

Д. А. Баранов, О. В. Починка, Д. Д. Шубин, Е. И. Яковлев

О НАДСТРОЙКАХ НАД ГРАДИЕНТНО–ПОДОБНЫМИ ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ТРЕМЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ

Смейл показал, что надстройки над сопряженными диффеоморфизмами топологически эквивалентны. При определенных предположениях сопряженность диффеоморфизмов эквивалентна эквивалентности надстроек. Мы показываем, что этот критерий выполняется для градиентно-подобных диффеоморфизмов с тремя периодическими орбитами на произвольных ориентируемых поверхностях, доказываем, что 3-многообразия, допускающие надстройки над такими диффеоморфизмами, являются малыми многообразиями Зейферта и вычисляем группы гомологий этих многообразий и количество классов эквивалентности потоков на каждом допустимом многообразии Зейферта.

1. Введение и формулировка результата

В теории динамических систем весьма полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток, называемый надстройкой над f . Смейл [1] показал, что надстройки над сопряженными диффеоморфизмами топологически эквивалентны. Обратное утверждение в общем случае неверно, но критерий выполняется, если диффеоморфизм задан на многообразии, фундаментальная группа которого не допускает эпиморфизм в группу \mathbb{Z} [2]. Таким образом, для ориентируемых поверхностей критерий гарантированно выполняется лишь на двумерной сфере. В настоящей статье критерий обобщается на класс градиентно-подобных диффеоморфизмов с тремя периодическими орбитами на произвольных ориентируемых поверхностях.

Пусть S_p — замкнутая ориентируемая поверхность рода $p > 0$ и G — класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса — Смейла $f : S_p \rightarrow S_p$, неблуждающее множество которых состоит в точности из трех периодических орбит. Полная топологическая классификация диффеоморфизмов класса G получена в [3] (см. также [4], где предложены эффективные алгоритмы распознавания инвариантов таких систем). В [3] также установлено, что число классов топологической сопряженности диффеоморфизмов множества G на поверхности рода p вычисляется по формуле $N_p = \varphi(4p) + \varphi(4p + 2)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, т. е. количество взаимно простых с n чисел, не превышающих n .

Напомним определение надстройки над диффеоморфизмом $f : S_p \rightarrow S_p$. Определим поток ξ^t на многообразии $S_p \times \mathbb{R}$ формулой $\xi^t(s, r) = (s, r + t)$ и диффеоморфизм $g : S_p \times \mathbb{R} \rightarrow S_p \times \mathbb{R}$ формулой $g(s, r) = (f(s), r - 1)$. Положим $G = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$ и $M_f = (S_p \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ. Третий автор поддержан фондом «БАЗИС».

Д. А. Баранов: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, denbaranov0066@gmail.com.

О. В. Починка: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, olga-pochinka@yandex.ru.

Д. Д. Шубин: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, schub.danil@yandex.ru.

Е. И. Яковлев: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, elptv@yandex.ru.

Английский перевод опубликован в *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 4–16 (2024).

$\nu_f : S_p \times \mathbb{R} \rightarrow M_f$ естественную проекцию, а через f^t — поток на многообразии M_f , заданный формулой $f^t(x) = \nu_f(\xi^t(\nu_f^{-1}(x)))$. Поток f^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом* f .

Обозначим через G^t класс надстроек над диффеоморфизмами $f \in G$. Неблуждающее множество потока f^t состоит из притягивающей A , отталкивающей R и седловой S периодических орбит [5, теоремы 2.1, 2.2]. Выберем трубчатую окрестность V орбиты A и образующие на $T = \partial V$: параллель $L \subset T$ (кривую, гомологичную в V орбите A) и меридиан $M \subset T$ (кривую, гомотопную нулю на V и существенную на торе $T = \partial V$). Кривые L и M можно рассматривать как петли в точке $L \cap M$, а потому их классы гомотопии являются генераторами группы $\pi_1(T)$. Чтобы не было путаницы, мы используем те же обозначения L и M для этих петель.

Пусть ρ — метрика на многообразии M^n . Любая гиперболическая орбита \mathcal{O} потока $f^t : M^n \rightarrow M^n$ имеет *устойчивое* и *неустойчивое* многообразия

$$W_{\mathcal{O}}^s = \{y \in X : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(\mathcal{O}, f^k(y)) \rightarrow 0\},$$

$$W_{\mathcal{O}}^u = \{y \in X : \lim_{k \rightarrow -\infty} d(\mathcal{O}, f^k(y)) \rightarrow 0\}.$$

Множество $\gamma = W_{\mathcal{O}}^u \cap T$ является узлом на торе T . Запишем его гомотопический тип относительно образующих L, M : $\langle \gamma \rangle = \langle l, m \rangle$. Число l не зависит от выбора образующих, тогда как m зависит от выбора параллели. Согласно [3, теорема 2] $l \geq 3$, а m может быть любым целым числом, взаимно простым с l . Тогда пара чисел (l, m) однозначно определяет не зависящее от выбора образующих число $d \in \{1, \dots, \lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor\}$ соотношением $d \cdot m \equiv \pm 1 \pmod{l}$. Заметим, что l и d взаимно просты.

В настоящей работе установлен следующий классификационный результат.

