В. Г. Романов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Для волнового уравнения, содержащего два нелинейных члена, изучается обратная задача, заключающаяся в определении финитных коэффициентов при нелинейностях. Для этого используется информация о решениях уравнения, соответствующих плоским волнам, бегущим из бесконечности и проходящим через неоднородность. Направление распространяющихся плоских волн является параметром задачи, решение измеряется на границе области, внутри которой лежит носитель искомых коэффициентов, для моментов времени, близких к приходу фронта волны. Основной результат заключается в сведении обратной задачи для одного из коэффициентов к хорошо известной задаче томографии, а для другого коэффициента — к новой задаче интегральной геометрии. Для последней задачи найдена оценка устойчивости ее решений.

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u + \sigma(\mathbf{x})(u_t)^m + q(\mathbf{x})u^2 = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4, \\ &u\big|_{t<0} = g(t - \mathbf{x}\cdot\nu - R), \end{aligned} \tag{1.1}$$

в котором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ — гладкие функции, носители которых содержатся в шаре $B(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \, |\mathbf{x}| < R\}$, число $m > 1$, ν — единичный вектор, $g(t)$ — функция такая, что $g(t) = 0$ для $t < 0$ и $g(0) = 0$, $g'(+0) = a > 0$, $g \in C^\infty[0, \infty)$. В однородной среде (когда $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ и $q(\mathbf{x}) = 0$) функция $u(\mathbf{x}, t) = g(t - \mathbf{x}\cdot\nu - R)$ представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в направлении ν. Решение задачи (1.1) соответствует падению волны на неоднородность, сосредоточенную в области $B(R)$. При этом фронт волны $t = \mathbf{x}\cdot\nu + R$ в момент времени $t = 0$ касается границы области $B(R)$ в точке $\mathbf{x} = -R\nu$. В этой статье под гладкостью функции понимается ее бесконечная дифференцируемость.

В дальнейшем предполагаем, что $\nu = \nu(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\varphi \in [0, \pi)$, и φ — переменный параметр задачи. В связи с этим решение задачи (1.1) обозначим $u(\mathbf{x}, t, \varphi)$.

1.1. Прямая задача. При заданных функциях $\sigma(\mathbf{x})$, $q(\mathbf{x})$ и $g(t)$ найти функцию $u(\mathbf{x}, t, \varphi)$, являющуюся решением задачи (1.1).

Основной интерес представляет для нас задача, состоящая в определении функций $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$. Для этого мы используем некоторую информацию о решениях прямой задачи. Обозначим через $S(R)$ границу области $B(R)$ и через $S(R, \nu)$ — ее часть $S(R, v) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = R, \mathbf{x}\cdot v > 0\}$.

Пусть $g(t)$ — заданная функция.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

В. Г. Романов: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, romanov@math.nsc.ru.

Английский перевод опубликован в *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 140–148 (2024).

1.2. Обратная задача. Требуется найти функции $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in B(R)$ по следу решений прямой задачи на $S(R,\nu)$ для различных значений параметра ν и для некоторого интервала времени, более точно, по заданной функции

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x},t,\varphi) = u(\mathbf{x},t,\varphi),\ \forall\varphi \in [0,\pi),\ \forall x \in S(R,\nu),\\ t \in [\mathbf{x}\cdot\nu + R - \eta, \mathbf{x}\cdot\nu + R + \eta], \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\eta > 0$ — произвольно малое число.

Обратные задачи для квазилинейных волновых уравнений начали интенсивно изучаться в последнее время. Например, в [**1**]–[**10**] изучены задачи, в которых волновой оператор рассматривается на лоренцевом многообразии, а само уравнение является квазилинейным. При этом изучены задачи об определении лоренцевой метрики либо коэффициентов при нелинейностях. В [**11, 12**] изучены обратные задачи об определении коэффициента при младшем нелинейном члене волнового уравнения. В [**13**] исследована задача об определении некоторой функции $f(\mathbf{x},u)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, входящей в волновое уравнение. Основой исследования этих задач являлось разложение решения прямой задачи в окрестности фронта волны. В [**14**] изучена одномерная обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением об определении коэффициента, стоящего при нелинейности. Найдены условия, при выполнении которых имеет место теорема о локальном существовании и единственности решения обратной задачи. Получена также и глобальная оценка устойчивости решений задачи.

