М. А. Кисатов, В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Установлены теоремы существования и единственности классического решения задачи о стационарном пограничном слое жидкости с реологическим законом Ладыженской вблизи твердой стенки с заданными условиями, характеризующими силу проверхностного натяжения и явление проскальзывания вблизи этой стенки. Получен аналитический вид скорости стекания жидкости с вертикальной стенки под действием силы тяжести и заданных граничных условий.

1. Введение

При изучении математических задач течения жидкостей вблизи твердых поверхностей традиционно используется условие прилипания. Однако иногда, ввиду реологических свойств жидкости или физических свойств поверхностей, условие прилипания может нарушаться, и тогда оно заменяется каким-либо условием проскальзывания.

Условие проскальзывания вблизи твердых стенок может возникнуть в задачах течения вязких жидкостей в канале под действием постоянного перепада давления [**1, 2**]. Условие проскальзывания реализуется в задачах течения бурового раствора в скважине [**3, 4**].

В данной статье изучается задача о пограничном слое нелинейно вязкой жидкости вблизи твердой обтекаемой стенки. Предполагается также, что жидкость удовлетворяет реологическому закону Ладыженской (см. [**5**]), а вблизи твердой стенки вместо привычного условия прилипания задано условие проскальзывания. Некоторые результаты по пограничному слою жидкости с реологией Ладыженской содержатся в [**6**]–[**10**].

2. Постановка задачи и формулировка основного результата

Мы рассматриваем двумерный стационарный пограничный слой жидкости в области $D = \{0 < x < X,\ 0 < y < \infty\}$, $X > 0$. Предполагается, что пограничный слой подчиняется реологическому закону Ладыженской, т. е. удовлетворяет системе уравнений

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

М. А. Кисатов: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, kisatov@mail.ru.

В. Н. Самохин: Московский политехнический университет, Москва, Россия, avt428212@yandex.ru.

Г. А. Чечкин: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, chechkin@mech.math.msu.su.

$$
\begin{aligned}
&\nu g\Big[1+3kg\Big(\frac{\partial u}{\partial y}g\Big)^2 g\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} + U(x)\frac{dU(x)}{dx} = 0,\\
&\frac{\partial p}{\partial y} = 0,\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

где функции $U(x)$ и $p(x)$ связаны равенством $U^2(x)+2p(x) = \mathrm{const}$. Предполагается, что решения удовлетворяют краевым условиям

$$
\begin{aligned}
&u|_{x=0} = u_0(y), \quad u|_{y=0} = \Lambda U(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}g\Big|_{y=0} = \frac{\sigma}{\mu X}, \quad v|_{y=0} = v_0(x),\\
&u(x,y) \rightrightarrows U(x), \quad y \to +\infty.
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Здесь функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ — неизвестные компоненты скорости течения жидкости, X — длина обтекаемой области, ν и μ — кинематическая и динамическая вязкости жидкости, Λ $(0 < \Lambda < 1)$ — коэффициент проскальзывания вдоль границы $\{y = 0\}$, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $p(x)$ — давление, $U(x)$ — скорость внешнего потока, $u_0(y)$ — исходный профиль скоростей и $v_0(x)$ — скорость отвода (инъекции) жидкости через границу $\{y = 0\}$.

Основные результаты первой части статьи — теоремы существования и единственности решения задачи (2.1), (2.2).

Теорема 2.1 (существование)**.** *Пусть выполнены следующие условия*:

1) $u_0(y) > \Lambda U(0)$ *при* $y > 0$,

2) $u_0(0) = \Lambda U(0)$, $u_0'(0) = \sigma/\mu X > 0$, $u_0(y) \to U(0) \neq 0$ *при* $y \to \infty$,

3) dU/dx, $v_0(x)$ *непрерывно дифференцируемы при* $0 \leqslant x \leqslant X$,

4) $u_0(y)$, $u_0'(y)$, $u_0''(y)$ *ограничены при* $0 \leqslant y < \infty$ *и удовлетворяют условию Гёльдера.*

Также предполагается, что выполнено условие согласования в точке $(0,0)$

$$
\nu g\Big[1+3kg\Big(\frac{du_0(y)}{dy}g\Big)^2 g\Big]\frac{d^2u_0(y)}{dy^2} - v_0(0)\frac{du_0(y)}{dy} + (1-\Lambda^2)U(0)\frac{dU(0)}{dx} = O(y^2), \quad y \to 0.
$$

Тогда при некотором $X > 0$ *в области* D *существует решение* $u(x,y)$, $v(x,y)$ *задачи* (2.1), (2.2), *обладающее следующими свойствами*:

(1) *функция* $u(x,y)$ *непрерывна и ограничена в* $\overline{D}$,

(2) $u(x,y) > \Lambda U(x)$ *при* $y > 0$,

(3) $\partial u/\partial y > m > 0$ *при* $0 < y \leqslant y_0$, *где* m *и* y_0 *— некоторые постоянные,*

(4) $\partial u/\partial y$, $\partial^2 u/\partial y^2$ *непрерывны и ограничены в* D,

(5) $\partial u/\partial x$, v, $\partial v/\partial y$ *непрерывны и ограничены в любой конечной части* $\overline{D}$.

Если $|u_0'(y)| \leqslant m_1 \exp(-m_2 y)$, m_1, $m_2 = \mathrm{const} > 0$, *то* $\partial u/\partial x$, $\partial v/\partial y$ *ограничены в* D. *В случае* $dp/dx \leqslant 0$ *и* $v_0(x) \leqslant 0$ *или* $dp/dx < 0$, *такое решение задачи* (2.1), (2.2) *существует в* D *при любом* $X > 0$.

Теорема 2.2 (единственность). *Пусть для решения* $u(x,y)$, $v(x,y)$ *задачи* (2.1), (2.2) *в области* D *выполнены условия теоремы* 2.1 *и неравенства*

$$0 < u < M, \quad \psi > 0,$$

$$M_1 y \leqslant u \leqslant M_2 y, \quad 0 < y < y_0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leqslant M_3, \quad (x,y) \in D,$$

где M, M_1, M_2, M_3 *и* y_0 — *некоторые положительные постоянные. Тогда* $u(x,y)$, $v(x,y)$ — *единственное решение задачи* (2.1), (2.2).

3. Переход к переменным Мизеса

Доказательство теорем проводится в два этапа. Сначала сделаем замену переменных фон Мизеса для сведения системы уравнений к одному нелинейному уравнению, затем докажем теоремы существования и единственности решений полученной новой краевой задачи и с помощью обратной замены получим доказательство теорем 2.1 и 2.2.

