исследуются следующие два вопроса. Пусть заданы значения нескольких первых производных дзета–функции Римана в некоторой (неизвестной нам) точке  $a$ .

- Как найти приближенное значение дзета–функции в этой точке без предварительного нахождения самого числа?
- Как найти приближенное значение числа  $a$ ?

Мы предлагаем несколько алгоритмов, которые дают ответы на эти вопросы. Точность алгоритмов демонстрируется численными примерами. Предложенные алгоритмы выявляют новые свойства дзета–функции.

### 1. Дзета–функция Римана

В этом параграфе мы приводим некоторые известные факты, которые потребуются в дальнейшем.

Простые числа  $2, 3, \dots$  представляют один из наиболее значимых объектов исследования в теории чисел. Важным и эффективным инструментом изучения простых чисел является знаменитая дзета–функция Римана. Для комплексного числа  $s$  такого, что  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , дзета–функцию можно определить через ряд Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (1.1)$$

Эта функция изучалась еще Л. Эйлером (но лишь для вещественных  $s$ ). Помимо функции  $\zeta(s)$  Эйлер также рассматривал знакопеременную дзета–функцию (известную также как эта–функция Дирихле)

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s}. \quad (1.2)$$

Эти две функции, (1.1) и (1.2), связаны легко проверяемым соотношением

$$\eta(s) = (1 - 2 \times 2^{-s}) \zeta(s). \quad (1.3)$$

Ряд Дирихле (1.2) имеет бóльшую область сходимости, чем ряд (1.1), а именно: ряд (1.2) сходится при  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . С помощью (1.3) можно определить функцию  $\zeta(s)$  в этой расширенной полуплоскости всюду за исключением точки  $s = 1$ , которая является единственным полюсом дзета–функции.

Для определения  $\zeta(s)$  в остальной части комплексной плоскости можно воспользоваться следующим функциональным уравнением, которому удовлетворяет дзета–функция:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} (1-s) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \zeta(s) = \pi^{\frac{s-1}{2}} s \Gamma\left(\frac{1-s}{2} + 1\right) \zeta(1-s). \quad (1.4)$$

Ю. В. Матиясевич: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия, yumat@pdmi.ras.ru.

Перевод с англ. *J. Math. Sci.* **275**, No. 1, 25–37 (2023).

Это свойство дзета-функции было обнаружено Эйлером [1, § 10] (фактически, он рассматривал эквивалентный аналог (1.4) в терминах дзета-функции). Б. Риман [2] предложил другое определение дзета-функции на всей комплексной плоскости и установил тождество (1.4) для всех комплексных  $s$ .

Эйлер указал, что дзета-функция обращается в нуль на отрицательных четных целых числах (эти числа называют *тривиальными нулями*). Риман доказал, что все другие нули (называемые *нетривиальными*) дзета-функции не являются вещественными и лежат внутри *критической полосы*  $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$ .

Риман установил важное соотношение между простыми числами и нулями дзета-функции. Именно, он нашел явное представление количества  $\pi(x)$  простых чисел, не превосходящих  $x$ , в терминах этих нулей. Это представление является довольно громоздким; более простое соотношение между простыми числами и нулями дзета-функции можно получить, используя *пси-функцию Чебышева*, которая также считает простые числа и их степени с весами

$$\psi(x) = \sum_{\substack{q \leq x \\ q - \text{ степень} \\ \text{простого числа } p}} \ln(p). \quad (1.5)$$

Г. фон Мангольдт [3] доказал, что для нецелых чисел  $x$ , больших единицы,

$$\psi(x) = x - \sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho} - \ln(2\pi). \quad (1.6)$$

В 2013 г. автор эмпирически вывел другое соотношение между простыми числами и нетривиальными нулями дзета-функции. В некотором смысле в этом соотношении закодированы решето Эратостена и двойственное ему решето (см. [4, 5]).

Естественно было бы ожидать, что  $x$  окажется главным членом в правой части равенства (1.6). Порядок разности  $\psi(x) - x$  зависит от максимального значения вещественной части нулей дзета-функции. Согласно знаменитой *гипотезе Римана* все нетривиальные нули дзета-функции должны иметь вещественные части, равные  $1/2$ . Если это действительно так, то

$$\psi(x) = x + O(\ln^2(x)\sqrt{x}) \quad (1.7)$$

и

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dy}{\ln(y)} + O(\ln(x)\sqrt{x}). \quad (1.8)$$

Более того, гипотеза Римана эквивалентна каждой из оценок (1.7) и (1.8) (см., например, фундаментальную монографию [6, п. 4.2]).