Теорема 1.1. *Потоки $f^t, f'^t \in G^t$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $(l, d) = (l', d')$.*

Таким образом, пара чисел (l, d) является полным топологическим инвариантом потока $f^t \in G^t$. В силу [3, теорема 1] пара чисел (l, d) является также полным топологическим инвариантом соответствующего диффеоморфизма $f \in G$, откуда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Потоки $f^t, f'^t \in G^t$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены соответствующие диффеоморфизмы $f, f' \in G$.*

Связь градиентно-подобных диффеоморфизмов $f \in G$ с периодическими гомеоморфизмами, установленная в [3], позволяет описать топологию многообразий M_f , допускающих потоки $f^t \in G^t$ (в [6] рассмотрен более широкий класс потоков).

Теорема 1.2. *Пусть поток $f^t \in G^t$ имеет параметры (l, d) . Тогда многообразие M_f является малым многообразием Зейферта одного из следующих видов:*

- (1) $M_f \cong M\left(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), \left(l, \frac{l}{2} - d\right)\right)$, если l четное и $l/2$ четное,
- (2) $M_f \cong M\left(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), \left(\frac{l}{2}, \frac{\frac{l}{2} - d}{2}\right)\right)$, если l четное, $l/2$ нечетное,
- (3) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), (2l, l - 2d))$, если l нечетное.

В данной статье мы также вычисляем число классов эквивалентности рассматриваемых потоков на всех допустимых многообразиях.

Теорема 1.3. *Несущее многообразие любого потока f^t из класса G^t , являющегося надстройкой над диффеоморфизмом $f : S_p \rightarrow S_p \in G$, гомеоморфно в точности одному из следующих многообразий:*

- (1) $A_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 2p - d))$, $p \in \mathbb{N}$, $d \in \{1, \dots, p - 1\}$, $(d, 4p) = 1$,
- (2) $B_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p + 2, d), (2p + 1, p - (d - 1)/2))$, $p \in \mathbb{N}$, $d \in \{1, \dots, 2p - 1\}$, $(d, 4p + 2) = 1$.

При этом

- (1) *каждое многообразие $A_{p,d}$ допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества G^t , которые представимы потоками с параметрами $(4p, d)$ и $(4p, 2p - d)$,*

- (2) каждое многообразие $B_{p,d}$ допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества G^t , которые представимы потоками с параметрами $(4p+2, d)$ и $(2p+1, p - (d-1)/2)$.

Мы вычисляем все группы гомологий с целыми коэффициентами многообразий $A_{p,d}, B_{p,d}$.

Теорема 1.4. *Группы гомологий с целыми коэффициентами многообразий $A_{p,d}, B_{p,d}$ изоморфны следующим группам:*

- (1) $H_3(A_{p,d}) \cong H_2(A_{p,d}) \cong \mathbb{Z}$ и $H_1(A_{p,d}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$,
(2) $H_3(B_{p,d}) \cong H_2(B_{p,d}) \cong H_1(B_{p,d}) \cong \mathbb{Z}$.

2. Вспомогательные сведения

2.1. Градиентно-подобные диффеоморфизмы. Пусть S_p — замкнутая ориентируемая поверхность рода $p \geq 0$ с метрикой ρ . Гомеоморфизмы $f, f': S_p \rightarrow S_p$ называются *топологически сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h: S_p \rightarrow S_p$ такой, что $f'h = hf$. Точка $x \in S_p$ называется *блуждающей* для гомеоморфизма f , если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f . Если множество Ω_f конечно, то каждая точка $r \in \Omega_f$ периодическая с некоторым периодом $m_r \in \mathbb{N}$.

Пусть f — диффеоморфизм. Точка $r \in \Omega_f$ называется *гиперболической*, если абсолютные значения всех собственных значений матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_r}}{\partial x}\right)\Big|_r$ не равны 1. Если абсолютные значения всех собственных значений меньше (больше) 1, то точка r называется *стоком* (*источником*). Стоки и источники называются *узлами*. Если гиперболическая периодическая точка не является узлом, то это *седловая точка*.

Для гиперболической периодической точки r диффеоморфизма f через q_r обозначим число собственных значений матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_r}}{\partial x}\right)\Big|_r$, по модулю больших 1. Гиперболическая структура периодической точки r влечет существование *устойчивого*

$$W_r^s = \{x \in S_p : \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(f^{k \cdot m_r}(x), r) = 0\}$$

и *неустойчивого*

$$W_r^u = \{x \in S_p : \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(f^{-k \cdot m_r}(x), r) = 0\}$$

многообразий, являющихся гладкими вложениями \mathbb{R}^{2-q_r} и \mathbb{R}^{q_r} в несущее многообразие соответственно.

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Компонента связности множества $W_r^u \setminus r$ ($W_r^s \setminus r$) называется *неустойчивой* (*устойчивой*) *сепаратрисой*. Диффеоморфизм $f: S_p \rightarrow S_p$ называется *диффеоморфизмом Морса — Смейла*, если Ω_f конечно и гиперболично, а инвариантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.

Периодические данные периодической орбиты \mathcal{O}_r периодической точки r — это набор чисел (m_r, q_r, ν_r) , где m_r — период r , $q_r = \dim W_r^u$ и ν_r — тип ориентации r : $\nu_r = +1$ ($\nu_r = -1$), если $f^{m_r}|_{W_r^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов тип ориентации всех узлов равен $+1$, а тип ориентации седловых точек может быть равен $+1$ или -1 .

2.2. Многообразия Зейферта. Приведем необходимые сведения из теории многообразий Зейферта (см., например, [7]).