Сделаем замену переменных Мизеса

$$\begin{gathered} x = x, \quad \psi = \psi(x,y), \quad \overline{w}(x,\psi) = u^2(x,y), \quad W(x) = U^2(x), \\ u(x,y) = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v(x,y) - v_0(x) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi|_{y=0}, \end{gathered} \tag{3.1}$$

при помощи которой задача (2.1), (2.2) в области D переходит в задачу

$$\nu\sqrt{\overline{w}}g\Big[1 + \frac{3}{4}kg\Big(\frac{\partial \overline{w}}{\partial \psi}g\Big)^2 g\Big]\frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial \overline{w}}{\partial \psi} + \frac{dW}{dx} = 0, \tag{3.2}$$

$$\overline{w}|_{x=0} = \overline{w}_0(\psi), \quad \overline{w}|_{\psi=0} = \Lambda^2 W(x), \quad \frac{\partial \overline{w}}{\partial \psi}g\Big|_{\psi=0} = 2\frac{\sigma}{\mu X}, \quad v|_{\psi=0} = v_0(x),$$

$$\overline{w}(x,\psi) \rightrightarrows W(x), \quad \psi \to +\infty \tag{3.3}$$

в области $G = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < \infty\}$, $X > 0$, где $\overline{w}_0(\psi) = u_0^2(y)$.

После замены (3.1) условия теоремы 2.1 принимают следующий вид:

1) $\overline{w}_0(\psi) > \Lambda^2 W(0)$ при $\psi > 0$,

2) $\overline{w}_0(0) = \Lambda^2 W(0)$, $\overline{w}_0'(0) = 2\sigma/\mu X > 0$, $\overline{w}_0(\psi) \to W(0) \neq 0$ при $\psi \to \infty$,

3) dW/dx, $v_0(x)$ непрерывно дифференцируемы при $0 \leqslant x \leqslant X$,

4) $\overline{w}_0(\psi)$, $\overline{w}_0'(\psi)$, $\overline{w}_0''(\psi)$ ограничены при $0 \leqslant \psi < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера.

Предполагается, что выполнено условие согласования в точке $(0,0)$ вида

$$\nu\sqrt{\overline{w}_0(\psi)}g\Big[1 + \frac{3}{4}kg\Big(\frac{d\overline{w}_0(\psi)}{d\psi}g\Big)^2 g\Big]\frac{d^2\overline{w}_0(\psi)}{d\psi^2} - v_0(0)\frac{d\overline{w}_0(\psi)}{d\psi} + (1-\Lambda^2)\frac{dW(0)}{dx} = O(\psi), \quad \psi \to 0.$$

4. Существование решения задачи в переменных Мизеса

Произведем замену неизвестной функции

$$w(x,\psi) = \overline{w}(x,\psi) - \Lambda^2 W(x), \quad w_0(\psi) = \overline{w}_0(\psi) - \Lambda^2 W(0), \tag{4.1}$$

которая сводит задачу (3.2), (3.3) с «проскальзыванием» в области G к следующей задаче с «прилипанием»:

$$\nu\sqrt{w+\Lambda^2 W(x)}g\Big[1+\frac{3}{4}kg\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}g\Big)^2 g\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}-\frac{\partial w}{\partial x}-v_0(x)\frac{\partial w}{\partial\psi}+(1-\Lambda^2)\frac{dW}{dx}=0, \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned} &w|_{x=0}=w_0(\psi), \quad w|_{\psi=0}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial\psi}g\Big|_{\psi=0}=2\frac{\sigma}{\mu X}, \quad v|_{\psi=0}=v_0(x),\\ &w(x,\psi)\rightrightarrows(1-\Lambda^2)W(x), \quad \psi\to+\infty \end{aligned} \tag{4.3}$$

в области G.

С учетом замен (3.1), (4.1) условия теоремы 2.1 принимают следующий вид:

1) $w_0(\psi)>0$ при $\psi>0$,

2) $w_0(0)=0$, $w_0'(0)=2\sigma/\mu X>0$, $w_0(\psi)\to(1-\Lambda^2)W(0)\neq 0$ при $\psi\to\infty$,

3) dW/dx, $v_0(x)$ непрерывно дифференцируемы при $0\leqslant x\leqslant X$,

4) $w_0(\psi)$, $w_0'(\psi)$, $w_0''(\psi)$ ограничены при $0\leqslant\psi<\infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера.

Предполагается, что выполнено условие согласования в окрестности точки $(0,0)$ вида

$$\begin{aligned} \Psi(\psi)=\nu\sqrt{w_0(\psi)+\Lambda^2 W(0)}g\Big[1+\frac{3}{4}kg\Big(\frac{dw_0(\psi)}{d\psi}g\Big)^2 g\Big]\frac{d^2 w_0(\psi)}{d\psi^2}\\ -v_0(0)\frac{dw_0(\psi)}{d\psi}+(1-\Lambda^2)\frac{dW(0)}{dx}=O(\psi), \quad \psi\to 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Следующие теоремы будут доказаны в § 6.

Теорема 4.1. *Пусть*

1) $w_0(\psi)>0$ *при* $\psi>0$,

2) $w_0(0)=0$, $w_0'(0)=2\sigma/\mu X>0$, $w_0(\psi)\to(1-\Lambda^2)W(0)\neq 0$ *при* $\psi\to\infty$,

3) dW/dx, $v_0(x)$ *непрерывно дифференцируемы при* $0\leqslant x\leqslant X$,

4) $w_0(\psi)$, $w_0'(\psi)$, $w_0''(\psi)$ *ограничены при* $0\leqslant\psi<\infty$ *и удовлетворяют условию Гёльдера.*

Предполагается, что выполнено условие согласования (4.4) *в точке* $(0,0)$, *т. е.* $\Psi(\psi)=O(\psi)$ *при* $\psi\to 0$.

Тогда задача (4.2), (4.3) *имеет в области* G *решение* $w(x,\psi)$ *такое, что* $w(x,\psi)$ *ограничено в* $\overline{G}$, $w(x,\psi)>0$ *при* $\psi>0$ *и*

$$\Big|\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big|\leqslant M_{14}, \quad \Big|\sqrt{w+\Lambda^2 W(x)}\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2}\Big|\leqslant M_{14}, \quad (x,\psi)\in G,$$

$$\Big|\frac{\partial w}{\partial x}\Big|\leqslant M_{14}\psi^{1-\beta}, \quad \frac{\partial w}{\partial\psi}\geqslant M_{15}>0, \quad 0\leqslant\psi\leqslant\psi_2, \quad 0<\beta<\frac{1}{2},$$

где положительные постоянные M_{14}, M_{15}, ψ_2 *зависят от заданных функций* $U(x)$, $u_0(y)$, $v_0(x)$ *и значения* X. *Если* $dU/dx\geqslant 0$ *и* $v_0(x)\leqslant 0$ *либо* $dU/dx>0$, *то решение* $w(x,\psi)$ *с указанными свойствами существует в* G *при любом* $X>0$.

