Дж. Найт

КЛАССЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Мы рассмотрим некоторые аспекты теории вычислимых структур, которые демонстрируют выразительную силу бесконечных предложений при описании математических структур и классов структур. Наш обзор включает как классические результаты такие, как теорема Скотта об изоморфизме, теорема Лопеза — Эскобара, а также результаты Фридмана и Стенли о сравнении классов структур на основании сложности их инвариантов, так и недавно полученные результаты для абелевых групп без кручения.

1. Соглашения

Мы рассматриваем счетные структуры и классы структур при следующих условиях.

- Носителем структуры является множество ω или его подмножество.
- Языки счетны и, если особо не оговорено, вычислимы.
- Классы структур имеют фиксированный язык и замкнуты относительно изоморфизма.

2. Логика $L_{\omega_1,\omega}$

В бесконечной логике $L_{\omega_1,\omega}$ формулы содержат счетные бесконечные дизъюнкции и конъюнкции, но цепочки кванторов могут быть только конечными.

2.1. Примеры формул. Следующее высказывание о вещественном замкнутом упорядоченном поле говорит, что это поле архимедово:

$$(\forall x) \bigvee_n x < \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}.$$

Следующая формула с элементом абелевой группы означает, что этот элемент не является кручением:

$$\bigwedge_n \underbrace{x + \cdots + x}_{n} \neq 0.$$

2.2. Нормальная форма. Вообще говоря, мы не можем приписать кванторы в начало предложений логики $L_{\omega_1,\omega}$, поэтому в рассматриваемом случае мы не располагаем предваренной нормальной формой. Однако можно вписать отрицания внутрь формулы, что приведет к иному типу *нормальной формы*. Сложность формул в такой нормальной форме измеряется числом чередований $\bigvee\exists$ и $\bigwedge\forall$.

2.3. Сложность. Мы выделяем классы Σ_α–формул и Π_α–формул для счетных ординалов α.

Исследование частично поддержано грантом NSF (No. 1800692).

Дж. Найт: Нотрдамский университет, Нотр Дам, США, j1knight@nd.edu.

Перевод с англ. *J. Math. Sci.* **275**, No. 1, 16–24 (2023).

1. Формула $\varphi(\overline{x})$ классифицируется как Σ_0-формула и Π_0-формула, если она конечна и бескванторна.
2. Для счетных ординалов $\alpha > 0$
   (a) $\varphi(\overline{x})$ классифицируется как Σ_α-формула, если она имеет вид $\bigvee_i (\exists \overline{u}_i)\psi_i(\overline{x}, \overline{u}_i)$, где каждая формула ψ_i является Π_{β_i}-формулой для некоторого $\beta_i < \alpha$,
   (b) $\varphi(\overline{x})$ классифицируется как Π_α-формула, если она имеет вид $\bigwedge_i (\forall \overline{u}_i)\psi_i(\overline{x}, \overline{u}_i)$, где каждая формула ψ_i является Σ_{β_i}-формулой для некоторого $\beta_i < \alpha$.

2.4. Отрицания. Для $L_{\omega_1\omega}$-формулы φ в нормальной форме введем формулу $\mathrm{neg}\,(\varphi)$, полученную внесением отрицания внутрь формулы φ. Эта формула, логически эквивалентная отрицанию φ, имеет нормальную форму. Заметим, что если φ — Σ_α-формула или Π_α-формула, то $\mathrm{neg}\,(\varphi)$ является Π_α-формулой или Σ_α-формулой.

2.5. Разности. Будем говорить, что формула является d-Σ_α–формулой, если она имеет вид $(\varphi \;\&\; \psi)$, где φ — Σ_α-формула и ψ — Π_α-формула.

2.6. Сложность формул из п. 2.1. Высказывание $(\forall x)\bigvee\limits_n x < \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$ об архимедовости вещественного замкнутого поля является Π_2-формулой. Формула $\bigwedge\limits_n \underbrace{x + \cdots + x}_{n} \neq 0$, утверждающая, что элемент абелевой группы не будет элементом кручения, является Π_1-формулой. Для каждого n найдется d-Σ_2-высказывание о $\mathbb{Q}$-векторном пространстве, которое говорит, что размерность пространства равна n. Действительно, сначала заметим, что имеется естественная Π_1-формула $\varphi_n(x_1, \ldots, x_n)$ о линейной независимости элементов $x_1, \ldots, x_n$. Мы получаем Σ_2-высказывание δ_n о том, что векторное пространство имеет размерность не меньше, чем n. Тогда d-Σ_2-высказывание $(\delta_n \;\&\; \mathrm{neg}\,(\delta_{n+1}))$ говорит, что размерность пространства равна в точности n.