Полноторий $\mathbb{V} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, разбитый на слои вида $\{x\} \times \mathbb{S}^1$, называется *тривиально расслоенным полноторием*. Рассмотрим полноторий \mathbb{V} как цилиндр $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ с основаниями, склеенными в силу поворота на угол $2\pi m/l$ для целых взаимно простых $m, l, l > 1$. Разбиение цилиндра на отрезки вида $\{x\} \times [0, 1]$ определяет разбиение этого полнотория на окружности, называемые *слоями*. Отрезок $\{0\} \times [0, 1]$ порождает слой, который называется *особым*, все остальные (*неособые*) слои

полнотория оборачиваются l раз вокруг особого слоя и m раз вокруг меридиана полнотория. Число l называется *кратностью* особого слоя. Полноторий с таким разбиением на слои называется *нетривиально расслоенным полноторием с орбитальными инвариантами* (l, m) .

Многообразие Зейферта — это компактное ориентируемое 3-многообразие M , разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои) так, что каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию. Такое разбиение называется *расслоением Зейферта*. Слои, которые переходят в центр нетривиально расслоенного полнотория, называются *особыми*.

Базой многообразия Зейферта M называется компактная поверхность $\Sigma = M/\sim$, где \sim — отношение эквивалентности такое, что $x \sim y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному слою. База любого многообразия Зейферта — компактная поверхность, которая замкнута тогда и только тогда, когда замкнуто многообразие M . Многообразию, допускающее расслоение Зейферта с базой сфера и не более, чем тремя особыми слоями, называется *малым*.

Расслоение Зейферта M с базой Σ и орбитальными инвариантами $(l_1, m_1), \dots, (l_s, m_s)$, $s \in \mathbb{N}$ обычно записывают в виде $M(\Sigma, (l_1, d_1), \dots, (l_s, d_s))$, где $m_i d_i \equiv 1 \pmod{l_i}$, $i \in \{1, \dots, s\}$. Ориентация на слоях расслоения Зейферта однозначно определяется ориентацией одного из слоев.

Два расслоения Зейферта M, M' называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M'$, переводящий слои одного слоения в слои другого с сохранением ориентации слоев. Гомеоморфизм h в этом случае называется *изоморфизмом расслоений Зейферта*.

Предложение 2.1. [7, теорема 10.2] *Расслоения Зейферта*

$$M(\Sigma, (l_1, d_1), \dots, (l_s, d_s)) \quad \text{и} \quad M'(\Sigma', (l'_1, d'_1), \dots, (l'_{s'}, d'_{s'}))$$

изоморфны тогда и только тогда, когда выполнены условия

- Σ гомеоморфно Σ' ,
- $s = s', l_i = l'_i, d_i \equiv \pm d'_i \pmod{l_i}$ для $i \in \{1, \dots, s\}$,
- если поверхность Σ замкнута, то $\sum_{i=1}^s \frac{d_i}{l_i} = \pm \sum_{i=1}^{s'} \frac{d'_i}{l'_i}$.

Предложение 2.2. [7, теорема 10.12] *Если два малых расслоения Зейферта M и M' с тремя особыми слоями и базой сфера не изоморфны, то многообразия M и M' не гомеоморфны.*

2.3. Периодические гомеоморфизмы. Гомеоморфизм $\varphi: S_p \rightarrow S_p$ называется *периодическим*, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\varphi^n = id$. Наименьшее из таких n называется *textit-периодом* φ . Точка x_0 называется *точкой меньшего периода* $n_0 < n$ гомеоморфизма φ , если $\varphi^{n_0}(x_0) = x_0$.

Согласно результатам Нильсена [8] (см. также [9]), для любого сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма $\varphi: S_p \rightarrow S_p$ множество B_φ точек меньшего периода конечно, а пространство орбит действия гомеоморфизма φ на S_p является сферой с g ручками (модульной поверхностью). В окрестности точки x_0 меньшего периода n_0 отображение f^{n_0} сопряжено повороту на некоторый рациональный угол $2\pi \frac{m_0}{l_0}$, где $l_0 = n/n_0$, $0 < m_0 < l_0$, $(m_0, l_0) = 1$. Обозначим через $X_i, i = 1, \dots, s$, орбиты точек меньшего периода, их периоды — через n_i и положим $l_i = n/n_i$. Обозначим через m_i/l_i соответствующее число вращения и определим число $d_i \in \{1, \dots, n_i - 1\}$ из условия $d_i \cdot m_i \equiv 1 \pmod{l_i}$. Набор параметров $(n, p, g, n_1, \dots, n_s, d_1, \dots, d_s)$ периодического гомеоморфизма φ называется его *полной характеристикой*.

Предложение 2.3 ([8]). *Два периодических гомеоморфизма топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые с точностью до перенумерации полные характеристики.*

Предложение 2.4 ([3, лемма 1]). *Любой диффеоморфизм $f: S_p \rightarrow S_p \in G$ имеет вид $f = \zeta\varphi$, где ζ — сдвиг на единицу времени градиентно-подобного потока и $\varphi: S_p \rightarrow S_p$ — периодический гомеоморфизм периода n со свойствами*

- $B_\varphi = \Omega_f$ и $\varphi|_{B_\varphi} = f|_{\Omega_f}$;
- гомеоморфизм φ имеет полную характеристику одного из следующих видов:

- (1) $(4p, 0, p, 2p, 1, 1, 1, q, 2p - q)$ при $0 < q < 2p$,
- (2) $(4p, g = 0, p, 2p, 1, 1, 1, q, 6p - d_2)$ при $2p < q < 4p$,
- (3) $(4p + 2, 0, p, 2p + 1, 2, 1, 1, q, 2p + 1 - 2d_2)$ при $0 < q \leq p$,
- (4) $(4p + 2, 0, p, 2p + 1, 2, 1, 1, q, 6p + 3 - 2d_2)$ при $p < q \leq 2p$;

- седловая орбита диффеоморфизма f имеет период $n/2$.