Теорема 4.2. *Пусть*

1) $\overline{w}_0(\psi)>\Lambda^2 W(0)$ *при* $\psi>0$,

2) $\overline{w}_0(0)=\Lambda^2 W(0)$, $\overline{w}_0'(0)=2\sigma/\mu X>0$, $\overline{w}_0(\psi)\to W(0)\neq 0$ *при* $\psi\to\infty$,

3) dW/dx, $v_0(x)$ *непрерывно дифференцируемы при* $0\leqslant x\leqslant X$,

4) $\overline{w}_0(\psi)$, $\overline{w}_0'(\psi)$, $\overline{w}_0''(\psi)$ *ограничены при* $0\leqslant\psi<\infty$ *и удовлетворяют условию Гёльдера.*

Предполагается, что выполнено условие согласования в точке $(0,0)$

$$\nu\sqrt{\overline{w}_0(\psi)}g\Big[1+\frac{3}{4}kg\Big(\frac{d\overline{w}_0(\psi)}{d\psi}g\Big)^2g\Big]\frac{d^2\overline{w}_0(\psi)}{d\psi^2}-v_0(0)\frac{d\overline{w}_0(\psi)}{d\psi}+(1-\Lambda^2)\frac{dW(0)}{dx}=O(\psi),\quad \psi\to 0.$$

Тогда задача (3.2), (3.3) *имеет в области* G *решение* $\overline{w}(x,\psi)$ *такое, что* $\overline{w}(x,\psi)$ *ограничено в* $\overline{G}$, $\overline{w}(x,\psi)>0$ *при* $\psi>0$ *и*

$$\Big|\frac{\partial\overline{w}}{\partial\psi}\Big|\leqslant M_{16},\quad \Big|\sqrt{\overline{w}}\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial\psi^2}\Big|\leqslant M_{16},\quad (x,\psi)\in G,$$

$$\Big|\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}\Big|\leqslant M_{16}\psi^{1-\beta},\quad \frac{\partial\overline{w}}{\partial\psi}\geqslant M_{17}>0,\quad 0\leqslant\psi\leqslant\psi_3,\quad 0<\beta<\frac{1}{2},$$

где положительные постоянные M_{16}, M_{17} *и* ψ_3 *зависят от заданных функций* $U(x)$, $u_0(y)$, $v_0(x)$ *и значения* X. *Если* $dU/dx\geqslant 0$ *и* $v_0(x)\leqslant 0$ *либо* $dU/dx>0$, *то решение* $\overline{w}(x,\psi)$ *с указанными свойствами существует в* G *при любом* $X>0$.

5. Вспомогательные леммы

Доказательство существования решения задачи (4.2), (4.3) проводится следующим образом. Мы получаем решение $w(x,\psi)$ задачи (4.2), (4.3) как предел при $\varepsilon\to 0$ последовательности решений $w_\varepsilon(x,\psi)$ уравнения (4.2) с граничными условиями

$$\begin{gathered}w_\varepsilon(x,0)=w_0(\varepsilon)\exp\Big(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\Big),\quad w_\varepsilon(0,\psi)=w_0(\varepsilon+\psi),\\ w_\varepsilon\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}\Big)=w_0\Big(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon}\Big)\exp\Big(\frac{\mu(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon})x}{w_0(\varepsilon+\frac{1}{\varepsilon})}\Big)\end{gathered}\tag{5.1}$$

в области $G_\varepsilon=\{0<x<X,0<\psi<1/\varepsilon\}$ с границей

$$\Gamma_\varepsilon=\{0<x<X,\psi=0\}\bigcup\Big\{x=0,0<\psi<\frac{1}{\varepsilon}\Big\}\bigcup\Big\{0<x<X,\psi=\frac{1}{\varepsilon}\Big\}.$$

Лемма 5.1. *Если задача* (4.2), (5.1) *имеет положительное решение* $w_\varepsilon(x,\psi)$ *в области* G_ε, *то существуют* $X>0$ *и* $\varepsilon_0>0$ *такие, что для любого* $\varepsilon<\varepsilon_0$ *в области* G_ε *выполнено неравенство*

$$w_\varepsilon(x,\psi)\geqslant w_\varepsilon(x,0)+f(\psi)(1+e^{-\alpha x}),\tag{5.2}$$

где $\alpha>0$, *а функция* $f(\psi)$ *такова, что* $f(\psi)=A_1\psi^{4/3}+A_2\psi$ *при* $\psi\leqslant 1$ *и* $f(1)\leqslant f(\psi)\leqslant A_3$ *при* $\psi>1$; *при этом* $|f'(\psi)|\leqslant A_4$, $|f''(\psi)|\leqslant A_5$ *при* $\psi>1$. *Здесь* A_i — *положительные постоянные.*

Если $U'(x)\geqslant 0$ *и* $v_0(x)\leqslant 0$, *то в области* G_ε *верна априорная оценка*

$$w_\varepsilon(x,\psi)\geqslant w_\varepsilon(x,0)+f(\psi)e^{-\alpha x}\tag{5.3}$$

при любом $X>0$ *и достаточно малом* $\varepsilon_0>0$.

Если $U'(x)\geqslant\beta_0>0$, *то в области* G_ε *имеет место неравенство*

$$w_\varepsilon(x,\psi)\geqslant w_\varepsilon(x,0)+f(\psi).\tag{5.4}$$

Доказательство. Пусть

$$\Phi_\varepsilon(x,\psi)=w_\varepsilon(x,0)+f(\psi)(1+e^{-\alpha x}),\quad \alpha=\mathrm{const}>0.$$

Тогда в силу регуляризованных условий (5.1)

$$\begin{aligned}&\Phi_\varepsilon(x,0)=w_\varepsilon(x,0),\\ &\Phi_\varepsilon\Big(x,\frac{1}{\varepsilon}\Big)=w_\varepsilon(x,0)+f\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)(1+e^{-\alpha x})=w_0(\varepsilon)\exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\Big)\\ &\quad+f\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)(1+e^{-\alpha x})\leqslant w_0(\varepsilon)\exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\Big)+2A_3.\end{aligned}$$

При достаточно малом ε и некоторых постоянных C_1 и C_2 справедливо неравенство
$$\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)} \leqslant \frac{C_1\varepsilon x}{C_2\varepsilon} \leqslant Cx, \tag{5.5}$$
из которого следует оценка
$$\Phi_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big) \leqslant C_3\varepsilon e^{Cx} + 2A_3 \leqslant C_3\varepsilon e^{CX} + 2A_3,$$
где C_3 — постоянная. С другой стороны,
$$w_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big) = w_0\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon + 1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon + 1/\varepsilon)}\Big) \geqslant w_0\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big)$$
при достаточно малом значении ε. Следовательно, можно выбрать значения параметров ε и A_3 так, чтобы выполнялась цепочка неравенств
$$\Phi_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big) < w_0\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big) \leqslant w_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big). \tag{5.6}$$
Далее,
$$\Phi_\varepsilon(0,\psi) = w_0(\varepsilon) + 2f(\varepsilon) = w_0(\varepsilon) + 2A_1\varepsilon^{\frac{4}{3}} + 2A_2\varepsilon < w_0(\varepsilon + \psi) \tag{5.7}$$
при достаточно малых значениях параметров A_1, A_2, так как $w_0(\psi)$ возрастает при малых значениях ψ. Поскольку $w_0(\psi) \to (1-\Lambda^2)W(0) > 0$, при больших ψ и малых ε, имеет место неравенство $w_0(\varepsilon+\psi) > w_0(\varepsilon)$.

