СИБИРСКИЙ ФОНД АЛГЕБРЫ И ЛОГИКИ

АЛГЕБРА И ЛОГИКА

Том 63 № 4 2024

Издание основано А. И. Мальцевым в 1962 г.
Периодичность журнала: 6 номеров в год

Журнал *АЛГЕБРА и ЛОГИКА* публикует результаты новейших исследований в области современной общей алгебры и логики, в частности, изучаются упорядоченные, почти без кручения, нильпотентные и метабелевы группы, кольца изоморфизмов, алгебры Ли, иерархические множества, логические автоматы и рекурсивные функции. Результаты большинства статей докладывались на заседаниях семинара «Алгебра и логика» в Новосибирске.

Главный редактор Ю. Л. Ершов

Редакционная коллегия:

С. С. Гончаров (зам. главного редактора), Н. А. Баженов, А. В. Васильев, Н. Т. Когабаев, П. С. Колесников, В. Д. Мазуров, Н. С. Романовский, В. К. Харченко, И. П. Шестаков, А. Н. Ряскин (ответственный секретарь),

Е. И. Зельманов (Сан Диего, США), О. Х. Кегель (Фрайбург, ФРГ), А. Макинтайр (Лондон, Великобритания), А. Нероуд (Итака, США)

Английские переводы публикуются издательством Springer с 1968 г.
https://link.springer.com/journal/10469/volumes-and-issues

Журнал *Algebra and Logic* реферируется и индексируется в международных и национальных базах данных, в том числе: ANVUR, BFI List, Baidu, CLOCKSS, CNKI, CNPIEC, Dimensions, EBSCO, Gale, Google Scholar, INIS Atomindex, Japanese Science and Technology Agency (JST), Mathematical Reviews, Naver, Norwegian Register for Scientific Journals and Series, OCLC WorldCat Discovery Service, Ovid Discovery, Portico, ProQuest, SCImago, SCOPUS, Science Citation Index Expanded (SCIE), TD Net Discovery Service, Wanfang, eLibrary.ru, zbMATH.

© Сибирский фонд алгебры и логики, 2024

АЛГЕБРА И ЛОГИКА

Том 63 № 4 2024

СОДЕРЖАНИЕ

М. М. АРСЛАНОВ, И. И. БАТЫРШИН, М. М. ЯМАЛЕЕВ. *CEA*-операторы и иерархия Ершова. II 355

Ф. А. ДУДКИН. Обобщенные группы Баумслага—Солитера, универсально эквивалентные древесным группам 377

К. Ж. КУДАЙБЕРГЕНОВ. О числе счетных моделей полной теории и ее несущественного расширения 390

Б. Ш. КУЛПЕШОВ, С. В. СУДОПЛАТОВ. О новом варианте ортогональности 1-типов в слабо o-минимальных теориях 406

У. Л. МАРИАНО, Ж. ШВАРЦ. Гипотеза Гельфанда — Кириллова как формула первого порядка 427

М. В. ШВИДЕФСКИ. Письмо в редакцию 443

Заседания семинара «Алгебра и логика» 454

Рефераты 459

Рукописи принимаются по электронной почте: algeb.logic@gmail.com
Все поступившие материалы проходят рецензирование.

Алгебра и логика Том 63, No. 4, 355–376 (2024)

УДК 510.535

М. М. Арсланов[1], И. И. Батыршин[2], М. М. Ямалеев[3]

CEA-ОПЕРАТОРЫ И ИЕРАРХИЯ ЕРШОВА. II

Аннотация: Мы продолжаем и завершаем наши исследования, начатые в [*Алгебра и логика*, **63**, No. 3 (2024), 248–270]. Доказывается, что существует невычислимое низкое вычислимо перечислимое множество A такое, что любое множество, являющееся $CEA(A)$ и 2-вычислимо перечислимое, имеет вычислимо перечислимую степень.

Ключевые слова: *CEA-иерархия, иерархия Ершова, тьюрингова степень.*

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа продолжает и завершает [1]. В [2] была доказана приводимая ниже теорема, из которой следует, что для любой невычислимой низкой перечислимой вычислимо перечислимой (в.п.) степени $\mathbf{a}$ существует $CEA(\mathbf{a})$-степень $\mathbf{c}$, не являющаяся в.п. Также напомним, что степень $\mathbf{c}$ называется $CEA(\mathbf{a})$-степенью, если $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$ и некоторое множество $C \in \mathbf{c}$ перечислимо в некотором $A \in \mathbf{a}$. Все рассматриваемые далее степени являются тьюринговыми степенями.

ТЕОРЕМА 1 (Соар и Стоб [2])**.** Для любого невычислимого низкого в.п. множества A существует множество C, которое является $CEA(A)$, но его степень не является в.п.

Позже, в связи с [3], возник следующий вопрос: можно ли степень мно-

[1] Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия; marat.arslanov@kpfu.ru. [2] Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия; batyrshin@gmail.com. [3] Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия; mars.yamaleev@kpfu.ru.

жества A из [2] сделать 2-в.п.? Вопрос продолжительное время оставался открытым, и отрицательный ответ на него был получен в теореме 3. Доказательство существенно использует технику доказательства следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2 (Арсланов, Лемпп, Шор [2]). Существует невычислимое неполное в.п. множество A такое, что любое $CEA(A)$ Δ^0_2-множество имеет в.п. степень.

Перейдем к завершению доказательства основной теоремы 3. Мотивация и подготовительные рассуждения могут быть найдены в первой части работы (см. [1]), как и приложения и следствия этого результата.

ТЕОРЕМА 3. Существует невычислимое низкое в.п. множество A такое, что любое множество, являющееся $CEA(A)$ и 2-в.п., имеет в.п. степень.

1. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА ЧАСТЬ 2: ПОСТРОЕНИЕ И ПРОВЕРКА

Для доказательства построим вспомогательные в.п. множества C_e, удовлетворяя для всех $e \in \omega$ следующим требованиям:

$\mathscr{R}_e$: $D_e = W_e^A \Rightarrow$ $\exists$ в.п. C_e $(D_e \leq_T A \oplus C_e \ \&\ C_e \leq_T A \oplus D_e)$;

$\mathscr{N}_e$: $(\exists^\infty s \ \ \Psi_e^A(e)[s]\downarrow) \Rightarrow \Psi_e^A(e)\downarrow$;

$\mathscr{P}_e$: $A \neq \Theta_e$.

Здесь $\{\langle \Phi_e, \Psi_e, \Theta_e, D_e\rangle : e \in \omega\}$ — эффективная нумерация всех кортежей $\langle \Phi, \Psi, \Theta, D\rangle$, где Φ и Ψ — частично вычислимые функционалы, Θ — частично вычислимая функция, а D — 2-в.п. множество (при этом $W_e^A = \mathrm{dom}(\Phi_e^A)$).

Напомним, что доказательство проводится методом приоритета с бесконечными нарушениями, при этом используем ряд устоявшихся соглашений (см., например, монографии [4, 5]). В частности, следуем общепринятому подходу и считаем, что функционал в какой-то точке становится неопределенным, если значение use-функции на данном шаге изменилось. Если Q — некоторое выражение в процессе конструкции, то под $Q[s]$ подразумевается, что все шаги в вычислениях входящих в Q множеств и

функций равны s (кроме тех, для которых шаги указаны явно). Полная конструкция использует дерево стратегий, каждая вершина которого соответствует некоторой стратегии приведенных выше требований: для удобства вершинами π будем обозначать стратегии $\mathscr{P}$-требований, вершинами η — стратегии $\mathscr{N}$-требований, а вершинами ρ — стратегии $\mathscr{R}$-требований. В качестве индексов также будем использовать обозначения вершин: например, Φ_ρ^A означает Φ_e^A, где вершина ρ соответствует стратегии $\mathscr{R}_e$.

Возможные выходы и дерево стратегий.

Стратегии имеют следующие выходы:

$\mathscr{R}$-стратегия ρ имеет выходы $\infty <_L fin$,

$\mathscr{N}$-стратегия η имеет выход fin,

$\mathscr{P}$-стратегия π имеет выход fin.

Пусть $L = \{\infty, fin\}$ — множество выходов. Дерево T стратегий является поддеревом $L^{<\omega}$, и порядок вершин является стандартным лексикографическим порядком. Пусть $e \in \omega$, на уровне $3e$ назначаем различные версии стратегии для требования $\mathscr{R}_e$, уровень $3e+1$ отвечает за требование $\mathscr{N}_e$ (поскольку имеется только одна стратегия для требования $\mathscr{N}_e$, то вершины на соответствующем уровне будут отслеживать, какая ветвь среди посещенных имела наибольший приоритет), и на уровне $3e+2$ назначаем различные версии стратегии для требования $\mathscr{P}_e$. Каждая вершина имеет только выходы, предусмотренные ее стратегией.

Напомним или введем ряд определений, связанных с различными техническими параметрами стратегий, и кратко опишем, как будем работать с ними.

Длина соглашения и расширяющий шаг. Для $\mathscr{R}$-стратегии ρ определяем *длину соглашения* на шаге s следующим образом:

$$l(\rho)[s] = \max\{x|\ D_\rho\lceil x[s]\ = W_\rho^A\lceil x[s]\}\text{,}$$

где $X\lceil x = X \cap \{0, 1, \ldots, x\}$.

Шаг s является *ρ-расширяющим*, если $l(\rho)[s] > l(\rho)[s^-]$, вершина ρ посещается на шаге s, и $s^- < s$ является предыдущим ρ-расширяющим ша-

гом. Для удобства предполагаем, что шаг 0 является ρ-расширяющим для любого ρ.

Интервал очистки и очищенность. В конструкции для каждой $\mathscr{R}$-стратегии ρ рассматриваем бесконечную последовательность подвижных маркеров $Clr_\rho(\pi)$, привязанных к вершинам $\pi \supseteq \rho\widehat{\ }\infty$. При этом маркеры могут двигаться только вправо и также могут стать навсегда неопределенными. Параметр $Clr_\rho(\pi)$ является обновляемым, и $Clr_\rho(\pi)[s] = l(\rho)[s]$ является длиной соглашения, который попадает под интервал очистки на шаге s. Говорим, что цикл x стратегии ρ *очищен от* p на шаге s, если либо $\varphi_\rho(x)[s] < p$, либо $\Phi_\rho^A(x)[s]\uparrow$, либо p неопределен на шаге s. Если значение $Clr_\rho(\pi)$ определено на шаге s и каждый цикл $x \leq Clr_\rho(\pi)[s]$ очищен от p на шаге s, то говорим, что интервал $[0, Clr_\rho(\pi)[s]]$ очищен от p на шаге s. Говорим, что интервал $[0, Clr_\rho(\pi)[s]]$ очищен на шаге s, если он очищен от $p_\pi[s]$ на шаге s. Говорим, что стратегия ρ очищена от π на шаге s, если интервал $[0, Clr_\rho(\pi)[s]]$ очищен от свидетеля $p_\pi[s]$ или значение $Clr_\rho(\pi)[s]$ не определено. Аналогичные определения будем использовать для предельного случая без использования шага s.

Напомним, что любое перечисление элементов вида $a_{\rho'}(z)$ всегда сопровождается перечислением элементов вида $p_\pi[s]$, таким образом, формальное определение каскада в конструкции не понадобится.

Ссылка при процедуре очистки. Ссылка ($Link(\rho, \pi)[s]$) является параметром для организации связей между $\mathscr{R}$- и $\mathscr{P}$-стратегиями и представляет собой функцию-флаг от трех аргументов ρ, π, s. Флаг $Link(\rho, \pi)[s] \in \{0, 1\}$ сигнализирует о существовании ссылки на шаге s при $Link(\rho, \pi)[s] = 1$. При создании ссылки на шаге s (а также при существовании ссылки к шагу s), посещая ρ, немедленно переходим к π, пропуская все промежуточные вершины (включая и их действия). Переход по ссылке может происходить дважды: когда она создается и когда отменяется. Для удобства в конструкции под существованием ссылки на шаге s будем подразумевать и случай $Link(\rho, \pi)[s-1] = 1$ (в частности, когда на шаге s еще не было определено значение $Link(\rho, \pi)[s]$).

Запрос на отложенную очистку. Кроме ранее введенного понятия ссыл-

ки введем еще один технический параметр: флаг $RC_\rho(x) \in \{0,1\}$, который сигнализирует о том, что для цикла x требуется очистка. В частности, если ρ использует ссылку на шаге s, но для некоторого меньшего цикла x требуется очисткае, то устанавливаем значение $RC_\rho(x)[s] = 1$ и на следующем шаге начинаем процедуру очистки для x. Устанавливая обратное значение $RC_\rho(x) = 0$ отмечаем,что x полностью очищен (от π, где $x \leq Clr_\rho(\pi)$).

Главная $\mathscr{N}$-стратегия на e-м уровне. Для каждой $\mathscr{N}$-стратегии введем глобальный параметр $N(e)[s]$, который будет на шаге s означать вершину, ответственную за реализацию стратегии $\mathscr{N}_e$. В частности, сбрасываем этот параметр только тогда, когда вершина $N(e)[s]$ инициализируется. Дополнительным параметром для $\mathscr{N}$-стратегии является флаг $SatN(e)[s] \in \{0,1\}$. Значение 1 означает, что требование $\mathscr{N}_e$ получило внимание и удовлетворено, в противном случае значение остается равным 0. Если вершина $N(e)[s]$, ответственная за требование $\mathscr{N}_e$, инициализируется, то $SatN(e)$ также устанавливается равным 0.

Инициализация. Инициализация стратегии означает, что мы отключаем (делаем неопределенными) все значения функционалов, прерываем или обнуляем все параметры, свидетелей, и т.п., относящиеся к этой стратегии. В частности:

Инициализация. Инициализация стратегии означает, что отменяем (делаем неопределенными) все значения функционалов, отменяем или обнуляем все параметры, свидетелей и т. д., относящихся к этой стратегией. В частности,

инициализация $\mathscr{R}$-стратегии ρ означает, что отменяем все маркеры $a_\rho(x)$ и $c_\rho(x)$, а также все $Clr_\rho(\pi)$,

инициализация $\mathscr{N}$-стратегии η означает, что если $N(e)[s] = \eta$ на шаге s, то делаем неопределенным $N(e)$ и определяем $SatN(e) = 0$, в противном случае ничего не делаем.

[Таким образом, инициализируем стратегию $\mathscr{N}_e$, только если инициализируем ее текущую самую левую вершину $\eta = N(e)[s]$.]

Инициализация $\mathscr{P}$-стратегии π означает, что мы отменяем ее свидетеля p_π, делаем неопределенными $Clr_\rho(\pi)$ и отменяем ссылки $Link(\rho, \pi)$ (если

они существуют) для всех $\mathscr{R}$-стратегий $\rho\hat{}\infty \subseteq \pi$.

Для удобства читателя в квадратных скобках мы добавляем интуитивное объяснение соответствующих формальных действий.

Построение.

Шаг $s = 0$. Определяем $A[0] = \varnothing$, инициализируем все стратегии.

Шаг $s+1$. Пусть $A[s]$ определено. Определяем $A[s+1]$ и строим вычислимую аппроксимацию $|TP_{s+1}| = s+1$ истинного пути TP. Строим ее по подшагам $t+1 \leq s+1$ как предел $TP_{s+1,t+1}$. Таким образом, когда найдено $TP_{s+1,s+1}$, определяем $TP_{s+1} = TP_{s+1,s+1}$, инициализируем все стратегии $\xi \not\leq TP_{s+1}$ и переходим к следующему шагу. Отметим, что все объекты (определенные нами) сохраняют свои значения, если только они явно не переопределены.

Изначально $TP_{s+1,0} = \lambda$, где λ является корневой вершиной.

Подшаг $t+1 \leq s+1$. Пусть имеем аппроксимацию $TP_{s+1,t}$. Сначала проверяем, существует ли такая вершина $\eta \leq TP_{s+1,t}$ (по лексикографическому упорядочению), что для некоторого $e \leq s+1$ выполняется $\eta = N(e)[s]$, $SatN(e)[s] = 0$ и $\Psi_e^A(e)[s]{\downarrow}$. Если такие e существуют, то выбираем наименьшее, определяем $SatN(e)[s+1] = 1$ и инициализируем все стратегии $\xi \not\leq \eta$. Также определяем $T_{s+1,s+1} = TP_{s+1,t}\hat{}fin\hat{}fin\hat{}\ldots\hat{}fin$, т. е. фиктивно заполняем оставшуюся часть аппроксимации $TP_{s+1,t}$ выходами fin, пока не дойдем до длины $s+1$.

[Таким образом, сперва отслеживаем все крайние левые вершины, отвечающие различным требованиям $\mathscr{N}_e$, далее, если среди таковых найдутся требующие внимания, то осуществляем соответствующую инициализацию (добавляем фиктивные выходы, чтобы сохранить $|TP_{s+1}| = s+1$ и заставить инициализированные стратегии ничего не делать на этом шаге). Заметим, что если такое наименьшее e существует и $\eta = N(e)$, то не существует $e' > e$ такого, что $\eta' = N(e')$ и $\eta' \leq \eta$.]

Если такой $\mathscr{N}$-стратегии нет, то рассмотрим следующие три случая.

$T_{s+1,t} = \rho$ является $\mathscr{R}$-стратегией. Если шаг $s+1$ не является ρ-расширяющим, то определяем выход $TP_{s+1,t+1} = \rho\hat{}fin$ (т. е. ничего не делаем) и переходим к следующему подшагу. В противном случае пусть s^- — предыдущий

ρ-расширяющий шаг (на котором, в частности, посетили ρ). Рассмотрим следующие подслучаи и выберем первый, условия которого выполнены:

(ρ1) Если существует $Link(\rho,\pi)$ (т. е. $Link(\rho,\pi)[s]=1$) для некоторого π, то сразу же определяем $T_{s+1,t'}=\pi$ и переходим к подшагу $t'+1=|\pi|+1$. Также для всех таких x, что $D_\rho(x)[s]=W^A_\rho(x)[s]=1$, но $D_\rho(x)[s^-]=W^A_\rho(x)[s^-]=0$ и $c_\rho(x)[s]\notin C_\rho[s]$, и существует такая $\mathscr{P}$-стратегия $\pi'\supseteq\rho\hat{}\infty$, что $x\le Clr_\rho(\pi')[s]$, определяем $RC_\rho(x)[s+1]=1$.

[Тем самым наше первое действие — проверить ссылку. Заранее отметим, что для каждой ρ может быть только одна $Link(\rho,\pi)$. При этом когда переходим по ссылке, то можем пропустить некоторые циклы, которые должны быть очищены, поэтому используем флаги, чтобы отметить такие циклы на будущее.]