Обозначим через m/l число вращения, соответствующее стоковой орбите диффеоморфизма $f \in G$. Определим $d \in \{1, \dots, [\frac{l-1}{2}]\}$ из соотношения $d \cdot m \equiv \pm 1 \pmod{l}$.

Предложение 2.5 ([3, теорема 1]). *Диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $(l, d) = (l', d')$.*

Таким образом, пара чисел (l, d) является полным топологическим инвариантом диффеоморфизма $f \in G$.

3. Классификация потоков множества G^t

Доказательство теоремы 1.1. Необходимость. Пусть потоки $f^t, f'^t \in G^t$ с параметрами $(l, d), (l', d')$ топологически эквивалентны посредством некоторого гомеоморфизма $h: M_f \rightarrow M_{f'}$. Тогда гомеоморфизм h переводит периодические орбиты потока f^t в аналогичные периодические орбиты потока f'^t с сохранением типа и направления движения, т. е. $A' = h(A), S' = h(S), R' = h(R)$. Не уменьшая общности можно считать, что $V' = h(V)$, и $\gamma' = h(\gamma)$, поскольку $\gamma = \partial V \cap W_S^u$ и $\gamma' = \partial V' \cap W_{S'}^u$. Тогда $h|_V: V \rightarrow V'$ — гомеоморфизм заполненных торов, сохраняющий направление образующих A, A' . Отсюда следует (см., например, [10]), что в образующих $L, M; L', M'$ торов $T = \partial V, T' = \partial V'$ гомеоморфизм $h|_T$ индуцирует изоморфизм $h_*: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, где $k \in \mathbb{Z}$, и

$$(l', m') = (l, m) \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

(l, m) и (l', m') — гомотопические типы узлов γ и γ' соответственно. Из (3.1) следует

$$l' = l, \quad m' \equiv \pm m \pmod{l}. \quad (3.2)$$

По определению число $d' \in \{1, \dots, [(l-1)/2]\}$ определяется соотношением $d' \cdot m' \equiv \pm 1 \pmod{l}$. В силу (3.2) число d' совпадает с числом $d \in \{1, \dots, [(l-1)/2]\}$, которое определяется соотношением $d \cdot m \equiv \pm 1 \pmod{l}$.

Достаточность. Пусть $f^t, f'^t \in G^t$ — потоки с параметрами $(l, d), (l', d')$ соответственно и $(l, d) = (l', d')$. В силу предложения 2.5 соответствующие диффеоморфизмы $f, f' \in G$ заданы на одной и той же поверхности S_p и существует гомеоморфизм $h_0: S_p \rightarrow S_p$ такой, что

$$h_0 f = f' h_0. \quad (3.3)$$

Определим гомеоморфизм $H: S_p \times \mathbb{R} \rightarrow S_p \times \mathbb{R}$ формулой $H(s, r) = (h_0(s), r)$. Напомним, что поток ξ^t на многообразии $S_p \times \mathbb{R}$ задан формулой $\xi^t(s, r) = (s, r + t)$, диффеоморфизм $g: S_p \times \mathbb{R} \rightarrow S_p \times \mathbb{R}$ задан формулой $g(s, r) = (f(s), r - 1)$, $G = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$, $M_f = (S_p \times \mathbb{R})/G$, $\nu_f: S_p \times \mathbb{R} \rightarrow M_f$ — естественная проекция, и поток f^t на многообразии M_f задан формулой $f^t(x) = \nu_f(\xi^t(\nu_f^{-1}(x)))$. Аналогичные обозначения со штрихом имеют место для потока f'^t . Прямая проверка показывает, что $H\xi^t = \xi^t H$ и $Hg = g' H$ в силу (3.3). Тогда гомеоморфизм H проектируется в гомеоморфизм $h: M_f \rightarrow M_{f'}$ по формуле $h(x) = \nu_{f'}(H(\nu_f^{-1}(x)))$, где $h f^t = f'^t h$. \square

4. Топология многообразия M_f

Доказательство теоремы 1.2. Пусть диффеоморфизм $f \in G$ имеет вид $f = \xi\varphi$, где ξ — сдвиг на единицу времени градиентно-подобного потока и φ — периодический гомеоморфизм. Тогда f и φ гомотопны. Следовательно, многообразия M_f и M_φ гомеоморфны. В силу предложения 2.4 M_φ — многообразии Зейферта с базой сфера и тремя особыми слоями одного из следующих видов:

- (1) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 2p - d))$ при $0 < d < 2p$, $(d, 2p) = 1$,
- (2) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 6p - d))$ при $2p < d < 4p$, $(d, 2p) = 1$,
- (3) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (2p + 1, d), (4p + 2, 2p + 1 - 2d))$ при $0 < d \leq p$, $(d, 4p + 2) = 1$,
- (4) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (2p + 1, d), (4p + 2, 6p + 3 - 2d))$ при $p < d \leq 2p$, $(d, 4p + 2) = 1$.

Покажем, что любое многообразие вида (2) гомеоморфно некоторому многообразию вида (1). Действительно, положим $d = 4p - \tilde{d}$. Тогда многообразие вида (2) примет вид $M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, 4p - \tilde{d}), (4p, 2p + \tilde{d}))$, $0 < \tilde{d} < 2p$, $(\tilde{d}, 2p) = 1$.