В настоящей работе изучается поставленная выше обратная задача об определении коэффициентов $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$. В данной работе, так же, как и в [**11**]–[**13**], выписывается разложение решения прямой задачи в окрестности волнового фронта бегущей волны, и на его основе исследуется обратная задача. Решение задачи об определении функции $\sigma(\mathbf{x})$ сводится к классической задаче рентгеновской томографии, а об определении $q(\mathbf{x})$ — к задаче интегральной геометрии на семействе прямых линий. Суть этой последней задачи состоит в определении функции через интегралы от нее с заданной весовой функцией вдоль всевозможных прямых линий, лежащих в плоскостях, ортогональных оси x_3. В работе получена оценка устойчивости решений для этой задачи. Все результаты статьи являются новыми и могут быть использованы для диагностики сред с нелинейным поглощением.

2. Исследование прямой задачи

Основой для изучения обратной задачи является следующая теорема о структуре решения прямой задачи в окрестности фронта бегущей волны.

Теорема 2.1. *Пусть функции $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ принадлежат пространству $C^\infty[0,\infty)$ и финитны с носителями в $B(R)$, и пусть для $\sigma(\mathbf{x})$ выполнено неравенство*

$$\sigma(\mathbf{x}) \geqslant 0, \quad \mathbf{x} \in B(R). \tag{2.1}$$

Пусть, кроме того, функция $g(t)$ удовлетворяет условиям

$$g \in C^\infty[0,\infty), \quad g(0) = 0, \quad g'(+0) = a > 0, \quad g''(+0) = b, \quad g'''(+0) = c.$$

Тогда в окрестности волнового фронта $t = \mathbf{x}\cdot\nu + R$ решение задачи (1.1) *представимо в виде*

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t,\varphi) = H(t-\mathbf{x}\cdot\nu - R)\Big[\alpha(\mathbf{x},\varphi)(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R) + \beta(\mathbf{x},\varphi)\frac{(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)^2}{2!}\\ + \gamma(\mathbf{x},\varphi)\frac{(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)^3}{3!} + \dots\Big], \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 0$ для $t < 0$ и $H(t) = 1$ для $t \geqslant 0$, а точками обозначены члены более высокого порядка, чем $(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)^3$ при $(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R) \to 0$. Функции $\alpha(\mathbf{x},\varphi)$, $\beta(\mathbf{x},\varphi)$ и $\gamma(\mathbf{x},\varphi)$ являются гладкими и вычисляются по формулам

$$\alpha(\mathbf{x},\varphi) = 2^{1/(m-1)}a\Bigg(2 + (m-1)a^{m-1}\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}\sigma(\xi)ds\Bigg)^{-1/(m-1)}, \tag{2.3}$$

$$\beta(\mathbf{x},\varphi)=b\exp\Bigg(-\frac{m}{2}\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}\sigma(\xi)\alpha^{m-1}(\xi,\varphi)ds\Bigg)+\frac{1}{2}\exp\Bigg(-\frac{m}{2}\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}\sigma(\xi)\alpha^{m-1}(\xi,\varphi)ds\Bigg)$$

$$\times\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}(\Delta\alpha(\xi,\varphi))\exp\Bigg(\frac{m}{2}\int\limits_{L(\xi,\nu)}\sigma(\xi')\alpha^{m-1}(\xi',\varphi)ds'\Bigg)ds, \tag{2.4}$$

$$\gamma(\mathbf{x},\varphi)=c\exp\Bigg(-\frac{m}{2}\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}\sigma(\xi)\alpha^{m-1}(\xi,\varphi)ds\Bigg)+\frac{1}{2}\exp\Bigg(-\frac{m}{2}\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}\sigma(\xi)\alpha^{m-1}(\xi,\varphi)ds\Bigg)$$

$$\times\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}[\Delta\beta(\xi,\varphi))-m(m-1)\sigma(\xi)\alpha^{m-2}(\xi,\varphi)\beta^2(\xi,\varphi)-q(\xi)\alpha^2(\xi,\varphi)]$$

$$\times\exp\Bigg(\frac{m}{2}\int\limits_{L(\xi,\nu)}\sigma(\xi')\alpha^{m-1}(\xi',\varphi)ds'\Bigg)ds. \tag{2.5}$$

В формулах (2.3), (2.4) *и* (2.5) *через* $L(\mathbf{x},\nu)$ *обозначен луч, выходящий из точки* $\mathbf{x}$ *в направлении вектора* $-\nu$, $\xi=\mathbf{x}+s\nu$, $s\in[0,-\infty)$, $\xi'=\xi+s'\nu$, $s'\in[0,-\infty)$.