(ρ2) Иначе (если подслучай (ρ1) не произошел). Предположим, существует такой наименьший x, что или $D_\rho(x)[s]=W^A_\rho(x)[s]=1$, $D_\rho(x)[s^-]=W^A_\rho(x)[s^-]=0$ и $c_\rho(x)[s]\notin C_\rho[s]$ (в частности, $c_\rho(x)$ определено), или $RC_\rho(x)[s]=1$. Если существует $\mathscr{P}$-стратегия $\pi\supseteq\rho\hat{}\infty$, где π является такой наименьшей вершиной (по лексикографическому упорядочению), что $x\le Clr_\rho(\pi)[s]$, то создаем $Link(\rho,\pi)$ (т. е. определяем $Link(\rho,\pi)[s+1]=1$), определяем $T_{s+1,t'}=\pi$, определяем $RC_\rho(y)[s+1]=0$ для всех $y\le s+1$, и сразу же переходим к подшагу $t'+1=|\pi|+1$.

[Заметим, что все такие $Clr_\rho(\pi)$ определяются, когда посещается вершина π. Поэтому если нет никаких ссылок, то проверяем, есть ли необходимость в очистке. Очистка может требоваться только циклам x с определенными параметрами. Ясно, что таких циклов может быть несколько, тогда мы берем наименьший, поскольку его очистка включает очистку для всех больших циклов, это так же означает, что можем определить $RC_\rho(y)[s+1]=0$ для всех y. Таким образом, в этом случае сразу переходим к π и начинаем очистку, на следующем ρ-расширяющем шаге по ссылке переходим к π снова, завершаем очистку и отменяем ссылку. Ясно, что запрет цикла x может быть нарушен только $\pi'\supseteq\rho\hat{}\infty$ с меньшим, чем x, интервалом очистки. Это означает, что либо все параметры цикла x становятся неопределенными, либо запрет отменен, поскольку x покидает D_ρ, либо запрет

сохранен и случай ($\rho 3$) является следующим этапом.]

($\rho 3$) Иначе (если подслучаи ($\rho 1$)–($\rho 2$) не произошли). Если существует такой наименьший x, что $D_\rho(x)[s] = W^A_\rho(x)[s] = 1$, но $D_\rho(x)[s^-] = W^A_\rho(x)[s^-] = 1$ и $c_\rho(x)[s] \notin C_\rho[s]$ (в частности, $c_\rho(x)$ определено), то перечисляем $c_\rho(x)[s]$ в C_ρ. Определяем $TP_{s+1,t+1} = \rho\hat{}\infty$, и переходим к следующем подшагу.

[Это означает, что цикл x прошел процедуру очистки соответствующего интервала и необходимо скорректировать сводимость. Поэтому можем перечислить $c_\rho(x)$ в C_ρ.]

($\rho 4$) Иначе (если подслучаи ($\rho 1$)–($\rho 3$) не произошли), пусть x — наименьший цикл без определенных на данный момент маркеров $a_\rho(x)$ и $c_\rho(x)$. Определяем $a_\rho(x)[s+1]$ и $c_\rho(x)[s+1]$ как большие числа. Определяем $TP_{s+1,t+1} = \rho\hat{}\infty$ и переходим к следующему подшагу.

[Это означает, что для цикла x необходимо определить сводящие маркеры, в частности, $a_\rho(x)$ и $c_\rho(x)$ будут больше, чем запреты всех меньших очищенных интервалов; кроме того, такой x всегда существует и меньше длины соглашения, так как $s+1$ является ρ-расширяющим шагом.]

$T_{s+1,t} = \eta$ является $\mathscr{N}$-стратегией. Предположим, что η соответствует $\mathscr{N}_e$. Если $N(e)[s]$ не определено или $\eta \leq N(e)[s]$, то определяем $N(e)[s+1] = \eta$. Рассмотрим следующие подслучаи и выберем первый из них, условия которого выполнены:

($\eta 1$) Если $SatN(e)[s] = 0$ и $\Psi^A_e(e)[s]{\downarrow}$, то определяем $SatN(e)[s+1] = 1$, инициализируем все стратегии $\xi \not\leq \eta$, также определяем $T_{s+1,s+1} = \eta\hat{}fin\hat{}fin\hat{}\ldots\hat{}fin$.

($\eta 2$) Иначе (если подслучай ($\eta 1$) не произошел), если $N(e)$ было переопределено, т. е. $N(e)[s+1] \neq N(e)[s]$, то инициализируем все стратегии $\xi \not\leq \eta$ и определяем $T_{s+1,s+1} = \eta\hat{}fin\hat{}fin\hat{}\ldots\hat{}fin$.

[Это означает, что переопределяем главную вершину для этого $\mathscr{N}$-требования (если необходимо), более того, инициализацию в этом случае также проводим. Позже именно эта вершина будет отслеживаться в начале подшага.]

($\eta 3$) Иначе (если подслучаи ($\eta 1$)–($\eta 2$) не произошли), т. е. $SatN(e)[s] =$

1 или $\Psi_e^A(e)[s]\uparrow$, определяем $T_{s+1,t+1} = \eta\hat{}fin$ и переходим к следующему подшагу.

$T_{s+1,t} = \pi$ является $\mathscr{P}$-стратегией. Рассмотрим следующие подслучаи и выберем первый из них, условия которого выполнены:

(π1) Если посещаем π по ссылке $Link(\rho, \pi)$ из-за случая (ρ2), то перечисляем $a_\rho(z)[s]$ в A, и $c_\rho(z)[s]$ в C_ρ, для всех $z > Clr_\rho(\pi)[s]$. Также делаем то же самое для всех таких ρ', что $\rho\hat{}\infty \subset \rho'\hat{}\infty \subseteq \pi$. Перечисляем $p_\pi[s]$ в A и делаем неопределенными все параметры $p_\pi[s+1]$, $a_\rho(z)[s+1]$, $c_\rho(z)[s+1]$. Делаем неопределенными $Clr_{\rho''}(\pi)[s+1]$ для всех $\rho''\hat{}\infty \subset \rho$ (в частности, это предотвратит ρ'' от создания ссылок к π). Инициализируем все стратегии $\xi \not\leq \pi$ и определяем $T_{s+1,s+1} = \pi\hat{}fin\hat{}fin\hat{}\ldots\hat{}fin$.

[Тем самым посещаем π на том же шаге, на котором ρ создает ссылку, и немедленно начинаем первую часть процедуры очистки. Это позволяет сохранить ρ очищенным от π. Более того, для вершин между π и ρ не требуется очистка, если только она им не понадобится позднее. Кроме того, некоторая вершина $\pi' \supset \pi$ может быть в настоящее время концом другой ссылки, но поскольку π' инициализируется, то эта ссылка автоматически отменяется. Также может быть только одна $\mathscr{P}$-стратегия на каждом шаге, на которую переходим по ссылке, поскольку после перехода по ссылке осуществляем инициализацию и добавляем формальные выходы fin. Итак, в первой части процедуры очистки стратегия π помогает ρ предотвратить конфликты с $\mathscr{R}$-стратегиями меньшего приоритета с помощью переопределения $a_{\rho'}(z')$, и с $\mathscr{R}$-стратегиями большего приоритета путем переопределения $Clr_{\rho''}(\pi)$, что позволяет не обращать внимание на текущие $a_{\rho''}(z'')$.]

(π2) Иначе (если подслучай (π1) не произошел). Если посещаем π по некоторой ссылке $Link(\rho, \pi)$ из-за случая (ρ1), то определяем $Clr_{\rho'}(\pi)[s+1] = l(\rho')[s+1]$, для всех $\mathscr{R}$-стратегий $\rho'\hat{}\infty \subset \rho$. Выбираем большого свидетеля p_π и отменяем $Link(\rho, \pi)$ (т.е. определяем $Link(\rho, \pi)[s+1] = 0$). Инициализируем все стратегии $\xi \not\leq \pi$ и определяем $T_{s+1,s+1} = \pi\hat{}fin\hat{}fin\ldots\hat{}fin$.

[Это вторая и последняя часть очистки для ρ. Это означает, что по той же ссылке посетили π на предыдущем ρ-расширяющем шаге. Поэтому для

цикла x (для которого была необходима очистка) либо x покинул D_ρ, либо завершилось новое вычисление $\Phi_\rho^A(x)$ (если для какого-то другого цикла требуется очистка, то его игнорируем, пока не закончим с x). Следовательно, теперь можем переопределить интервалы очистки для $\mathscr{R}$-стратегий с большими приоритетами, они могут выбрать большие маркеры $a_{\rho'}(z)$ позже. Таким образом, когда все процедуры, связанные со ссылкой $Link(\rho, \pi)$, завершены, можно будет перечислить $c_\rho(x)$ в C_ρ.]

($\pi 3$) В противном случае (если случаи ($\pi 1$)–($\pi 2$) не произошли). Если нет назначенного свидетеля и если для всех $\rho\hat{}\infty \subseteq \pi$ интервалы $Clr_\rho(\pi)[s]$ не определены, то выбираем большого свидетеля p_π и определяем $Clr_\rho(\pi)[s+1] = l(\rho)[s+1]$ для всех $\rho\hat{}\infty \subseteq \pi$. Инициализируем все стратегии $\xi \not\leq \pi$ и определяем $T_{s+1,s+1} = \pi\hat{}fin\hat{}fin\ldots\hat{}fin$.

[Этот случай означает, что стратегия π посещается впервые после инициализации. В целях единообразия, сразу же определяем $T_{s+1,s+1}$ и заполняем остаток $TP_{s+1,t}$ выходами fin, что позволит избежать на этом шаге каких-либо действий стратегий с меньшими приоритетами.]

($\pi 4$) Иначе (если подслучаи ($\pi 1$)–($\pi 3$) не произошли). Если $p_\pi[s] \notin A[s]$ и $\Theta(p_\pi)[s]{\downarrow} = 0$, то перечисляем $p_\pi[s]$ и $a_\rho(z)[s]$ в A, и $c_\rho(z)[s]$ в C_ρ, делаем неопределенными $a_\rho(z)[s+1]$ и $c_\rho(z)[s+1]$, для всех $z > Clr_\rho(\pi)[s]$, где $\rho\hat{}\infty \subseteq \pi$. Инициализируем все стратегии $\xi \not\leq \pi$ и определяем $T_{s+1,s+1} = \pi\hat{}fin\hat{}fin\hat{}\ldots\hat{}fin$.

[Тем самым стратегия требует внимания и получает его. Более того, она перечисляет все возможные маркеры $\mathscr{R}$-стратегий, как в процедуре очистки. В дальнейшем это позволит соответствующим сводимостям полагаться на новые большие маркеры.]

($\pi 5$) Иначе (если подслучаи ($\pi 1$)–($\pi 4$) не произошли), ничего не делаем, т. е. определяем $TP_{s+1,t+1} = \pi\hat{}fin$ и переходим к следующему подшагу.

Конструкция завершена, перейдем к верификации.

Верификация.

Истинный путь определяем стандартным образом как

$$TP = \liminf_s TP_s.$$

Поскольку дерево является конечно ветвящимся, и $|TP_s| = s$ для каждого $s \in \omega$, то истинный путь существует. В следующих леммах покажем, что каждое требование удовлетворяется некоторой стратегией, лежащей на TP или слева от TP.

ЛЕММА 1. Если $\mathscr{P}$-стратегия π не инициализируется после шага s_0, то она посещается через связки лишь конечное число раз.

Доказательство. Сначала мы докажем ряд достаточно элементарных свойств и утверждений, на которые при необходимости будем ссылаться вне леммы.

(1) $Link(\rho, \pi)$ может быть создана только $\mathscr{R}$-стратегией такой, что $\rho\widehat{\ }\infty \subseteq \pi$, и если ρ на шаге $s{+}1$ создает связку с π, то значение $Clr_\rho(\pi)[s]$ должно быть определено на этом шаге.

Доказательство. немедленно следует из построения (ниже мы также будем опускать выход ρ, говоря о связках). □

(2) Если $Link(\rho, \pi)$ существует на каком-то шаге (т. е. $Link(\rho, \pi)[s{-}1] = 1$ или $Link(\rho, \pi)[s] = 1$), то на этом шаге s никакая другая $\mathscr{R}$-стратегия ρ' не может создать ссылку на π (т. е. не может определить $Link(\rho', \pi)[s] = 1$).

Доказательство. Действительно, если создаем ссылку $Link(\rho, \pi)$, то делаем неопределенными $Clr_{\rho'}(\pi)$ для всех $\rho' \subset \rho$. С другой стороны, $Clr_{\rho'}(\pi)$ может быть снова определена, только если мы позже посещаем π. Таким образом, по пункту (2) ни одна из таких стратегий ρ' не может создать ссылку на π, если $Clr_{\rho'}(\pi)$ не будет определена, а значение $Clr_{\rho'}(\pi)$ может стать определенным только на шаге (см. случай ($\pi 2$) конструкции), на котором отменяем $Link(\rho, \pi)$. Согласно конструкции, значение $Clr_{\rho'}(\pi)$ может определиться и из-за ($\pi 3$), но этот случай имеет место, только когда π начинает свою работу и, следовательно, ссылка $Link(\rho, \pi)$ еще не существует. Между тем стратегии ρ'', что $\rho \subset \rho'' \subset \pi$, не могут посещаться (и, следовательно, не могут создавать ссылки), поскольку после посещения ρ сразу же переходим на π. Другие $\mathscr{R}$-стратегии (отличные от ρ' и ρ'') никогда не смогут создать ссылку на π. □

(3) Если ссылка $Link(\rho, \pi)$ создается на шаге s, то $Clr_\rho(\pi')[s]$ становится неопределенным для всех $\pi' > \pi$.

Доказательство следует из построения (см. случаи ($\rho 2$) и ($\pi 1$)) и (2).

Замечание 1. Таким образом, новая ссылка может быть создана $\rho'' \subset \rho$ либо к некоторой вершине вне пути от ρ к π (и тогда вовсе не посещаем ρ), либо на некоторую вершину π'' такую, что $\rho \subset \pi'' \subset \pi$. В последнем случае очистка от π для ρ становится излишней, так как π инициализируется, а $Link(\rho, \pi)$ отменяется.

(4) Предположим, что $\rho\widehat{\ }\infty \subseteq \pi, \pi'$. В этом случае $\pi < \pi'$ тогда и только тогда, когда $Clr_\rho(\pi)[s] < Clr_\rho(\pi')[s]$ для каждого шага s, на котором обе части неравенства определены.

Доказательство. Действительно, когда π действует в первый раз (случай ($\pi 3$)), она определяет $Clr_\rho(\pi)$ и инициализирует другие стратегии $\pi' > \pi$. С другой стороны, если π переопределяет $Clr_\rho(\pi)$ из-за процедуры очистки, запущенной некоторой ρ' (случай ($\pi 2$)), то π' также инициализируется. Таким образом, в любом случае π' определяет $Clr_\rho(\pi')$ позже, а значит и больше, если $Clr_\rho(\pi)$ уже определена. Отметим, что если $Clr_\rho(\pi)$ переопределяется на некотором шаге $t > s$, то $Clr_\rho(\pi)[t] = l(\rho)[t] > l(\rho)[s] = Clr_\rho(\pi)[s]$, поскольку π посещается только на ρ-расширяющих шагах. □

(5) Если стратегии $\rho\widehat{\ }\infty \subseteq \pi$ не инициализируются после шага s_0, значения $p_\pi[s]$ и $Clr_\rho(\pi)[s]$ уже определены на шаге $s > s_0$ и $a_\rho(z)[s]$ определены для $z > Clr_\rho(\pi)[s]$, то интервал $[0, Clr_\rho(\pi)[s]]$ очищен от $a_\rho(z)[s]$ тогда и только тогда, когда он очищен от $p_\pi[s]$.

Доказательство. В случаях ($\pi 2$)–($\pi 3$) конструкции свидетель p_π выбирается одновременно с определением или обновлением $Clr_\rho(\pi)$. Также в случае ($\pi 1$) переходим по ссылке и выбираем p_π, а на более поздних шагах определяем $a_\rho(z)$ для $z > Clr_\rho(\pi)$. Таким образом, если значение $a_\rho(z)[s]$ определено, то $p_\pi[s] < a_\rho(z)[s]$ для всех $s > s_0$. □

(6) На каждом шаге s, если $Clr_\rho(\pi)[s]$ и $Clr_{\rho'}(\pi)[s]$ определены для $\rho\widehat{\ }\infty \subset \rho'\widehat{\ }\infty \subseteq \pi$, то соответствующие интервалы очищены от p_π (и, в частности, $\varphi_\rho(x)[s] < a_{\rho'}(z)[s]$, где $x \leq Clr_\rho(\pi)[s]$ и $z > Clr_{\rho'}(\pi)[s]$, верно и обратное, с заменой ρ на ρ').

Доказательство. Утверждения следует из конструкции (см. случаи

($\pi 2$) и ($\pi 3$), а также ($\pi 1$) и комментарии к ним) и пункта (5). □

(7) Если $\rho\widehat{\ }\infty \subseteq \pi$ не инициализируется после шага s_0 и значения $p_\pi[s]$ и $Clr_\rho(\pi)[s]$ уже определены на шаге $s > s_0$, то стратегия ρ очищена от π на шаге s.

Доказательство. получаем, что интервал $[0, Clr_\rho(\pi)[s]]$ очищен от $p_\pi[s]$. Следовательно, по определению стратегия ρ очищена от π на шаге s. □

Замечание 2. Нетрудно видеть, что любая $\mathscr{R}$-стратегия ρ будет на каждом шаге очищена от каждого $\pi \supseteq \rho\widehat{\ }\infty$. Таким образом, каждый ее цикл будет всегда очищен.

Перейдем к доказательству основного утверждения леммы. Поскольку π не инициализируется после шага s_0, то после шага s_0 ни одна ссылка на вершины $\pi' < \pi$ не может быть создана. Тогда по пункту (4) достаточно рассмотреть только $Clr_\rho(\pi)$, игнорируя все меньшие $Clr_\rho(\pi')$. По пункту (2) вершины $\rho\widehat{\ }\infty \subseteq \pi$ могут создавать ссылки на π только последовательно. Кроме того, каждая ссылка проходит оба этапа (т. е. случаи ($\pi 1$) и ($\pi 2$)), и только потом отменяется стратегией π.

