

А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННОЙ С ЧИСЛОМ e

Предложены новые двусторонние оценки числа e с точными константами. Миноранты и мажоранты в оценках имеют формат цепных дробей. Получены новые неравенства в задаче о рациональных приближениях числа e и выдвинута гипотеза о справедливости целой серии подобных неравенств. Обсуждается связь с известными результатами.

1. Постановка задачи и основной результат

В статьях авторов [1, 2], посвященных специальным аспектам задачи о рациональной аппроксимации числа e , естественным образом возникла и исследовалась функция

$$H(x) \equiv 1 - e^{-1}(1+x)^{1/x}, \quad x \in (-1, +\infty). \quad (1.1)$$

Изучение свойств некоторых близких по структуре функций способствовало продвижению в решении одной трудной проблемы из теории конечных разностей [3].

Аналитическая функция (1.1) допускает степенное разложение

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n x^n = \frac{1}{2}x - \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{16}x^3 - \frac{2447}{5760}x^4 + \dots, \quad x \in (-1, 1). \quad (1.2)$$

Доказано [1, предложение 2.1], что все коэффициенты a_n в представлении (1.2) являются положительными рациональными числами, которые можно найти по рекуррентному правилу

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} a_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.3)$$

считая $a_0 = 1$. Числовая последовательность (1.3), строго убывая, стремится к $1/e$. Доказательство этих свойств основано на интегральном представлении

$$a_n = \frac{1}{e} \left(1 + \int_0^1 \varphi(\tau) \tau^n d\tau \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

выведенном в [1, предложение 4.1]. Фигурирующая в формуле (1.4) функция φ имеет вид

$$\varphi(\tau) \equiv \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi\tau)}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^\tau}, \quad \tau \in (0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 1. \quad (1.5)$$

А. Б. Костин: НИЯИ «МИФИ», Москва, Россия, abkostin@yandex.ru.

В. Б. Шерстюков: МГУ и МЦФПМ, Москва, Россия, shervb73@gmail.com.

Английский перевод опубликован в *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 83–92 (2024).

Элементарная функция (1.5) симметрична, непрерывна на $[0, 1]$ и бесконечно дифференцируема на $(0, 1)$. Подробный анализ формулы (1.4) позволяет выявить [2, § 2] асимптотический закон

$$a_n = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} - \frac{\gamma}{n^2} \right) + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\gamma = 0.57721\dots$ — константа Эйлера — Маскерони.

Благодаря (1.4) удается также найти удобное интегральное представление для исходной функции (1.1), которое можно записать в виде

$$H(x) = \frac{x}{e} \left(\frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau \right), \quad x \in (-1, +\infty), \quad (1.6)$$

и легко извлекается из [2, теорема 1].

Основной результат статьи представлен в следующем утверждении.

Теорема 1.1. *Для аналитической функции (1.1) при всех $x \in (0, 1]$ справедливы точные двусторонние оценки*

$$\frac{e-2}{e}x \leq H(x) < \frac{x}{2}, \quad (1.7)$$

$$\frac{x}{2 + \frac{11x}{6}} \equiv \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{11}{6}} < H(x) \leq \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{4-e}{e-2}} \equiv \frac{x}{2 + \frac{(4-e)x}{e-2}}. \quad (1.8)$$

Левое неравенство в (1.7) обращается в равенство в точке $x = 1$, а в правом неравенстве коэффициент $1/2$ при x нельзя заменить меньшим ввиду асимптотики (1.2)

$$H(x) = \frac{x}{2} + O(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Правое неравенство в (1.8) обращается в равенство в точке $x = 1$, а в левом неравенстве число $11/6$ в знаменателе дроби нельзя заменить меньшим ввиду асимптотики

$$H(x) = \frac{x}{2 + \frac{11x}{6}} + O(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

вытекающей из (1.2).