Введем оператор
$$L(w) \equiv \nu\sqrt{w + \Lambda^2 W(x)}g\Big[1 + \frac{3}{4}kg\Big(\frac{\partial w}{\partial \psi}g\Big)^2 g\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial w}{\partial \psi}$$
и рассмотрим выражение
$$L(\Phi_\varepsilon) = \nu\sqrt{\Phi_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\Big(1 + \frac{3}{4}k(f'(\psi)(1+e^{-\alpha x}))^2\Big)f''(\psi)(1+e^{-\alpha x})$$
$$-\frac{\partial w_\varepsilon(x,0)}{\partial x} + \alpha f(\psi)e^{-\alpha x} - v_0(x)f'(\psi)(1+e^{-\alpha x}).$$
Тогда при $\psi \leqslant 1$ получим
$$L(\Phi_\varepsilon) = \nu\sqrt{w_\varepsilon(x,0) + (A_1\psi^{\frac{4}{3}} + A_2\psi)(1+e^{-\alpha x}) + \Lambda^2 W(x)}$$
$$\times\left(1 + \frac{3}{4}kg\Big(\Big(\frac{4}{3}A_1\psi^{\frac{1}{3}} + A_2\Big)(1+e^{-\alpha x})g\Big)^2\right)\frac{4}{9}A_1\psi^{-\frac{2}{3}}(1+e^{-\alpha x})$$
$$-\Psi(\varepsilon)\exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\Big) + \alpha(A_1\psi^{\frac{4}{3}} + A_2\psi)e^{-\alpha x} - v_0(x)\Big(\frac{4}{3}A_1\psi^{\frac{1}{3}} + A_2\Big)(1+e^{-\alpha x})$$
$$\geqslant \nu\frac{4}{9}\sqrt{A_2\psi}A_1\psi^{-\frac{2}{3}} - \Psi(\varepsilon)\exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\Big) + \alpha(A_1\psi^{\frac{4}{3}} + A_2\psi)e^{-\alpha x}$$
$$-v_0(x)\Big(\frac{4}{3}A_1\psi^{\frac{1}{3}} + A_2\Big)(1+e^{-\alpha x}).$$
В силу оценки (5.5) из последнего соотношения следует
$$L(\Phi_\varepsilon) \geqslant \nu\frac{4}{9}\sqrt{A_2}A_1\psi^{-1/6} - h(x),$$
где
$$h(x) = |\Psi(\varepsilon)|e^{Cx} - 2|v_0(x)|\Big(\frac{4}{3}A_1 + A_2\Big).$$

При $0 < x < X$ имеем
$$h(x) + (1-\Lambda^2)\Big|\frac{dW}{dx}\Big| \leqslant C_4,$$

где C_4 — постоянная. Поскольку $\psi^{-1/6} \to +\infty$ при $\psi \to 0$, существует $\psi_1 > 0$ такое, что при всех $\psi \in (0, \psi_1)$

$$\nu \frac{4}{9} \sqrt{A_2} A_1 \psi^{-\frac{1}{6}} > h(x) + (1 - \Lambda^2) \Big| \frac{dW}{dx} \Big|.$$

Следовательно, при всех $\psi \in (0, \psi_1)$

$$L(\Phi_\varepsilon) \geqslant (1 - \Lambda^2) \Big| \frac{dW}{dx} \Big|$$

При $\psi \geqslant \psi_1$ функция $f(\psi)$ такова, что $f(\psi) \geqslant \delta > 0$, а значение X выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $e^{-\alpha X} \geqslant 1/2$. Тогда

$$L(\Phi_\varepsilon) \geqslant \nu \sqrt{\Phi_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} f''(\psi)(1 + e^{-\alpha x}) - \Psi(\varepsilon) \exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon) x}{w_0(\varepsilon)}\Big) + \frac{\alpha\delta}{2}$$

$$- v_0(x) f'(\psi)(1 + e^{-\alpha x}) \geqslant \frac{\alpha\delta}{2} - C_5 \geqslant (1 - \Lambda^2) \Big| \frac{dW}{dx} \Big|$$

при достаточно больших значениях α и некоторой постоянной C_5. Поскольку

$$L(w_\varepsilon) - L(\Phi_\varepsilon) \leqslant -(1 - \Lambda^2) \frac{dW}{dx} - (1 - \Lambda^2) \Big| \frac{dW}{dx} \Big| \leqslant 0,$$

а на границе Γ_ε в силу оценок (5.6), (5.7) имеем неравенство

$$w_\varepsilon(x, \psi) - \Phi_\varepsilon(x, \psi) \geqslant 0,$$

по принципу максимума $w_\varepsilon(x, \psi) - \Phi_\varepsilon(x, \psi) \geqslant 0$ всюду в $\overline{G}_\varepsilon$.

Для доказательства оценки (5.3) значения постоянных A_1, A_2, A_3 выбираются так, чтобы при $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ на границе Γ_ε выполнялось неравенство

$$\Phi^1_\varepsilon(x, \psi) \equiv w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi) e^{-\alpha x} \leqslant w_\varepsilon(x, \psi).$$

В области G_ε рассмотрим выражение

$$L(\Phi^1_\varepsilon) = e^{-\alpha x} g\big(\nu \sqrt{\Phi^1_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \Big(1 + \frac{3}{4} k (f'(\psi) e^{-\alpha x})^2\Big) f''(\psi)$$

$$+ \alpha f(\psi) - v_0(x) f'(\psi) g\big) - \Psi(\varepsilon) \exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon) x}{w_0(\varepsilon)}\Big).$$

По условию теоремы 2.1 $v_0(x) \leqslant 0$. Поэтому сомножитель при $e^{-\alpha x}$ в правой части последнего выражения положителен при достаточно больших значениях α. Следовательно, $L(\Phi^1_\varepsilon) \geqslant 0$ при малых ε. Отсюда следует

$$L(w_\varepsilon) - L(\Phi^1_\varepsilon) \leqslant -(1 - \Lambda^2) \frac{dW}{dx} \leqslant 0.$$

Поскольку $w_\varepsilon - \Phi^1_\varepsilon \geqslant 0$ на границе Γ_ε, согласно принципу максимума справедливо неравенство $w_\varepsilon - \Phi^1_\varepsilon \geqslant 0$ всюду в $\overline{G}_\varepsilon$.