Поскольку $1 \equiv -1 \pmod{2}$, $4p - \tilde{d} \equiv -\tilde{d} \pmod{4p}$ и $2p + \tilde{d} \equiv -(2p - \tilde{d}) \pmod{4p}$, в силу предложения 2.1

$$M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 6p - d)) \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, \tilde{d}), (4p, 2p - \tilde{d})).$$

Таким образом, любое многообразие M_f является многообразием Зейферта вида (1) или (3). Выразив параметры многообразия Зейферта через параметры потока (l, d) , мы получим список из трех типов многообразий, анонсированных в теореме. При этом первый тип соответствует надстройке над диффеоморфизмом f с неподвижными стоком и источником, второй тип — с неподвижным стоком и источником периода 2, третий тип — со стоком периода 2 и неподвижным источником. \square

5. Подсчет числа классов эквивалентности потоков на данном многообразии

Доказательство теоремы 1.3. В доказательстве теоремы 1.2 мы показали, что несущее многообразие M_f потока f^t с параметрами (l, d) может иметь один из следующих видов:

- (1) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), (l, l/2 - d))$ при $l = 4p$, $p \in \mathbb{N}$,
- (2) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), (l/2, (l/2 - d)/2))$ при $l = 4p + 2$, $p \in \mathbb{N}$,
- (3) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), (2l, l - 2d))$ при $l = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$.

В силу предложения 2.1 множество многообразий вида (2) совпадает с множеством многообразий вида (3) и все такие многообразия имеют вид

$$B_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p + 2, d), (2p + 1, p - (d - 1)/2)),$$

$$p \in \mathbb{N}, \quad d \in \{1, \dots, 2p - 1\}, \quad (d, 4p + 2) = 1.$$

В силу предложений 2.1 и 2.2 $B_{p,d} \cong B_{p',d'}$ тогда и только тогда, когда $p = p'$ и $d = d'$. Все многообразия первого типа имеют вид

$$A_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 2p - d)), \quad p \in \mathbb{N}, \quad d \in \{1, \dots, 2p - 1\}, \quad (d, 4p) = 1.$$

Из предложений 2.1 и 2.2 также следует, что никакое многообразие вида $A_{p,d}$ не гомеоморфно многообразию вида $B_{p,d}$, но $A_{p,d} \cong A_{p',d'}$ тогда и только тогда, когда $p = p'$, $d = 2p - d'$.

Таким образом, попарно различные многообразия первого типа имеют вид

$$A_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 2p - d)), \quad p \in \mathbb{N}, \quad d \in \{1, \dots, p - 1\}, \quad (d, 4p) = 1.$$

Из приведенных рассуждений и классификации потоков класса G^t (см. теорему 1.1) заключаем, что

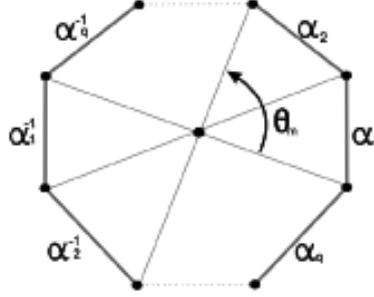
- (1) каждое многообразие $A_{p,d}$ допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества G^t , которые могут быть представлены потоками с параметрами $(4p, d)$ и $(4p, 2p - d)$,
- (2) каждое многообразие $B_{p,d}$ допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества G^t которые могут быть представлены потоками с параметрами $(4p + 2, d)$ и $(2p + 1, p - (d - 1)/2)$.

\square

6. Группы гомологий некоторых переклеенных торов

В этом параграфе мы доказываем теорему 1.4. Доказательство вытекает из более общего результата о группах гомологий с целыми коэффициентами для многообразий переклеенных торов M_φ , где φ — периодический гомеоморфизм, определенный следующим образом.

Пусть $q \in \mathbb{N}$ и Π_q — правильный $2q$ -угольник со схемой $a_1 a_2 \dots a_q a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_q^{-1}$. Выберем $m \in \{1, \dots, q-1\}$ и обозначим через $\overline{\varphi}: \Pi_q \rightarrow \Pi_q$ поворот многоугольника вокруг его центра на угол $\theta_m = \pi m/q$ в положительном направлении. Склеив одноименные стороны многоугольника Π_q , получим замкнутую ориентируемую поверхность S_p рода $p = [q/2]$, на которой поворот $\overline{\varphi}$ индуцирует гомеоморфизм $\varphi: S_p \rightarrow S_p$:



Пусть $\mu: \Pi_q \rightarrow S_p$ — естественная проекция и $\{i\} = i + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_q$, $i \in \mathbb{Z}$. Положим $\ell = (q, m)$, $\varkappa_m = m/\ell$, $\varkappa_q = q/\ell$. Вычисление групп гомологий многообразия M_φ проведем отдельно для случаев четного и нечетного q .

6.1. Случай $q = 2p$.

Лемма 6.1. Пусть $q = 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда группы гомологий многообразия $M = M_\varphi$ изоморфны следующим группам:

- если \varkappa_m четно, то $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$ и $H_2(M) \cong H_1(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$,
- если \varkappa_m нечетно, то $H_3(M) \cong H_2(M) \cong \mathbb{Z}$ и $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^\ell$.