Рассмотрим фиксированную стратегию ρ такую, что $\rho\widehat{\ }\infty \subseteq \pi$. В конструкции в этих двух случаях (т. е. ($\pi 1$) и ($\pi 2$)) увеличиваем $Clr_{\rho'}(\pi)$ (а именно, делаем эти значения неопределенными в пункте ($\pi 1$) и переопределяем пункте ($\pi 2$)) для всех $\rho' \subset \rho$ и не переопределяем их для $\rho'' \supset \rho$. Предположим, что ссылка $Link(\rho, \pi)$ была создана из-за того, что x был перечислен в D_ρ, и предположим, что x не покидает D_ρ, пока существует ссылка (иначе нет необходимости иметь дело с запретом x). Тогда после всей процедуры очистки, инициированной ρ и завершенной на шаге $s > s_0$, выполняется $\Phi_\rho^A(x)[s]{\downarrow}$, где $x \leq Clr_\rho(\pi)[s]$. В частности, $RC_\rho(x)[s] = 0$, и это значение может измениться только после того, как x покинет D_ρ, что может произойти только конечное число раз. Кроме того, для каждого ρ-расширяющего шага s, на котором ссылки не создаются, $RC_\rho(x)[s] = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда x очищен от всех таких π, что $x \leq Clr_\rho(\pi)$.

Более того, маркеры, относящиеся к циклам вне интервалов, соответствующих $Clr_{\rho'}(\pi)[s]$ и $Clr_{\rho''}(\pi)[s]$, где $\rho' \subset \rho \subset \rho'' \subset \pi$, не могут нару-

шить вычисление $\Phi_\rho^A(x)[s]\downarrow$: по пункту (7) интервал $[0, Clr_\rho(\pi)[s]]$ очищен на шаге s. Действительно, для всех $\rho' \subset \rho$ параметры $Clr_{\rho'}(\pi)$ становятся неопределенными, а параметры $a_{\rho'}(z)$ и $c_{\rho'}(z)$ циклов $z > Clr_{\rho'}(\pi)$ будут определены как большие числа позже. В частности, они будут выбраны большими, чем $\varphi_\rho(x)[s]$ (это выполняется также для p_π). С другой стороны все такие ρ'', что $\rho \subset \rho'' \subset \pi$, будут ждать своих расширяющих шагов, чтобы выбрать новые большие $a_{\rho''}(z)$ для $z > Clr_{\rho''}(\pi)$, в частности, $a_{\rho''}(z) > \varphi_\rho(x)[s]$. Как следствие получаем дополнительный элемент с завершенным (и очищенным) вычислением внутри интервала очистки $[0, Clr_\rho(\pi)]$.

Осталось отметить, что каждое значение $Clr_\rho(\pi)$ может быть увеличено только конечное число раз. Используем аргумент, похожий на рассуждения из интуитивной части доказательства, где были рассмотрены взаимодействие стратегий. По индукции предположим, что $Clr_{\rho''}(\pi)$ стабилизируется после некоторого шага $s_1 > s_0$, где $\rho \subset \rho'' \subset \pi$. Поскольку $D_{\rho''}$ является 2-в.п. множеством, то возможно лишь конечное число изменений $D_{\rho''}\lceil Clr_{\rho''}(\pi)$, поэтому требуется только конечное число процедур очистки соответствующего интервала от π (нетрудно видеть, что эти же рассуждения проходят и для произвольного Δ_2^0-множества D). Таким образом, значение $Clr_\rho(\pi)$ может быть увеличено из-за ρ'' лишь конечное число раз при условии, что $Clr_{\rho''}(\pi)$ уже стабилизировалось. □

ЛЕММА 2. Каждая вершина на TP инициализируется только конечное число раз.

Доказательство. Сперва отметим, что инициализация вершины ξ на шаге s происходит в одном из следующих случаев:

(In1) В случае диагонализации после того, как построена аппроксимация TP_s. Тогда ξ инициализируется, если $\xi \not\leq TP_s$.

(In2) В случае инициализации из-за какой-либо $\mathscr{N}$-стратегии η, которая требует внимания и изменяет значение параметра $SatN(e)$ с 0 на 1. Это может произойти или в процессе построения TP_s, или в начале подшага. В любом случае $\eta \leq TP_s$, и ξ инициализируется, если $\xi \not\leq \eta$.

(In3) В случае диагонализации из-за какой-либо $\mathscr{P}$-стратегии π, ко-

торую посещаем через ссылку. Это соответствует случаям ($\pi 1$) и ($\pi 2$) в конструкции. Отметим, что $\pi \subseteq TP_s$, и ξ инициализируется, если $\xi \not\leq \pi$.

(In4) В случае диагонализации из-за какой-либо $\mathscr{P}$-стратегии π, которую посетили в обычном порядке (после посещения ее непосредственной предшественницы). Это соответствует случаям ($\pi 3$) (π начинает свою работу) или ($\pi 4$) (она завершает свою работу и становится удовлетворенной). Отметим, что $\pi \subseteq TP_s$, и ξ инициализируется, если $\xi \not\leq \pi$.

Отметим, что на каждом шаге может произойти только одна инициализация. Далее, проводим индукционные рассуждения по вершинам на TP. Ясно, что корневая вершина никогда не будет инициализирована. Рассмотрим вершину $\xi \subset TP$ и предположим, что ξ_0, непосредственная предшественница ξ (т. е. $\xi_0{}^\frown o = \xi$, где o является выходом ξ_0), не инициализируется после шага s_0, в частности, ни одна вершина $< \xi_0$ не будет посещена после шага s_0. Достаточно рассмотреть только непосредственную предшественницу ξ, поскольку если какая-то меньшая вершина будет инициализирована, то ξ_0 также будет инициализирована. Таким образом, необходимо рассмотреть следующие случаи стратегии ξ_0:

$\xi_0 = \rho$ является $\mathscr{R}$-стратегией. Тогда ρ не может инициализировать ξ бесконечное число раз, поскольку ρ может инициализировать другие вершины только в случае (In1) на шагах, соответствующих выходу ∞. Поэтому, если $o = \infty$, то ξ не будет инициализирована после s_0, и если $o = fin$, то ξ будет инициализирована не более конечного числа раз, поскольку $\rho{}^\frown\infty$ находится слева от TP и не будет посещена после некоторого шага $s_1 > s_0$. Начиная с этого шага, может быть только конечное число инициализаций из-за действий $\mathscr{N}$-стратегий $\eta \supset \rho{}^\frown\infty$ из-за случая (In2).

$\xi_0 = \eta$ является $\mathscr{N}$-стратегией. Выходом может быть только fin. Тогда ξ может быть инициализирована после шага s_0 не более одного раза из-за случая (In2).

$\xi_0 = \pi$ является $\mathscr{P}$-стратегией. Выходом может быть только fin. По лемме 1 случай (In3) может произойти только конечное число раз. Для случая (In4) пусть $s_1 > s_0$ будет таким шагом, после которого не используем ссылки для посещения π. Тогда ясно, что свидетель $p = p_\pi[s_1]$ будет

окончательным. Поэтому π может инициализировать ξ только из-за случая ($\pi 4$), и это может произойти только один раз. Это завершает доказательство леммы 2. □

ЛЕММА 3. Для каждой $\xi \subset TP$ существует бесконечно много таких шагов s, что ξ посещается на шаге s.

Доказательство. Другими словами, лемма утверждает, что для каждой $\xi \subset TP$ существует бесконечно много таких шагов s, что $\xi \subseteq TP_s \subset TP$, и нет ссылки $Link(\rho, \pi)$ на шаге s с $\rho\hat{}\infty \subseteq \xi \subset \pi$.

Рассуждаем от противного: пусть s_0 является последним шагом, на котором ξ была посещена. Также предположим, что для всех рассматриваемых шагов s выполняется $TP_s \subset TP$. Если существует $Link(\rho, \pi)$ на шаге $s_1 > s_0$ и $\rho\hat{}\infty \subseteq \xi \subset \pi$, то π инициализирует все $\mathscr{P}$-стратегии $\pi' \supset \pi$, в частности, не может быть создана никакая ссылка на π' до того, как она снова будет посещена. Таким образом, после шага s_1 существует только конечное число таких $\mathscr{P}$-стратегий, что $\xi \subset \pi'' \subset \pi$, и к π'' ведет ссылка. Теперь отметим, что если π не инициализируется после s_1, то она может быть посещена только конечно число раз через ссылку, что следует из леммы 2. С другой стороны, если π будет инициализирована после s_1, то ρ не может создать ссылку на π. В любом случае можем продолжать аналогичные рассуждения с $\pi'' \subset \pi$ вместо π. Тогда каждая π'', где $\xi \subset \pi'' \subset \pi$, после шага s_0 может быть посещена только конечное число раз. Поскольку существует только конечное число $\rho \subset \xi$, то все ссылки, созданные ими, будут отменены. Таким образом, позднее посетим $\xi \in TP$, противоречие. □

ЛЕММА 4. Каждое $\mathscr{R}$-требование удовлетворяется соответствующей вершиной на TP.

Доказательство. Рассмотрим требование $\mathscr{R}_e$ и соответствующую ему вершину $\rho \subset TP$. По лемме 2 существует такой шаг s_0, что ρ не будет инициализирована после этого шага. По лемме 3 посетим ρ на бесконечном числе шагов после s_0. Дальнейшие рассуждения будут относиться именно к таким шагам.

Сначала убедимся, что если $\rho\hat{}fin \subset TP$, то $D_e \neq W_e^A$. Напомним, что

ρ-расширяющие шаги определены как такие шаги, на которых $l(\rho)[s] > l(\rho)[s^-]$, где $s^- < s$ является таким предыдущим ρ-расширяющим шагом (на котором, в частности, ρ была посещена). На любом ρ-расширяющем шаге стратегия ρ имеет выход ∞. Отметим, что если $D_e = W_e^A$, то для любого x существует такой шаг $s > s_0$, что для всех $t > s$ выполняется $D_e[t]\lceil x = W_e^A[t]\lceil x$ (поскольку любое множество D_e является 2-в.п.). Другими словами, если бы было равенство в левой части импликации, то не упустили бы его из виду (даже при редком посещении ρ), и, в частности, ρ бесконечно часто имело бы выход ∞.

Далее будем считать, что $\rho^\frown\infty \subset TP$. Таким образом, хотя бы один из случаев (ρ1)–(ρ4) происходит бесконечно часто. Осталось доказать, что сводящие маркеры работают корректно. Напомним, что с циклом x связано несколько параметров, а именно $a_\rho(x)$ и $c_\rho(x)$. По конструкции, при перечислении некоторых $p < a_\rho(x)$ в A маркеры $a_\rho(x)$ и $c_\rho(x)$ перемещаются одновременно. Это позволяет сохранить сведения корректными, даже если $c_\rho(x)[s]$ было перечислено в C_ρ. Кроме того, $a_\rho(x)$ никогда не перечисляется в A для кодирования того, что x покинул D_ρ, поскольку конструкция позволяет избежать таких случаев. Сначала покажем, что эти маркеры определены и перемещаются лишь конечное число раз, затем приступим к кодированию.

Фиксируем цикл x и его параметры. Будет бесконечно много шагов, на которых случаи (ρ1) и (ρ2) не будут происходить, поэтому в соответствии со случаями (ρ3) и (ρ4) конструкции либо исправим сводимости, либо начнем работать на новом цикле. Поскольку не можем провести бесконечное число очисток или исправлений на фиксированном интервале (по лемме 1 и поскольку любое множество D_e является 2-в.п.), то пусть $s_1 > s_0$ будет шагом, на котором мы впервые начинаем работать с циклом x, тем самым выбирая $a_\rho(x)$ и $c_\rho(x)$ в соответствии со случаем (ρ4). По конструкции, $a_\rho(x)[s]$ возрастает тогда и только тогда, когда $c_\rho(x)[s]$ возрастает, а по лемме 1 это будет происходить только конечное число раз (x будет превосходить лишь конечное количество маркеров $Clr_\rho(\pi)$, где $\pi \subset TP$, и и для каждой такой пары ρ и π маркер $Clr_\rho(\pi)$ стабилизируется, поэтому ρ будет

создавать ссылки на π конечное число раз, а π осуществит окончательную диагонализацию не более одного раза). Напомним, что перечисляем $c_\rho(x)$ в C_ρ в соответствии со случаем $(\rho 3)$, но не перечисляем $a_\rho(x)$ в A, и это не увеличивает значений $a_\rho(x)[s]$ и $c_\rho(x)[s]$. Однако перечисление $a_\rho(x)$ в A в случаях $(\pi 1)$ и $(\pi 4)$ позволяет сделать неопределенным (а позднее увеличить) $a_\rho(x)$ и $c_\rho(x)$. Как уже отмечали выше, это будет происходить лишь конечное число раз (любое переопределение маркеров сопровождается перечислением некоторого меньшего числа p_π в A). Поскольку случаи $(\rho 1)-(\rho 4)$ происходят бесконечно часто, а случаи $(\rho 1)-(\rho 3)$ не могут происходить без случая $(\rho 4)$, то значения $a_\rho(x)$ и $c_\rho(x)$ имеют возможность снова стать определенными. Теперь приступаем к кодированию.

Сначала покажем, что $D_e \leq_T A \oplus C_\rho$. Чтобы узнать, верно ли, что $x \in D_e$, ждем такого шага $s > s_1$, что $A[s]\lceil a_\rho(x)[s] = A\lceil a_\rho(x)[s]$ и $C_\rho[s]\lceil c_\rho(x)[s] = C_\rho\lceil c_\rho(x)[s]$. Такой s существует, поскольку $a_\rho(x)$ и $c_\rho(x)$ могут увеличиваться лишь конечное число раз. Теперь $x \in D_e$ тогда и только тогда, когда $x \in D_e[s]$. Действительно, если x перечисляется в D_e после шага s, то инициируем процедуру очистки после шага s, и после этого произойдет случай $(\rho 3)$ и перечислим $c_\rho(x)$ в C_ρ, что противоречит выбору s, поскольку $c_\rho(x)[s] \notin C_\rho[s]$. С другой стороны, если x покидает D_e после шага s, то A должно измениться на каком-то числе, меньшем $\varphi_e(x)$, но тогда некоторое $p < \varphi_e(x)$ должно быть перечислено в A на шаге $t > s$ в соответствии со случаем $(\pi 1)$ или случаем $(\pi 4)$. Пусть π и π' таковы, что $Clr_\rho(\pi)[t] < x \leq Clr_\rho(\pi')[t]$. Поскольку $c_\rho(x) \in C_\rho$ и $[0, Clr_\rho(\pi')[t]]$ очищен от $p_{\pi'}[t]$, то свидетель p может принадлежать только π, а значит, маркер $a_\rho(x) > p_\pi$ должен перечислиться в A, противоречие.

Осталось показать, что $C_\rho \leq_T A \oplus D_e$. Число c может быть перечислено в C_ρ, только если $c = c_\rho(x)$ для некоторого цикла x стратегии ρ. Очевидно, что если c не связано ни с одним циклом ρ, то $c \notin C_\rho$. В противном случае, ждем такого шага s, что $D_e[s]\lceil x[s] = D_e\lceil x[s]$ и $A[s]\lceil a_\rho(x)[s] = A\lceil a_\rho(x)[s]$ (по конструкции $a_\rho(x)[s]$ может увеличиваться только при очистке меньших начальных сегментов или в соответствии со случаем $(\pi 4)$, что может происходить лишь конечное число раз, также отметим, что $D_e(x)$ не мо-

жет измениться дважды без изменения $A(a_\rho(x))$). Теперь $c \in C_\rho$ тогда и только тогда, когда $c \in C_\rho[s]$. Предположим от противного, что $c \in C_\rho$, но $c \notin C_\rho[s]$. Тогда x должен быть перечислен в D_e на некотором шаге $t_0 > s$. Таким образом, на ρ-расширяющем шаге $t_1 > t_0$ стратегия ρ перечислит c в C. Более того, впоследствии x должен покинуть D_e (поскольку $D_e(x) = D_e(x)[s] = 0$), тогда и A должен измениться на каком-то числе, меньшем $\varphi_e(x)$. Остается повторить рассуждение для предыдущего случая. А именно, тогда некоторый $p < \varphi_n(x)$ должен быть перечислен в A на шаге $t > s$ в соответствии со случаем (π1) или случаем (π4). Пусть π и π' таковы, что $Clr_\rho(\pi)[t] < x \leq Clr_\rho(\pi')[t]$. Поскольку $c_\rho(x) \in C_\rho$ и $[0, Clr_\rho(\pi')[t]]$ очищен от $p_{\pi'}[t]$, свидетель p может принадлежать только π, а значит, $a_\rho(x) > p_\pi$ должен быть перечислен в A, противоречие. □

ЛЕММА 5. Каждое $\mathscr{N}$-требование удовлетворяется.

Доказательство. Рассмотрим требование $\mathscr{N}_e$, и пусть $\eta \subset TP$ соответствует $\mathscr{N}_e$. По лемме 2 существует шаг s_0, после которого η не инициализируется. Предположим, что η посещается на каком-то шаге $s_1 > s_0$, тогда $\eta_0 = N(e)[s_1]$ (крайняя левая вершина, соответствующая $\mathscr{N}_e$ после s_1) также не инициализируется после s_1 и $\eta_0 \leq \eta$.

Сначала предположим, что $SatN(e)[s_1] = 0$. Если существует такой шаг $s_2 > s_1$, что $\Psi_e^A(e)[s_2]\downarrow$, тогда мы утверждаем, что $\Psi_e^A(e)\downarrow$ (если такого шага s_1 нет, то предпринимать какие-либо действия для выполнения требования бессмысленно). Это автоматически будет означать, что $SatN(e)[t] = 1$ для всех $t > s_2$. Действительно, если $\Psi_e^A(e)$ становится неопределенным, то некоторый $a < \psi_e(e)[s_2]$ перечисляется в A. Этого не может произойти из-за вершин $\xi \leq \eta$, поскольку иначе ξ придется посетить после шага s_1. Также этого не может произойти из-за вершин $\xi > TP_{s_1}$, поскольку любой новый свидетель или параметр должен быть $> \psi_e(e)[s_2]$. Итак, рассмотрим вершины $\xi \subset \eta$. По конструкции и по лемме 1 (пункт 7) любой маркер $a_\rho(z)[s_3]$ может быть перечислен в A тогда и только тогда, когда некоторый $p_\pi[s_3] < a_\rho(z)[s_3]$ перечисляется в A, где $z > Clr_\rho(\pi)[s_3]$ и $s_3 > s_2$. Но тогда $p_\pi[s_4]$ должно быть меньше $\psi_e(e)[s_2]$ для некоторого $s_4 > s_2$, противоречие (поскольку $\mathscr{P}$-стратегия может выбирать только

большие свидетели, и любая $\mathscr{P}$-стратегия $\xi \subset \eta$ должна выбрать нового свидетеля $p > \psi_e(e)[s_2]$ после шага s_2).