Доказательство. Вычисляя волновой оператор на функции $u(\mathbf{x},t,\varphi)$, определенной равенством (2.2), находим

$$u_{tt}-\Delta u=H(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)\Big[2\nabla\alpha\cdot\nu+(2\nabla\beta\cdot\nu-\Delta\alpha)(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)$$

$$+(2\nabla\gamma\cdot\nu-\Delta\beta)\frac{(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)^2}{2!}+\ldots\Big], \tag{2.6}$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости по сравнению с величиной $(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)^2$, когда $(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)\to 0$. Кроме того,

$$(u_t)^m=H(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)\Big[\alpha^m+m\beta\alpha^{m-1}(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)$$

$$+(m\gamma\alpha^{m-1}+m(m-1)\alpha^{m-2}\beta^2)\frac{(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)^2}{2!}+\ldots\Big], \tag{2.7}$$

$$u^2=H(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)\Big[2\alpha^2\frac{(t-\mathbf{x}\cdot\nu-R)^2}{2!}+\ldots\Big]. \tag{2.8}$$

Учитывая равенства (2.6)–(2.8) и уравнение (1.1), находим соотношения для вычисления коэффициентов α, β и γ разложения (2.2) в виде

$$2\nabla\alpha\cdot\nu+\sigma\alpha^m=0, \tag{2.9}$$

$$2\nabla\beta\cdot\nu+m\sigma\alpha^{m-1}\beta-\Delta\alpha=0, \tag{2.10}$$

$$2\nabla\gamma\cdot\nu+m\sigma\,\alpha^{m-1}\gamma+m(m-1)\sigma\,\alpha^{m-2}\beta^2+2q\,\alpha^2-\Delta\beta=0. \tag{2.11}$$

Из условия (1.1) при $t<0$ получаем начальные условия

$$\alpha(\mathbf{x},\varphi)=a,\quad \beta(\mathbf{x},\varphi)=b,\quad \gamma(\mathbf{x},\varphi)=c,\quad \mathbf{x}\cdot\nu+R\leqslant 0. \tag{2.12}$$

Уравнение (2.9) и условие (2.12) для функции α запишем вдоль луча $L(\mathbf{x},\nu)$ в виде

$$2\frac{d}{ds}\alpha(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)+\sigma(\mathbf{x}+s\nu)\alpha^m(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)=0,\quad s\in(-\infty,0], \tag{2.13}$$

$$\alpha(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)|_{s\to-\infty}=a. \tag{2.14}$$

Интегрируя уравнение (2.13) с учетом начального условия (2.14), находим соотношение

$$\alpha^{1-m}(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)-a^{1-m}=\frac{m-1}{2}\int\limits_{-\infty}^{s}\sigma(\mathbf{x}+s\nu)ds,$$

из которого следует формула (2.3). Эта формула корректна, так как $\sigma(\mathbf{x})\geqslant 0$ в $B(R)$ в силу условия (2.1) и $\sigma(\mathbf{x})$ финитна.

Уравнение и начальное условие для функции β запишем в виде

$$\begin{aligned}2\frac{d}{ds}\beta(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)&+m\sigma(\mathbf{x}+s\nu)\alpha^{m-1}(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)\beta(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)\\&=(\Delta\alpha)(\mathbf{x}+s\nu,\varphi),\quad s\in(-\infty,0],\end{aligned}\tag{2.15}$$

$$\beta(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)|_{s\to-\infty}=b.\tag{2.16}$$

Преобразуем линейное уравнение (2.15) к виду

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\left[\beta(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)\exp\left(\frac{m}{2}\int\limits_{-\infty}^{s}\sigma(\mathbf{x}+s\nu)\alpha^{m-1}(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)ds\right)\right]\\&=\frac{1}{2}(\Delta\alpha)(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)\exp\left(\frac{m}{2}\int\limits_{-\infty}^{s}\sigma(\mathbf{x}+s\nu)\alpha^{m-1}(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)ds\right),\quad s\in(-\infty,0].\end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия (2.16), получаем формулу (2.4).