Гипотеза Римана остается недоказанной уже более, чем полтора века. Эффектным неформальным подтверждением этой гипотезы может служить точное вычисление вещественных частей первых нетривиальных нулей дзета-функции. Наилучший на сегодняшний день результат в этом направлении, представленный в [7], подтверждает, что первые 12363153437138 (пары сопряженных) нулей дзета-функции действительно удовлетворяют гипотезе Римана.

Вычисление таких нулей включает вычисление многих значений дзета-функции. Для таких вычислений предлагалось много методов различного характера. Например, упомянутая выше проверка гипотезы Римана потребовала одновременного вычисления многочисленных значений дзета-функции для аргументов с большими мнимыми частями, но с относительно небольшой точностью (достаточной для разделения соседних нулей). С другой стороны, П. Борвейн [8] предложил метод вычисления  $\eta(s)$  с высокой точностью (относительно последних модификаций метода Борвейна см. [9]).

В данной статье мы также занимаемся вычислением дзета- и эта-функций, но наши методы не предназначены для нахождения значений этих функций с помощью компьютера. Описанные ниже алгоритмы представляют в основном теоретический интерес, поскольку они выявляют новые свойства дзета-функции (например, приближенные линейные соотношения между производными дзета-функции, вычисленными в нулях; см. замечание 3.1 ниже).

## 2. Вопросы

*В этом параграфе мы сформулируем два вопроса, ответы на которые будут даны в последующей части статьи.*

Предположим, что задана последовательность чисел

$$d_1, d_2, \dots, \quad (2.1)$$

относительно которых известно, что эти числа суть значения производных дзета-функции Римана в некоторой точке  $s = a$ ,

$$d_k = \frac{d^k}{ds^k} \zeta(s) \Big|_{s=a}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

но при этом сама точка  $a$  нам неизвестна. Такая точка  $a$  единственна (в ином случае производные дзета-функции были бы периодическими). Таким образом, если числа (2.1) известны, то этого достаточно для определения  $a$  и, следовательно, для вычисления значения самой дзета-функции

$$d_0 = \zeta(a). \quad (2.3)$$

В данной статье мы исследуем, как реально извлечь такую информацию из заданных чисел (2.1).

**Вопрос 1.** Как вычислить  $\zeta(a)$  по заданным числам (2.1)?

**Вопрос 2.** Как вычислить  $a$  по заданным числам (2.1)?

Очевидно, что ответ на вопрос 2 сразу же дает ответ на вопрос 1. Однако мы будем отвечать на эти вопросы по порядку. Сначала мы укажем способ вычисления (приближенного) значения  $\zeta(a)$  с помощью нескольких первых чисел последовательности (2.1) без нахождения  $a$ . После этого мы вычислим значения дзета-функции в нескольких точках, близких  $a$ , и затем найдем (приближенное) значение числа  $a$ .

**Дополнение для русской версии.** Впоследствии автор дал несколько других ответов на вопрос 1 (см. DOI 10.13140/RG.2.2.26591.23206). Существенное отличие новых методов состоит в том, что в них  $\zeta(a)$  вычисляется как значение рациональной дроби от производных, в то время как в настоящей работе для этого используются линейные многочлены.

## 3. Алгоритм A1

*В этом параграфе мы начинаем отвечать на вопрос 1.*

Как уже отмечалось в конце предыдущего параграфа, нам надо вычислить  $\zeta(a+s)$  для нескольких значений числа  $s$ . Если эти значения достаточно малы, то вычисления можно было бы провести с помощью начального фрагмента ряда Тейлора

$$\zeta(a+s) \approx T_N(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{d_k}{k!} s^k \quad (3.1)$$

при некотором  $N$ . Однако  $d_0 = \zeta(a)$  нам пока неизвестно. Поэтому вместо ряда Тейлора надо будет использовать ряд Дирихле.

Попробуем аппроксимировать  $\zeta(a+s)$  конечным рядом Дирихле

$$\zeta(a+s) \approx D_N(s) = \sum_{n=1}^N c_n n^{-s} \quad (3.2)$$

с некоторыми коэффициентами

$$c_1, c_2, \dots, c_N. \quad (3.3)$$

Естественно потребовать, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$\frac{d^k}{ds^k} D_N(s) \Big|_{s=0} = d_k, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (3.4)$$

Из этой системы можно определить  $c_2, \dots, c_N$ , но не  $c_1$ . Значение этого коэффициента является ключевым для аппроксимации (3.2), однако не очевидно, как выбрать  $c_1$ .

Первое численное наблюдение можно сформулировать следующим образом. *Хороший выбор  $c_1$  может быть сделан независимо от значений чисел (2.2); именно:*

$$c_1 = 1. \tag{3.5}$$

Приведенные рассуждения реализуются в алгоритме А1 (см. рис. 1). Выходное значение этого алгоритма следующее:

$$D_N(s) = 1 - \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2^{-s} & \dots & N^{-s} \\ d_1 & (-\ln(2))^1 & \dots & (-\ln(N))^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N-1} & (-\ln(2))^{N-1} & \dots & (-\ln(N))^{N-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-\ln(2))^1 & \dots & (-\ln(N))^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\ln(2))^{N-1} & \dots & (-\ln(N))^{N-1} \end{vmatrix}} \tag{3.6}$$

(матрица в знаменателе по существу является матрицей типа Вандермонда, и, следовательно, ее детерминант не обращается в нуль).

ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ: Целое число  $N$ , комплексные числа  $d_1, \dots, d_{N-1}$  и  $s$

ШАГ 1. Решим линейную систему

$$\sum_{n=2}^N (-\ln(n))^k c_n = d_k, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

ШАГ 2. Положим  $c_1 = 1$

ШАГ 3. Положим  $z = \sum_{n=1}^N c_n n^{-s}$

ВЫХОДНЫЕ ДАННЫЕ:  $z$

Рис. 1. Алгоритм А1 для аппроксимации  $\zeta(a + s)$ .

**Численный пример 3.1.** Пусть  $N = 20$ , числа (2.1) определены формулой (2.2) при  $a = -0.2 + 14i$  и  $s = -1 - i$ . В этом случае по алгоритму А1 получаем

$$\begin{aligned} D_N(s) &= -0.23543\ 72893\ 03507\ 30402\dots - 2.8335\ 33677\ 65029\ 05628\dots i \\ &= \zeta(a + s) - 1.9174\dots \times 10^{-11} - 1.2104\dots \times 10^{-10}i. \end{aligned} \tag{3.7}$$

**Численный пример 3.2.** В качестве  $a$  рассмотрим несколько первых нетривиальных нулей дзета-функции и положим  $s = 0$ . В таблице 1 указаны значения  $|D_N(0)|$  для некоторых  $N$ .

Таблица 1. Если  $a$  — нетривиальный нуль  $\rho_m$  дзета-функции, то  $D_N(0)$  почти равна нулю.

$m$	$a = \rho_m$	$ D_N(0) $		
		$N = 16$	$N = 30$	$N = 50$
1	$0.5 + 14.13472\dots$	$7.7808\dots \cdot 10^{-10}$	$3.1660\dots \cdot 10^{-14}$	$7.6774\dots \cdot 10^{-17}$
2	$0.5 + 21.02203\dots$	$1.3440\dots \cdot 10^{-11}$	$1.3062\dots \cdot 10^{-18}$	$7.4006\dots \cdot 10^{-25}$
3	$0.5 + 25.01085\dots$	$3.7407\dots \cdot 10^{-12}$	$2.4584\dots \cdot 10^{-20}$	$3.3201\dots \cdot 10^{-28}$
4	$0.5 + 30.42487\dots$	$1.4197\dots \cdot 10^{-12}$	$4.3805\dots \cdot 10^{-22}$	$8.2480\dots \cdot 10^{-32}$
5	$0.5 + 32.93506\dots$	$1.1301\dots \cdot 10^{-12}$	$1.0109\dots \cdot 10^{-22}$	$3.3226\dots \cdot 10^{-33}$
6	$0.5 + 37.58617\dots$	$9.7731\dots \cdot 10^{-13}$	$1.1201\dots \cdot 10^{-23}$	$1.9702\dots \cdot 10^{-35}$

**Замечание 3.1.** Согласно (3.6) функция  $D_N(0)$  линейна по  $d_1, \dots, d_{N-1}$ . Таким образом, таблица 1 демонстрирует, что производные дзета-функции, вычисленные в *различных* первых нетривиальных нулях, удовлетворяют *одинаковым* приближенным линейным соотношениям  $D_N(0) \approx 0$ .

**Численный пример 3.3.** Отметим следующий феномен. Конечные ряды Дирихле  $D_N(s)$  были определены в подражание ряду Тейлора (3.1) посредством уравнений (3.4). Однако  $D_N(s)$  может обеспечить аппроксимацию  $\zeta(a+s)$  значительно лучше, чем  $T_N(s)$ , что и наблюдается в следующем случае. Пусть  $N = 50$ , числа (2.1) определены формулой (2.2) при  $a = 1 + 30i$  и  $s = 3 + 10i$ . Тогда

$$|T_N(s)/\zeta(a+s) - 1| = 0.0270\dots, \quad (3.8)$$

$$|D_N(s)/\zeta(a+s) - 1| = 5.6644\dots \times 10^{-27}. \quad (3.9)$$

**Численный пример 3.4.** Приведенный выше феномен оказывается даже более впечатляющим, когда  $s$  находится вне круга сходимости ряда Тейлора для дзета-функции. Это именно так и происходит в следующем случае. Пусть  $N = 50$ , числа (2.1) определены формулой (2.2) при  $a = 1 + 30i$  и  $s = 3 + 31i$ . Тогда

$$|T_N(s)/\zeta(a+s) - 1| = 1.0768\dots \times 10^{22}, \quad (3.10)$$

$$|D_N(s)/\zeta(a+s) - 1| = 8.7339\dots \times 10^{-6}. \quad (3.11)$$

#### 4. Алгоритм A2

*В этом параграфе мы начинаем отвечать на вопрос 2, а именно, находим аппроксимацию  $\text{Re}(a)$ .*