Если $U'(x) \geqslant -\beta_0 > 0$, то постоянные $A_1, \ldots, A_5$ и ε_0 выбираются так, чтобы при $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполнялись неравенства $L(w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)) \geqslant -\beta_0$ в G_ε и $w_\varepsilon(x, \psi) \geqslant w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)$ на Γ_ε. Тогда $L(w_\varepsilon) - L(w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)) \leqslant 0$. Следовательно, по принципу максимума в области G_ε справедлива оценка (5.4). □

Лемма 5.2 ([**11**, лемма 2])**.** *Пусть $w_\varepsilon(x, \psi)$ — решение задачи* (4.2), (5.1)*. Тогда существуют положительные, постоянные M_4, M_5, M_6, не зависящие от ε и такие, что*

$$0 < w_\varepsilon(x, \psi) < M_4, \tag{5.8}$$

$$M_5 < \frac{\partial w}{\partial \psi}\Big|_{\psi=0} < M_6. \tag{5.9}$$

Лемма 5.3. *Существует постоянная M_7 такая, что*

$$\Big| \frac{\partial w}{\partial \psi} \Big| \leqslant M_7, \quad (x, \psi) \in G_\varepsilon.$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (4.2) по переменной ψ и положим $z_\varepsilon = \partial w_\varepsilon/\partial\psi$. Имеем

$$\nu\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\ \Big(1 + \frac{3}{4}kz_\varepsilon^2\Big)\frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial\psi^2} + \frac{3}{2}\nu k\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\ z_\varepsilon\Big(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial\psi}\Big)^2$$
$$+ \frac{\nu}{2\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}}\ \Big(1 + \frac{3}{4}kz_\varepsilon^2\Big)z_\varepsilon\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial\psi} - \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial\psi} = 0. \tag{5.10}$$

Решение z_ε уравнения (5.10) ограничено на Γ_ε. Действительно, при $\psi = 0$ функция z_ε ограничена равномерно по ε в силу оценок (5.9). При $x = 0$ функция

$$z_\varepsilon(0,\psi) = \partial w_0(\psi + \varepsilon)/\partial\psi$$

ограничена равномерно по ε согласно условиям на $w_0(\psi)$. Для доказательства ограниченности z_ε при $\psi = 1/\varepsilon$ рассматривается оператор

$$L_1(w) = \nu\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\ g\Big[1 + \frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w}{\partial\psi}\Big)^2 g\Big]\frac{\partial^2 w}{\partial\psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - v_0(x)\frac{\partial w}{\partial\psi}.$$

Пусть

$$\Phi_1(x,\psi) = w_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big) + A_6\Big(1 - \exp\Big(A_7\psi - \frac{A_7}{\varepsilon}\Big)\Big),$$

где A_6, A_7 — некоторые положительные постоянные, ε — достаточно малый параметр, $1/\varepsilon - 1 \leqslant \psi \leqslant 1/\varepsilon$. Тогда

$$L_1(\Phi_1) = \nu\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\ g\Big(1 + \frac{3}{4}k\Big(A_6A_7e^{A_7(\psi - 1/\varepsilon)}\Big)^2 g\Big)(-A_6A_7^2e^{A_7(\psi-1/\varepsilon)})$$
$$- s\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\exp g\Big(\frac{\Psi(\varepsilon + 1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon + 1/\varepsilon)}g\Big) + v_0(x)A_6A_7e^{A_7(\psi - \frac{1}{\varepsilon})} < -(1-\Lambda^2)\Big|\frac{dW}{dx}\Big|$$

при достаточно больших значениях A_6 и A_7. Значит

$$L_1(w_\varepsilon) - L_1(\Phi_1) > -(1-\Lambda^2)\frac{dW}{dx} + (1-\Lambda^2)\Big|\frac{dW}{dx}\Big| \geqslant 0.$$

При необходимости можно увеличить значение A_6 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Phi_1(0,\psi) = w_0\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big) + A_6(1 - e^{A_7(\psi - \frac{1}{\varepsilon})}) \geqslant w_\varepsilon(0,\psi).$$

Это можно сделать в силу оценок (5.8), поскольку $w_\varepsilon(0,\psi) \leqslant M_4$.

Далее,

$$\Phi_1\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big) = w_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big),$$
$$\Phi_1\Big(x, \frac{1}{\varepsilon} - 1\Big) = w_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon}\Big) + A_6\Big(1 - e^{-A_7}\Big) \geqslant M_4 \geqslant w_\varepsilon\Big(x, \frac{1}{\varepsilon} - 1\Big)$$

при достаточно больших значениях A_6. Отсюда и из принципа максимума следует, что $w_\varepsilon(x,\psi) \leqslant \Phi_1(x,\psi)$ при $1/\varepsilon - 1 \leqslant \psi \leqslant 1/\varepsilon$. Следовательно,

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\Big|_{\psi=\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\psi\to 1/\varepsilon - 0}\frac{w_\varepsilon(x,\psi) - w_\varepsilon(x,\frac{1}{\varepsilon})}{\psi - \frac{1}{\varepsilon}} \geqslant \lim_{\psi\to 1/\varepsilon - 0}\frac{A_6(1 - e^{A_7\psi - \frac{A_7}{\varepsilon}})}{\psi - \frac{1}{\varepsilon}} = -A_6A_7.$$

Аналогичным образом устанавливается, что при достаточно больших значениях постоянных A_8 и A_9 имеет место оценка

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\Big|_{\psi=\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant A_8A_9.$$

Итак, ограниченность функции $\Big|\dfrac{\partial w_\varepsilon}{\partial\psi}\Big|$ на Γ_ε доказана. Отсюда и из принципа максимума следует, что $|z_\varepsilon|$ ограничено равномерно по ε во всей области G_ε. $\square$

Лемма 5.4. *Существуют положительные постоянные M_8 и M_9, не зависящие от ε и такие, что в области G_ε выполнены оценки*

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \geqslant -M_8, \quad \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\ \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} \geqslant -M_9.$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (4.2) по переменной x в области G_ε, затем положим $r_\varepsilon = \partial w_\varepsilon/\partial x$ и примем во внимание, что

$$\nu g\Big[1 + \frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)^2 g\Big]\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} = \frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}}\ \Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} + v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - (1-\Lambda^2)\frac{dW}{dx}\Big).$$

Имеем

$$\nu\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\ \Big[1 + \frac{3}{4}k\Big(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big)^2\Big]\frac{\partial^2 r_\varepsilon}{\partial \psi^2} + \Big(\frac{3}{2}\nu k\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\ \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - v_0(x)\Big)\frac{\partial r_\varepsilon}{\partial \psi}$$
$$+ \frac{1}{2(w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x))}\Big(r_\varepsilon + \Lambda^2\frac{dW}{dx}\Big)\Big(r + v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - (1-\Lambda^2)\frac{dW}{dx}\Big)$$
$$- \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x} - \frac{dv_0}{dx}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} + (1-\Lambda^2)\frac{d^2W}{dx^2} = 0.$$

Пусть (x_0, ψ_0) — точка минимума функции r_ε в области G_ε. Тогда в точке (x_0, ψ_0)

$$r_\varepsilon < 0, \quad \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial^2 r_\varepsilon}{\partial \psi^2} \geqslant 0.$$

Следовательно, в точке (x_0, ψ_0) имеет место неравенство

$$r_\varepsilon^2 + v_0(x)\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}r_\varepsilon + (2\Lambda^2 - 1)\frac{dW}{dx}r_\varepsilon \leqslant 2(w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x))\Big[\frac{dv_0}{dx}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - (1-\Lambda^2)\frac{d^2W}{dx^2}\Big]$$
$$- \Lambda^2 v_0(x)\frac{dW}{dx}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} + \Lambda^2(1-\Lambda^2)\Big(\frac{dW}{dx}\Big)^2.$$

Согласно леммам 5.2 и 5.3 функции w_ε и $\partial w_\varepsilon/\partial\psi$ ограничены в области G_ε. Тогда из последнего неравенства получаем, что $r_\varepsilon \geqslant -M_8$ во всех внутренних точках области G_ε.