2. Доказательство теоремы 1.1

Для вывода соотношений (1.7), (1.8) потребуются свойства вспомогательных функций

$$\Phi_1(x) \equiv \frac{H(x)}{x} = \frac{1}{x} (1 - e^{-1}(1+x)^{1/x}), \quad \Phi_1(0) = a_1 = \frac{1}{2}, \quad (2.1)$$

$$\Phi_2(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Phi_1(x)} - \frac{1}{\Phi_1(0)} \right) = \frac{1}{H(x)} - \frac{2}{x} = \frac{e}{e - (1+x)^{1/x}} - \frac{2}{x}, \quad \Phi_2(0) = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{11}{6}, \quad (2.2)$$

определенных и непрерывных при всех $x \in (-1, +\infty)$.

Лемма 2.1. *Функция $\Phi_1(x)$ из формулы (2.1) убывает на луче $x > -1$.*

Доказательство. Согласно (1.6)

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{e} \left(\frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau \right), \quad x \in (-1, +\infty). \quad (2.3)$$

Ввиду положительности на $[0, 1]$ функции (1.5) производная

$$\Phi_1'(x) = -\frac{1}{e} \left(\frac{1}{(1+x)^2} + \int_0^1 \frac{\tau^2 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2} d\tau \right) \quad (2.4)$$

отрицательна для всех $x \in (-1, +\infty)$. □

Лемма 2.2. $F(x) \equiv 1/\Phi_1(x)$, где $\Phi_1(x)$ определена в (2.1), возрастает и строго вогнута на луче $x > -1$.

Доказательство. В силу леммы 2.1 функция $F(x)$ возрастает при $x > -1$. Покажем, что на этом луче F вогнута. Поскольку Φ_1 положительна и

$$F'(x) = -\frac{\Phi_1'(x)}{\Phi_1^2(x)}, \quad F''(x) = -\frac{\Phi_1(x)\Phi_1''(x) - 2(\Phi_1'(x))^2}{\Phi_1^3(x)},$$

достаточно доказать неравенство

$$\Phi_1(x)\Phi_1''(x) > 2(\Phi_1'(x))^2, \quad x \in (-1, +\infty). \quad (2.5)$$

Дифференцируя (2.4), находим

$$\Phi_1''(x) = \frac{2}{e} \left(\frac{1}{(1+x)^3} + \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau \right), \quad x \in (-1, +\infty). \quad (2.6)$$

Подставив (2.3), (2.4), (2.6) в (2.5), находим

$$\left(\frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau \right) \left(\frac{1}{(1+x)^3} + \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau \right) > \left(\frac{1}{(1+x)^2} + \int_0^1 \frac{\tau^2 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2} d\tau \right)^2. \quad (2.7)$$

Тем самым нужно доказать соотношение (2.7) при всех $x > -1$.

Для таких x и $\tau \in [0, 1]$ имеем

$$\sqrt{\frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau}} \sqrt{\frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3}} = \frac{\tau^2 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2}.$$

Но тогда согласно неравенству Коши – Буняковского

$$\int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau \geq \left(\int_0^1 \frac{\tau^2 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2} d\tau \right)^2, \quad x > -1. \quad (2.8)$$

Неравенство о среднем при тех же x дает

$$\frac{1}{(1+x)^3} \int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau + \frac{1}{1+x} \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau \geq \frac{2}{(1+x)^2} \sqrt{\int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau}.$$

Оценив подкоренное выражение с помощью (2.8), получим

$$\frac{1}{(1+x)^3} \int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau + \frac{1}{1+x} \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau > \frac{2}{(1+x)^2} \int_0^1 \frac{\tau^2 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2} d\tau, \quad x > -1. \quad (2.9)$$

Строгий знак неравенства в (2.9) объясняется тем, что неравенство о среднем применено к неравным положительным величинам. Сложим (2.8) и (2.9), затем добавим к обеим частям слагаемое $\frac{1}{(1+x)^4}$ и придем к неравенству, которое сворачивается в (2.7). \square

Следующее утверждение имеет простой геометрический смысл и представляет собой вариант известной леммы о трех хордах (см., например, [4, глава 7, §1, задача 1.2]). Для полноты изложения приведем его с доказательством.