Теперь предположим, что $SatN(e)[s_1] = 1$ и это произошло на шаге $s^* \leq s_1$. Таким образом, мы можем повторить приведенное выше рассуждение с $N(e)[s^*]$ вместо η. В любом случае вычисление $\Psi_e^A(e)$ не изменится после некоторого шага $s_2 > s_1$. □

ЛЕММА 6. Каждое $\mathscr{P}$-требование удовлетворяется соответствующей вершиной TP.

Доказательство. Рассмотрим требование $\mathscr{P}_e$ и зафиксируем соответствующую ему вершину $\pi \subset TP$. По лемме 2 зафиксируем такой шаг s_0, после которого π не инициализируется. Также по лемме 1 фиксируем такой шаг $s_1 > s_0$, после которого π не будет посещено по ссылке. По лемме 3 стратегия π будет иметь бесконечно много возможностей действовать после шага s_1.

Напомним, что свидетель p_π может быть переопределен только в случаях $(\pi 1) - (\pi 3)$ (где случай $(\pi 3)$ может произойти только один раз после инициализации, а случаи $(\pi 1) - (\pi 2)$ могут произойти из-за ссылок), тогда пусть $p = p_\pi[s_2]$ будет окончательным свидетелем для некоторого $s_2 > s_1$.

Теперь, если $\Theta_e(p) \neq 0$, то требование удовлетворено (случай $(\pi 5)$). В противном случае, если $\Theta_e(p)[s_3]{\downarrow} = 0$ на некотором $s_3 > s_2$, то при посещении π на шаге $s_4 > s_3$ перечисляем p в A в соответствии со случаем $(\pi 4)$. Таким образом, $1 = A(p) = A(p)[s_4] \neq \Theta_e(p)[s_4] = \Theta_e(p) = 0$, и требование удовлетворено. На этом доказательства леммы и теоремы завершаются. □

2. ОБОБЩЕНИЕ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Доказательство теоремы 3 основано на том факте, что для любого x любое множество $D\lceil x$ имеет конечное число изменений в вычислимой аппроксимации D, и в доказательстве не требуется, чтобы изменений было не более двух для каждого элемента. Если в теореме 3 вместо класса 2-в.п. множеств мы бы рассматривали класс Δ_2^0-множеств, равномерно вычислимый относительно $\varnothing'$, тогда для каждого такого Δ_2^0-множества каждый

цикл x все равно инициировал бы лишь конечное число очисток (поскольку x может покинуть D (например, во время очистки) и позже перечислиться в D с новым вычислением $W^A(x) = D(x) = 1$, которое потребует новой очистки). Более того, сводящие функционалы для $D \leq_T A \oplus C$ и $C \leq_T A \oplus D$ уже учитывают более двух изменений вычислимых аппроксимаций для элементов D: когда x покидает D, значение маркера $a(x)$ увеличивается. В любом случае, $x \in D$ тогда и только тогда, когда $a(x) \notin A$ и $c(x) \in C$, где $a(x)$ и $c(x)$ — это окончательные позиции маркеров, связанных с x.

Наконец отметим, что в доказательстве теоремы 2 в схеме рассуждений теоремы 3 необходимо было бы учесть все Δ^0_2-множества, а, значит, и рассмотреть нумерацию Σ^0_2-множеств. Следовательно, какое-то из этих множеств, например, D_0, могло бы иметь бесконечное количество изменений в $D_0 \lceil x$ для некоторого x, что в свою очередь могло бы инициировать бесконечное количество очисток для интервала, содержащего x. Интуитивно понятно, что такое бесконечное количество очисток, вызываемых одной $\mathscr{R}$-стратегией, разрушит "неуклюжие" стратегии построения низкого множества, поскольку их невозможно продублировать (где-то ниже вдоль истинного пути TP). В отличие от стратегий низости для стратегий неполноты такие дубликаты можно реализовать согласно типовым конструкциям $\varnothing'''$-приоритетных рассуждений. На наш взгляд это основная причина, по которой в теореме 2 множество A не может быть низким.

Таким образом, доказательство теоремы 3 вполне подходит для любого класса Δ^0_2-множеств, равномерно вычислимого относительно $\varnothing'$, поэтому верно следующее более общее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\mathscr{U}$ — класс Δ^0_2-множеств, равномерно вычислимый относительно $\varnothing'$. Тогда существует такая невычислимая низкая в.п. степень $\mathbf{a}$, что любое $CEA(\mathbf{a})$ множество $D \in \mathscr{U}$ имеет в.п. степень.

Напомним, что любой Σ^{-1}_a-уровень иерархии Ершова (для любого обозначения для ординала $a \in \mathscr{O}$) является классом Δ^0_2-множеств, равномерно вычислимым относительно $\varnothing'$, см., например, [6]–[8]. Таким образом, теорема 4 справедлива, в частности, для любого класса $\mathscr{U}$, в качестве ко-

торого выбраны Σ_a^{-1} или Π_a^{-1} уровни иерархии Ершова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Арсланов, И. И. Батыршин, М. М. Ямалеев, "CEA-операторы и иерархия Ершова. I", *Алгебра логика* **63**, No. 3, 248–270 (2024).
2. R. I. Soare, M. Stob, "Relative recursive enumerability", *Stud. Log. Found. Math.* **107**, 299–324 (1982).
3. M. M. Arslanov, S. Lempp, R. A. Shore, "Interpolating d-r.e. and REA degrees between r.e. degrees", *Ann. Pure Appl. Log.* **78**, No. 1-3, 29–56 (1996).
4. Р. И. Соар, *Вычислимо перечислимые множества и степени*, Казан. мат. о-во, Казань (2000).
5. R. G. Downey, D. R. Hirschfeldt, *Algorithmic Randomness and Complexity*, Springer, New York (2010).
6. Ю. Л. Ершов, "Об одной иерархии множеств. II", *Алгебра логика* **7**, No. 4, 15–47 (1968).
7. В. Л. Селиванов, "Об иерархии Ершова", *Сиб. мат. журн.* **26**, No. 1, 134–149 (1985).
8. С. С. Оспичев, "Фридберговы нумерации в иерархии Ершова", *Алгебра логика* **54**, No. 4, 283–295 (2015).

Статья поступила в редакцию 30 июня 2024 г.
после доработки 4 декабря 2024 г.
принята к публикации 18 декабря 2024 г.

Алгебра и логика Том 63, No. 4, 377–389 (2024)

УДК 512.54+510.67

Ф. А. Дудкин

ОБОБЩЕННЫЕ ГРУППЫ БАУМСЛАГА — СОЛИТЕРА, УНИВЕРСАЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ДРЕВЕСНЫМ ГРУППАМ

Аннотация: Конечнопорожденная группа, действующая на дереве так, что все стабилизаторы вершин и ребер являются бесконечными циклическими группами, называется обобщенной группой Баумслага — Солитера (GBS-группой). Каждая GBS-группа является фундаментальной группой подходящего размеченного графа. Если размеченный граф является деревом, то соответствующая GBS-группа называется древесной. Известно, что GBS-группы, изоморфные древесным группам, сами являются древесными группами. Показано, что GBS-группы, универсально эквивалентные древесным группам, не обязаны быть древесными группами. Более того, дается описание всех GBS-групп, которые универсально эквивалентны древесным.

Ключевые слова: *обобщенная группа Баумслага — Солитера, универсальная эквивалентность, экзистенциальная эквивалентность.*

ВВЕДЕНИЕ

По теореме Басса — Серра каждая GBS-группа G представима как $\pi_1(\mathbb{A})$ — фундаментальная группа графа групп $\mathbb{A}$ [1], все вершинные и реберные группы которой бесконечны циклические.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант № 24-11-00119; https://rscf.ru/project/24-11-00119). Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; DudkinF@gmail.com.

Каждой GBS-группой G можно сопоставить граф с метками $\mathbb{A}$, который является частным случаем графа групп. Такой граф с метками соответствует действию группы G на дереве и задает представление группы G. Подробнее о графах с метками и их свойствах см. [2]. Необходимые определения и свойства приведены в § 1.

Как отметил Робинсон [3], GBS-группы занимают важное место в комбинаторной теории групп благодаря следующим свойствам: нециклические GBS-группы — это в точности те конечнопорожденные группы когомологической размерности 2, которые имеют соизмеримую бесконечную циклическую подгруппу; GBS-группы когерентны (каждая конечнопорожденная подгруппа допускает конечное представление).

Напомним, что универсальной (экзистенциальной) теорией группы G называется множество $\forall$ ($\exists$)-предложений, истинных на группе G, обозначаемое $Th_{\forall}(G)$ ($Th_{\exists}(G)$). Две группы называются универсально (экзистенциально) эквивалентными, если их универсальные (экзистенциальные) теории совпадают. Отметим, что универсальная эквивалентность эквивалентна экзистенциальной. Понятие универсальной (экзистенциальной) эквивалентности является более слабой версией понятия изоморфизма.

В 2020 г. было доказано [4], что древесные GBS-группы G и H универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда G вложена в H и H вложена в G. Вопрос о том, когда одна GBS-группа вложена в другую, нетривиален даже для древесных групп. Алгоритм решения этой проблемы был предложен в [5] для некоторого класса GBS-групп, содержащего древесные. В общем случае проблема вложения, как и проблема изоморфизма, для GBS-групп не решена и считается сложной проблемой.

В настоящей работе мы продолжаем исследование универсальной эквивалентности GBS-групп.

ТЕОРЕМА 1. Неабелева GBS группа G универсально эквивалентна древесной GBS группе тогда и только тогда, когда группу G можно представить графом с метками $\mathbb{A}$ который получается из некоторого дерева с метками добавлением некоторого количества (n, n), $|n| \geqslant 2$, петель.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G и H — две неабелевы GBS группы, универсаль-

но эквивалентные древесным GBS группам. Тогда группы G и H универсально эквивалентны тогда и только тогда, когда G вкладывается в H и H вкладывается в G.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть GBS-группа G задана графом с метками $\mathbb{A}$. Существует алгоритм, который проверяет найдется ли такое дерево с метками $\mathbb{B}$, что $G \equiv_\forall \pi_1(\mathbb{B})$. Если такие деревья с метками существуют, то алгоритм строит одно из них.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть GBS группы G и H заданы графами с метками $\mathbb{A}$ и $\mathbb{C}$ соответственно, причем $\mathbb{C}$ — дерево с метками. Тогда существует алгоритм, который проверяет универсальную эквивалентность эквивалентность G и H.

Отметим, что абелевых GBS группы две — $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Для первой группы теорема 1 верна, для второй — нет, так как $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ универсально эквивалентна древесной GBS группе $\mathbb{Z}$, но не может быть представлена в указанном виде.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Каждой GBS-группе G можно сопоставить *граф с метками* $\mathbb{A} = (A, \lambda)$. Здесь A — конечный связный ориентированный граф (петли и кратные ребра допускаются), снабженный функциями ∂_0 и ∂_1 — начала и конца ребра и функцией $^-\colon E(A) \to E(A)$ обращения ребер. Функция $\lambda\colon E(A) \to \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ — расстановка меток на началах ребер графа A. Метка $\lambda_e = \lambda(e)$, написанная на ребре e с началом в вершине v, определяет вложение $\alpha_e\colon e \to v^{\lambda(e)}$ циклической реберной группы $\langle e \rangle$ в циклическую вершинную группу $\langle v \rangle$ (подробнее о графах с метками и их свойствах см. [2]).

Фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{A})$ *графа с метками* $\mathbb{A} = (A, \lambda)$ задается порождающими и определяющими соотношениями. Обозначим через $\overline{A}$ граф, полученный из A отождествлением e и $\overline{e}$. Максимальное поддерево T графа $\overline{A}$ задает копредставление группы $\pi_1(\mathbb{A})$:

$$\left\langle \begin{array}{l} g_v, v \in V(\overline{A}), \\ t_e, e \in E(\overline{A}) \setminus E(T) \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{l} g_{\partial_0(e)}^{\lambda(e)} = g_{\partial_1(e)}^{\lambda(\overline{e})}, e \in E(T), \\ t_e^{-1} g_{\partial_0(e)}^{\lambda(e)} t_e = g_{\partial_1(e)}^{\lambda(\overline{e})}, e \in E(\overline{A}) \setminus E(T) \end{array} \right\rangle.$$

Для различных максимальных поддеревьев соответствующие копредставления задают изоморфные группы. Будем говорить, что $\mathbb{A}$ — дерево с метками, если $\overline{A}$ — дерево. В этом случае $\pi_1(\mathbb{A})$ имеет копредставление

$$\left\langle g_v, v \in V(\overline{A}) \;\middle|\; g_{\partial_0(e)}^{\lambda(e)} = g_{\partial_1(e)}^{\lambda(\overline{e})}, e \in E(\overline{A}) \right\rangle.$$

Для удобства, в дальнейшем будем обозначать через v как вершину графа, так и соответствующий порождающий фундаментальной группы g_v.

Элемент $g \in G$ называется *эллиптическим* если он стабилизирует вершину дерева. Это эквивалентно тому, что g сопряжен со степенью a для подходящей вершины $a \in V(A)$. В этом случае *трансляционная длина* $|g|$ этого элемента g (см., например, [6, гл. 2]) равна 0. Если $|g| > 0$, то элемент называется *гиперболическим*.

Обобщенные группы Баумслага — Солитера

$$\mathbb{Z},\ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},\ K = \langle\ a, t \mid t^{-1}at = a^{-1}\ \rangle$$

называются *элементарными*. Заметим, что группа K является фундаментальной группой бутылки Клейна и изоморфна $\langle\ a, b \mid a^2 = b^2\ \rangle$ — фундаментальной группе дерева групп с двумя вершинами a и b и

Определим *модулярный гомоморфизм* $\Delta\colon \pi_1(\mathbb{A}) \to \mathbb{Q}^*$. Для данного $g \in \pi_1(\mathbb{A})$ выберем произвольный нетривиальный эллиптический элемент $a \in G$, тогда для некоторых целых m и n, не равных 0, выполняется равенство $g^{-1}a^m g = a^n$. В этом случае, полагаем $\Delta(g) = \frac{m}{n}$. Несложно доказать, что такое определение корректно. Модулярный гомоморфизм играет важную роль в исследовании GBS групп. Если A — дерево и $\pi_1(\mathbb{A})$ неэлементарна, то $\Delta(\pi_1(\mathbb{A})) = \{1\}$ (детали и доказательства см. в [7]).

Если два графа с метками $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ определяют изоморфные GBS группы $\pi_1(\mathbb{A}) \cong \pi_1(\mathbb{B})$ и $\pi_1(\mathbb{A})$ не является элементарной, то существует конечная последовательность *расширений* и *схлопываний* (см. рис. 1), соединяющая $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ [7]. Граф с метками называется *редуцированным*, если он не допускает схлопываний (метка ± 1 может появиться только на петле). Обозначим через $R(G)$ множество редуцированных графов с метками, представляю-

щих группу G.

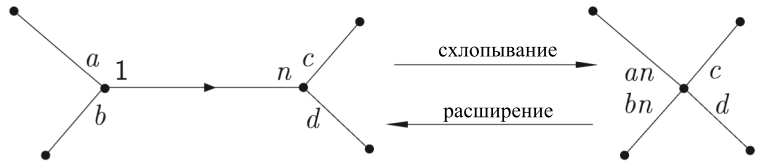


Рис. 1. Схлопывание и расширение.

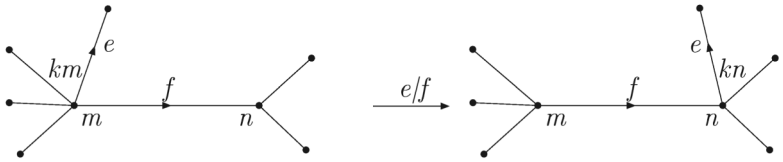


Рис. 2. Скольжение e/f.

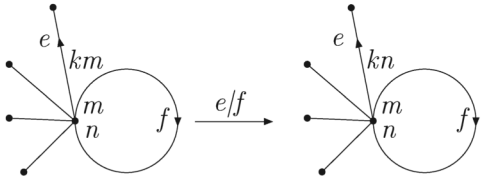


Рис. 3. Скольжение e/f.

На рис. 2 и 3 изображены преобразования графов с метками, которые называются *скольжениями*. Скольжение является композицией расширения и схлопывания. Скольжения могут менять граф с метками данной GBS группы G, оставляя его редуцированным.

Ключевую роль при доказательстве критерия универсальной эквивалентности древесных GBS групп [4] сыграло $\exists$-предложение

$$\Phi_{\mathbb{A}} = (\exists x_1, \ldots, x_n)\Big[\Big(\bigwedge_{i\neq j} x_i^{\mu_{ij}} = x_j^{\mu_{ji}}\Big) \bigwedge \Big(\bigwedge_{i\neq j} \bigwedge_{1\leqslant s<\mu_{ij}} \bigwedge_{1\leqslant r<r_{ij}(s)} x_i^s x_j^r \neq x_j^r x_i^s\Big)\Big].$$

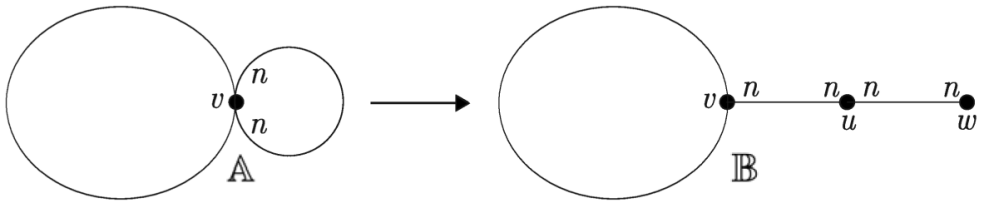
Это предложение строится по дереву с метками $\mathbb{A}$ и обладает следующим

свойством (см. [4]): если $\Phi_{\mathbb{A}}$ выполняется на древесной GBS группе G, то $\pi_1(\mathbb{A})$ вкладывается в G.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

Для доказательства теоремы 1 нам нужно сформулировать и доказать несколько лемм.

ЛЕММА 5 (о расправлении петель). Если граф с метками $\mathbb{B}$ получен из графа с метками $\mathbb{A}$ с помощью замены петли в вершине v с метками (n, n), $|n| \geqslant 2$ на сегмент с началом в v как на рис. 4, то $\pi_1(\mathbb{A})$ вкладывается в $\pi_1(\mathbb{B})$ и $\pi_1(\mathbb{B})$ вкладывается в $\pi_1(\mathbb{A})$.



Расправление (n, n) петли.