При достаточно малых значениях ε, учитывая (5.1) и (5.5), получаем оценки на границе Γ_ε

$$\frac{\partial w_\varepsilon(x,0)}{\partial x} = \Psi(\varepsilon)\exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\Big) \geqslant -M_8,$$
$$\frac{\partial w_\varepsilon(x,\frac{1}{\varepsilon})}{\partial x} = s\Big(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\Big)\exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon + 1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon + 1/\varepsilon)}\Big) \geqslant -M_8,$$
$$\frac{\partial w_\varepsilon(0,\psi)}{\partial x} = \Psi(\varepsilon + \psi) \geqslant -M_8.$$

Таким образом, оценка $r_\varepsilon = \partial w_\varepsilon/\partial x \geqslant -M_8$ выполняется во всей области G_ε. Учитывая уравнение (4.2), в области G_ε получаем неравенство

$$\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\ \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} \geqslant -M_9.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5.5 ([**11**, лемма 5])**.** *В области G_ε при $\psi \geqslant \psi_* > 0$ решения w_ε задачи* (4.2), (5.1) *имеют производные $\partial w_\varepsilon/\partial\psi$, $\partial^2 w_\varepsilon/\partial\psi^2$, $\partial w_\varepsilon/\partial x$, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем максимум модулей этих производных ограничен постоянной, не зависящей от ε, но зависящей от ψ_*.*

Лемма 5.6. *Для решения задачи* (4.2), (5.1) *в области* G_ε *существуют положительные постоянные* M_{10}, M_{11}, M_{12}, *не зависящие от* ε *и такие, что*

$$\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\,\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} \leqslant M_{10}, \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \leqslant M_{11}, \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \geqslant M_{12}, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant \widetilde{\psi} \tag{5.12}$$

для некоторого $\widetilde{\psi} > 0$.

Доказательство. В силу леммы 5.5 для доказательства леммы 5.6 достаточно показать выполнение оценок (5.11) и (5.12) в области $G_\varepsilon \cap \{\psi \leqslant \widetilde{\psi}\}$ для некоторого $\widetilde{\psi} > 0$.

Установим сначала справедливость неравенства (5.12) при $0 \leqslant \psi \leqslant \widetilde{\psi}$, где $\widetilde{\psi}$ достаточно мало. Имеем

$$\frac{\partial w_\varepsilon(x,\psi)}{\partial \psi} = \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi}\Big|_{\psi=0} + \int\limits_0^\psi \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}\, d\psi.$$

Согласно лемме 5.1 $w_\varepsilon \geqslant A_{10}\psi$ при $\psi \leqslant 1$. Поэтому при $\psi \leqslant \widetilde{\psi}$ и достаточно малом $\widetilde{\psi}$ из лемм 5.2, 5.4 следует

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \geqslant M_5 - \int\limits_0^\psi \frac{M_9}{\sqrt{A_{10}\psi}}\, d\psi \geqslant M_{12}.$$

Докажем теперь неравенства (5.11). Рассмотрим уравнение (5.10), сделаем в нем замену $z_\varepsilon = \varphi(S_\varepsilon)$ и обозначим $\delta = \partial S_\varepsilon/\partial\psi$. Получим уравнение для δ

$$\nu\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\,\Big(1 + \frac{3}{4}k\varphi^2\Big)\Big(\frac{\varphi''}{\varphi'}\delta^2 + \frac{\partial\delta}{\partial\psi}\Big) + \frac{3}{2}\nu k\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\,\varphi\varphi'\delta^2$$
$$+ g\Big[\frac{\nu}{2\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}}\,\Big(1 + \frac{3}{4}k\varphi^2\Big)\varphi - v_0(x)g\Big]\delta - \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial x} = 0.$$

Продифференцируем последнее соотношение по ψ и введем новую функцию $q = \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\,\delta$. Далее, предположим, что положительный максимум функции q принимается во внутренней точке области $G_\varepsilon \cap \{\psi \leqslant \widetilde{\psi}\}$. Тогда имеет место неравенство

$$\frac{\nu q^3}{\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}}\; g\Big[\frac{3k}{2}\Big(2\varphi\varphi'' + \varphi'^2\Big) + \Big(1 + \frac{3}{4}k\varphi^2\Big)\Big(\frac{\varphi''}{\varphi'}\Big)' g\Big]$$
$$+ \frac{q^2}{(w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x))^{\frac{3}{2}}}\, g\Big[-\frac{\nu}{2}\frac{\varphi''}{\varphi'}\varphi\Big(1 + \frac{3}{4}k\varphi^2\Big) + \frac{\nu}{2}\Big(1 + \frac{3}{4}k\varphi^2\Big)\varphi' - \frac{3\nu k}{2}\varphi\varphi' g\Big]$$
$$- (1 - \Lambda^2)\frac{dW}{dx}\frac{q}{(w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x))^{3/2}} \geqslant 0.$$

Положим

$$\varphi(S_\varepsilon) = \frac{M_{12}}{2}(e^{S_\varepsilon} + 1).$$

При таком выборе функции $\varphi(S_\varepsilon)$ из последнего неравенства следует ограниченность функции q в области G_ε при $\psi \leqslant \widetilde{\psi}$.

Оценим теперь функцию q на границе области G_ε при $\psi \leqslant \widetilde{\psi}$. Имеем

$$q = \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\,\frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \psi} = \frac{\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}}{\varphi'(S_\varepsilon)}\,\frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}.$$

При $\psi = \widetilde{\psi}$ производные $\partial^2 w_\varepsilon/\partial\psi^2$ ограничены [**12**, лемма 2.1.7]. Следовательно, производные $\partial^2 w_\varepsilon/\partial\psi^2$ равномерно ограничены по ε и q. Далее, q равномерно по ε ограничена при $x = 0$ и

$\psi = 0$ в силу предположений относительно функций $u_0(y)$, $v_0(x)$ и $U(x)$. Поэтому

$$\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}\ \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} = \varphi'(S_\varepsilon) q \leqslant M_{10}.$$

Отсюда и из уравнения (4.2) вытекает вторая оценка в (5.11). □

Лемма 5.7. *В области G_ε имеет место оценка*

$$\Big| w_\varepsilon^{\beta-1} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \Big| \leqslant M_{13}, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \tag{5.13}$$

где значение постоянной M_{13} не зависит от ε.