Согласно (1.1)

$$\zeta(a+s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} n^{-s}, \quad (4.1)$$

и мы можем использовать начальный фрагмент этого бесконечного ряда Дирихле в качестве  $D_N(s)$ . Однако такой усеченный ряд будет аппроксимировать  $\zeta(a+s)$  только в случае  $\text{Re}(a+s) > 1$ .

В § 3 мы видели, что конечный ряд Дирихле  $D_N(s)$  (определенный формулами (3.2), (3.4), (3.5)) способен обеспечить хорошую аппроксимацию  $\zeta(a+s)$  и при  $\text{Re}(a+s) < 1$ . Этот факт позволяет предположить, что коэффициенты (3.3) должны отличаться от соответствующих коэффициентов ряда (4.1). Тем не менее мы можем сформулировать второе численное наблюдение следующим образом. *Несколько первых коэффициентов  $D_N(s)$  почти равны соответствующим коэффициентам ряда (4.1):*

$$c_n \approx n^{-a}. \quad (4.2)$$

**Численный пример 4.1.** При тех же параметрах, как в примере 3.1, имеем

$$c_2 = 2^{-a} + 9.5334\dots \times 10^{-10} - 2.3374\dots \times 10^{-7}i, \quad (4.3)$$

$$c_3 = 3^{-a} - 6.5358\dots \times 10^{-6} + 4.3567\dots \times 10^{-5}i, \quad (4.4)$$

$$c_4 = 4^{-a} + 7.1934\dots \times 10^{-4} - 2.4284\dots \times 10^{-3}i. \quad (4.5)$$

Согласно (4.2)

$$\text{Re}(a) \approx -\text{Re}(\log_n(c_n)). \quad (4.6)$$

В алгоритме A2 (см. рис. 2) мы полагаем  $n = 2$ , что позволяет ожидать наилучшую точность.

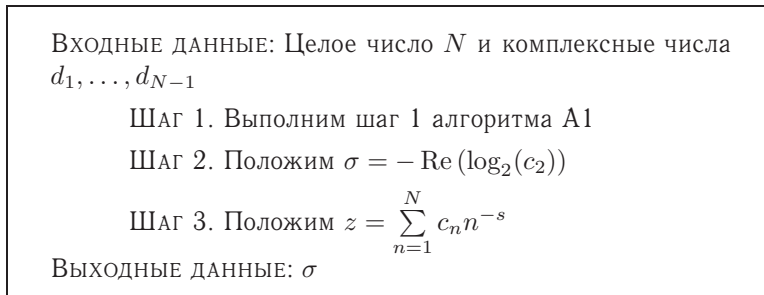


Рис. 2. Алгоритм A2 для аппроксимации  $\text{Re}(a)$ .

**Численный пример 4.2.** При тех же параметрах, как в примере 3.1, имеем следующий результат работы алгоритма A2:

$$\sigma = -0.1999999179227\dots = \operatorname{Re}(a) + 8.2077\dots \times 10^{-8}. \quad (4.7)$$

### 5. Алгоритм A3

В этом параграфе мы продолжаем отвечать на вопрос 2, а именно, находим аппроксимацию  $\operatorname{Im}(a)$ .

Можно было бы опять воспользоваться (4.2) с некоторым  $n$ , бóльшим единицы, но  $c_n$  определяет  $\operatorname{Im}(a)$  лишь с точностью до целочисленного множителя  $2\pi/\ln(n)$ :

$$\operatorname{Im}(a) \approx -\operatorname{Im}(\log_n(c_n)) + \frac{2\pi}{\ln(n)}m, \quad (5.1)$$

где  $m$  — целое число. Поэтому нам потребуется другой метод нахождения  $\operatorname{Im}(a)$ .