Аналогично предыдущему преобразуем уравнение (2.11) к виду

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}\left[\gamma(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)\exp\left(\frac{m}{2}\int\limits_{-\infty}^{s}\sigma(\mathbf{x}+s\nu)\alpha^{m-1}(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)ds\right)\right]\\&=\frac{1}{2}(\Delta\beta-m(m-1)\sigma(\xi)\alpha^{m-2}\beta^2-2q(\xi)\alpha^2)(\xi+s\nu,\varphi)\\&\times\exp\left(\frac{m}{2}\int\limits_{-\infty}^{s}\sigma(\mathbf{x}+s\nu)\alpha^{m-1}(\mathbf{x}+s\nu,\varphi)ds\right),\quad s\in(-\infty,0].\end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия (2.16), получаем формулу (2.5). □

3. Анализ обратной задачи

3.1. Уравнение для $\sigma(\mathbf{x})$. Из представления (2.2) выводим

$$\alpha(\mathbf{x},\varphi)=(u_t)_{t\to(\mathbf{x}\cdot\nu+R)+0}.$$

Следовательно, функция $\alpha(\mathbf{x},\varphi)$ может быть вычислена по данным обратной задачи на множестве $S(R,\nu)\times[0,\pi)$ следующим образом:

$$\alpha(\mathbf{x},\varphi)=p_t(\mathbf{x},\mathbf{x}\cdot\nu+R+0,\varphi),\quad \mathbf{x}\in S(R,\nu),\quad \varphi\in[0,\pi).\tag{3.1}$$

Используя формулу (2.3), находим уравнение для $\sigma(\mathbf{x})$

$$\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}\sigma(\xi)ds=r_1(\mathbf{x},\varphi),\quad \mathbf{x}\in S(R,\nu),\quad \varphi\in[0,\pi),\tag{3.2}$$

в котором $r_1(\mathbf{x},\varphi)$ — заданная функция, вычисляемая по формуле

$$r_1(\mathbf{x},\varphi)=\frac{2}{m-1}(\alpha^{1-m}(\mathbf{x},\varphi)-a^{1-m}).$$

Формула (3.2) сводит обратную задачу об отыскании $\sigma(\mathbf{x})$ к стандартной задаче томографии для каждого сечения области $B(R)$ плоскостями $x_3=z$, $z\in(-R,R)$. При этом интегралы от функции

$\sigma(\mathbf{x})$ по всевозможным прямым, лежащим в любой плоскости $x_3 = z$, известны. Поэтому в каждом таком сечении функция $\sigma(\mathbf{x})$ может быть однозначно найдена. Отсюда, в частности, следует теорема единственности для рассматриваемой обратной задачи.

Теорема 3.1. *Обратная задача об определении $\sigma(\mathbf{x})$ может иметь не более одного решения.*

Хорошо известны также оценки устойчивости решения задачи томографии. Сведение обратной задачи к решению задачи томографии открывает возможность ее эффективного численного решения.

3.2. Уравнение для $q(\mathbf{x})$. После нахождения функции $\sigma(\mathbf{x})$ коэффициенты $\alpha(\mathbf{x},\varphi)$ и $\beta(\mathbf{x},\varphi)$ разложения (2.2) могут быть вычислены по формулам (2.3) и (2.4) для любых $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ и любых значений φ. Из формул (1.2) и (2.2) следует, что коэффициент $\gamma(\mathbf{x},\varphi)$ можно найти на множестве $S(R,\nu)\times[0,\pi)$

$$\gamma(\mathbf{x},\varphi) = \frac{\partial^3 p(\mathbf{x},t,\varphi)}{\partial t^3}\Big|_{t=(\mathbf{x}\cdot\nu+R)+0}, \quad \mathbf{x}\in S(R,\nu), \quad \varphi\in[0,\pi). \tag{3.3}$$

Используя формулу (2.5), получаем уравнение для функции $q(\mathbf{x})$

$$\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)} \rho(\xi,\varphi)q(\xi)ds = r_2(\mathbf{x},\varphi), \quad \mathbf{x}\in S(R,\nu), \quad \varphi\in[0,\pi), \tag{3.4}$$