Доказательство. Из леммы 5.5 вытекает требуемая оценка при $\psi \geqslant \psi_*$. Поэтому достаточно доказать оценку (5.13) при $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_*$. Положим $w_\varepsilon = \tau^\gamma$, где $\gamma = 1/\beta$, и оценим выражение $|\partial\tau/\partial x|$ для достаточно малого ψ_*. Получим из уравнения (4.2)

$$\nu\sqrt{\tau^\gamma + \Lambda^2 W(x)}\ g\Big[1 + \frac{3}{4}k\gamma^2\tau^{2\gamma-2}\Big(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\Big)^2 g\Big] g\Big[\gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}\Big(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\Big)^2 + \gamma\tau^{\gamma-1}\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2} g\Big]$$

$$- \gamma\tau^{\gamma-1}\frac{\partial\tau}{\partial x} - v_0(x)\gamma\tau^{\gamma-1}\frac{\partial\tau}{\partial\psi} + (1-\Lambda^2)\frac{dW}{dx} = 0.$$

Продифференцируем уравнение по x и положим $\omega = \partial\tau/\partial x$. Имеем

$$\frac{\nu}{\sqrt{\tau^\gamma + \Lambda^2 W(x)}}\ g\Big(\gamma\tau^{\gamma-1}\omega + \Lambda^2\frac{dW}{dx} g\Big) g\Big[1 + \frac{3}{4}k\gamma^2\tau^{2\gamma-2}\Big(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\Big)^2 g\Big]$$

$$g\Big[\gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}\Big(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\Big)^2 + \gamma\tau^{\gamma-1}\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2} g\Big]$$

$$+ \nu\sqrt{\tau^\gamma + \Lambda^2 W(x)}\ g\Big[\frac{3}{4}k\gamma^2\Big((2\gamma-2)\tau^{2\gamma-3}\omega\Big(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\Big)^2 + 2\tau^{2\gamma-2}\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\frac{\partial\omega}{\partial\psi}\Big) g\Big]$$

$$\times g\Big[\gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}\Big(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\Big)^2 + \gamma\tau^{\gamma-1}\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2} g\Big]$$

$$+ \nu\sqrt{\tau^\gamma + \Lambda^2 W(x)}\ g\Big[1 + \frac{3}{4}k\gamma^2\tau^{2\gamma-2}\Big(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\Big)^2 g\Big]$$

$$\times g\Big[\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)\tau^{\gamma-3}\omega\Big(\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\Big)^2 + 2\gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}\frac{\partial\tau}{\partial\psi}\frac{\partial\omega}{\partial\psi}$$

$$+ \gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}\omega\frac{\partial^2\tau}{\partial\psi^2} + \gamma\tau^{\gamma-1}\frac{\partial^2\omega}{\partial\psi^2} g\Big]$$

$$- \gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}\omega^2 - \gamma\tau^{\gamma-1}\frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{dv_0}{dx}\gamma\tau^{\gamma-1}\frac{\partial\tau}{\partial\psi}$$

$$- v_0(x)\gamma(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}\omega\frac{\partial\tau}{\partial\psi} - v_0(x)\gamma\tau^{\gamma-1}\frac{\partial\omega}{\partial\psi} + (1-\Lambda^2)\frac{d^2W}{dx^2} = 0.$$

Из лемм 5.4, 5.6 вытекает ограниченность коэффициента при ω в последнем уравнении при $0 \leqslant \psi \leqslant \psi_*$ для достаточно малого ψ_*. Поэтому если $|\omega|$ достигает наименьшего значения внутри области $G_\varepsilon \cap \{\psi \leqslant \psi_*\}$, то $|\omega|$ равномерно ограничен внутри области $G_\varepsilon \cap \{\psi \leqslant \psi_*\}$.

Если $|\omega|$ принимает наибольшее значение при $\psi = 0$, то его равномерная по ε оценка следует из равенства

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}\Big|_{\psi=0} = \frac{1}{\gamma} w_\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}-1}\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} g\Big[w_0(\varepsilon)\exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\Big) g\Big]^{1/\gamma-1}\Psi(\varepsilon)\exp\Big(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\Big).$$

Последнее выражение равномерно ограничено по ε в силу наложенных требований на функции $\Psi(\psi)$ и $w_0(\psi)$.

Если $|\omega|$ достигает своего наибольшего значения при $x = 0$, то оно не превосходит ограниченного равномерно по ε выражения

$$\max\Big|\frac{\partial\tau}{\partial x}\Big|g|_{x=0} = \max\frac{1}{\gamma}[w_0(\varepsilon+\psi)]^{\frac{1}{\gamma}-1}\Big|\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\Big| = \max\Big|\frac{1}{\gamma}w_0^{\frac{1}{\gamma}-1}(\varepsilon+\psi)\Psi(\varepsilon+\psi)\Big|.$$

При $\psi = \psi_*$ оценка для $|\omega|$ уже установлена в лемме 5.5. □

6. Доказательство теорем 4.1 и 4.2

Из лемм 5.1—5.7 следует, что из последовательности решений $w_\varepsilon(x,\psi)$ задачи (4.2), (5.1) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $\psi \leqslant N$ в области G и такую, что ее частные производные $\partial w_\varepsilon/\partial x$, $\partial w_\varepsilon/\partial\psi$, $\partial^2 w_\varepsilon/\partial\psi^2$ сходятся равномерно при $1/N \leqslant \psi \leqslant N$, где $N > 1$ — любое заданное число. Предельная функция этой подпоследовательности $w(x,\psi)$ является решением задачи (4.2), (4.3) в области G. Для частных производных функции $w(x,\psi)$ справедливы неравенства, установленные в леммах 5.1—5.7. Таким образом, теорема 4.1 доказана.

Возвращаясь к исходным переменным в (4.1), из теоремы 4.1 получаем доказательство теоремы 4.2) о существовании решения $\overline{w}(x,\psi)$ задачи (3.2), (3.3).

7. Единственность решения задачи в переменных Мизеса

Следующая теорема устанавливает единственность решения задачи (3.2), (3.3).

Теорема 7.1 ([**11**, теорема 5]). *Решение $\overline{w}(x,\psi)$ задачи (3.2), (3.3), удовлетворяющее условиям теоремы 4.2, а также с некоторыми постоянными k_1, k_2, k_3, ψ_4 неравенствам $k_1\psi \leqslant \overline{w}(x,\psi) \leqslant k_2\psi$ при $\psi \leqslant \psi_4$, $\sqrt{\overline{w}}\ \partial^2\overline{w}/\partial\psi^2 \leqslant k_3$, является единственным в $\overline{G}$.*

8. Доказательство основного результата

Из существования решения $\overline{w}(x,\psi)$ задачи (3.2), (3.3) в области G, удовлетворяющего условиям теоремы 4.2, вытекает существование решения $u(x,y)$, $v(x,y)$ задачи (2.1), (2.2) в области D, удовлетворяющего условиям теоремы 2.1. Доказательство см. в [**11**, п. 1.5].