Лемма 2.3. Пусть функция $G(x)$ определена и строго вогнута при $x \geq 0$. Тогда разностное отношение

$$g(x) \equiv \frac{G(x) - G(0)}{x}$$

убывает на луче $x > 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. По определению строгой вогнутости для любых $0 \leq t_1 < t_2$ верно неравенство

$$G(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) > \alpha G(t_1) + (1 - \alpha)G(t_2).$$

Убедимся, что для всех x_1, x_2 , удовлетворяющих условию $0 < x_1 < x_2$, выполнено соотношение

$$g(x_1) \equiv \frac{G(x_1) - G(0)}{x_1} > \frac{G(x_2) - G(0)}{x_2} \equiv g(x_2).$$

В самом деле, последнее равносильно неравенству

$$G(x_1) > \frac{x_2 - x_1}{x_2}G(0) + \frac{x_1}{x_2}G(x_2) \equiv \alpha G(0) + (1 - \alpha)G(x_2),$$

которое справедливо в силу строгой вогнутости $G(x)$. \square

Лемма 2.4. Функция $\Phi_2(x)$ из формулы (2.2) убывает на луче $x > 0$.

Доказательство. Согласно (2.2) и определению функции $F(x)$ (см. лемму 2.2)

$$\Phi_2(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Phi_1(x)} - \frac{1}{\Phi_1(0)} \right) \equiv \frac{F(x) - F(0)}{x}, \quad x \in (-1, +\infty).$$

По лемме 2.2 функция $F(x)$ строго вогнута на луче $x > -1$ (тем более, на луче $x > 0$). Но тогда по лемме 2.3 функция $\Phi_2(x)$ убывает при $x > 0$. \square

Доказательство теоремы 1.1. Обе функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ убывают на луче $x > 0$ (см. леммы 2.1, 2.4). Поэтому для всех $x \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \frac{e-2}{e} = \Phi_1(1) &\leq \Phi_1(x) \equiv \frac{1}{x}(1 - e^{-1}(1+x)^{1/x}) \equiv \frac{H(x)}{x} < \Phi_1(0) = \frac{1}{2}, \\ \frac{4-e}{e-2} = \Phi_2(1) &\leq \Phi_2(x) \equiv \frac{e}{e - (1+x)^{1/x}} - \frac{2}{x} \equiv \frac{1}{H(x)} - \frac{2}{x} < \Phi_2(0) = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, верны неравенства (1.7) и (1.8). \square

Метод доказательства основного утверждения демонстрирует особую важность соображений монотонности при выводе точных оценок для используемых в анализе чисел и функций (см. [5]).

3. Рациональные приближения числа e

Вопросу о наилучшей скорости рациональных приближений числа e и других специальных чисел посвящено много публикаций (см., например, [6, 7]). Покажем, что дают наши результаты в задаче о приближении эйлерова числа элементами конкретной последовательности $(1 + 1/m)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Как показано в [2, теорема 3], ряд (1.2) обвертывает функцию $H(x)$ при всех $x > 0$. Другими словами, при каждом $x > 0$ справедлива серия двусторонних оценок

$$\sum_{n=1}^{2p} (-1)^{n-1} a_n x^n < 1 - e^{-1}(1+x)^{1/x} < \sum_{n=1}^{2q-1} (-1)^{n-1} a_n x^n, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $x = 1/m \in (0, 1]$ и $q = p + 1$ получим

$$\sum_{n=1}^{2p} \frac{(-1)^{n-1} a_n}{m^n} < 1 - e^{-1} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \sum_{n=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{n-1} a_n}{m^n} \quad (3.1)$$