2.7. Предложения Скотта. Следующий результат, доказанный Скоттом [**1**], иллюстрирует выразительную силу логики $L_{\omega_1,\omega}$ при описании счетных структур.

Теорема 2.1 (теорема Скотта об изоморфизме). *Для каждой структуры $\mathcal{A}$ имеется $L_{\omega_1,\omega}$-высказывание φ такое, что счетные модели φ суть в точности изоморфные копии $\mathcal{A}$.*

Высказывание с описанным выше свойством называется *предложением Скотта* для $\mathcal{A}$.

3. Вычислимые бесконечные формулы

Вычислимые бесконечные формулы — это $L_{\omega_1\omega}$-формулы, содержащие бесконечные дизъюнкции и конъюнкции над вычислимо перечислимыми множествами. Несмотря на то, что вычислимые бесконечные формулы бесконечно длинные, именно такие формулы представляются исчерпывающими. Для вычислимых бесконечных формул мы выделяем классы *вычислимых Σ_α-формул* и *вычислимых Π_α-формул* для *вычислимых ординалов* α. Более точно, чтобы множество формул было вычислимо перечислимым, надо индексировать формулы натуральными числами. Один из способов такой индексации предложен в [**2**], а другой подход описан в [**3**].

В примерах из п. 2.1 выражение $(\forall x)\bigvee_n x < \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n}$ об архимедовости упорядоченного поля является вычислимой Π_2-формулой. Формула $\bigwedge_n \underbrace{x + \cdots + x}_{n} \neq 0$, означающая, что элемент абелевой группы не является кручением, будет вычислимой Π_1-формулой. Естественное высказывание о том, что $\mathbb{Q}$-векторное пространство имеет размерность n (где $n \geqslant 1$), является вычислимой d-Σ_2-формулой.

4. Иерархия Бореля

Напомним, что пространством Кантора, которое будем обозначать $2^{<\omega}$, называется множество всех конечных последовательностей из 0 и 1. При фиксированном языке L класс $\mathrm{Mod}(L)$ является классом L-структур с носителем ω. Для упрощения изложения будем считать, что язык L реляционный. Пусть C — множество новых констант, представляющих натуральные числа. Можно отождествить $\mathrm{Mod}(L)$ с 2^ω следующим образом. Пусть $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ — список атомных высказываний $R\overline{a}$, где R — символ отношения в языке L и $\overline{a}$ — кортеж в C. Отождествим структуру $\mathcal{A}$ с функцией $f \in 2^\omega$ такой, что

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \mathcal{A} \models \alpha_n, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Существует естественная топология в пространстве 2^ω, порожденная базисными открыто-замкнутыми окрестностями $N_p = \{f \in 2^\omega : f \supseteq p\}$, $p \in 2^{<\omega}$. Заметим, что в случае $\mathrm{Mod}(L)$ базисные открыто-замкнутые окрестности N_p имеют вид $\mathrm{Mod}(\alpha)$, где α — конечное бескванторное высказывание.

Множества в σ-алгебре, порожденные множествами N_p, называются *борелевскими*. Для таких множеств вводим классы $\mathbf{\Sigma}_\alpha$ и $\mathbf{\Pi}_\alpha$ со счетным ординалом α.

1. Борелевское множество B является $\mathbf{\Sigma}_0$-множеством и $\mathbf{\Pi}_0$-множеством, если B — конечная булева комбинация базисных множеств N_p.
2. Для $\alpha > 0$
   (a) борелевское множество B является $\mathbf{\Sigma}_\alpha$-множеством, если $B = \bigcup\limits_i B_i$, где каждое множество B_i является $\mathbf{\Pi}_{\beta_i}$-множеством для некоторого $\beta_i < \alpha$,
   (b) борелевское множество B является $\mathbf{\Pi}_\alpha$-множеством, если $B = \bigcap\limits_i B_i$, где каждое множество B_i является $\mathbf{\Sigma}_{\beta_i}$-множеством для некоторого $\beta_i < \alpha$.