Доказательство. Сначала заметим, что $\pi_1(\mathbb{B})$ изоморфно вкладывается в $\pi_1(\mathbb{A})$. Если петле с метками (n, n) соответствует порождающий второго типа t в группе $\pi_1(\mathbb{A})$, то $\pi_1(\mathbb{A})$ является HNN-расширением некоторой группы H с соотношением $t^{-1}v^n t = v^n$. Обозначим через $\varphi\colon \pi_1(\mathbb{A}) \to \langle t \rangle$ естественный гомоморфизм. Известно устройство ядра N этого гомоморфизма, см. [6, теорема 17.1]. Из описания структуры N ясно, что $\pi_1(\mathbb{B})$ вкладывается в N.

Будем считать, что множества порождающих $\pi_1(\mathbb{A})$ и $\pi_1(\mathbb{B})$ отличаются только t и u, w. Определим отображение φ из множества порождающих $\pi_1(\mathbb{A})$ в группу $\pi_1(\mathbb{B})$ по следующему правилу: все порождающие $\pi_1(\mathbb{A})$ кроме t переходят в свои копии, а $\varphi(t) = uw$. Тогда образы соотношений группы $\pi_1(\mathbb{A})$ равны единице в группе $\pi_1(\mathbb{B})$. Поэтому φ продолжается до гомоморфизма групп.

Теперь мы докажем, что φ — вложение. Пусть $g \in Ker\varphi$. Если нормальная форма g не содержит t, то g должен быть равен 1. Пусть g задан

своей нормальной формой в HNN-расширении описанном выше

$$g = g_0 t^{\varepsilon_1} g_1 t^{\varepsilon_2} \dots g_{k-1} t^{\varepsilon_k} g_k \neq 1,$$

здесь $k \geqslant 1, g_i \in H$ и эта запись не содержит подслов $t^{-1} v^{ln} t$ и $t v^{ln} t^{-1}$. Тогда

$$\varphi(g) = g_0 (uw)^{\varepsilon_1} g_1 (uw)^{\varepsilon_2} \dots g_{k-1} (uw)^{\varepsilon_k} g_k.$$

Если $g_i \in \langle v^n \rangle$, то $\varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}$. Поэтому $\varphi(g)$ приводится к виду

$$h_0 (uw)^{l_1} h_1 (uw)^{l_2} \dots h_{s-1} (uw)^{l_s} h_s,$$

здесь l_i, $i = 1, 2, \dots, s$ — целые ненулевые числа чередующихся знаков и $s \geqslant 1$. Эта форма записи является приведенной последовательностью в группе $\pi_1(\mathbb{B})$, если считать эту группу свободным произведением групп H и $\langle u, w \rangle$ с объединением по циклической подгруппе $v^n = u^n$. По теореме о нормальной форме для свободных произведений с объединенной подгруппой, см. [9, гл. IV, § 2], $\varphi(g) \neq 1$. Лемма 5 доказана. □

СЛЕДСТВИЕ 6. В условиях леммы 5 группы $\pi_1(\mathbb{A})$ и $\pi_1(\mathbb{B})$ универсально эквивалентны.

ЛЕММА 7. Если GBS-группа G такова, что $\Delta(G) = \{\pm 1\}$, то G универсально эквивалентна древесной GBS-группе тогда и только тогда, когда G изоморфна фундаментальной группе бутылки Клейна.

Доказательство. Во введении упоминалось, что если группа G изоморфна фундаментальной группе бутылки Клейна, то она древесная.

Предположим теперь, что G и H такие универсально эквивалентные GBS группы, что $\Delta(G) = \{\pm 1\}$ и H древесная. Предположим еще, что в группе G и, следовательно, в группе H для некоторого целого $m \geqslant 2$ выполняется $\exists$-предложение

$$\exists x, y \ (x^{-1} y^m x = y^{-m}) \wedge (x^{-2} y x^2 \neq y).$$

Обозначим элементы H на которых реализуется это предложение че-

рез x_H, y_H соответственно. Тогда y_H гиперболический, иначе $-1 \in \Delta(H) = \{1\}$. Централизаторы гиперболических элементов в древесных GBS группах подробно описаны (см. [10, Следствие 12]). Из этого описания ясно, что если $x_H^2 \in C_H(y_H^m)$, то $x_H^2 \in C_H(y_H^k)$ для всех целых k. Поэтому в G для всех целых ненулевых m выполняется $\forall$-предложение

$$\forall x, y\ (x^{-1}y^m x = y^{-m}) \to (x^{-2}yx^2 = y).$$

Отсюда сразу следует, что если группа G задана редуцированным графом с метками $\mathbb{A}$, то ребро e вне максимального поддерева соответствующее порождающему второго типа t для которого $\Delta(t) = \{-1\}$ является петлей с метками $(1, -1)$ и в графе A только одна вершина. По лемме 5 (и используя скольжения по e) можно считать, что оставшиеся петли имеют метки $(1, 1)$.

Докажем, что таких ребер быть не может, тогда группа G будет изоморфна фундаментальной группе бутылки Клейна. Пусть есть хоть одна (1,1) петля. Тогда в группе G выполняется $\exists$-предложение

$$\exists x, y, z\ ([x, y] = 1) \wedge (z^{-1}xz = x^{-1}) \wedge ([z^2, y] \neq 1) \wedge (x \neq 1).$$

Если x_H, y_H, z_H те элементы H на которых реализуется это предложение, то x_H опять гиперболический и $y_H, z_H^2 \in C(x_H)$. Но из упомянутого следствия 12 из [10] следует, что группа $C(x_H)$ абелева. Это противоречие завершает доказательство леммы 7. □

Доказательство теоремы 1. Сразу заметим, что теорема верна для элементарной неабелевой группы — фундаментальной группы бутылки Клейна. Далее предполагаем, что GBS группа G неэлементарна.

Если группу G можно представить в указанном виде, то получаем искомое дерево с метками и соответствующая универсальная эквивалентность вытекает из леммы 5 о расправлении петель.

Предположим теперь, что GBS группа $G = \pi_1(\mathbb{A})$ неэлементарна и универсально эквивалентна некоторой древесной GBS группе $\pi_1(\mathbb{B})$.

Сначала заметим, что $\Delta(G) = \{1\}$. Иначе найдутся различные целые числа $m \neq 0, n \neq 0$, такие что в группе G выполняется $\exists$-предложение

$$\exists x, y \ (y^{-1}x^m y = x^n) \wedge (xy \neq yx).$$

Тогда такое предложение должно быть истинно на древесной GBS группе $\pi_1(\mathbb{B})$. Из [6, гл. 2, упражнение 2.3] следует, что $|m||x| = |n||x|$. Значит либо $n = -m$, либо $|x| = 0$. В первом случае получаем противоречие с леммой 7. Во втором случае x — эллиптический элемент. Тогда

$$\Delta(y) = \frac{m}{n} \in \Delta(\pi_1(\mathbb{B})) = \{1\}.$$

Это противоречит выбору m и n.

Так как $\Delta(G) = \{1\}$, то $|R(G)| < \infty$. Докажем теперь, что существует $\mathbb{A} \in R(G)$ такой, что все ребра вне максимального поддерева являются петлями. Если это не так, то найдется цикл в $\mathbb{A}$ такой, что его нельзя скольжениями превратить в петлю. Из этого вытекают некоторые условия отсутствия делимости меток этого цикла. Поэтому в группе G выполнено $\exists$-предложение

$$\exists z \left[\Phi_{\mathbb{T}} \wedge (z^{-1}x^k z = y^l) \wedge (x^k \neq y^l)\right],$$

где T некоторое максимальное поддерево A, x, y связанные переменные $\Phi_{\mathbb{T}}$ соответствующие началу и концу ребра вне максимального поддерева, z соответствует порождающему второго типа для этого ребра, а натуральные числа k, l выбраны минимальными (они пропорциональны, поэтому такое требование корректно). Элементы $\pi_1(\mathbb{B})$, соответствующие x и y, эллиптические и $z^{-1}x^k z = y^l \in C(y)$. Из описания централизаторов эллиптических элементов вытекает, что y коммутирует с $z^{-1}x^k z$ побуквенно (как редуцированные слова в алфавите стандартных порождающих). В частности, $yz = zy$. Поэтому $x^k = y^l$; противоречие.

Теперь выберем $\mathbb{A} \in R(G)$ такой, что все ребра вне максимального поддерева являются петлями. Если метки на некоторой петле не равны одновременно 1 (или -1), то по лемме 5 о расправлении петель мы можем

построить граф с метками $\mathbb{C}$ такой, что $\pi_1(\mathbb{A}) \equiv_\forall \pi_1(\mathbb{C})$ и число ребер вне максимального поддерева $\mathbb{C}$ меньше, чем число ребер вне максимального поддерева $\mathbb{A}$. Поэтому можно теперь считать, что на каждой петле $\mathbb{A}$ метки одновременно равны 1 (или -1). Осталось показать, что если имеется хоть одна такая петля, то $\pi_1(\mathbb{A})$ не может быть универсально эквивалентна $\pi_1(\mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ — дерево с метками. Будем доказывать это от противного. Пусть такое дерево с метками $\mathbb{B}$ нашлось.

Сначала разберем случай, когда число вершин $\mathbb{A}$ больше 1. На $\pi_1(\mathbb{A})$ выполнено предложение $\Phi_\mathbb{T}$, где T максимальное поддерево A (оно получается из A удалением петель). Несложно понять, что решетка Z-максимальных поддеревьев $\mathbb{A}$ совпадает с решеткой Z-максимальных поддеревьев $\pi_1(\mathbb{T})$. Эта решетка описывается центрами фундаментальных групп Z-максимальных поддеревьев. Эти центры — циклические групп порожденные степенями вершинных элементов [11] и все такие порождающие полностью вычисляются из $\Phi_\mathbb{T}$.

Отсюда вытекает, что решетки Z-максимальных поддеревьев $\mathbb{A}$, $\mathbb{T}$ и $\mathbb{B}$ изоморфны. Пусть теперь $\Phi_\mathbb{T}$ выполняется в $\pi_1(\mathbb{B})$ на эллиптических элементах (см. доказательство теоремы 1.1 из [8]) $h_i^{-1} b_i^{\alpha_i} h_i$. Так как в группе $\pi_1(\mathbb{A})$ есть еще порождающий второго типа t и эллиптические порождающие $a_1 \neq a_2$ такие, что

$$(t^{-1} a_1 t = a_1) \wedge (t^{-1} a_2^k t = a_2^k) \wedge \wedge_{r=1}^{P} (t^{-r} a_2 t^r \neq a_2),$$

то и в группе $\pi_1(\mathbb{B})$ должны быть элементы с такими же соотношениями (здесь P — достаточно большое число, напр., P можно взять равным произведению всех меток $\pi_1(\mathbb{B})$). Обозначим такие элементы в $\pi_1(\mathbb{B})$ через $s, h_1^{-1} b_1^{\alpha_1} h_1, h_2^{-1} b_2^{\alpha_2} h_2$. Так как s коммутирует с $(h_2^{-1} b_2^{\alpha_2} h_2)^k$ и $s^r, r = 1, 2, \ldots, P$ не коммутируют с $h_2^{-1} b_2^{\alpha_2} h_2$, то элемент s не может быть эллиптическим, значит он гиперболический и $h_1 s h_1^{-1} \in C_{\pi_1(\mathbb{B})}(b_1^{\alpha_1})$. Поэтому $\alpha_1 \neq \pm 1$, иначе $C_{\pi_1(\mathbb{B})}(b_1^{\alpha_1}) \cong \mathbb{Z}$ и s становится эллиптическим элементом. Поэтому решетка Z-максимальных поддеревьев $\mathbb{B}$ содержит решетку Z-максимальных поддеревьев $\mathbb{A}$ в качестве собственной подрешетки, так как

в решетке Z-максимальных поддеревьев $\mathbb{B}$ есть еще одно Z-максимальное поддерево — вершина b_1 с центром $\langle b_1 \rangle$. Противоречие доказывает теорему в рассматриваемом случае.

Остался случай одной вершины. Если ребро тоже одно, то группа G абелева. Если ребер два и больше, то группа $G \cong F_n \times \mathbb{Z}, n \geqslant 2$. Если она универсально эквивалентна $\pi_1(\mathbb{B})$, где $\mathbb{B}$ — дерево с метками, то найдутся числа $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, -1\}$ такие, что в группе $\pi_1(\mathbb{B})$ (а значит и в группе G) выполнено предложение

$$\exists x, y (x^m = y^n) \wedge (xy \neq yx).$$

В группе F_n уравнение $x^m = y^n$ имеет известное множество решений. Элементы x и y должны быть степенями некоторого элемента z и, следовательно, не могут не коммутировать. Противоречие. Теорема 1 доказана. □

Доказательство теоремы 2. Понятно, что теорему надо доказывать только в одну сторону.

Если G и H элементарные и неабелевы GBS группы, то они обе изоморфны фундаментальной группе бутылки Клейна. В этом случае теорема верна.

Если G изоморфна фундаментальной группе бутылки Клейна, а H неэлементарна, то по теореме 1 и лемме 5 о расправлении петель найдется древесная GBS группа L такая, что H вкладывается в L и L вкладывается в H. Кроме того, L универсально эквивалентна H, а значит и G. Однако, L и G являются древесными неабелевыми группами и по теореме 1.1 из [8] L вкладывается в G и G вкладывается в L.

Аналогично теорема доказывается и в том случае, когда обе группы неэлементарны. Теорема 2 доказана. □

Доказательство замечания 3. Укажем шаги алгоритма.

1. Для данного графа с метками $\mathbb{A}$ несложно проверить, является ли

$$G = \pi_1(\mathbb{A})$$

элементарной GBS группой. Если группа G элементарна, то либо она свободная абелева ранга 1 или 2 (в этом случае ответ «да» и соответствующий граф с метками — точка), либо G изоморфна фундаментальной группе бутылки Клейна (в этом случае ответ «да» и соответствующий граф с метками — сегмент с метками (2,2)). Если группа G неэлементарна, то переходим к шагу 2.

2. Если существует древесная GBS группа H такая, что $G \equiv_\forall H$, то $\Delta(G) = \Delta(H) = 1$. Поэтому вычисляем $\Delta(G)$. Если $\Delta(G) \neq \{1\}$, то ответ «нет», иначе $\Delta(G) = \{1\}$.

3. В этом случае $|R(G)|$ конечно и $R(G)$ может быть эффективно перечислено. Составляем $R(G)$.

4. В $R(G)$ ищем граф с метками $\mathbb{A}_1$ у которого все ребра вне максимального поддерева являются петлями. Если такого нет, то ответ «нет» по теореме 1.

5. Если такой есть, то проверяем метки на этих петлях. Если встречаются $(1,1), (-1,-1)$ или $(k,l), k \neq l$, то ответ «нет» по теореме 1.

6. То что осталось допускает по лемме 5 расправление всех петель. Алгоритм отвечает «да» и выдает искомое дерево с метками.

Замечание 3 доказано. □

Доказательство следствия 4. Укажем шаги алгоритма.

1. Для $\mathbb{A}$ запускаем алгоритм из замечания 3. Если ответ «нет» то и этот алгоритм говорит «нет», если ответ «да», то получаем дерево с метками $\mathbb{B}$.

2. По алгоритму из [8] проверяем универсальную эквивалентность $\pi_1(\mathbb{C})$ и $\pi_1(\mathbb{B})$.

Следствие 4 доказано. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J.-P. Serre, *Trees*, Springer, Berlin (1980).

2. M. Clay and M. Forester, "On the isomorphism problem for generalized Baumslag–Solitar groups", *Alg. Geom. Topol.* **8**, No. 4, 2289–2322 (2008).

3. D. J. S. Robinson, "Generalized Baumslag–Solitar groups: a survey of recent progress", *Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser.* **422**, 457–468 (2015),

4. Ф. А. Дудкин, Об универсальной эквивалентности обобщенных групп Баумслага — Солитера, Алгебра и логика, **59**, No. 5, 529–541 (2020).

5. F. A. Dudkin, "On the embedding problem for generalized Baumslag–Solitar groups", *J. Group Theory* **18**, No. 4, 655–684 (2015).

6. O. Bogopolski, *Introduction to Group Theory (EMS Textbk. Math.)*, EMS (2008).

7. M. Forester, "Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees", *Geom. Topol.* **6**, No. 1, 219–267 (2002).

8. Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Мир, М. (1980).

9. F. A. Dudkin, "On the centralizer dimension and lattice of generalized Baumslag–Solitar groups", *Sib. Math. J.* **59**, No. 3, 403–414 (2018).

   Ф. А. Дудкин, "О решетке централизаторов и централизаторной размерности обобщенных групп Баумслага — Солитера", *Сиб. мат. журн.* **59**, No. 3, 514–528 (2018).

10. F. A. Dudkin, "Computation of the centralizer dimension of generalized Baumslag–Solitar groups", *Сиб. электрон. мат. изв.* **15**, 1823–1841 (2018).

Статья поступила в редакцию 20 мая 2024 г.
после доработки 20 мая 2024 г.
принята к публикации 18 сентября 2024 г.

Алгебра и логика Том 63, No. 4, 390–405 (2024)

УДК 510.67

К. Ж. Кудайбергенов

О ЧИСЛЕ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОЛНОЙ ТЕОРИИ И ЕЕ НЕСУЩЕСТВЕННОГО РАСШИРЕНИЯ

Аннотация: Доказывается, что (а) существует полная счетная теория, имеющая 2^ω счетных моделей, некоторое несущественное расширение которой имеет ω счетных моделей; (б) существует полная счетная теория, имеющая 2^ω счетных моделей, некоторое несущественное расширение которой имеет конечное число счетных моделей. Это дает ответ на вопрос А. Д. Тайманова.

Ключевые слова: *полная счетная теория, несущественное расширение, число счетных моделей.*

ВВЕДЕНИЕ

Мы рассматриваем только непротиворечивые теории.

Определение 1. *Несущественным расширением* полной счетной теории T в языке L называется полная теория $T^* \supseteq T$ в языке L^*, полученном добавлением к L конечного числа новых константных символов.

В некоторых работах несущественное расширение называется *константным расширением* или *константным обогащением*.

Поскольку несущественное расширение является в некотором смысле наименее отличающимся от исходной теории, можно предположить, что теория и любое ее несущественное расширение имеют одинаковое число счетных моделей. Однако это оказалось не так.

Работа выполнена при поддержке КН МОН РК (грант № BR20281002). Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алма-Ата, Казахстан; kanatkud@gmail.com.

В дальнейшем для краткости *теорией вида* (n, m) будем называть полную счетную теорию, имеющую n счетных моделей, некоторое несущественное расширение которой имеет m счетных моделей.

Вудроу [1] построил теорию вида $(4, \omega)$, где ω — первый бесконечный кардинал.