для всех $m, p \in \mathbb{N}$. Например, взяв $p = 1$, из (3.1) выводим

$$\frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} < 1 - e^{-1} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} + \frac{7}{16m^3}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

что дает улучшенную рациональную аппроксимацию числа e

$$\frac{24m^2}{24m^2 - 12m + 11} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < e < \frac{48m^3}{48m^3 - 24m^2 + 22m - 21} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Действительно, подставив тестовое значение $m = 100$, найдем границы для e

$$\frac{240000}{238811}1.01^{100} = \mathbf{2.7182806\dots} < e < \mathbf{2.718281839\dots} = \frac{48000000}{47762179}1.01^{100}, \quad (3.3)$$

т. е. миноранту с пятью верными цифрами после запятой и мажоранту с семью верными цифрами после запятой, при этом

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 1.01^{100} = \mathbf{2.7048\dots}$$

справедливо только с одной верной цифрой после запятой.

Отметим, что обвертывание является удобным инструментом для исследования асимптотического поведения гамма-функции [8], центрального биномиального коэффициента [9], остатков числовых рядов [10].

Теорема 1.1 предоставляет другой полезный формат оценок для величины уклонения

$$H\left(\frac{1}{m}\right) = 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Так, выбирая $x = 1/m$ в неравенстве (1.7), приходим к простейшей оценке

$$\frac{e-2}{em} \leq 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{2m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

в которой константы $(e-2)/e = 0.264\dots$ и $1/2$ на множестве всех $m \in \mathbb{N}$ неулучшаемы: первая — ввиду равенства в левой части (3.5) для $m = 1$, вторая — в силу обвертывания (3.1). Если воспользоваться двойным неравенством (1.8), то возникнет усиливающий (3.5) вариант

$$\frac{1}{2m + \frac{11}{6}} < 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \frac{1}{2m + \frac{4-e}{e-2}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

где выбор констант $11/6 = 1.8(3)$ и $(4-e)/(e-2) = 1.784\dots$ для заданного шаблона оптимален по тем же причинам, что и в (3.5). Сравнив нижние оценки в (3.2) и (3.6), видим, что вторая всегда лучше. С верхними оценками в (3.2) и (3.6) ситуация иная: первая лучше при всех $m \geq 7$, что легко объяснить неасимптотическим характером константы $(4-e)/(e-2)$.

Результат (3.6) улучшает хорошо известное двойное неравенство

$$\frac{1}{2m+2} < 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{2m+1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

из классического задачника [11, I, гл. 4, § 2].

Для числа e левая часть (3.6) дает при любом $m \in \mathbb{N}$ оценку снизу

$$e > \frac{12m+11}{12m+5}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Протестировав ее на прежнем значении $m = 100$, запишем

$$e > \frac{1211}{1205}1.01^{100} = \mathbf{2.718281782\dots},$$

где шесть верных цифр после запятой демонстрируют небольшое улучшение по сравнению с нижней границей в (3.3).

Еще один способ получения нетривиальных оценок эйлера числа основан на связи между степенными средними и средними Радо. На этом пути можно установить для e (соответственно, (3.4)) следующие неравенства, справедливые при всех $m \in \mathbb{N}$ и выписанные в порядке увеличения точности:

$$e < \sqrt{\frac{m+1}{m}}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \iff H\left(\frac{1}{m}\right) < \frac{1}{m + \sqrt{m(m+1)}}, \quad (3.7)$$

$$e < \frac{4(m+1)}{(\sqrt{m} + \sqrt{m+1})^2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \iff H\left(\frac{1}{m}\right) < \frac{2m+3-2\sqrt{m(m+1)}}{4(m+1)}, \quad (3.8)$$

$$e < \left(\frac{2\sqrt[3]{(m+1)^2}}{\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{(m+1)^2}}\right)^{3/2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \iff H\left(\frac{1}{m}\right) < 1 - \left(\frac{\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{(m+1)^2}}{2\sqrt[3]{(m+1)^2}}\right)^{3/2}. \quad (3.9)$$