5. Эффективная иерархия Бореля

Эффективные борелевские множества получаются из базисных открыто-замкнутых множеств N_p с помощью вычислимо-перечислимых объединений и пересечений. Для более точной формулировки потребуется индексация множества. Хорошая система индексации, аналогичная индексации вычислимых бесконечных формул в [**2**], приведена в [**4**]. Для эффективных борелевских множеств рассматриваются два класса: Σ_α-*эффективные* и Π_α-*эффективные* борелевские множества, где α — вычислимый ординал.

6. Аксиоматизирующие классы

Борелевские классы $K \subseteq \mathrm{Mod}(L)$, замкнутые относительно изоморфизма, связаны замечательным образом с высказываниями языка $L_{\omega_1\omega}$. Первый результат в этом направлении получил Лопез–Эскобар [**5**].

Теорема 6.1 (Лопез–Эскобар). *Замкнутый относительно изоморфизма класс $K \subset \mathrm{Mod}(L)$ является борелевским множеством тогда и только тогда, когда он аксиоматизируется высказыванием из $L_{\omega_1\omega}$.*

Воот [**6**] уточнил этот результат, показав, что сложность аксиомы можно было бы сделать соответствующей сложности класса.

Теорема 6.2 (Воот). *Для счетного ординала $\alpha \geqslant 1$ замкнутый относительно автоморфизма класс $K \subseteq \mathrm{Mod}(L)$ является $\mathbf{\Sigma}_\alpha$ тогда и только тогда, когда он аксиоматизируется Σ_α-предложением из $L_{\omega_1\omega}$.*

Здесь наиболее сложной является импликация $\Rightarrow$. В оригинальном доказательстве Воота использовались так называемые *преобразования Воота*. Эффективную версию теоремы Воота доказал Ванден Бум в своей диссертации в Нотрдамском университете (см. [**4**]).

Теорема 6.3 (Ванден Бум). *Для вычислимого ординала $\alpha \geqslant 1$ замкнутый относительно изоморфизма класс $K \subseteq \mathrm{Mod}(L)$ является Σ_α-эффективным тогда и только тогда, когда он аксиоматизируется вычислимым Σ_α-предложением.*

Релятивизация теоремы Вандена Бума приводит к теореме Воота. Эш установил более простую импликацию $\Leftarrow$, а для доказательства более сложной импликации $\Rightarrow$ мы использовали преобразования Воота (автору данной статьи эти преобразования всегда казались мистикой). Ванден

Бум дал иное доказательство, основанное на понятии форсинга, при этом в его доказательстве формулы, определяющие форсинг, играли роль преобразований Воота.

7. Борелевские вложения

Грубо говоря, *классификация* структур класса K означает описание структур в K с точностью до изоморфизма или задания *инвариантов*, выделяющих из среди неизоморфных структур. Однако определения классификации и инвариантов довольно туманны. Поэтому Фридман и Стенли [**7**] ввели понятие, благодаря которому можно сравнивать классификационные задачи и определять, не будут ли инварианты одного класса более сложными, чем инварианты другого класса.

Определение 7.1 (Фридман — Стенли)**.** Пусть K и K' — классы такие, что $K \subseteq \mathrm{Mod}(L)$ и $K' \subseteq \mathrm{Mod}(L')$. *Борелевским вложением* класса K в класс K' называется борелевская функция $\Phi : K \to K'$ такая, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$ для $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in K$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\mathcal{A}) \cong \Phi(\mathcal{A}')$.

7.1. Обозначения. Мы пишем

$K \leqslant_B K'$, если существует борелевское вложение K в K',

$K <_B K'$, если $K \leqslant_B K'$ и $K' \nleqslant_B K$,

$K \equiv_B K'$, если $K \leqslant_B K'$ и $K' \leqslant_B K$.

Можно считать $\equiv_B$-класс в K *борелевской мощностью* класса K.

7.2. На вершине цепи вложений. Фридман и Стенли [**7**] показали, что некоторые классы расположены на вершине цепи вложений относительно отношения порядка $\leqslant_B$. При этом в некоторых случаях были даны ссылки на ранние работы Лаврова [**8**] и Меклера [**9**], а в других — предложены новые конструкции. Ниже мы приведем новые результаты, которые получили Маркер [**10**], Ниес [**11**], Камерло и Гао [**12**], и др.