в котором $\rho(\mathbf{x},\varphi)$ и $r_2(\mathbf{x},\varphi)$ — заданные функции, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned}
\rho(\mathbf{x},\varphi) &= \alpha^2(\mathbf{x},\varphi)\exp\left(\frac{m}{2}\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}\sigma(\xi)\alpha^{m-1}(\xi,\varphi)ds\right),\\
r_2(\mathbf{x},\varphi) &= 2\left[c-\gamma(\mathbf{x},\varphi)\exp\left(\frac{m}{2}\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}\sigma(\xi)\alpha^{m-1}(\xi,\varphi)ds\right)\right]\\
&\quad+\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}[m(m-1)\sigma(\xi)\alpha^{m-2}(\xi,\varphi)\beta^2(\xi,\varphi)-\Delta\beta(\xi,\varphi))]\\
&\quad\times\exp\left(\frac{m}{2}\int\limits_{L(\xi,\nu)}\sigma(\xi')\alpha^{m-1}(\xi',\varphi)ds'\right)ds.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Задача об отыскании функции $q(\mathbf{x})$ из уравнения (3.4) носит название задачи интегральной геометрии. Эта задача распадается на серию задач для каждой плоскости $\Sigma(z)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3|\, x_3=z\}$, $z\in(-R,R)$. В случае $\rho(\mathbf{x},\varphi)=1$ она совпадает с задачей томографии. В более общем случае, когда весовая функция $\rho(\mathbf{x},\varphi)$ не является постоянной, а интегрирование проводится по семейству кривых, задачи интегральной геометрии с заданной весовой функцией $\rho(\mathbf{x},\varphi)$ были исследованы Мухометовым [**15**] для двумерного пространства, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^2$, и Романовым [**16**] при $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 2$. Полученные в этих работах оценки устойчивости решений задачи в применении к уравнению (3.4) требуют, чтобы весовая функция $\rho(\mathbf{x},\varphi)$ удовлетворяла условиям

$$\rho(\mathbf{x},\varphi)\geqslant\rho_0>0, \quad \left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\rho(\mathbf{x},\varphi)\right|\leqslant\rho_1<1, \tag{3.6}$$

в которых ρ_0 и ρ_1 — некоторые положительные постоянные. Наша ближайшая цель заключается в отыскании условий на функцию $\sigma(\mathbf{x})$, которые гарантируют выполнение неравенств (3.6).

3.3. Условия на $\sigma(\mathbf{x})$.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия*

$$0\leqslant\sigma(\mathbf{x})\leqslant\sigma_0, \quad |\nabla\sigma(\mathbf{x})|\leqslant\sigma_1, \quad x\in B(R). \tag{3.7}$$

Тогда справедливы неравенства

$$\alpha_0 \leqslant \alpha(\mathbf{x},\varphi) \leqslant a, \quad |\nabla\alpha(\mathbf{x},\varphi)| \leqslant \alpha_1, \quad |\alpha_\varphi(\mathbf{x},\varphi)| \leqslant \alpha_2, \tag{3.8}$$

$$\rho(\mathbf{x},\varphi) \geqslant \rho_0, \quad |(\ln\rho)_\varphi(\mathbf{x},\varphi)| \leqslant \rho_1, \quad \mathbf{x}\in B(R), \tag{3.9}$$

в которых числа α_0*,* α_1*,* α_2 *и* ρ_0*,* ρ_1 *вычисляются по формулам*

$$\alpha_0 = a(1+(m-1)a^{m-1}R\sigma_0)^{-1/(m-1)}, \quad \alpha_1 = a^m R\sigma_1, \quad \alpha_2 = a^m R^2\sigma_1, \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} &\rho_0 = \alpha_0^2 = a^2(1+(m-1)a^{m-1}R\sigma_0)^{-2/(m-1)},\\ &\rho_1 = \sigma_1 a^{m-1}R^2[2(1+(m-1)a^{m-1}R\sigma_0)^{1/(m-1)} + m + 2m(m-1)a^{m-1}R\sigma_0]. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Доказательство. Используя формулу (2.3) и первое из условий (3.7), находим

$$a \geqslant \alpha(\mathbf{x},\varphi) \geqslant a(1+(m-1)a^{m-1}R\sigma_0)^{-1/(m-1)} =: \alpha_0.$$

Далее, дифференцируя равенство (2.3) по $\mathbf{x}$ и по φ, получаем

$$\nabla_{\mathbf{x}}\alpha(\mathbf{x},\varphi) = -2^{1/(m-1)}a^m \int\limits_{L(\mathbf{x},\varphi)} \nabla_\xi\sigma(\xi)ds\left(2+(m-1)a^{m-1}\int\limits_{L(\mathbf{x},\varphi)}\sigma(\xi)ds\right)^{-m/(m-1)},$$

$$\alpha_\varphi(\mathbf{x},\varphi) = -2^{1/(m-1)}a^m \int\limits_{L(\mathbf{x},\varphi)} \nabla_\xi\sigma(\xi)\cdot\nu_\varphi s ds\left(2+(m-1)a^{m-1}\int\limits_{L(\mathbf{x},\varphi)}\sigma(\xi)ds\right)^{-m/(m-1)}.$$