Подставив $m = 100$ в (3.7)–(3.9), последовательно находим

$$e < \frac{\sqrt{101}}{10} 1.01^{100} = \mathbf{2.718304\dots},$$

$$e < \frac{404}{(10 + \sqrt{101})^2} 1.01^{100} = \mathbf{2.71828743\dots},$$

$$e < 202 \sqrt{\frac{2}{(\sqrt[3]{10000} + \sqrt[3]{10201})^3}} 1.01^{100} = \mathbf{2.7182818284631\dots},$$

где точность в десять знаков после запятой в последней оценке достигается за счет существенного усложнения ее формата.

Покажем, что подобной высокой точности можно добиться, не меняя выбранного в теореме 1.1 рационального шаблона цепных дробей. Но для этого потребуются доказать одну правдоподобную гипотезу, подтверждаемую численным расчетом.

4. Открытый вопрос

Определим на множестве $x \in (-1, +\infty)$ функциональную последовательность $\Phi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, следующим образом. Пусть ее первые два элемента Φ_1 и Φ_2 заданы формулами (2.1) и (2.2) соответственно. Пусть

$$\Phi_3(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Phi_2(x)} - \frac{1}{\Phi_2(0)} \right) = \frac{1}{\frac{x}{H(x)} - 2} - \frac{6}{11x} = \frac{1}{\frac{x}{1 - e^{-1}(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 2} - \frac{6}{11x} \quad (4.1)$$

при естественном соглашении

$$\Phi_3(0) = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 a_3 - a_1 = \frac{5}{242}. \quad (4.2)$$

Затем

$$\Phi_4(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Phi_3(x)} - \frac{1}{\Phi_3(0)} \right) = \frac{1}{\frac{x}{\frac{x}{H(x)} - 2} - \frac{6}{11}} - \frac{242}{5x}; \quad (4.3)$$

по соображениям непрерывности полагаем

$$\Phi_4(0) = \frac{5027}{250}. \quad (4.4)$$

Общее рекуррентное правило зададим в виде

$$\Phi_{n+1}(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Phi_n(x)} - \frac{1}{\Phi_n(0)} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.5)$$

с доопределением по непрерывности в точке $x = 0$. Тем самым $\Phi_n(x)$ — элементарная аналитическая функция при $x > -1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Гипотеза. При любом $n \in \mathbb{N}$ функция $\Phi_n(x)$ из последовательности (4.5) является убывающей на луче $x > 0$.

В леммах 2.1 и 2.4 гипотеза подтверждается для первых номеров $n = 1$ и $n = 2$. Если предположить, что она верна для $n = 3$, то в силу (4.2) для функции (4.1) справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{17e - 46}{11(4 - e)} = \Phi_3(1) \leq \Phi_3(x) < \Phi_3(0) = \frac{5}{242}, \quad x \in (0, 1], \quad (4.6)$$

с границами

$$\frac{17e - 46}{11(4 - e)} = 0.0149\dots, \quad \frac{5}{242} = 0.0206\dots,$$

которую несложно записать в виде

$$\frac{x}{2 + \frac{6}{11} + \frac{(17e - 46)x}{11(4 - e)}} \leq H(x) < \frac{x}{2 + \frac{6}{11} + \frac{5x}{242}}, \quad x \in (0, 1]. \quad (4.7)$$

В таком случае для уклонения (3.4) из (4.7) следует двойное неравенство

$$\frac{1}{2m + \frac{11}{6 + \frac{17e - 46}{(4 - e)m}}} \leq 1 - e^{-1} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{2m + \frac{11}{6 + \frac{5}{22m}}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Правую часть (4.8) можно записать в виде

$$e < \frac{264m^2 + 252m}{264m^2 + 120m - 5} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Полагая $m = 100$ в (4.9), получим

$$e < \frac{2665200}{2651995} 1.01^{100} = \mathbf{2.718281828651\dots},$$

с девятью верными цифрами после запятой.