Доказательство. Для $i = 1, \dots, q$ положим $z_{\{i\}} = \mu(a_i)$. Тогда $H_1(S_p) = \langle [z_{\{1\}}], \dots, [z_{\{q\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^q$, а индуцированный гомеоморфизмом φ автоморфизм $\varphi_*: H_1(S_p) \rightarrow H_1(S_p)$ описывается равенствами

$$\varphi_*([z_{\{i\}}]) = (-1)^{\lfloor \frac{i-1+m}{q} \rfloor} [z_{\{i+m\}}], \quad i = 1, \dots, q. \quad (6.1)$$

Положим $N = \nu(S_p \times 0)$, где $\nu = \nu_\varphi: S_p \times [0, 1] \rightarrow M_\varphi$ — естественная проекция. Для вычисления групп гомологий многообразия M используем топологическую пару (M, N) и соответствующую гомологическую последовательность (см. [11, теорема 4.4.3])

$$\dots \rightarrow H_n(N) \xrightarrow{i_*^n} H_n(M) \xrightarrow{j_*^n} H_n(M, N) \xrightarrow{\partial_*^n} H_{n-1}(N) \rightarrow \dots \quad (6.2)$$

Положим $z_{\{i\}}^0 = \nu(z_{\{i\}} \times 0)$ для $i = 1, \dots, q$. Тогда $H_n(N) = 0$ при $n > 2$ и

$$H_2(N) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(N) = \langle [z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{q\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}^q. \quad (6.3)$$

Вычислим группы $H_n(M, N)$. Для этого рассмотрим надстройку ΣS_p , которая получается стягиванием в точки v_0 и v_1 оснований $S_p \times 0$ и $S_p \times 1$ цилиндра $S_p \times [0, 1]$. Положим $V = \{v_0, v_1\}$. Тогда $M/N = \Sigma S_p/V$. Подмножества $N \subset M$ и $V \subset \Sigma S_p$ замкнуты и являются деформационными ретрактами некоторых окрестностей $U_N \subset M$ и $U_V \subset \Sigma S_p$. Отсюда и из соотношений между группами абсолютных и относительных гомологий

[7, предложение 2.22] для $n > 0$ следует

$$H_n(M, N) \cong H_n(M/N) = H_n(\Sigma S_p/V) \cong H_n(\Sigma S_p, V). \quad (6.4)$$

Согласно изоморфизму надстройки [11, теорема 4.4.10]

$$H_3(\Sigma S_p) \cong H_2(S_p) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2(\Sigma S_p) \cong H_1(S_p) \cong \mathbb{Z}^q, \quad H_1(\Sigma S_p) = 0.$$

Подставив последние формулы в гомологическую последовательность пары $(\Sigma S_p, V)$, получим

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{j_*^3} H_3(\Sigma S_p, V) \xrightarrow{\partial_*^3} 0 \xrightarrow{i_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{j_*^2} H_2(\Sigma S_p, V) \xrightarrow{\partial_*^2} \\ \longrightarrow 0 \xrightarrow{i_*^1} 0 \xrightarrow{j_*^1} H_1(\Sigma S_p, V) \xrightarrow{\partial_*^1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{i_*^0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$H_3(\Sigma S_p, V) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2(\Sigma S_p, V) \cong \mathbb{Z}^q, \quad H_1(\Sigma S_p, V) \cong \mathbb{Z}. \quad (6.5)$$

В силу (6.2), (6.3), (6.4) и (6.5) следующая последовательность точна:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_3(M) \xrightarrow{j_*^3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*^3} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*^2} H_2(M) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial_*^2} \\ \longrightarrow \langle [z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{q\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}^q \xrightarrow{i_*^1} H_1(M) \xrightarrow{j_*^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*^0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Так как S_p — ориентируемое 2-многообразие, а гомеоморфизм φ сохраняет ориентацию, M — ориентируемое замкнутое 3-многообразие. Следовательно, $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$ [7, теорема 3.26] и j_*^3 в (6.6) — изоморфизм. Но тогда $\partial_*^3 = 0$. С другой стороны, i_*^0 — изоморфизм, и потому $\partial_*^1 = 0$.

Поскольку $\nu : S_p \times 0 \rightarrow N$ — гомеоморфизм, формула $\varphi^0(\nu(x, 0)) = \nu(\varphi(x), 0)$ определяет гомеоморфизм $\varphi^0 : N \rightarrow N$.

Пусть $\varphi_*^0 : H_1(N) \rightarrow H_1(N)$ — автоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом φ^0 . В цилиндре $S_p \times [0, 1]$ циклы $z_{\{i\}} \times 0$ и $z_{\{i\}} \times 1$ гомологичны. В процессе построения многообразия M цикл $z_{\{i\}} \times 1$ приклеивается к циклу $\varphi(z_{\{i\}}) \times 0$. Это означает, что в группе $H_1(M)$ имеет место равенство $\varphi_*^0([z_{\{i\}}^0]) = [z_{\{\varphi(i)\}}^0]$. Тогда в силу (6.1) в $H_1(M)$ справедливы соотношения

$$[z_{\{i+jm\}}^0] = (-1)^{\lfloor \frac{i-1+jm}{q} \rfloor} [z_{\{i\}}^0] \quad i = 1, \dots, \ell, \quad j = 1, \dots, \varkappa_q. \quad (6.7)$$

Таким образом, подгруппа $\text{im } i_*^1 \subset H_1(M)$ порождается гомологическими классами $[z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{\ell\}}^0]$. При $j = q$ имеем

$$\left[\frac{i-1+qm}{q} \right] = \left[\frac{i-1}{q} + \frac{qm}{q\ell} \right] = \left[\frac{i-1}{q} + \varkappa_m \right] = \varkappa_m.$$