Используя найденные соотношения и условия (3.7), получаем оценки

$$|\nabla_{\mathbf{x}}\alpha(\mathbf{x},\varphi)| \leqslant a^m R\sigma_1 =: \alpha_1,$$

$$|\alpha_\varphi(\mathbf{x},\varphi)| \leqslant a^m R^2\sigma_1 =: \alpha_2.$$

Таким образом, оценки (3.8), в которых постоянные α_0, α_1 и α_2 определены равенствами (3.10), установлены.

Перейдем теперь к оценкам (3.9). Из формул (3.5) и (2.3) с учетом условий (3.7) находим

$$\rho(\mathbf{x},\varphi) \geqslant \alpha_0^2 =: \rho_0.$$

Логарифмируя равенство (3.5) для функции $\rho(\mathbf{x},\varphi)$, приходим к соотношению

$$\ln\rho(\mathbf{x},\varphi) = 2\ln\alpha(\mathbf{x},\varphi) + \frac{m}{2}\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)}\sigma(\xi)\alpha^{m-1}(\xi,\varphi)ds.$$

Дифференцируя это соотношение по φ, получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\rho(\mathbf{x},\varphi) = \frac{2\alpha_\varphi(\mathbf{x},\varphi)}{\alpha(\mathbf{x},\varphi)} + \frac{m}{2}\int\limits_{L(\mathbf{x},\nu)} &\{s(\nabla_\xi\sigma(\xi)\cdot\nu_\varphi)\alpha^{m-1}(\xi,\varphi)\\ &+(m-1)\sigma(\xi)\alpha^{m-2}(\xi,\varphi)[s(\nabla_\xi\alpha(\xi,\varphi)\cdot\nu_\varphi)+\alpha_\varphi(\xi,\varphi)]\}ds, \end{aligned}$$

из которого следует оценка

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\ln\rho(\mathbf{x},\varphi)\right| &\leqslant \frac{2\alpha_2}{\alpha_0} + m\{\sigma_1 a^{m-1}R^2 + (m-1)\sigma_0 a^{m-2}[\alpha_1 R^2 + \alpha_2 R]\}\\ &= \sigma_1 a^{m-1}R^2[2(1+(m-1)a^{m-1}R\sigma_0)^{1/(m-1)} + m + 2m(m-1)a^{m-1}R\sigma_0] =: \rho_1. \end{aligned}$$

Из полученных выше оценок вытекают неравенства (3.9), в которых постоянные ρ_0 и ρ_1 определены равенствами (3.11). □

3.4. Оценка устойчивости решений задачи для $q(\mathbf{x})$. Комбинируя теорему 3 из [**15**], которая там только сформулирована с неопределенной постоянной, и теорему об оценке решения задачи интегральной геометрии из [**16**], в которой эта постоянная указана явно, приходим к следующей теореме об устойчивости решений задачи (3.6).

Теорема 3.2. *Пусть функция $q(\mathbf{x})$ финитна, ее носитель содержится в $B(R)$ и $q \in C(B(R))$. Пусть, кроме того, выполнены условия леммы 3.1, а числа ρ_0 и ρ_1 определены равенствами (3.11) и выполнено условие*

$$\rho_1 < 1. \tag{3.12}$$

Тогда для любого сечения шара $B(R)$ плоскостью $\Sigma(z) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \, x_3 = z\}$, $z \in (-R, R)$, имеет место оценка

$$\int\limits_{\Sigma(z)} q^2(x_1, x_2, z) dx_1 dx_2 \leqslant \frac{1}{2\pi\rho_0^2(1-\rho_1)} \int\limits_{\partial(\Sigma(z)\cap B(R))} \Big(\frac{\partial}{\partial\varphi} r_2(x_1, x_2, z, \varphi)\Big)^2 d\ell d\varphi, \tag{3.13}$$

в которой $\partial(\Sigma(z) \cap B(R)) = \{x_1^2 + x_2^2 + z^2 = R^2\}$ и $d\ell$ — элемент длины.

Из оценки (3.13) следует также теорема единственности.