Предположим, что гипотеза верна для $n = 4$. Тогда в силу (4.4) для функции (4.3) справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{11(1032 - 379e)}{5(17e - 46)} = \Phi_4(1) \leq \Phi_4(x) < \Phi_4(0) = \frac{5027}{250}, \quad x \in (0, 1], \quad (4.10)$$

которую можно записать в виде

$$\frac{x}{2 + \frac{6}{11 + \frac{242}{5} + \frac{5027x}{250}}} < H(x) \leq \frac{x}{2 + \frac{6}{11 + \frac{242}{5} + \frac{11(1032 - 379e)x}{5(17e - 46)}}}, \quad x \in (0, 1], \quad (4.11)$$

с теми же, что и в (4.10), константами

$$\frac{5027}{250} = 20.108\dots, \quad \frac{11(1032 - 379e)}{5(17e - 46)} = 18.485\dots,$$

найденными прямым вычислением на основе разложения (1.2). В таком случае для уклонения (3.4) из (4.11) следует двойное неравенство

$$\frac{1}{2m + \frac{6}{11 + \frac{242m}{5} + \frac{5027}{250}}} < H\left(\frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{2m + \frac{6}{11 + \frac{242m}{5} + \frac{11(1032 - 379e)}{5(17e - 46)}}}, \quad (4.12)$$

верное при всех $m \in \mathbb{N}$. Левая часть (4.12) содержит оценку

$$e > \frac{145200m^2 + 198924m + 55297}{145200m^2 + 126324m + 22385} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Полагая $m = 100$ в (4.13), получим

$$e > \frac{12164857}{12104585} 1.01^{100} = \mathbf{2.71828182845882\dots},$$

с одиннадцатью верными цифрами после запятой.

Пока неизвестно, справедливы ли опорные соотношения (4.6), (4.10). По всей видимости, подтверждение сформулированной гипотезы в полном объеме требует более тонкого подхода, чем предложенный в доказательстве теоремы 1.1.

Литература

1. А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков, “О тейлоровских коэффициентах аналитической функции, связанной с эйлеровым числом”, *Уфим. мат. журн.* **14**, No. 3, 74–89 (2022).
2. А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков, “Обвертывание значений аналитической функции, связанной с числом e ”, *Мат. заметки* **113**, No. 3, 374–391 (2023).
3. С. В. Колягин, А. Ю. Попов, “О восстановлении функций по значениям n -х разностей с шагом $1/n$ ”, *Тр. ИММ* **17**, No. 3, 178–185 (2011).
4. Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов, *Избранные задачи по вещественному анализу*, Наука, М. (1992).
5. E. A. Karatsuba, “On the asymptotic representation of the Euler gamma function by Ramanujan”, *J. Comput. Appl. Math.* **135**, No. 2, 225–240 (2001).
6. C. S. Davis, “Rational approximations to e ”, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A.* **25**, 497–502 (1978).
7. Б. Г. Тасоев, “О рациональных приближениях некоторых чисел”, *Мат. заметки* **67**, No. 6, 931–937 (2000).
8. А. Ю. Попов, “Двусторонние оценки гамма-функции на действительной полуоси”, *Чебышевский сб.* **18**, No. 2, 205–221 (2017).
9. А. Ю. Попов, “Новые двусторонние оценки гамма-функции и чисел сочетаний из $2n$ по n . Усиленное обвертывание асимптотическим рядом”, *Мат. заметки* **103**, No. 5, 785–789 (2018).
10. А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков, “Асимптотическое поведение остатков числовых рядов специального вида”, *Пробл. мат. анал.* **107**, 39–58 (2020).
11. Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа. I. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций*, Наука, М. (1978).

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2024 г.