1. *Неориентированные графы* (Лавров, 1963; Ниес, 1996; Маркер, 2002).
2. *Поля фиксированной характеристики* (Фридман и Стенли, 1989;
Р. Миллер — Пунен — Схоутенс — Шлапентох, 2018).
3. 2-*ступенчатые нильпотентные группы* (Меклер, 1981; Мальцев, 1960).
4. *Линейные порядки* (Фридман — Стенли, 1989).
5. *Булевы алгебры* (Камерло — Гао, 2000).
6. *Вещественные замкнутые упорядоченные поля* (Маркер).
7. *Модели произвольных пополнений* PA (Найт).
8. *Абелевы группы без кручения* (Паолини — Шелах, 2021, 2022; Ласковски — Ульрих, 2022).

Для неориентированных графов этот результат установил Лавров. Ниес и Маркер нашли различные вложения $\mathrm{Mod}(L)$ в неориентированные графы. Для полей Фридман и Стенли определили вложение графов в поля произвольной фиксированной характеристики. Для оригинального вложения восстановление входного графа по выходному полю имеет два скачка. Р. Миллер, Пунен, Схоутенс, Шлапентох [**13**] нашли другое вложение, обладающее таким свойством: входной граф можно эффективно восстановить по выходному полю. Для 2-ступенчатых нильпотентных групп Меклер [**9**] определил вложение графов в 2-ступенчатые нильпотентные группы. Ранее Мальцев [**14**] определил вложение полей в 2-ступенчатые нильпотентные группы, которое в композиции с вложением графов в поля дает вложение графов в 2-ступенчатые нильпотентные группы.

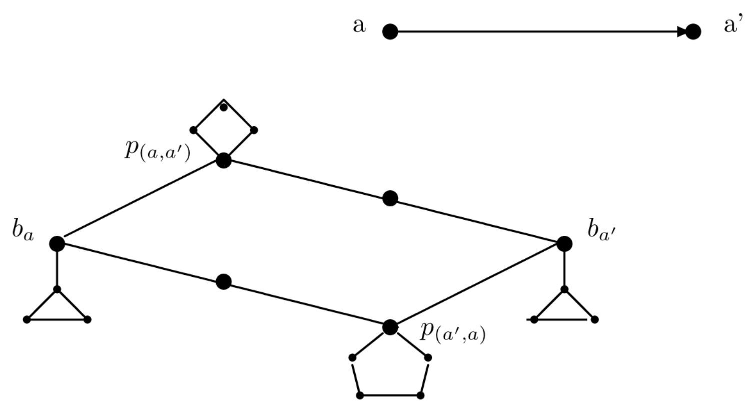
Фридман и Стенли [**7**] определили вложение графов в класс линейных порядков. Для булевых алгебр Камерло и Гао [**12**] показали, что для любого пополнения T теории булевых алгебр с не менее, чем двумя неизоморфными моделями, $\mathrm{Mod}(T)$ находится на вершине цепи борелевских вложений.

Маркер описал вложение линейных порядков в вещественные замкнутые упорядоченные поля. По аналогии автор описала вложение линейных порядков в модели произвольного пополнения PA. Оба результата пока не опубликованы.

Фридман и Стенли показали, что класс абелевых p-групп лежит строго ниже вершины цепи вложений при отношении $\leqslant_B$ и поставили вопрос о положении в цепи класса абелевых групп без кручения.

Паолини и Шелах (arXiv:2102.12371) и Лаковски и Ульрих (arXiv:2102.07452) показали, что этот класс лежит на вершине цепи вложений.[1]

Ниже мы опишем некоторые вложения.



7.3. Вложение $\mathrm{Mod}(L)$ в графы. Вложение

$$\mathrm{Mod}(L) \leqslant_B \text{неориентированные графы}$$

установлено Лавровым [**8**]. Здесь мы опишем вложение, полученное Маркером в контексте основной теории моделей [**10**]. Сначала предположим, что L — язык с одним символом бинарного отношения. Если $\mathcal{A} = (A, R)$, то $\Phi(\mathcal{A})$ состоит из

(a) специальной точки b_a для каждого $a \in A$,

(b) других точек, связывающих b_a с треугольником,

(c) специальной точки $p_{(a,a')}$ для каждой упорядоченной пары (a, a') в A, где $p_{(a,a')}$ связана непосредственно с b_a и с одной остановкой на $b_{a'}$,

(d) других точек таких, что, если $(a, a') \in R$, то $p_{(a,a')}$ — одна вершина квадрата; в ином случае это одна вершина пентагона.