Перетятькин [2] построил теорию вида $(3, \omega)$ и поставил вопросы о существовании теории вида (n, m), где $m < n < \omega$, и теории вида (ω, n), где $n < \omega$. В работах Омарова [3] и Байжанова и Умбетбаева [4] отмечено, что А. Д. Тайманов поставил вопрос о существовании теории вида $(2^\omega, n)$, где $n \leq \omega$.

Омаров [3] дал положительные ответы на вопросы Перетятькина. В частности, Омаров построил теорию вида $(n + 5, 5)$ для любого $n < \omega$. Положительный ответ на вопрос Тайманова был сформулирован в теореме 3 в [3]. Однако детальный анализ конструкции из [3], проведенный в [4], показал, что теория, построенная Омаровым в [3, теорема 3], имеет ω счетных моделей. Поэтому, как отмечено в [4], вопрос Тайманова остается открытым.

В настоящей работе мы даем утвердительный ответ на вопрос Тайманова. А именно, мы показываем, что существует теория вида $(2^\omega, \omega)$ (§ 4) и для любого $0 < m < \omega$ существует теория вида $(2^\omega, m + 2)$ (§ 7). Кроме того, дополняя результат Омарова [3], мы доказываем, что для любых $0 < n < \omega$ и $0 < m < \omega$ существуют теория вида $(n + m + 2, m + 2)$ (§ 2) и теория вида $(\omega, m + 2)$ (§ 6).

В § 1 вводятся обозначения и определения. Операция прямой суммы и операция Eq-суммы для теорий описываются в § 3 и 5 соответственно; эти операции используются в § 4, 6–8. В § 8 мы делаем заключительные замечания, показывая, что полная счетная теория может иметь много различных видов, что не существует теории вида (n, m), где $m \leq 2 \leq n$ и n — конечный или бесконечный кардинал, а также не существует теории вида (λ, μ), где $\lambda < \mu$ и μ — несчетный кардинал.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Введем некоторые обозначения, определения и соглашения. Все необходимые сведения по теории моделей можно найти в [5] и [6].

Модели обозначаются через $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ (возможно, с индексами), а их основные множества (универсумы) — через M и N соответственно. Интерпретацию предикатного символа P в модели $\mathscr{M}$ обозначаем используем $P^{\mathscr{M}}$ или $P(\mathscr{M})$, не делая различия в обозначениях для константных символов и их интерпретаций. Если T — теория в языке L и $L' \subseteq L$, то $T \restriction L'$ обозначает ограничение теории T на язык L'. Обозначаем через $\mathscr{N}(X)$ подмодель модели $\mathscr{N}$, порожденную множеством $X \subseteq N$.

Мощность множества X обозначается $|X|$. Множество всех рациональных чисел обозначается через $\mathbb{Q}$, а множество всех функций $f : X \to Y$ — через ${}^{X}Y$.

Напомним, что *сечением* линейно упорядоченного множества $(B, \leqslant)$ называется пара (C, D) непустых подмножеств множества B таких, что $B = C \cup D$ и $c < d$ для любых $c \in C$ и $d \in D$.

2. ТЕОРИЯ ВИДА $(n + m + 2, m + 2)$ ДЛЯ $0 < n < \omega$ И $0 < m < \omega$

ТЕОРЕМА 2.1. Для любых $0 < n < \omega$ и $0 < m < \omega$ существует полная счетная теория, имеющая $n + m + 2$ счетных моделей, некоторое несущественное расширение которой имеет $m + 2$ счетных моделей.

Доказательство. Фиксируем $0 < n < \omega$ и $0 < m < \omega$ и рассмотрим теорию T_{nm} в языке

$$L_{nm} = \{\leqslant, A, R_i, P_k, \sqcap, c_j : i < n,\ k < m,\ j < \omega\},$$

где $\leqslant$ — бинарный предикатный символ, A, R_i и P_k — унарные предикатные символы, $\sqcap$ — бинарный функциональный символ, а c_j — константные символы. Теория T_{nm} имеет следующие аксиомы (A1)–(A8):

(A1) $\mathrm{Th}(\mathscr{M})$, где $\mathscr{M} = (M, \leqslant^{\mathscr{M}}, A^{\mathscr{M}})$ — плотное бинарное дерево с множеством $A^{\mathscr{M}}$ максимальных элементов. А именно:

$M = {}^{[0,1]\geq}2 = \bigcup\{{}^{[0,p]}2 : p \in \mathbb{Q},\ 0 \leq p \leq 1\}$,

$[0,p] = \{q \in \mathbb{Q} : 0 \leq q \leq p\}$,

${}^{[0,p]}2$ — множество всех функций из $[0,p]$ в $2 = \{0,1\}$,

$A^{\mathscr{M}} = {}^{[0,1]}2$,

$\leqslant^{\mathscr{M}} = \{(a,b) : a,b \in {}^{[0,1]\geq}2,\ a \subseteq b\}$.

(A2) $(\forall x)(c_0 \leqslant x) \wedge c_i < c_{i+1}$, $i < \omega$.

(A3) $(\forall x)[A(x) \leftrightarrow \bigvee\limits_{i<n} R_i(x)]$.

(A4) $(\forall x)[R_i(x) \to \neg R_j(x)]$, $i < j < n$.

(A5) $(\forall x)[\neg A(x) \to (\exists y)(x < y \wedge R_i(y))]$, $i < n$.

(A6) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)[x \sqcap y = z \leftrightarrow (z \leqslant x \wedge z \leqslant y \wedge \neg(\exists t)(z < t \leqslant x \wedge t \leqslant y))]$,

т.е. $x \sqcap y$ — наибольшая нижняя грань элементов x и y.

(A7) $(\forall x)[\neg A(x) \to \bigvee\limits_{i<m} P_i(x)]$.

(A8) $(\forall x)[P_i(x) \to \neg P_j(x)]$, $i < j < \omega$.

(A9) $(\forall x)(\forall y)[(x < y \wedge \neg A(x) \wedge \neg A(y)) \to (\exists z)(x < z < y \wedge P_i(z))]$, $i < m$.

(A10) $P_0(c_i)$, $i < \omega$.

Модель $\mathscr{M}$ из (A1) очевидным образом расширяется до модели теории T_{nm}. Следовательно, T_{nm} непротиворечива.

Пусть $L_{nm,k} = L_{nm} \setminus \{c_j : k \leq j < \omega\}$. Теория $T_{nm,k} = T_{nm} \restriction L_{nm,k}$ непротиворечива, ω-категорична (челночный метод применим для доказательства того, что любые две счетные модели $T_{nm,k}$ изоморфны) и не имеет конечных моделей. Следовательно, $T_{nm,k}$ полна. Это верно для любого $k < \omega$, значит теория T_{nm} полна.

Нетрудно показать, что для любой модели $\mathscr{N}$ теории $T_{nm,k}$, любой ω-насыщенной модели $\mathscr{N}'$ теории $T_{nm,k}$, любого конечного $B \subseteq N$ и любого $a \in N$ всякий изоморфизм из $\mathscr{N}(B)$ в $\mathscr{N}'$ продолжается до изоморфизма из $\mathscr{N}(B \cup \{a\})$ в $\mathscr{N}'$. Тогда ввиду [5, § 39, предложение 2] теория $T_{nm,k}$ допускает элиминацию кванторов. Это верно для любого $k < \omega$, поэтому теория T_{nm} допускает элиминацию кванторов.

Для модели $\mathscr{N}$ теории T_{nm} положим

$$\Delta(\mathscr{N}) = \{a \in N : (\forall i < \omega)\mathscr{N} \vDash c_i < a\}.$$

Заметим, что если $|\Delta(\mathscr{N})| > 1$, то $\Delta(\mathscr{N})$ бесконечно. Действительно, если $a, a' \in \Delta(\mathscr{N})$ и $a \neq a'$, то $b = a \sqcap a' \in \Delta(\mathscr{N})$ и $b < a$ (или $b < a'$). Тогда ввиду плотности частичного порядка $<$ существуют бесконечно много элементов d таких, что $b < d < a$ (или $b < d < a'$), и значит $d \in \Delta(\mathscr{N})$.

Справедливы следующие утверждения (B1)–(B3).

(B1) Любая модель $\mathscr{N}$ теории T_{nm} удовлетворяет одному и только одному условию из множества $\{(1), (2), (3_j), (4_i) : j < m,\ i < n\}$, где

(1) $\Delta(\mathscr{N}) = \varnothing$;

(2) $\Delta(\mathscr{N})$ бесконечно и не имеет наименьшего элемента;

(3_j) $\Delta(\mathscr{N})$ бесконечно и имеет наименьший элемент $b \in P_j^{\mathscr{N}}$;

(4_i) $\Delta(\mathscr{N}) = \{a\}$, где $a \in R_i^{\mathscr{N}}$.

(B2) Для любого условия из $\{(1), (2), (3_j), (4_i) : j < m,\ i < n\}$ существует счетная модель $\mathscr{N}$ теории T_{nm}, удовлетворяющая этому условию.

(B3) Любые две счетные модели T_n, удовлетворяющие одному и тому же условию из $\{(1), (2), (3_j), (4_i) : j < m,\ i < n\}$, изоморфны.

Утверждение (B1) очевидно.

Для доказательства утверждения (B2) возьмем счетную элементарную подмодель $\mathscr{M}'$ модели $\mathscr{M}$ из (A1) и расширим ее до модели $\mathscr{N}$ теории T_{nm} следующим образом. Как интерпретируется символ $\sqcap$, уже было сказано. Символы R_i, $i < n$, и P_j, $j < m$, интерпретируются так, чтобы удовлетворять аксиомам (A3)–(A5), (A7)–(A10). Константы c_k выбираются по индукции по $k < \omega$ следующим образом. В качестве c_0 берем наименьший элемент дерева $\mathscr{M}'$.

Чтобы получить модель с условием (1), в дереве $\mathscr{M}'$ выбираем максимальную цепь $B = \{b_k : k < \omega\}$ без наибольшего элемента (такая цепь существует, поскольку $\mathscr{M}'$ счетна). Очевидно, $c_0 \in B$. Если константа c_k уже выбрана, то в качестве c_{k+1} берем элемент $b \in B$ такой, что $b > b_k$ и $b > c_k$. Очевидно, это обеспечивает выполнение условия (1).

Чтобы получить модель с условием (2), в дереве $\mathscr{M}'$ выбираем максимальную цепь C. Очевидно, $c_0 \in C$. Поскольку C счетна и плотно упорядочена, существует сечение (D, E), в котором $D = \{d_j : j < \omega\}$ не имеет наибольшего элемента, а E не имеет наименьшего элемента. Если кон-

станта c_k уже выбрана, то в качестве c_{k+1} берем элемент $d \in D$ такой, что $d > d_k$ и $d > c_k$.

Чтобы получить модель с условием (3_j), в дереве $\mathscr{M}'$ выбираем максимальную цепь C, берем сечение (D, E), в котором $D = \{d_k : k < \omega\}$ не имеет наибольшего элемента, а E бесконечно и имеет наибольший элемент $b \in P_j$, и выбираем c_{k+1} как в предыдущем случае.

Чтобы получить модель с условием (4_i), в дереве $\mathscr{M}'$ выбираем максимальную цепь C с наибольшим элементом $a \in R_i$, берем сечение (D, E), в котором $E = \{a\}$, и выбираем c_{k+1} как в предыдущих случаях.

Для доказательства утверждения (B3) используем челночный метод (здесь важна плотность частичного порядка $\leqslant$).

Из утверждений (B1)–(B3) следует, что теория T_n имеет $n + m + 2$ счетных модели.

Возьмем модель $\mathscr{N} \vDash T_{nm}$, содержащую элемент $a^* \in \Delta(\mathscr{N}) \cap A^{\mathscr{N}}$, и рассмотрим несущественное расширение $T^*_{nm} = \mathrm{Th}(\mathscr{N}, a^*)$ теории T_{nm}. Справедливы следующие утверждения (C1)–(C3).

(C1) Любая модель $\mathscr{N}^*$ теории T^*_{nm} удовлетворяет одному и только одному из условий (1^*)–(3^*_j), $j < m$, где

(1^*) $\Delta(\mathscr{N}^*) = \{a^*\}$;

(2^*) $\Delta(\mathscr{N}^*)$ бесконечно и не имеет наименьшего элемента;

(3^*_j) $\Delta(\mathscr{N}^*)$ бесконечно и имеет наименьший элемент $b \in P_j^{\mathscr{N}^*}$.

(C2) Для любого из условий (1^*)–(3^*_j), $j < m$, существует счетная модель $\mathscr{N}^*$ теории T^*_{nm}, удовлетворяющая этому условию.

(C3) Любые две счетные модели T^*_{nm}, удовлетворяющие одному (и тому же) из условий 1^*)–(3^*_j), $j < m$, изоморфны.

Утверждение (C1) очевидно, а (C2) и (C3) доказываются почти так же, как (B2) и (B3).

Из утверждений (C1)–(C3) следует, что несущественное расширение T^*_{nm} теории T_{nm} имеет $m + 2$ счетных модели.

Теорема 2.1 доказана. □

3. ПРЯМЫЕ СУММЫ ТЕОРИЙ

Напомним определение прямой суммы (суммы по предикатам) из [7, § 4].

Пусть T^i — полная теория в языке L^i, $i < \alpha$. Если необходимо, меняем обозначения символов в языках так, чтобы выполнялось условие $L^i \cap L^j = \varnothing$ для всех $i < j < \alpha$. Пусть унарные предикатные символы S_j, $j < \alpha$, не принадлежат $\bigcup\limits_{i<\alpha} L^i$, и пусть $\mathscr{M}^i$ — модель теории T^i, $i < \alpha$, где $M^i \cap M^j = \varnothing$ для всех $i < j < \alpha$. Определим модель $\mathscr{M}$ в языке

$$L = \bigcup_{i<\alpha} L^i \cup \{S_j : j < \alpha\}$$

следующим образом. Положим

$M = \bigcup\limits_{i<\alpha} M^i$,

$S_i^{\mathscr{M}} = M^i$ для всех $i < \alpha$,

$R^{\mathscr{M}} = R^{\mathscr{M}^i}$ для любого предикатного символа $R \in L^i$, $i < \alpha$.

(Предполагается, что L не содержит функциональных символов.)

Модель $\mathscr{M}$ называется *прямой суммой* (*над* $\{S_j : j < \alpha\}$) моделей $\mathscr{M}^i$, $i < \alpha$, и обозначается $\sum\limits_{i<\alpha} \mathscr{M}^i$. *Прямая сумма* (*по* $\{S_j : j < \alpha\}$) теорий T^i, $i < \alpha$, — это теория

$$\sum_{i<\alpha} T^i = \mathrm{Th}(\mathscr{M}),$$

прямыми слагаемыми которой являются теории T^i, $i < \alpha$.

Поскольку T^i, $i < \alpha$, — полные теории, их прямая сумма не зависит от выбора моделей $\mathscr{M}^i$, $i < \alpha$.

Очевидно, что $\mathscr{M} \vDash \sum\limits_{i<\alpha} T^i$ влечет $\mathscr{M}^i \vDash T^i$, $i < \alpha$, где $\mathscr{M}^i = \mathscr{M}_i \restriction L^i$ и $\mathscr{M}_i$ — подмодель $\mathscr{M}$ с универсумом $M_i = S_i(\mathscr{M})$.

Таким образом, любая модель $\mathscr{N} \vDash \sum\limits_{i<\alpha} T^i$ состоит из следующих двух частей:

(i) $\Gamma_0(\mathscr{N}) = \sum\limits_{i<\alpha} \mathscr{N}^i$, где $\mathscr{N}^i \vDash T^i$, $i < \alpha$;

(ii) $\Gamma_1(\mathscr{N}) = \bigcap\limits_{i<\alpha} \neg S_i(\mathscr{N})$.

Из определений вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. (1) Если $\alpha < \omega$, то $\Gamma_1(\mathscr{N}) = \varnothing$ для любой модели $\mathscr{N} \vDash \sum\limits_{i<\alpha} T^i$.

(2) Если $\alpha \geq \omega$, то для любого $n < \omega$ существует модель $\mathscr{N} \vDash \sum\limits_{i<\alpha} T^i$ такая, что $|\Gamma_1(\mathscr{N})| = n$.

(3) Для любых $\mathscr{N}_i, \mathscr{N}_i' \vDash T^i$, $i < \alpha$, имеем $\sum\limits_{i<\alpha} \mathscr{N}_i \cong \sum\limits_{i<\alpha} \mathscr{N}_i'$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{N}_i \cong \mathscr{N}_i'$ для всех $i < \alpha$.

(4) Для любых $\mathscr{N}, \mathscr{N}' \vDash \sum\limits_{i<\alpha} T^i$ имеем $\mathscr{N} \cong \mathscr{N}'$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_0(\mathscr{N}) \cong \Gamma_0(\mathscr{N}')$ и $|\Gamma_1(\mathscr{N})| = |\Gamma_1(\mathscr{N}')|$.

(5) Если $\alpha = \omega$ и теории T^i, $i < \alpha$, счетны и не ω-категоричны, то $\sum\limits_{i<\alpha} T^i$ имеет 2^ω счетных моделей.

(6) Если $\alpha = \omega$ и теории T^i, $i < \alpha$, счетны и ω-категоричны, то $\sum\limits_{i<\alpha} T^i$ имеет ω счетных моделей.

(7) Если $\alpha < \omega$ и теория T^i имеет λ_i счетных моделей, $i < \alpha$, то $\sum\limits_{i<\alpha} T^i$ имеет $\prod\limits_{i<\alpha} \lambda_i$ счетных моделей.

4. ТЕОРИЯ ВИДА $(2^\omega, \omega)$

ТЕОРЕМА 4.1. Существует полная счетная теория, имеющая 2^ω счетных моделей, некоторое несущественное расширение которой имеет ω счетных моделей.

Доказательство. Пусть T — прямая сумма теорий T^i, $i < \omega$, над $\{S_j : j < \omega\}$, где T^i — теория вида (4,3) в языке

$$L^i = \{\leqslant_i, A_i, R_{0i}, R_{1i}, P_0, \sqcap_i, c_{ji} : j < \omega\},$$

построенная в теореме 2.1. Добавим к языку теории T бинарные предикатные символы U_i, $0 < i < \omega$. Пусть

$$T_\omega = T \cup \{(\mathrm{Is})_i : 0 < i < \omega\},$$

где

$(\mathrm{Is})_i$ U_i — изоморфизм подмодели, порожденной R_{10}, на подмодель, порожденную R_{1i}.