Поэтому для $j = q$ из (6.7) при четном \varkappa_m следуют тривиальные соотношения $[z_{\{i\}}^0] = [z_{\{i\}}^0]$, а при нечетном \varkappa_m — соотношения $[z_{\{i\}}^0] = -[z_{\{i\}}^0]$. В первом случае $[z_{\{i\}}^0]$ — свободные образующие группы $\text{im } i_*^1$. Следовательно,

$$\text{im } i_*^1 = \langle [z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{\ell\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}^\ell. \quad (6.8)$$

Во втором случае $2[z_{\{i\}}^0] = 0$ в $H_1(M)$ для всех $i = 1, \dots, \ell$, и следовательно,

$$\text{im } i_*^1 = \langle [z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{\ell\}}^0] \parallel 2[z_{\{1\}}^0], \dots, 2[z_{\{\ell\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}_2^\ell. \quad (6.9)$$

Из (6.8), (6.6) и равенств $\partial_*^3 = 0$ и $\partial_*^1 = 0$ получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{i_*^1} \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow 0, \quad (6.10)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (6.11)$$

В силу (6.11) имеем $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$. В последовательности (6.10) имеем $\text{im } \partial_*^2 = \ker i_*^1 \cong \mathbb{Z}^{q-\ell}$. Тогда $\text{im } j_*^2 = \ker \partial_*^2 \cong \mathbb{Z}^{q-(q-\ell)} = \mathbb{Z}^\ell$. Поэтому $H_2(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$.

Из (6.9) и (6.6) получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{i_*^1} \mathbb{Z}_2^\ell \longrightarrow 0, \quad (6.12)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^\ell \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (6.13)$$

В силу (6.13) $H_1(P) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^\ell$. В последовательности (6.12)

$$\text{im } \partial_*^2 = \ker i_*^1 = \mathbb{Z}^{q-\ell} \times (2\mathbb{Z})^\ell \cong \mathbb{Z}^q.$$

Таким образом, ∂_*^2 — мономорфизм, откуда следует $\text{im } j_*^2 = \ker \partial_*^2 = 0$. Но тогда $H_2(P) \cong \mathbb{Z}$. \square

6.2. Случай $q = 2p + 1$.

Лемма 6.2. Пусть $q = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда группы гомологий многообразия $M = M_\varphi$ изоморфны следующим группам:

- если t четно, то $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$, $H_2(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell-1}$, $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}_{\varkappa_q}$,
- если t нечетно, то $H_3(M) \cong H_2(M) \cong \mathbb{Z}$ и $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^{\ell-1}$.

Доказательство. Положим $z_{\{i\}} = \mu(a_i + a_{i+1})$ для $i = 1, \dots, 2p$ и $z_{\{0\}} = z_{\{q\}} = \mu(a_q - a_1)$. Тогда $H_1(S_p) = \langle [z_{\{1\}}], \dots, [z_{\{2p\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^{2p}$, а индуцированный гомеоморфизмом φ автоморфизм $\varphi_* : H_1(S_p) \rightarrow H_1(S_p)$ удовлетворяет равенствам

$$\varphi_*([z_{\{i\}}] = (-1)^{\lfloor \frac{i-1+m}{q} \rfloor} [z_{\{i+m\}}]), \quad i = 1, \dots, q.$$

Пусть $\nu : S_p \times [0, 1] \rightarrow M$ — естественная проекция, $N = \nu(S_p \times 0)$ и $z_{\{i\}}^0 = \nu(z_{\{i\}} \times 0)$ для $i = 1, \dots, q$. Тогда, как и в случае $q = 2p$, точна последовательность (6.6). Рассуждая так же, как в теореме 6.1, получаем $[z_{\{i+jm\}}^0] = (-1)^{\lfloor \frac{i-1+jm}{q} \rfloor} [z_{\{i\}}^0]$ для всех $i = 1, \dots, \ell$, $j = 1, \dots, \varkappa_q$.

Таким образом, подгруппа $\text{im } \iota_*^1 \subset H_1(M)$ здесь также порождается гомологическими классами $[z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{\ell\}}^0]$. Поскольку ℓ в данном случае нечетно, числа m и \varkappa_m четны или нечетны одновременно. Как и в лемме 6.1, при $j = q$ из (6.7) при четном \varkappa_m следуют тривиальные соотношения $[z_{\{i\}}^0] = [z_{\{i\}}^0]$, а при нечетном \varkappa_m — соотношения $2[z_{\{i\}}^0] = 0$.

По построению цикла $z_{\{0\}} = z_{\{q\}}$ имеем

$$[D] = \sum_{\lambda=1}^q (-1)^\lambda [z_{\{\lambda\}}^0] = 0.$$

Положим

$$[\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}] = \sum_{\lambda=1}^{\ell} (-1)^\lambda [z_{\{\lambda+l\ell\}}^0]$$

при $l = 0, \dots, \varkappa_q - 1$ и $[\widehat{z}_{\{i\}}] = [z_{\{i\}}^0]$ при $i = 2, \dots, \ell$. Поскольку матрица перехода от $[z_{\{1\}}^0], [z_{\{2\}}^0], \dots, [z_{\{\ell\}}^0]$ к $[\widehat{z}_{\{1\}}], [\widehat{z}_{\{2\}}], \dots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}]$ унимодулярна, гомологические классы $[\widehat{z}_{\{1\}}], [\widehat{z}_{\{2\}}], \dots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}]$ также порождают подгруппу $\text{im } \iota_*^1 \subset H_1(M)$.