Наш подход основан на функциональном уравнении (1.4). Оно содержит гамма-функцию, аргументы которой мы не можем вычислить. К счастью, эта функция удовлетворяет своему собственному функциональному уравнению

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad (5.2)$$

которое можно использовать для того, чтобы исключить гамма-функцию из (1.4) и получить

$$4\pi^2\zeta(s-1)\zeta(-s) = s(s-1)\zeta(2-s)\zeta(s+1). \quad (5.3)$$

Если обе части (5.3) отличны от нуля и  $s = 1/2 + it$ , где  $t$  — вещественное число, то из (5.3) следует

$$t^2 + \frac{1}{4} = 4\pi^2 \left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2})}{\zeta(it + \frac{3}{2})} \right|^2. \quad (5.4)$$

Заменив  $t$  на  $t \pm u$  и вычитая одно полученное тождество из другого, для ненулевого вещественного  $u$  находим

$$t = \frac{\pi^2}{u} \left( \left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} + iu)}{\zeta(it + \frac{3}{2} + iu)} \right|^2 - \left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} - iu)}{\zeta(it + \frac{3}{2} - iu)} \right|^2 \right). \quad (5.5)$$

Если  $\operatorname{Re}(a)$  и комплексное  $r$  имеют относительно малые абсолютные значения и  $t = \operatorname{Im}(a)$ , то

$$\zeta(it+r) = \zeta(a - \operatorname{Re}(a) + r) \approx D_N(r - \operatorname{Re}(a)) \quad (5.6)$$

в силу (3.2). Соответственно,

$$\operatorname{Im}(a) \approx \frac{\pi^2}{u} (R(u, \operatorname{Re}(a)) - R(-u, \operatorname{Re}(a))), \quad (5.7)$$

где

$$R(u, \sigma) = \left| \frac{D_N(-\sigma - \frac{1}{2} + iu)}{D_N(-\sigma + \frac{3}{2} + iu)} \right|^2. \quad (5.8)$$

В алгоритме A3 (см. рис. 3) мы воспользовались соотношением (5.7) при  $u = 1$  и заменили  $\operatorname{Re}(a)$  приближенным значением, вычисленным по алгоритму A2.

**Численный пример 5.1.** При тех же параметрах, как в примере 3.1, имеем следующий результат работы алгоритма A3:

$$t = 14.000\ 00508\ 30495\dots = \operatorname{Im}(a) + 5.0830\dots \times 10^{-6}. \quad (5.9)$$

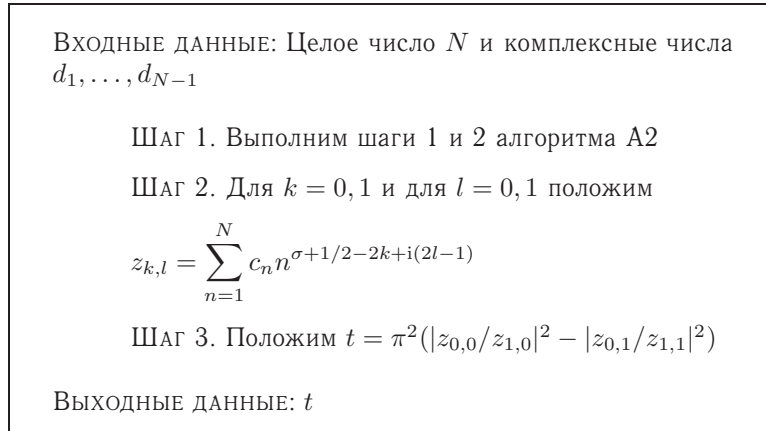


Рис. 3. Алгоритм А3 для аппроксимации  $\text{Im}(a)$ .

### 6. Алгоритм А4

В этом параграфе мы улучшим метод вычисления  $\text{Re}(a)$ .

Если хорошая аппроксимация  $a_0$  числа  $a$  уже найдена, можно улучшить ее точность с помощью решения, скажем, уравнения

$$\zeta'(s) = d_1, \tag{6.1}$$

например, методом Ньютона с начальной точкой  $a_0$ . Для этого потребуется вычислить первую и вторую производные дзета-функции в нескольких точках. В этом и последующих параграфах мы покажем, как повысить точность аппроксимации  $a$ , используя лишь изначально заданные значения (2.1) производных дзета-функции. Это удастся сделать с помощью функционального уравнения иного вида. Поскольку левая часть (5.5), не зависит от  $u$ , для ненулевых вещественных  $u_1$  и  $u_2$  справедливо тождество

$$\frac{\left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} + iu_1)}{\zeta(it + \frac{3}{2} + iu_1)} \right|^2}{u_1} - \frac{\left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} - iu_1)}{\zeta(it + \frac{3}{2} - iu_1)} \right|^2}{u_1} - \frac{\left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} + iu_2)}{\zeta(it + \frac{3}{2} + iu_2)} \right|^2}{u_2} - \frac{\left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} - iu_2)}{\zeta(it + \frac{3}{2} - iu_2)} \right|^2}{u_2} = 0. \tag{6.2}$$

Вместо (6.1) мы применим метод Ньютона для приближенного аналога (6.2)

$$\frac{R(u_1, \sigma) - R(-u_1, \sigma)}{u_1} - \frac{R(u_2, \sigma) - R(-u_2, \sigma)}{u_2} = 0, \tag{6.3}$$

где  $u_1$  и  $u_2$  фиксированы, а  $\sigma$  — неизвестное вещественное число.