9. Скорость стекания пленки в поле сил тяжести

Найдем скорость $u(x,y)$ стекания тонкого слоя вязкой жидкости с твердой вертикальной стенки при условиях (2.2) в поле сил тяжести с ускорением свободного падения g. Уравнение (2.1) в этом случае принимает вид (обоснование для пограничного слоя в поле силы тяжести в случае линейной вязкости см. в [**13**])

$$\nu g\Big[1 + 3kg\Big(\frac{\partial u}{\partial y}g\Big)^2 g\Big]\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g = 0. \tag{9.1}$$

Запишем уравнение (9.1) в эквивалентном виде

$$\nu\frac{\partial}{\partial y}g\Big[\frac{\partial u}{\partial y} + kg\Big(\frac{\partial u}{\partial y}g\Big)^3 g\Big] + g = 0$$

и проинтегрируем его по переменной y. Получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} + kg\Big(\frac{\partial u}{\partial y}g\Big)^3 = -\frac{g}{\nu}y + \widetilde{C}_1, \tag{9.2}$$

где $\widetilde{C}_1$ — постоянная интегрирования, которая находится из (9.2) и граничного условия на функцию $\partial u/\partial y$ при $y = 0$ в (2.2). Имеем

$$\widetilde{C}_1 = \frac{\sigma}{\mu X}g\Big[1 + kg\Big(\frac{\sigma}{\mu X}g\Big)^2 g\Big].$$

Ввиду найденной постоянной $\widetilde{C}_1$ уравнение (9.2) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} + kg\Big(\frac{\partial u}{\partial y}g\Big)^3 = -\frac{g}{\nu}y + \frac{\sigma}{\mu X}g\Big[1 + kg\Big(\frac{\sigma}{\mu X}g\Big)^2 g\Big].$$

В последнем уравнении положим $\lambda = \partial u/\partial y$, $F = -g/\nu y + \sigma/\mu X[1 + k(\sigma/\mu X)^2]$ и получим кубическое уравнение относительно λ

$$\lambda^3 + \frac{1}{k}\lambda - \frac{F}{k} = 0. \tag{9.3}$$

Для решения уравнения (9.3) воспользуемся методом Кардано.

Найдем дискриминант уравнения (9.3)

$$\mathcal{D} = \frac{F^2}{4k^2} + \frac{1}{27k^3} = \frac{27kF^2 + 4}{108k^3}.$$

Поскольку $\mathcal{D} > 0$, уравнение (9.3) имеет один вещественный корень

$$\lambda_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt[3]{\frac{F}{2k} + \sqrt{\mathcal{D}}} + \sqrt[3]{\frac{F}{2k} - \sqrt{\mathcal{D}}}.$$

Интегрируя последнее равенство по переменной y, получаем

$$u(x,y) = \frac{-\nu}{g\sqrt[3]{12^5}\sqrt[3]{k^4}}\ g\Big(\frac{kT_+^2 - 24}{\sqrt[3]{T_+^2}} + \frac{kT_-^2 - 24}{\sqrt[3]{T_-^2}}g\Big) + \widetilde{C}_2, \tag{9.4}$$

где $\widetilde{C}_2$ — постоянная интегрирования, а выражения $T_\pm$ имеют вид

$$T_\pm = \pm\sqrt{\frac{3}{k}}\sqrt{\frac{27kg^2y^2}{\nu^2} - \frac{54kg\sigma y}{\nu\mu X}g\Big(1 + k\Big(\frac{\sigma}{\mu X}\Big)^2 g\Big) + \frac{27k\sigma^2}{(\mu X)^2}g\Big(1 + k\Big(\frac{\sigma}{\mu X}\Big)^2 g\Big)^2 + 4}$$
$$- \frac{9gy}{\nu} + \frac{9\sigma}{\mu X}g\Big(1 + k\Big(\frac{\sigma}{\mu X}\Big)^2 g\Big).$$

Постоянная $\widetilde{C}_2$ находится из (9.4) и условия на функцию $u(x,y)$ при $y = 0$ в (2.2). Имеем

$$\widetilde{C}_2 = \Lambda U(x) + \frac{\nu}{g\sqrt[3]{12^5}\sqrt[3]{k^4}}g\left(\frac{kT_{0+}^2 - 24}{\sqrt[3]{T_{0+}^2}} + \frac{kT_{0-}^2 - 24}{\sqrt[3]{T_{0-}^2}}g\right),$$

где выражения $T_{0\pm}$ принимают вид

$$T_{0\pm} = T_\pm|_{y=0} = \pm\sqrt{\frac{3}{k}g\Big[\frac{27k\sigma^2}{(\mu X)^2}g\Big(1 + k\Big(\frac{\sigma}{\mu X}\Big)^2 g\Big)^2 + 4g\Big]} + \frac{9\sigma}{\mu X}g\Big(1 + k\Big(\frac{\sigma}{\mu X}\Big)^2 g\Big).$$

Таким образом, учитывая заданные условия на функции $u(x,y)$ и $\partial u/\partial y$ при $y = 0$, получаем аналитический вид скорости стекания вязкой пленки с вертикальной стенки под действием силы тяжести

$$u(x,y) = -\frac{\nu}{g\sqrt[3]{12^5}\sqrt[3]{k^4}}g\left(\frac{kT_+^2 - 24}{\sqrt[3]{T_+^2}} + \frac{kT_-^2 - 24}{\sqrt[3]{T_-^2}}g\right)$$
$$+ \frac{\nu}{g\sqrt[3]{12^5}\sqrt[3]{k^4}}g\left(\frac{kT_{0+}^2 - 24}{\sqrt[3]{T_{0+}^2}} + \frac{kT_{0-}^2 - 24}{\sqrt[3]{T_{0-}^2}}g\right) + \Lambda U(x).$$

Литература

1. Е. С. Барановский, М. А. Артемов, “О стационарном течении жидкостей второго порядка в канале”, *Вестн. СПбУ, Прикл. мат. информ. процессы упр.* **13**, No. 4, 342–353 (2017).
2. M. Bahrami, A. Tamayol, P. Taheri, “Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section”, *J. Fluids Engng.* **131**, 031201-1–031201-8 (2009).
3. K. Stamatakis, C. Tien, “Cake formation and growth in cake filtration”, *Chem. Engng. Sci.* **46**, No. 8, 1917–1933 (1991).

4. В. В. Шелухин, У. А. Христенко, “Об одном условии проскальзывания для уравнений вязкой жидкости”, *Прикл. мех. тех. физ.* **54**, No. 5, 101–109 (2013).
5. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М. (1970).
6. В. Н. Самохин, Г. М. Фадеева, Г. А. Чечкин, “Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье — Стокса”, *Тр. семин. им. И. Г. Петровского* **28**, 329–361 (2011).
7. М. А. Кисатов, “Система уравнений пограничного слоя Марангони в среде с реологическим законом О. А. Ладыженской”, *Докл. РАН, Мат. информ. процессы упр.* **498**, 41-44 (2021).
8. М. А. Кисатов, В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин, “О решениях уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя с инъекцией среды с реологическим законом Ладыженской” *Пробл. мат. анал.* **113**, 61–80 (20222).
9. Р. Р. Булатова, В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин, “Уравнения симметрического МГД-пограничного слоя вязкой жидкости с реологическим законом О.А. Ладыженской”, *Тр. семин. им. И. Г. Петровского* **32**, 72–90 (2019).
10. R. R. Bulatova, G. A. Chechkin, T. P. Chechkina, and V. N. Samokhin, “On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non–Newtonian MHD medium,” *C. R. Méc., Acad. Sci. Paris* **346**, No 9, 807–814 (2018).
11. В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин, “Неклассические задачи математической теории гидродинамического пограничного слоя”, *Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1 79*, No 1, 11–20 (2024).
12. О. А. Олейник, В. Н. Самохин, *Математические методы в теории пограничного слоя*, Наука, М. (1997).
13. В. Г. Левич, *Физико-химическая гидродинамика*, Физматлит М. (1959).

Статья поступила в редакцию 22 сентября 2024 г.