Для модели $\mathcal{N}$ теории T_ω положим

$$\Delta_i(\mathcal{N}) = \{a \in N : (\forall j < \omega)\mathcal{N} \vDash c_{ji} < a\}.$$

Для любого $J \subseteq \omega$ существует счетная модель $\mathcal{N}_J \vDash T_\omega$ такая, что

$$J = \{i < \omega : \Delta_i(\mathcal{N}_J) = \varnothing\},$$

$$\omega \setminus J = \{i < \omega : \Delta_i(\mathcal{N}_J) = \{a\},\ \mathcal{N}_J \vDash R_{0i}(a)\}.$$

Если $J, J' \subseteq \omega$ и $J \neq J'$, то $\mathcal{N}_J \ncong \mathcal{N}_{J'}$. Следовательно, теория T имеет 2^ω счетных моделей.

Пусть модель $\mathcal{N} \vDash T_\omega$ содержит элемент $a^* \in \Delta_0(\mathcal{N}) \cap R_{10}^{\mathcal{N}}$. Для несущественного расширения $T_\omega^* = \mathrm{Th}(\mathcal{N}, a^*)$ теории T_ω справедливы следующие утверждения (D1)–(D3):

(D1) Любая модель $\mathcal{N}^*$ теории T_ω^* удовлетворяет одному и только одному условию из множества $\{(\mathrm{i})_n, (\mathrm{ii})_n, (\mathrm{iii})_n : n < \omega\}$, где

$(\mathrm{i})_n$ $\Delta_0(\mathcal{N}^*) = \{a^*\}$, $|\Gamma_1(\mathcal{N}^*)| = n$;

$(\mathrm{ii})_n$ $\Delta_0(\mathcal{N}^*)$ бесконечно, не имеет наименьшего элемента и $|\Gamma_1(\mathcal{N}^*)| = n$;

$(\mathrm{iii})_n$ $\Delta_0(\mathcal{N}^*)$ бесконечно, имеет наименьший элемент и $|\Gamma_1(\mathcal{N}^*)| = n$.

(D2) Для любого условия из множества $\{(\mathrm{i})_n, (\mathrm{ii})_n, (\mathrm{iii})_n : n < \omega\}$ существует счетная модель $\mathcal{N}^*$ теории T_ω^*, удовлетворяющая этому условию.

(D3) Любые две счетные модели T_ω^*, удовлетворяющие одному и тому же условию из множества $\{(\mathrm{i})_n, (\mathrm{ii})_n, (\mathrm{iii})_n : n < \omega\}$, изоморфны.

Утверждение (D1) очевидно. Утверждение (D2) доказывается так же, как (B2) в доказательстве теоремы 2.1.

Докажем (D3). Пусть $\mathcal{N}_0^*$ и $\mathcal{N}_1^*$ — счетные модели теории T_ω^*. Для любого $j < \omega$ ввиду $(\mathrm{Is})_j$, если $\mathcal{N}_0^*$ и $\mathcal{N}_1^*$ удовлетворяют одному и тому же условию из множества $\{(\mathrm{i})_n, (\mathrm{ii})_n, (\mathrm{iii})_n : n < \omega\}$, то $\mathcal{N}_k^*$ удовлетворяет аналогичному условию, в котором $\Delta_0(\mathcal{N}_k^*)$ заменено на $\Delta_0(\mathcal{N}_k^*)$, $k < 2$. Используя челночный метод, строим изоморфизм между подмоделями с универсумами $S_0(\mathcal{N}_0^*)$ и $S_0(\mathcal{N}_1^*)$, а затем продолжаем его до изоморфизма

между моделями $\mathscr{N}_0^*$ и $\mathscr{N}_1^*$.

Из утверждений (D1)–(D3) следует, что несущественное расширение T_ω^* теории T_ω имеет ω счетных моделей. Теорема 4.1 доказана. □

5. Eq-СУММЫ ТЕОРИЙ

В этом параграфе дадим определение Eq-суммы (суммы над классами эквивалентности).

Пусть T^i — полная теория в языке L^i, $i < \alpha$. Предположим, E — бинарный предикатный символ, $E \notin \bigcup\limits_{i<\alpha} L^i$. Пусть $\mathscr{M}^i \models T^i$, $i < \alpha$, где $M^i \cap M^j = \varnothing$ для любых $i < j < \alpha$. Если некоторые из языков L^i содержат одинаковые константные символы, то для каждого такого символа c добавляем новый унарный предикатный символ P_c, полагаем $P_c^{\mathscr{M}^i} = \{c\}$ в каждой модели $\mathscr{M}^i$, язык которой содержит c, и удаляем c из языка. Определим модель $\mathscr{M}$ в языке

$$L = \bigcup_{i<\alpha} L^i \cup \{E\}$$

следующим образом. Положим

(i) $M = \bigcup\limits_{i<\alpha} M^i$;

(ii) $E^{\mathscr{M}}$ — отношение эквивалентности с классами M^i, $i < \alpha$;

(iii) подмодель $\mathscr{M}$ с универсумом M^i изоморфна $\mathscr{M}^i$;

(iv) для предикатного символа $R \in \bigcup\limits_{i<\alpha} L^i$, если $\mathscr{M} \models R(\bar{a})$, то $\bar{a}$ — кортеж элементов из M^i для некоторого $i < \alpha$.

(Предполагается, что L не содержит функциональных символов.)

Модель $\mathscr{M}$ называется Eq-*суммой* (*над* E) моделей $\mathscr{M}^i$, $i < \alpha$, и обозначается $\mathrm{Eq}(\mathscr{M}^i, E, i < \alpha)$, а теория

$$\mathrm{Eq}(T^i, E, i < \alpha) = \mathrm{Th}(\mathscr{M})$$

называется Eq-*суммой* (*над* E) теорий T^i, $i < \alpha$. Модели $\mathscr{M}^i$, $i < \alpha$, и теории T^i, $i < \alpha$, называются Eq-*слагаемыми* соответствующих Eq-сумм.

Поскольку T^i, $i < \alpha$, — полные теории, их Eq-сумма не зависит от выбора моделей $\mathscr{M}^i$, $i < \alpha$.

В случае $\alpha = \omega$ и $T^i = T$ для всех $i < \alpha$, соответствующая Eq-сумма обозначается через $\mathrm{Eq}(T, E, \omega)$.

Теперь определим *упорядоченную* Eq-*сумму* $\mathrm{Eq}(T, E, \omega, <_E)$, добавляя к языку теории $\mathrm{Eq}(T, E, \omega)$ бинарный предикатный символ $<_E$, а к теории $\mathrm{Eq}(T, E, \omega)$ следующую аксиому:

(Or) $<_E$ — плотный линейный порядок без концов на множестве E-классов; более формально, $<_E$ — частичный порядок такой, что

(i) $(\forall x)(\forall y)[\neg E(x, y) \leftrightarrow (x <_E y \vee y <_E x)]$;

(ii) $(\forall x)(\exists y)(\exists z)[y <_E x <_E z]$;

(iii) $(\forall x)(\forall y)[x <_E y \rightarrow (\exists z)(x <_E z <_E y)]$.

Очевидно, $\mathscr{M} \models \mathrm{Eq}(T, E, \omega)$ или $\mathscr{M} \models \mathrm{Eq}(T, E, \omega, <_E)$ влечет соответственно $\mathscr{M} = \mathrm{Eq}(\mathscr{M}^i, E, i < \omega)$ или $\mathscr{M} = \mathrm{Eq}(\mathscr{M}^i, E, i < \omega, <_E)$, где $\mathscr{M}^i = \mathscr{M}_i \restriction L^i$, $\mathscr{M}_i$ — подмодель $\mathscr{M}$ и M_i — некоторый E-класс.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть T — полная счетная не ω-категоричная теория. Тогда

(1) если T имеет конечное число счетных моделей, то $\mathrm{Eq}(T, E, \omega)$ имеет ω счетных моделей;

(2) если T имеет бесконечно много счетных моделей, то $\mathrm{Eq}(T, E, \omega)$ имеет 2^ω счетных моделей;

(3) $\mathrm{Eq}(T, E, \omega, <_E)$ имеет 2^ω счетных моделей.

Доказательство. Пусть $\{\mathscr{M}_i : i < \lambda\}$ — множество всех счетных попарно неизоморфных моделей теории T. Поскольку T не ω-категорична, $\lambda \geq 3$. Для счетной модели $\mathscr{M} \models \mathrm{Eq}(T, E, \omega)$ пусть $\Gamma(\mathscr{M}) = (m_i : i < \lambda)$, где m_i — число Eq-слагаемых в $\mathscr{M}$, изоморфных $\mathscr{M}_i$. Справедливы следующие утверждения.

(i) Для любого $(m_i : i < \lambda) \in {}^\lambda(\omega \cup \{\omega\})$, удовлетворяющего условию $\sum\limits_{i<\lambda} m_i = \omega$, существует счетная модель $\mathscr{M} \models \mathrm{Eq}(T, E, \omega)$ такая, что $\Gamma(\mathscr{M}) = (m_i : i < \lambda)$.

(ii) $\Gamma(\mathscr{M}) \in {}^\lambda(\omega \cup \{\omega\})$ для любой счетной модели $\mathscr{M} \models \mathrm{Eq}(T, E, \omega)$.

(iii) Если $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}'$ — счетные модели теории $\mathrm{Eq}(T, E, \omega)$, то

$$\mathscr{M} \cong \mathscr{M}' \Leftrightarrow \Gamma(\mathscr{M}) = \Gamma(\mathscr{M}').$$

Из (i)–(iii) выводим (1) и (2).

Пусть $\mathscr{M}_0$ и $\mathscr{M}_1$ — счетные неизоморфные модели теории T. Для любого $f \in {}^{\omega}2$ построим счетную модель $\mathscr{M}_f \models \mathrm{Eq}(T, E, \omega, <_E)$ следующим образом. Выберем возрастающую (относительно $<_E$) последовательность E-классов E_n, $n < \omega$. Для любого $n < \omega$ и любого E-класса $E^{(0)}$ поступаем следующим образом:

(a) если $E_{2n} \leq_E E^{(0)} \leq_E E_{2n+1}$, то Eq-слагаемое с универсумом $E^{(0)}$ изоморфно $\mathscr{M}_{f(n)}$, а если $E^{(0)} <_E E_0$, то Eq-слагаемое с универсумом $E^{(0)}$ изоморфно $\mathscr{M}_{f(0)}$;

(b) если $E_{2n+1} <_E E^{(0)} <_E E_{2n+2}$, то Eq-слагаемое с универсумом $E^{(0)}$ изоморфно $\mathscr{M}_0$ или $\mathscr{M}_1$, и для любых E-классов $E^{(1)}$ и $E^{(2)}$, если $E_{2n+1} <_E E^{(1)} <_E E^{(2)} <_E E_{2n+2}$, то предполагаем, что существуют E-классы $E^{(3)}$ и $E^{(4)}$ такие, что $E^{(1)} <_E E^{(i)} <_E E^{(2)}$ для $i \in \{3, 4\}$, и Eq-слагаемое с универсумом $E^{(3)}$ изоморфно $\mathscr{M}_0$, а Eq-слагаемое с универсумом $E^{(4)}$ изоморфно $\mathscr{M}_1$.

Если $f, f' \in {}^{\omega}2$ и $f \neq f'$, то $\mathscr{M}_f \ncong \mathscr{M}_{f'}$. Отсюда следует (3). (Отметим, что (3) можно доказать несколько проще, используя три модели T. Однако именно построение, представленное здесь, будет использовано при доказательстве теоремы 7.1.) Предложение 5.1 доказано. □

6. ТЕОРИЯ ВИДА $(\omega, m+2)$ ДЛЯ $0 < m < \omega$

ТЕОРЕМА 6.1. Для любого $0 < m < \omega$ существует полная счетная теория, имеющая ω счетных моделей, некоторое несущественное расширение которой имеет $m + 2$ счетных моделей.

Доказательство. Фиксируем $0 < m < \omega$. Пусть

$$T = \mathrm{Eq}(T_{2m}, E, \omega),$$

где T_{2m} — теория вида $(2 + m + 2, m + 2)$ из теоремы 2.1. К языку теории

T добавим четырехместный предикатный символ U. Пусть

$$T_{\omega m} = T \cup \{(\Omega_i) : i < 4\},$$

где

(Ω_0) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall t)[U(x,y,z,t) \to (E(x,z) \wedge E(y,t) \wedge \neg E(x,y))]$;

(Ω_1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(\forall t)[(U(x,y,z,t) \wedge E(z,z') \wedge E(t,t')) \to U(x,y,z',t')]$;

(Ω_2) $(\forall z)(\forall t)[\neg E(z,t) \to (\exists x)(\exists y)U(x,y,z,t)]$;

(Ω_3) для любых z, t таких, что $\neg E(z,t)$, множество

$$F_{zt} = \{(x,y) : U(x,y,z,t)\}$$

является изоморфизмом подмодели, порожденной $\{x : R_1(x) \wedge E(x,z)\}$, на подмодель, порожденную $\{y : R_1(y) \wedge E(y,t)\}$.

Теория T_{2m} имеет неизоморфные счетные модели $\mathscr{M}_0$ и $\mathscr{M}_1$ такие, что (в обозначениях, принятых при доказательстве теоремы 2.1)

$$\Delta(\mathscr{M}_0) = \varnothing, \quad \Delta(\mathscr{M}_1) = \{a\},$$

где $a \in R_0^{\mathscr{M}_1}$. Поскольку наши модели счетны и частичный порядок $\leqslant$ плотен, челночным методом доказываем, что подмодель $\mathscr{M}_0$, порожденная множеством $R_1^{\mathscr{M}_0}$, изоморфна подмодели $\mathscr{M}_1$, порожденной множеством $R_1^{\mathscr{M}_1}$.

Таким образом, теория $T_{\omega m}$ имеет счетные модели, в которых каждое Eq-слагаемое изоморфно $\mathscr{M}_0$ или $\mathscr{M}_1$, с произвольным числом слагаемых каждого типа (при условии, что число всех Eq-слагаемых равно ω).

Рассуждая как при доказательстве утверждения (1) предложения 5.1, получаем, что $T_{\omega m}$ имеет ω счетных моделей.

Возьмем модель $\mathscr{N} \vDash T_{\omega m}$, некоторое Eq-слагаемое которой содержит элемент $a^* \in \Delta(\mathscr{M}) \cap A^{\mathscr{M}}$, и рассмотрим несущественное расширение $T^*_{\omega m} = \mathrm{Th}(\mathscr{N}, a^*)$ теории $T_{\omega m}$. Справедливы следующие утверждения (E1)–(E3).

(E1) Любая модель $\mathscr{N}^* \vDash T^*_{\omega m}$ удовлетворяет одному и только одному

из условий (1^*)–(3^*_j), $j < m$, где

(1^*) $\Delta(\mathscr{N}_0^*) = \{a^*\}$ для любого Eq-слагаемого $\mathscr{N}_0^*$ модели $\mathscr{N}^*$;

(2^*) для любого Eq-слагаемого $\mathscr{N}_0^*$ модели $\mathscr{N}^*$ множество $\Delta(\mathscr{N}_0^*)$ бесконечно и не имеет наименьшего элемента;

(3^*_j) для любого Eq-слагаемого $\mathscr{N}_0^*$ модели $\mathscr{N}^*$ множество $\Delta(\mathscr{N}_0^*)$ бесконечно и имеет наименьший элемент, принадлежащий $P_j^{\mathscr{N}_0^*}$;

(E2) Для любого из условий (1^*)–(3^*_j), $j < m$, существует счетная модель $\mathscr{N}^*$ теории $T^*_{\omega m}$, удовлетворяющая этому условию.

(E3) Любые две счетные модели $T^*_{\omega m}$, удовлетворяющие одному (и тому же) из условий (1^*)–(3^*_j), $j < m$, изоморфны.

(E1)–(E3) доказываются аналогично соответствующим утверждениям в доказательствах теорем 2.1 и 4.1, с использованием в данном случае аксиом (Ω_i), $i < 4$.

Из утверждений (E1)–(E3) следует, что несущественное расширение $T^*_{\omega m}$ теории $T_{\omega m}$ имеет $m+2$ счетных моделей. Теорема 6.1 доказана. □

7. ТЕОРИЯ ВИДА $(2^\omega, m+2)$ ДЛЯ $0 < m < \omega$

ТЕОРЕМА 7.1. Для любого $0 < m < \omega$ существует полная счетная теория, имеющая 2^ω счетных моделей, некоторое несущественное расширение которой имеет $m+2$ счетных моделей.

Доказательство. Фиксируем $0 < m < \omega$. Пусть

$$T = \mathrm{Eq}(T_{2m}, E, \omega, <_E),$$

где T_{2m} — теория вида $(2+m+2, m+2)$ из теоремы 2.1. К языку теории T добавим четырехместный предикатный символ U. Пусть

$$T_{2^\omega m} = T \cup \{(\Omega_i) : i < 4\},$$

где (Ω_i), $i < 4$, — аксиомы из доказательства теоремы 6.1.

Далее действуем как при доказательстве теоремы 6.1, с тем лишь отличием, что для доказательства того, что теория $T_{2^\omega m}$ имеет 2^ω счетных

моделей, рассуждаем как при доказательстве утверждения (3) предложения 5.1. Теорема 7.1 доказана. □

8. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.1. Для любого $0 < n < \omega$ существует полная счетная теория T, которая имеет 2^ω счетных моделей и такова, что

(1) T имеет несущественное расширение, имеющее ω счетных моделей.

(2) для любого $m \leq n$ T имеет несущественное расширение, имеющее $3^{m+2}4^{n-m}$ счетных моделей.

Доказательство. Пусть T — прямая сумма теорий T_i, $i < n+2$, где T_i, $i < n$, — теории вида $(4,3)$, T_n — теория вида $(2^\omega, 3)$, а T_{n+1} — теория вида $(3,\omega)$, построенная в [2]. По предложению 3.1(7) T имеет 2^ω счетных моделей.

(1) В T_n и в T_{n+1} выбираем константу, которая дает для T_n и T_{n+1} несущественные расширения соответственно с тремя счетными моделями и с ω счетными моделями. По предложению 3.1(7) полученное несущественное расширение T имеет ω счетных моделей.

(2) В m теориях T_i, $i < m$, и в теории T_n выбираем константу так, чтобы каждая из констант давала для соответствующей теории несущественное расширение с тремя счетными моделями. Ввиду предложения 3.1(7) полученное несущественное расширение T имеет $3^{m+2}4^{n-m}$ счетных моделей.

Предложение 8.1 доказано. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. Теория вида (n,m), где $m \leq 2 \leq n$ и n — конечный или бесконечный кардинал, не существует.