В алгоритме А4 (см. рис. 4) мы полагаем  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 0.5$  и вычисляем начальное значение  $\sigma$  по алгоритму А2. Алгоритм А4 представляет собой реализацию одного шага метода Ньютона (выполнение большего числа шагов не приведет к значительному повышению точности, поскольку в (6.3) мы используем не дзета-функцию, а ее приближение (3.2)).

**Численный пример 6.1.** При тех же параметрах, как в примере 3.1, имеем следующий результат работы алгоритма А4:

$$\sigma = -0.2000\ 00000\ 04795\dots = \text{Re}(a) - 4.7957\dots \times 10^{-11}. \tag{6.4}$$

Эта аппроксимация лучше, чем (4.7).

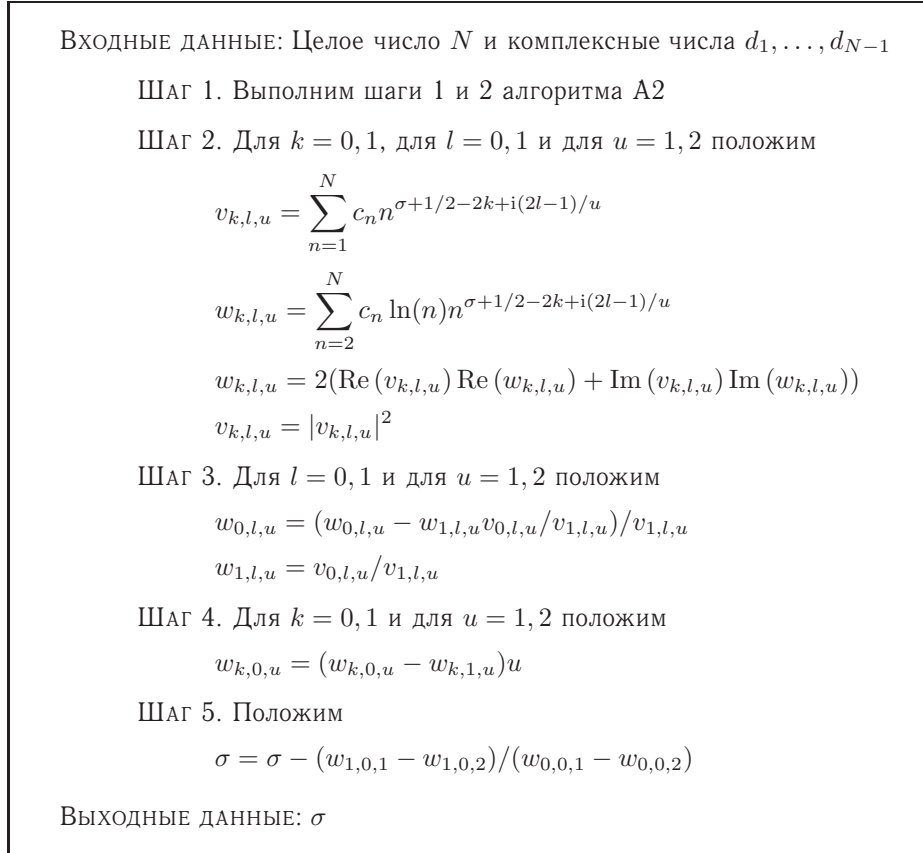


Рис. 4. Алгоритм А4 для более точной аппроксимации  $\operatorname{Re}(a)$ .

### 7. Алгоритм А5

В этом параграфе мы опишем более точный метод вычисления  $\operatorname{Im}(a)$ .

Уточненное значение  $\operatorname{Re}(a)$ , вычисленное по алгоритму А4, можно использовать для вычисления  $\operatorname{Im}(a)$  с более высокой точностью, что и реализовано непосредственно в алгоритме А5 (см. рис. 5).

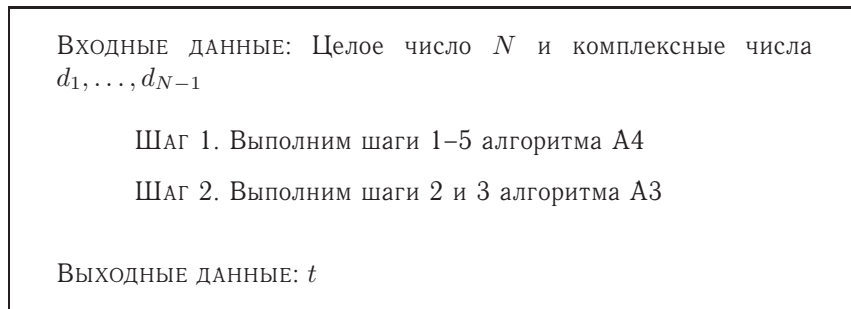


Рис. 5. Алгоритм А5 для аппроксимации  $\operatorname{Im}(a)$  с более высокой точностью.