Чтобы убедиться в том, что Φ взаимно однозначно на типах изоморфизма, заметим, что существует копия $\mathcal{A}$, определенная в $\Phi(\mathcal{A})$ через конечные экзистенциальные формулы. Для более общих L надо использовать больше специальных точек, остановов и n-угольников.

7.4. Вложение полей в 2-ступенчатые нильпотентные группы. Мальцев [**14**] определил вложение, которое вкладывает каждое поле F в ее *группу Гейзенберга*. Напомним, что группа Гейзенберга $H(F)$ — это группа матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $a, b, c \in F$. Чтобы доказать, что вложение взаимно однозначно, Мальцев вывел конечные экзистенциальные формулы, определяющие копию F в $H(F)$. В этих формулах роль параметров играла некоммутирующая пара. Заметим, что в [**15**] параметры не фигурировали.

Теорема 7.1 (Алвир — Калверт — Гудман — Харизанов — Найт — Р. Миллер — Морозов — Соскова — Вейсшар)**.** *Имеются бесконечные экзистенциальные формулы без параметров, которые интерпретируют любое поле F в $H(F)$.*

[1] Доказательство, которое предложили Паолини и Шелах, оказалось ошибочным. Лаковски и Ульрих обнаружили ошибку и дали другое доказательство, которое впоследствии Паолини и Шелах привели в своем доказательстве.

Напомним, что когда $\mathcal{A}$ определена в $\mathcal{B}$, каждый элемент $\mathcal{A}$ представим единственным элементом или кортежем в $\mathcal{B}$. Когда $\mathcal{A}$ интерпретируется в $\mathcal{B}$, каждый элемент $\mathcal{A}$ представим классом эквивалентности элементов или кортежей.

7.5. Вложение графов в класс линейных порядков. Для рассмотренных выше вложений имеются формулы, определяющие или интерпретирующие входную структуру в выходной структуре. При этом вложение взаимно однозначно на типах изоморфизма. Для вложения графов в линейные порядки, предложенного Фридманом и Стенли, в доказательстве взаимно однозначности вложения на типах изоморфизма понятие интерпретации не используется. Соскова, Ватев и автор [**16**], а также независимо Харрисон, Трейнор и Монтальбан [**17**] показали, что таких интерпретаций не существует.

Теорема 7.2 (Найт — Соскова — Ватев; Харрисон — Трейнор — Монтальбан)**.** *Для вложения Фридмана — Стенли Φ графов в класс линейных порядков не существует $L_{\omega_1\omega}$-формул, определяющих интерпретацию любого графа G в $\Phi(G)$.*

7.6. Ниже вершины цепи вложений. Следующие классы находятся строго ниже вершины в цепи вложений относительно порядка $\leqslant_B$ по разным причинам:

1) *$\mathbb{Q}$-векторные пространства*,

2) *подполя алгебраических чисел*,

3) *абелевы p-группы*.

Можно воспользоваться понятием мощности, чтобы отличать графы от $\mathbb{Q}$-векторных пространств. Существует несчетное число типов изоморфизма для графов, но лишь счетное число типов изоморфизма для векторных пространств. Для подполей алгебраических чисел отношение изоморфизма является эффективной Π_2-формулой для некоторых классов; отношение изоморфизма не будет борелевским. Для абелевых p-групп причина этого факта довольно тонкая и затрагивает природу инвариантов.

8. Вычислимые по Тьюрингу вложения

Кечрис предложил автору и ее студентам исследовать эффективные вложения. В [**18**] приведены два разных определения, одно из которых основано на сводимости вычислимости, а другое — сводимости по Тьюрингу. Как было отмечено С. Миллер, последнее понятие оказалось более полезным.

Определение 8.1 (Клаверт — Камминс — Найт — С. Миллер)**.** Для классов K и K' *вычислимым по Тьюрингу вложением* K в K' называется оператор Тьюринга $\Phi : K \to K'$ такой, что для $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in K$ имеем $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\mathcal{A}) \cong \Phi(\mathcal{A}')$. Этот факт обозначаем $K \leqslant_{tc} K'$.