Теорема 3.3. *Пусть функция $\sigma(\mathbf{x})$ известна и условия теоремы 3.2 выполнены. Тогда обратная задача об отыскании коэффициента $q(\mathbf{x})$ может иметь не более одного решения.*

Замечание 3.1. Неравенство (3.12) при фиксированных R, σ_0 и σ_1 можно рассматривать как условие на выбор числа $a = g'(+0)$. Оно не является ограничительным для экспериментатора. Если же число $a > 0$ фиксировано, то (3.12) является условием малости градиента функции $\sigma(\mathbf{x})$ или малости R.

Замечание 3.2. Результаты, полученные выше для трехмерного пространства, легко переносятся на случай пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$.

Замечание 3.3. В уравнении (1.1) вместо u^2 можно взять u^k, где $k \geqslant 1$ — целое число. В этом случае разложение (2.2) по степеням $(t - \mathbf{x}\cdot\nu - R)$ надо выписать до члена $(t - \mathbf{x}\cdot\nu - R)^{k+1}$ и найти формулы для всех коэффициентов этого разложения. В коэффициент при $(t - \mathbf{x}\cdot\nu - R)^{k+1}$ тогда войдет $q(\mathbf{x})$ линейным образом. С другой стороны, этот коэффициент разложения можно вычислить по данным (1.2) обратной задачи. В результате задача об отыскании $q(\mathbf{x})$ приводится к задаче интегральной геометрии вида (3.4), конечно, с другими весовой функцией и правой частью.

Литература

1. Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann, “Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations”, *Invent. Math.* **212**, No. 3, 781–857 (2018).
2. M. Lassas, G. Uhlmann, Y. Wang, “Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds”, *Commun. Math. Phys.* **360**, No. 2, 555–609 (2018).
3. P. Hintz, G. Uhlmann, “Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets”, *Int. Math. Res. Not.* **2019**, No. 22, 6949–6987 (2019).
4. P. Hintz G. Uhlmann, J. Zhai, “An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds”, *Int. Math. Res. Not.* **2022**, No. 17, 13181–13211 (2022).
5. M. Lassas, T. Liimatainen, L. Potenciano-Machado, T. Tyni, “Uniqueness, reconstruction and stability for an inverse problem of a semi-linear wave equation”, *J. Differ Equations* **337**, 395–435 (2022).
6. X. Chen, M. Lassas, L. Oksanen, G. P. Paternain, “Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity”, *J. Eur. Math. Soc.* **24**, No. 7, 2191–2232 (2022).
7. Y. Wang, T. Zhou, “Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations”, *Commun. Partial Differ. Equations* **44**, No. 11, 1140–1158 (2019).
8. A. S. Barreto, “Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions”, *Inverse Probl. Imaging* **14**, No. 6, 1057–1105 (2020).

9. G. Uhlmann, J. Zhai, “On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation”, *J. Math. Pures Appl. (9)* **153**, 114–136 (2021).
10. A. S. Barreto, P. Stefanov, “Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime,” *Commun. Math. Phys.* **392**, No. 1, 25–53 (2022).
11. В. Г. Романов, Т. В. Бугуева, “Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения”, *Сиб. журн. инд. мат.* **25**, No. 3, 154–169 (2022); English translation: *J. Appl. Ind. Math.* **16**, No. 3, 550–562 (2022).
12. V. G. Romanov, “An inverse problem for a nonlinear wave equation with damping”, *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **11**, No. 2, 99–115 (2023).
13. В. Г. Романов, “Обратная задача для полулинейного волнового уравнения”, *Докл. РАН* **504**, No. 1, 36–41 (2022); English translation: *Dokl. Math.* **105**, No. 3, 166–170 (2022).
14. В. Г. Романов, “Обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением”, *Сиб. мат. журн.* **64**, No. 3, 635–652 (2023); English translation: *Sib. Math. J.* **64**, No. 3, 670–685 (2023).
15. Р. Г. Мухометов, “Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия”, *Докл. АН СССР* **232**, No. 1, 32–35 (1977); English translation: *Sov. Math. Dokl.* **18**, No. 1, 27–31 (1977).
16. В. Г. Романов, “Интегральная геометрия на геодезических изотропной римановой метрики”, *Докл. АН СССР* **241**, No. 2, 290–293 (1978); English translation: *Sov. Math. Dokl.* **19**, No. 4, 847–851 (1978).

Статья поступила в редакцию 25 марта 2024 г.