Так как ℓ нечетно, имеем

$$[D] = \sum_{l=0}^{\varkappa_q-1} (-1)^l [\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}] = \sum_{l=0}^{\varkappa_q-1} (-1)^{l\ell} [\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}]. \quad (6.14)$$

По построению группы \mathbb{Z}_q

$$[\widehat{z}_{\{1+jm\}}] = [\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}], \quad l\ell = jm - \left\lfloor \frac{jm}{q} \right\rfloor = jm - \left\lfloor \frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q} \right\rfloor, \quad j = 1, \dots, q. \quad (6.15)$$

С другой стороны, в силу (6.7)

$$[\widehat{z}_{\{1+jm\}}] = (-1)^{\lfloor \frac{jm}{q} \rfloor} [\widehat{z}_{\{1\}}] = (-1)^{\lfloor \frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q} \rfloor} [\widehat{z}_{\{1\}}]. \quad (6.16)$$

Из (6.14) и (6.15) получаем

$$[D] = \sum_{j=1}^{\varkappa_q} (-1)^{jm - \lfloor \frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q} \rfloor} [\widehat{z}_{\{1+jm\}}] = \sum_{j=1}^{\varkappa_q} (-1)^{jm - \lfloor \frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q} \rfloor + \lfloor \frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q} \rfloor} [\widehat{z}_{\{1\}}] = [\widehat{z}_{\{1\}}] \sum_{j=1}^{\varkappa_q} (-1)^{jm}.$$

Поэтому $[D] = \varkappa_q [\widehat{z}_{\{1\}}] = 0$ для четного m и $[D] = -[\widehat{z}_{\{1\}}] = 0$ для нечетного m .

Таким образом,

$$\text{im } \iota_*^1 = \langle [\widehat{z}_{\{1\}}], \dots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}] \parallel \varkappa_q [\widehat{z}_{\{1\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z}_{\varkappa_q} \quad (6.17)$$

для четного m и

$$\text{im } \iota_*^1 = \langle [\widehat{z}_{\{2\}}], \dots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}] \parallel 2[z_{\{2\}}^0], \dots, 2[z_{\{\ell\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \quad (6.18)$$

для нечетного m . Из (6.17) и (6.6) согласно ранее полученным равенствам $\partial_*^3 = 0$ и $\partial_*^1 = 0$ получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{i_*^1} \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z}_{\mathcal{K}_q} \longrightarrow 0, \quad (6.19)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z}_{\mathcal{K}_q} \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (6.20)$$

В силу (6.20) имеем $H_1(P) \cong \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}_{\mathcal{K}_q}$. В последовательности (6.19) $\text{im } \partial_*^2 = \ker i_*^1 = \mathbb{Z}^{2p-\ell+1} \times \mathcal{K}_q \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{2p-\ell+2}$. Но тогда

$$\text{im } j_*^2 = \ker \partial_*^2 \cong \mathbb{Z}^{2p-(2p-\ell+2)} = \mathbb{Z}^{\ell-2}.$$

Поэтому $H_2(P) \cong \mathbb{Z}^{\ell-1}$.

Из (6.18) и (6.6) получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{i_*^1} \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \longrightarrow 0, \quad (6.21)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (6.22)$$

В силу (6.22) имеем $H_1(P) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^{\ell-1}$. В последовательности (6.21) имеем

$$\text{im } \partial_*^2 = \ker i_*^1 = \mathbb{Z}^{2p-\ell+1} \times (2\mathbb{Z})^{\ell-1} \cong \mathbb{Z}^{2p}.$$

Таким образом, ∂_*^2 — мономорфизм, и поэтому $\text{im } j_*^2 = \ker \partial_*^2 = 0$. Но тогда $H_2(P) \cong \mathbb{Z}$. □

Литература

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Am. Math. Soc.* **73**, No. 6, 747–817 (1967).
2. G. Ikegami, “On classification of dynamical systems with cross-sections”, *Osaka J. Math.* **6**, 419–433 (1969).
3. Д. А. Баранов, Е. С. Косолапов, О. В. Починка, “Узел как полный инвариант диффеоморфизмов поверхностей с тремя периодическими орбитами”, *Сиб. мат. журн.* **64**, No. 4, 687–699 (2023).
4. V. Z. Grines, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina, “Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms”, *Regul. Chaotic Dyn.* **21**, No. 2, 189–203 (2016).
5. T. Medvedev, E. Nozdrinova, O. Pochinka, “On periodic data of diffeomorphisms with one saddle orbit”, *Topol. Proc.* **54**, 49–68 (2019).
6. O. Pochinka, D. Shubin, “Topology of ambient 3-manifolds of nonsingular flows with twisted saddle orbit”, *Russ. J. Nonlinear Dyn.* **19**, No. 3, 371–381 (2023).
7. С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии*, МГУ, М. (1991).
8. J. Nielsen, “Die Struktur Periodischer Transformationen von Flächen”, *Math. Fys. Medd., Danske Vid. Selsk.* **15**, No. 1, 1–77 (1937).
9. D. A. Baranov, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, E. E. Chilina, “On a classification of periodic maps on the 2-torus”, *Russ. J. Nonlinear Dyn.* **19**, No. 1, 91–110 (2023).
10. D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Houston, TX (1990).
11. C. R. F. Maunder, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge etc. (1980).

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2024 г.