**Численный пример 7.1.** При тех же параметрах, как в примере 3.1, имеем следующий результат работы алгоритма А5:

$$t = 13.999\ 99999\ 97497\dots = \operatorname{Re}(a) - 2.5023\dots \times 10^{-10}. \quad (7.1)$$

Эта аппроксимация лучше, чем (5.9).



### 8. Случай знакопеременной дзета-функции

В этом параграфе мы рассмотрим вычисление функции  $\eta(s)$ .

До сих пор мы рассматривали только дзета-функцию Римана. На самом деле, та же техника (с естественными модификациями) работает также для некоторых других функций, определяемых через ряды Дирихле. В этом параграфе мы рассмотрим те же два вопроса, что и выше, но для знакопеременной дзета-функции (1.2).

Чтобы сохранить обозначения, будем считать в этом параграфе, что числа (2.1) имеют (вместо (2.2)) следующие значения:

$$d_k = \left. \frac{d^k}{ds^k} \eta(s) \right|_{s=a}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

Соответственно, коэффициенты конечных рядов (3.2) определяются как решение системы (3.4), но с другими правыми частями.

Как и выше, положим  $c_1 = 1$ . Тогда алгоритм A1 без каких-либо модификаций обеспечивает хорошие приближения функции  $\eta(a + s)$ .

**Численный пример 8.1.** Пусть  $N = 20$ , числа (2.1) определены формулой (8.1) при  $a = -1 + 20i$  и  $s = -1 - i$ . В этом случае по алгоритму A1 получаем

$$\begin{aligned} D_N(s) &= 10.776\ 18709\ 43313\ 10697\dots + 126.45\ 64909\ 52247\ 95194\dots i \\ &= \eta(a + s) + 1.8229\dots \times 10^{-15} + 1.7082\dots \times 10^{-15}i. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Естественно, что теперь вместо (4.2) мы имеем знакопеременные приближенные равенства

$$c_n \approx (-1)^{n+1} n^{-a}. \quad (8.3)$$

**Численный пример 8.2.** При тех же параметрах, как в примере 8.1, имеем

$$c_2 = -2^{-a} - 3.6346\dots \times 10^{-10} + 4.9004\dots \times 10^{-10}i, \quad (8.4)$$

$$c_3 = 3^{-a} + 6.7766\dots \times 10^{-8} - 9.6926\dots \times 10^{-5}i, \quad (8.5)$$

$$c_4 = -4^{-a} - 3.9039\dots \times 10^{-6} + 5.9426\dots \times 10^{-6}i. \quad (8.6)$$

Несмотря на различия между (4.2) и (8.3) в данном случае нет необходимости корректировать алгоритм A2.

**Численный пример 8.3.** При тех же параметрах, как в примере 8.1, имеем следующий результат работы алгоритма A2:

$$\sigma = -1.0000\ 00000\ 41128\dots = \operatorname{Re}(a) - 4.1128\dots \times 10^{-10}. \quad (8.7)$$

Как и в алгоритме A3, для применения (5.5) нам потребуются значения дзета-функции, а не эта-функции. К счастью, благодаря (8.3) имеем

$$\zeta(a + s) = \frac{\eta(a + s)}{1 - 2 \times 2^{-a-s}} \approx \frac{D_N(s)}{1 + 2c_2 2^{-s}}. \quad (8.8)$$

Используя это приближенное равенство (вместо (3.2)), можно переопределить (5.8) следующим образом:

$$R(u, \sigma) = \left| \frac{(1 + 2c_2 2^{\sigma - \frac{3}{2} - iu}) D_N(-\sigma - \frac{1}{2} + iu)}{(1 + 2c_2 2^{\sigma + \frac{1}{2} - iu}) D_N(-\sigma + \frac{3}{2} + iu)} \right|^2 \quad (8.9)$$

тем самым сохранив справедливость соотношения (5.7). Соответственно, присваивание на шаге 2 в алгоритме A3 следует заменить следующим:

$$z_{k,l} = \frac{\sum_{n=1}^N n^{\sigma+1/2-2k+i(2l-1)}}{1 + 2c_2 2^{\sigma+1/2-2k+i(2l-1)}}. \quad (8.10)$$

**Численный пример 8.4.** При тех же параметрах, как в примере 8.1, имеем следующий результат работы модифицированного алгоритма АЗ:

$$t = 19.999\ 99990\ 75779\dots = \operatorname{Re}(a) - 9.2422\dots \times 10^{-10}. \quad (8.11)$$

**Дополнение для русской версии.** Другие методы вычисления  $\eta(a)$  через производные функции  $\eta$  указаны в DOI 10.13140/RG.2.2.26591.23206.