Замечание 8.1. В большинстве случаев борелевские вложения, которые мы рассматриваем, являются на самом деле вычислимыми по Тьюрингу. Исключение составляет вложение класса линейных порядков в модели заданного пополнения T для PA. Здесь естественное вложение вычислимо относительно T.

Борелевское вложение сводит задачу описания элементов класса K к аналогичной задаче для класса K'. Можно описать элемент $\mathcal{A} \in K$ через его Φ-образ. Если мы имеем вычислимое по Тьюрингу вложение, то можем описать $\mathcal{A}$ в его собственном языке (см. [**19**]).

Теорема 8.1 (Найт — С. Миллер (Квинн) — Ванден Бум)**.** *Предположим, что Φ — вычислимое по Тьюрингу вложение K в K'. Для любого высказывания φ языка в K' имеется высказывание φ^* языка в K такое, что для $\mathcal{A} \in K$ имеем $\mathcal{A} \models \varphi^*$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\mathcal{A}) \models \varphi$. Более того, для вычислимого ординала $\alpha \geqslant 1$, если высказывание φ Σ_α-вычислимо, то в качестве φ^* можно взять Σ_α.*

9. Инварианты

Предположим, что $K \leqslant_B K'$ через вложение Φ. Тогда Φ сводит задачу классификации для K к аналогичной задаче для K' — инварианты для K' определяют инварианты для K. Тот факт, что они имеют одинаковую борелевскую мощность означает по сути, что они имеют одинаковые инварианты. Довольно затруднительно определить, какие инварианты можно считать "хорошими". Инварианты структуры (разумеется, счетной) должны определять структуру с точностью до изоморфизма. Хорошие инварианты должны быть достаточно простыми.

1. Для $\mathbb{Q}$-векторных пространств *размерность* является инвариантом. Этот факт общеизвестен.
2. Для абелевых p-групп *последовательность Ульма* и *размерность делимой части* являются инвариантами. Это утверждение не столь очевидно, но его можно доказать.
3. Для булевых алгебр *инварианты Кетонена* довольно сложны. Согласно результату Камерло и Гао [**12**] булевы алгебры находятся на вершине цепи борелевских вложений.

10. Классы TFAb_n и F_n

Пусть TFAb_n — класс абелевых групп без кручения ранга n. Эти группы изоморфны подгруппам группы $\mathbb{Q}^n$ с n $\mathbb{Z}$-линейно независимыми элементами. Можно описать элемент класса TFAb_1, рассмотрев ненулевой элемент a и определив, какие натуральные числа делят a. Для другого ненулевого элемента a' мы получаем множества лишь с конечными различиями. На основе этого факта Баэр [**20**] нашел инварианты.

Хьорт [**21**] и Томас [**22**] указали, что инварианты Баэра класса TFAb_1 считаются, в общем, полезными. Для $n \geqslant 2$ Мальцев [**14**] и Курош [**23**] нашли инварианты для элементов класса TFAb_n. Однако, согласно Хьорту и Томасу, Фукс [**24**] раскритиковал эти инварианты, поскольку они не лучше самой группы. Следующие два результата неформально утверждают, что инварианты становятся намного сложнее с возрастанием n.

Теорема 10.1 (Хьорт). $\mathrm{TFAb}_1 <_B \mathrm{TFAb}_2$.

Теорема 10.2 (Томас). $\mathrm{TFAb}_n <_B \mathrm{TFAb}_{n+1}$ *при* $n \geqslant 2$.

В доказательствах обеих теорем используются нетривиальные результаты дескриптивной теории множеств.

Пусть F_n — класс полей характеристики 0 и степени трансцендентности n. Эти поля изоморфны подполям $\mathrm{acl}(\mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_n))$ с независимым множеством размера n. Однако Р. Миллер и автор заметили, что некоторые свойства классов TFAb_n и F_n одинаковы. В каждом случае тип изоморфизма заданной структуры определяется экзистенциальным типом базиса. Отсюда следует, что всегда существует предложение Скотта Σ_3. В некоторых случаях можно получить более сильное утверждение. В работе, которая пока еще в процессе подготовки, мы показываем, что $\mathrm{TFAb}_n \leqslant_{tc} F_n$. Кроме того, для всех n имеем $F_n \leqslant_{tc} F_{n+1}$. Однако имеются различия между полями и группами. Хьорт и Томас доказали, что борелевская мощность класса групп TFAb_n строго возрастает, тогда как борелевская мощность класса полей F_n в итоге становится константой согласно результатам Томаса и Вилисковича [**25**].