## 9. Обобщение

*В этом параграфе мы кратко обсудим другие способы применения производных дзета-функции в вычислениях.*

Нет необходимости использовать *последовательные* первые производные дзета-функции для вычисления ее значения и значения аргумента. Числа (3.3) можно было бы определить из линейных уравнений (3.4) для любого множества  $N - 1$  значений  $k$ ; однако это может снизить точность дальнейших вычислений.

**Численный пример 9.1.** Пусть  $N = 20$ ,  $a = -0.2 + 14i$ ,  $s = -1 - i$  (как в примере 3.1), и пусть числа (3.3) определены из уравнений (3.4), где теперь  $k$  изменяется от 2 до  $N$ . В этом случае

$$\begin{aligned} D_N(s) &= -0.23543\ 72910\ 09787\ 07937\dots - 2.8335\ 33680\ 47765\ 18326\dots i \\ &= \zeta(a + s) - 1.7254\dots \times 10^{-9} - 2.9484\dots \times 10^{-9}i, \end{aligned} \quad (9.1)$$

что дает результат хуже, чем (3.7). Нетрудно вычислить пропущенную первую производную

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} D_N(z) \Big|_{z=s} &= 1.2645\ 73245\ 24735\ 58967\dots + 0.52502\ 80791\ 36458\ 93625\dots i \\ &= \frac{d}{dz} \zeta(z) \Big|_{z=a+s} + 1.8014\dots \times 10^{-10} + 2.4446\dots \times 10^{-10} \dots i. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Можно также вычислить несколько производных более высокого порядка (с более низкой точностью) из производных меньшего порядка.

**Численный пример 9.2.** Пусть  $N = 50$ ,  $a = 0.4 + 20i$  и числа (3.3) определены уравнениями (3.4). В этом случае

$$\frac{d^{50}}{dz^{50}} D_N(z) \Big|_{z=0} = (1 + 2.311\dots \times 10^{-10} - 5.1044\dots \times 10^{-11}i) \frac{d^{50}}{dz^{50}} \zeta(z) \Big|_{z=a}, \quad (9.3)$$

$$\frac{d^{51}}{dz^{51}} D_N(z) \Big|_{z=0} = (1 + 1.5296\dots \times 10^{-8} - 1.0474\dots \times 10^{-8}i) \frac{d^{51}}{dz^{51}} \zeta(z) \Big|_{z=a}, \quad (9.4)$$

$$\frac{d^{52}}{dz^{52}} D_N(z) \Big|_{z=0} = (1 + 4.0835\dots \times 10^{-7} - 6.1408\dots \times 10^{-7}i) \frac{d^{52}}{dz^{52}} \zeta(z) \Big|_{z=a}. \quad (9.5)$$

## Литература

1. L. Euler, “Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques”, *Mém. Acad. Sci. Berlin* **17**, 83–106 (1768). <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/352>
2. B. Riemann, “Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse”, *Monatsberichte Berl. Akad.* (1859). <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf>
3. H. von Mangoldt, “Zu Riemann’s Abhandlung ‘Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse’”, *J. für Math.* **114**, 255–305 (1895). DOI 10.1515/crll.1895.114.255
4. G. Beliaikov, Yu. Matiyasevich, “Approximation of Riemann’s zeta function by finite Dirichlet series: A multiprecision numerical approach”, *Exp. Math.* **24**, No. 2, 150–161 (2015). DOI 10.1080/10586458.2014.976801

5. Ю. В. Матиясевич, “Дзета-функция Римана и конечные ряды Дирихле” *Алгебра анал.* **27**, No. 6, 174–198 (2015); Англ. перевод: *St. Petersburg Math. J.* **27**, No. 6, 985–1002 (2016). DOI 10.1090/spmj/1431
6. K. Broughan, *Equivalentents of the Riemann Hypothesis. Volume 1: Arithmetic Equivalentents*, Cambridge University Press, Cambridge (2017).
7. D. Platt, T. Trudgian, “The Riemann hypothesis is true up to  $3 \cdot 10^{12}$ ”, *Bull. Lond. Math. Soc.* **53**, No. 3, 792–797 (2021). DOI 10.1112/blms.12460
8. P. Borwein, “An efficient algorithm for the Riemann zeta function”, In: *Constructive, Experimental, and Nonlinear Analysis*, pp. 29–34, Am. Math. Soc., Providence, RI (2000).
9. I. Belovas, “A local limit theorem for coefficients of modified Borwein’s method”, *Glas. Mat., Ser. III* **54** No. 1, 1–9 (2019). DOI 10.3336/gm.54.1.01

Английский вариант представлен в издательство Springer 30 января 2023 г.

Русский вариант поступил в редакцию 12 апреля 2024 г.