Литература

1. D. Scott, "Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers", In: *The Theory of Models. Proc. 1963 Int. Symp. Berkeley*, pp. 329-341, North-Holland, Amsterdam (1965).
2. C. J. Ash, J. F. Knight, *Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy*, Elsevier, Amsterdam (2000).
3. A. Montalbán, *Computable Structure Theory, Part II: Beyond the Arithmetic* [Submitted for publication in 2022].
4. M. Vanden Boom, "The effective Borel hierarchy", *Fundam. Math.* **195**, No. 3, 269–289 (2007).
5. E. G. K. Lopez-Escobar, "An interpolation theorem for denumerably long formulas", *Fundam. Math.* **57**, 253–272 (1965).

6. R. L. Vaught, “Invariant sets in topology and logic”, *Fundam. Math.* **82**, 269–294 (1974).
7. H. Friedman, L. Stanley, “A Borel reducibility theory for classes of countable structures”, *J. Symb. Log.* **54**, No. 3, 894–914 (1989).
8. И. А. Лавров, “Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно-опровержимых формул для некоторых элементарных теорий”, *Алгебра лог.* **2**, No. 1, 5–18 (1963).
9. A. Mekler, “Stability of nilpotent groups of class 2 and prime exponent”, *J. Symb. Log.* **46**, 781–788 (1981).
10. D. Marker, *Model Theory: An Introduction*, Springer, New York, NY (2002).
11. A. Nies, “Undecidable fragments of elementary theories”, *Algebra Univers.* **35**, No. 1, 8–33 (1996).
12. R. Camerlo, S. Gao, “The completeness of the isomorphism relation for countable Boolean algebras”, *Trans. Am. Math. Soc.* **353**, No. 2, 491–518 (2001).
13. R. Miller, B. Poonen, H. Schoutens, A. Shlapentokh, “A computable functor from graphs to fields”, *J. Symb. Log.* **83**, No. 1, 326–348 (2018).
14. А. И. Мальцев, “Об одном соответствии между кольцами и группами”, *Мат. сб.* **50**, 257–266 (1960); English transl.: *Am. Math. Soc., Transl., II* **45**, 221–231 (1965).
15. R. Alvir et al., “Interpreting a field in its Heisenberg group”, *J. Symb. Log.* **87**, No. 3, 1215–1230 (2022).
16. J. F. Knight, A. Soskova, S. Vatev, “Coding in graphs and linear orderings”, *J. Symb. Log.* **85**, No. 2, 673–690 (2020).
17. M. Harrison-Trainor, A. Montalbán, “The tree of tuples of a structure,” *J. Symb. Log.* **87**, No. 1, 21–46 (2022).
18. У. Калверт, Д. Камминс, Д. Ф. Найт, С. Миллер, “Сравнение классов конечных структур”, *Алгебра лог.* **43**, No. 6, 666–701 (2004); English translation: *Algebra Logic* **43**, No. 6, 374–392 (2004).
19. J. F. Knight, S. Miller (Quinn), M. Vanden Boom, “Turing computable embeddings”, *J. Symb. Log.* **72**, No. 3, 901–918 (2007).
20. R. Baer, “Abelian groups without elements of finite order”, *Duke Math. J.* **3**, 68–122 (1937).
21. G. Hjorth, “Around non-classifiability for countable torsion-free Abelian groups”, In: *Abelian Groups and Modules*, pp. 269–292., Birkhäuser, Basel (1999).
22. S. Thomas, “The classification problem for torsion-free Abelian groups of finite rank”, *J. Am. Math. Soc.* **16**, No. 1, 233–258 (2003).
23. A. G. Kurosh, “Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range” [in German], *Ann. Math.* **38**, 175–203 (1937).
24. L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups. Vol. II*, Academic Press, New York etc. (1973).
25. S. Thomas, B. Velickovic, “On the complexity of the isomorphism relation for fields of finite transcendence degree”, *J. Pure Appl. Algebra* **159**, No. 2-3, 347–363 (2001).

Английский вариант представлен в издательство Springer 15 декабря 2022 г.

Русский вариант поступил в редакцию 12 апреля 2024 г.