Доказательство. Утверждение следует из того, что несущественное расширение полной счетной не ω-категоричной теории также не ω-категорично, и что не существует полной счетной теории, имеющей ровно две счетные модели. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. Не существует теории вида (λ,μ), где $\lambda < \mu$ и μ — несчетный кардинал.

Доказательство. Предположим противное, что такая теория T существует. Пусть T^* — ее несущественное расширение, имеющее μ счетных моделей. Каждая счетная модель T^* имеет вид $(\mathscr{M}, \bar{a})$, где $\mathscr{M}$ — счетная модель T и $\bar{a}$ — конечный кортеж элементов из $\mathscr{M}$. Счетная модель имеет лишь счетное число конечных кортежей элементов, теория T имеет λ счетных моделей, и значит теория T^* имеет не более $\lambda \cdot \omega < \mu$ счетных моделей, противоречие. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. E. Woodrow, "Theories with a finite number of countable models", *J. Symb. Logic* **43**, No. 3, 442–455 (1978).
2. *М. Г. Перетятькин*, "О теориях с тремя счетными моделями", *Алгебра логика* **19**, No. 2, 224–235 (1980).
3. Б. Омаров, "Несущественные расширения полных теорий", *Алгебра логика* **22**, No. 5, 390–397 (1983).
4. B. Baizhanov and O. Umbetbayev, "Constant expansion of theories and the number of countable models", *Сиб. электрон. мат. изв.* **20**, No. 2, 1037–1051 (2023).
5. Ю. Л. Ершов, Е. А. Палютин, *Математическая логика*, Наука, Москва (1987).
6. *Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн*, *Теория моделей*, Мир, М. (1977).
7. *К. Ж. Кудайбергенов*, "О числе однородных моделей полной теории", *Тр. ИМ СО РАН* **8** , 77–92 (1988).

Статья поступила в редакцию 23 апреля 2024 г.
после доработки 27 июня 2024 г.
принята к публикации 18 сентября 2024 г.

Алгебра и логика, Том 63, № 4, 406–426 (2024)

УДК 510.67

Б. Ш. Кулпешов[1], **С. В. Судоплатов**[2]

О НОВОМ ВАРИАНТЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ 1-ТИПОВ В СЛАБО O-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЯХ

Аннотация: Вводится новый вариант ортогональности неалгебраических 1-типов в слабо o-минимальных теориях: почти вполне ортогональность. Устанавливается, что отношение не почти вполне ортогональности является отношением эквивалентности. Основным результатом является критерий того, что слабо o-минимальная теория конечного ранга выпуклости с $1 < I(T, \omega) < 2^{\omega}$ имеет в точности $3^m 6^l$ счетных попарно неизоморфных моделей для некоторых неотрицательных целых чисел $m, l < \omega$ в терминах введенного варианта ортогональности.

Ключевые слова: *слабая o-минимальность, ортогональность, гипотеза Воота, счетная модель, ранг выпуклости.*

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть L — счетный язык первого порядка. На протяжении всей статьи мы рассматриваем L-структуры и предполагаем, что L содержит бинарный символ отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. *Открытый интервал* в такой структуре M — это параметрически определимое подмножество M вида $I = \{c \in M : M \models a <$

Работа выполнена в рамках гранта КН МОН РК (№ AP19674850) и государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0012).
[1] Казахстанско-Британский технический университет. Институт математики и математического моделирования, Алма-Ата, Казахстан; b.kulpeshov@kbtu.kz. [2] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; sudoplat@math.nsc.ru.

$c < b\}$ для некоторых $a, b \in M \cup \{-\infty, \infty\}$ таких, что $a < b$. Аналогичным образом мы можем определить *замкнутые*, *полуоткрытые*, *полузамкнутые* и т.д. *интервалы* в M. Произвольная точка $a \in M$ также может быть представлена как интервал $[a, a]$. Таким образом, под *интервалом* в M мы понимаем любой из вышеупомянутых интервалов в M. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если из $a < c < b$ для любых $a, b \in A$ и любого $c \in M$ следует $c \in A$.

Настоящая статья связана с понятием слабой *о-минимальности*, впервые изученным Макферсоном, Маркером и Стейнхорном в [1]. *Слабо о-минимальная структура* — это линейно упорядоченная структура $M = \langle M, =, <, \ldots\rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Напомним, что такая структура M *о-минимальна*, если любое определимое (с параметрами) подмножество M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Теория T называется *о-минимальной* (*слабо о-минимальной*), если каждая модель этой теории о-минимальна (слабо о-минимальна). Таким образом, слабая о-минимальность обобщает понятие о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования дают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Пусть A и B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A < B$ означает, что $a < b$ всякий раз, когда $a \in A$ и $b \in B$. Записью $A < b$ ($b < A$ соответственно) мы обозначаем, что $A < \{b\}$ ($\{b\} < A$). Через A^+ (и A^- соответственно) обозначаем множество элементов $b \in M$ с условием $A < b$ ($b < A$). Для произвольного типа p через $p(M)$ обозначаем множество реализаций типа p в M. Если $B \subseteq M$ и E — отношение эквивалентности на B, то B/E обозначает множество представителей E-классов, лежащих в B. Если f — функция на M, то $\mathrm{Dom}(f)$ обозначает область определения f, а $\mathrm{Range}(f)$ — ее область значений.

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы рассматриваем произвольную полную теорию T, где M — достаточно насыщенная модель

теории T.

Определение 1.1. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, и $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Говорят, что тип p *не слабо ортогонален* типу q (и пишут $p \not\perp^w q$), если существуют L_A-формула $H(x,y)$, $\alpha \in p(M)$ и $\beta_1, \beta_2 \in q(M)$ такие, что $\beta_1 \in H(M,\alpha)$ и $\beta_2 \notin H(M,\alpha)$.

Другими словами, тип p *слабо ортогонален* типу q (пишут $p \perp^w q$), если $p(x) \cup q(y)$ имеет единственное продолжение до полного 2-типа над A.

ЛЕММА 1.2 [2, следствие 34 (iii)]. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$ и $A \subseteq M$. Тогда отношение не слабой ортогональности $\not\perp^w$ является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Определение 1.3 [3]. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, и $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Говорят, что тип p *вполне ортогонален* типу q ($p \not\perp^q q$), если не существует A-определимой биекции $f : p(M) \to q(M)$. Говорят, что слабо о-минимальная теория *вполне о-минимальна*, если понятия слабой ортогональности и вполне ортогональности для 1-типов совпадают.

Очевидно, любая о-минимальная теория вполне о-минимальна.

Определение 1.4 [4]. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$ и $A \subseteq M$. *Ранг выпуклости множества* A ($RC(A)$) задается следующим образом:

(1) $RC(A) = -1$, если $A = \varnothing$,

(2) $RC(A) = 0$, если A конечно и непусто,

(3) $RC(A) \geq 1$, если A бесконечно,

(4) $RC(A) \geq \alpha + 1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$ и $b_i \in A$, $i \in \omega$, удовлетворяющие следующим условиям:

для любых $i, j \in \omega$ имеем $M \models \neg E(b_i, b_j)$ всякий раз, когда $i \neq j$,

для каждого $i \in \omega$ $RC(E(M, b_i)) \geq \alpha$ и $E(M, b_i)$ является выпуклым подмножеством множества A.

(5) $RC(A) \geq \delta$, если $RC(A) \geq \alpha$ для всех $\alpha < \delta$ (δ — предельный ординал).

Для ординала α полагаем $RC(A) = \alpha$, если $RC(A) \geq \alpha$ и $RC(A) \not\geq \alpha{+}1$.

Если $RC(A) = \alpha$ для некоторого α, то говорим, что $RC(A)$ определен. В противном случае (т.е. если $RC(A) \geq \alpha$ для всех ординалов α) полагаем $RC(A) = \infty$.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x, \bar{a})$, где $\bar{a} \in M$, определяется как ранг выпуклости множества $\phi(M, \bar{a})$, т.е. $RC(\phi(x, \bar{a})) := RC(\phi(M, \bar{a}))$. *Ранг выпуклости 1-типа* p определяется как ранг выпуклости множества $p(M)$, т.е. $RC(p) := RC(p(M))$.

Майер [5] подтвердила гипотезу Воота для о-минимальных теорий. А именно:

ТЕОРЕМА 1.5 [5]. Пусть T — о-минимальная теория в счетном языке. Тогда либо T имеет 2^ω счетных моделей, либо T имеет $3^m 6^l$ счетных моделей для некоторых неотрицательных целых чисел $m, l < \omega$.

Гипотеза Воота для вполне о-минимальных теорий была подтверждена в [6], где, среди прочего, было установлено, что счетный спектр таких теорий совпадает со счетным спектром о-минимальных теорий. Естественно задать следующий вопрос: для каких теорий в классе слабо о-минимальных теорий их счетный спектр будет совпадать со счетным спектром о-минимальных теорий?

В § 2 мы вводим два новых варианта ортогональности для неалгебраических 1-типов — квази вполне ортогональность и почти вполне ортогональность — и доказываем, что отношение не почти вполне ортогональности является отношением эквивалентности на соответствующем множестве типов. В § 3 мы представляем критерий того, что слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости с $1 < I(T, \omega) < 2^\omega$ имеет $3^m 6^l$ счетных попарно неизоморфных моделей для некоторых неотрицательных целых чисел $m, l < \omega$ в терминах почти вполне о-минимальности.

2. ВАРИАНТЫ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ

Напомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1]. Пусть $Y \subset M^{n+1}$ — $\varnothing$-определимое множество, $\pi : M^{n+1} \to M^n$ — проекция,

отбрасывающая последнюю координату, и $Z := \pi(Y)$. Для каждого $\bar{a} \in Z$ пусть $Y_{\bar{a}} := \{y : (\bar{a}, y) \in Y\}$. Предположим, что для каждого $\bar{a} \in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ выпукло и ограничено сверху, но не имеет верхней грани в M. Пусть $\sim$ — $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности на M^n, заданное следующим образом:

$$\bar{a} \sim \bar{b} \text{ для всех } \bar{a}, \bar{b} \in M^n \setminus Z, \quad \bar{a} \not\sim \bar{b} \text{ для любых } \bar{a} \in Z \text{ и } \bar{b} \in M^n \setminus Z,$$

$$\text{и } \bar{a} \sim \bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}} = \sup Y_{\bar{b}} \text{ если } \bar{a}, \bar{b} \in Z.$$

Положим $\overline{Z} := Z/\sim$, и для каждого кортежа $\bar{a} \in Z$ обозначим через $[\bar{a}]$ $\sim$-класс $\bar{a}$. Существует естественный $\varnothing$-определимый линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$, заданный следующим образом. Пусть $\bar{a} \in Z$ и $c \in M$. Тогда $[\bar{a}] < c$ iff $w < c$ для всех $w \in Y_{\bar{a}}$. Мы также задаем, что $c < [\bar{a}]$ iff $\neg([\bar{a}] < c)$, т.е. существует $w \in Y_{\bar{a}}$ такое, что $c \leq w$. Если $\bar{a}, \bar{b} \in Z$ и $\bar{a} \not\sim \bar{b}$, то существует некоторое $x \in M$ такое, что $[\bar{a}] < x < [\bar{b}]$ или $[\bar{b}] < x < [\bar{a}]$, и, следовательно, $<$ индуцирует линейный порядок на $M \cup \overline{Z}$. Назовем такое множество $\overline{Z}$ *сортом* (в этом случае $\varnothing$-определимым сортом) в $\overline{M}$, где $\overline{M}$ — дедекиндово пополнение структуры M, рассматривая $\overline{Z}$ как естественно вложенное в $\overline{M}$. Аналогично можно получить сорт в $\overline{M}$, рассматривая нижние грани вместо верхних.

Пусть $A, D \subseteq M$, множество D бесконечно, $Z \subseteq \overline{M}$ — A-определимый сорт, и $f : D \to Z$ — A-определимая функция. Говорят, что f *локально возрастает* (*локально убывает*, *локально постоянна*) на D, если для любого $a \in D$ существует бесконечный открытый интервал $J \subseteq D$, содержащий $\{a\}$, такой, что f строго возрастает (строго убывает, постоянна) на J. Также говорят, что f *локально монотонна* на D, если она локально возрастает или локально убывает на D. Пусть E — A-определимое отношение эквивалентности на D. Говорят, что f *строго возрастает* (*убывает*) на D/E, если $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$) для любых $a, b \in D$ с $a < b$ и $\neg E(a, b)$.

Нам понадобится следующий результат о поведении определимой функции на множестве реализаций неалгебраического 1-типа.

ТЕОРЕМА 2.1 [7]. Пусть T — слабо o-минимальная теория, $M \models T$,

$A \subseteq M$, и $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Предположим, что существует A-определимая функция f в A-определимый сорт такая, что $p(M) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ и f не постоянна на $p(M)$. Тогда существует A-определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$, разбивающее $p(M)$ на бесконечно много выпуклых классов, так что f строго монотонна на $p(M)/E$.

Напомним также понятие (p,q)-секатора, введенное в [8]. Пусть $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы и $p \not\perp^w q$. Говорят, что L_A-формула $\phi(x,y)$ является (p,q)-*секатором*, если существует $a \in p(M)$ такой, что $\phi(a,M) \cap q(M) \neq \varnothing$, $\neg\phi(a,M) \cap q(M) \neq \varnothing$, $\phi(a,M) \cap q(M)$ выпукло и $[\phi(a,M) \cap q(M)]^- = [q(M)]^-$. Если $\phi_1(x,y)$ и $\phi_2(x,y)$ — (p,q)-секаторы, то говорят, что $\phi_1(x,y)$ *не больше*, чем $\phi_2(x,y)$, при условии, что существует $a \in p(M)$ такой, что $\phi_1(a,M) \cap q(M) \subseteq \phi_2(a,M) \cap q(M)$. Говорят, что (p,q)-секаторы $\phi_1(x,y)$ и $\phi_2(x,y)$ *эквивалентны* ($\phi_1(x,y) \sim \phi_2(x,y)$), если $\phi_1(a,M) \cap q(M) = \phi_2(a,M) \cap q(M)$ для некоторого (любого) $a \in p(M)$.

Очевидно, если $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы и $p \not\perp^w q$, то существует (p,q)-секатор и множество всех (p,q)-секаторов разбивается на линейно упорядоченное множество классов эквивалентности относительно $\sim$. Ясно также, что для любого (p,q)-секатора $\phi(x,y)$ функция $f(x) := \sup \phi(x,M)$ не постоянна на $p(M)$.

Определение 2.2. Пусть T — о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, и $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Говорят, что тип p *не почти вполне ортогонален* типу q (и пишут $p \not\perp^{aq} q$), если существуют (p,q)-секатор $U(x,y)$ и A-определимое отношение эквивалентности $E_q(x,y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечно много выпуклых классов, так что для любого $a \in p(M)$ существует $b \in q(M)$ такой, что $\sup U(a,M) = \sup E_q(b,M)$.

Говорят, что T *почти вполне о-минимальна*, если понятие слабой ортогональности для 1-типов совпадает с понятием почти вполне ортогональности.

Очевидно, если тип p не вполне ортогонален типу q, т.е. существует A-определимая биекция $f : p(M) \to q(M)$, то p не почти вполне ортогонален q, т.е. выполняется следующее:

Факт 2.3. Любая вполне о-минимальная теория является почти вполне

о-минимальной.

ЛЕММА 2.4. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы, и $p \not\perp^w q$. Предположим, что существуют (p,q)-секатор $U(x,y)$ и A-определимое отношение эквивалентности $E_q(x,y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечно много бесконечных выпуклых классов, так что для любого $a \in p(M)$ существуют $b_1, b_2 \in q(M)$ такие, что

$$M \models b_1 < b_2 \wedge E_q(b_1, b_2) \wedge U(a, b_1) \wedge \neg U(a, b_2).$$

Тогда тип p не почти вполне ортогонален типу q.

Доказательство. Рассмотрим следующую формулу:

$$U'(x,y) := \exists t_1 \exists t_2 [E_q(t_1, t_2) \wedge t_1 < t_2 \wedge U(x, t_1) \wedge \neg U(x, t_2) \wedge y \leq t_2].$$

Нетрудно установить, что $U'(x,y)$ является (p,q)-секатор, удовлетворяющий условию не почти вполне ортогональности типа p типу q. □

ЛЕММА 2.5. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы, и $p \not\perp^w q$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) существуют (p,q)-секатор $U(x,y)$ и A-определимое отношение эквивалентности $E_q(x,y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечно много выпуклых классов, так что для любого $a \in p(M)$ существует $b \in q(M)$ такой, что $\sup U(a, M) = \sup E_q(b, M)$;

(2) существуют (p,q)-секатор $U(x,y)$ и A-определимое отношение эквивалентности $E_q(x,y)$, разбивающее $q(M)$ на бесконечно много выпуклых классов, так что для любого $a \in p(M)$ существует $b \in q(M)$ такой, что $\sup U(a, M) = \inf E_q(b, M)$.

Доказательство. Если выполняется условие (1), то рассмотрим следующую формулу:

$$U'(x,y) := U(x,y) \wedge \exists t [U(x,t) \wedge \forall t' (t < t' \wedge \neg E_q(t,t') \rightarrow \neg U(x,t')) \wedge \neg E_q(y,t)].$$

Нетрудно установить, что $U'(x,y)$ — (p,q)-секатор, удовлетворяющий усло-

вию (2).

Если выполняется условие (2), то рассмотрим следующую формулу:

$$U'(x,y) := \exists t[\neg U(x,t) \wedge \forall t'(t' < t \wedge \neg E_q(t',t) \to U(x,t')) \wedge y \leq t].$$

Нетрудно установить, что $U'(x,y)$ является (p,q)-секатором, удовлетворяющим условию (1). □

Пример 2.6 [1]. Пусть $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, f^1\rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M является непересекающимся объединением интерпретаций унарных предикатов P_1 и P_2, причем $P_1(M) < P_2(M)$. Отождествим интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченным обычным образом, и отождествим интерпретацию P_1 с $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченным лексикографически. Символ f интерпретируется частичной унарной функцией с $\mathrm{Dom}(f) = P_1(M)$ и $\mathrm{Range}(f) = P_2(M)$ и задается равенством $f((n,m)) = n$ для всех $(n,m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Можно доказать, что $Th(M)$ допускает элиминацию кванторов, откуда нетрудно установить, что $Th(M)$ — счетно категоричная слабо o-минимальная теория. $Th(M)$ имеет ровно два 1-типа над $\varnothing$: $p_1(x) := \{P_1(x)\}$ и $p_2(x) := \{P_2(x)\}$. Более того, f отображает $p_1(M)$ на $p_2(M)$, но f не является биекцией. Следовательно, $p_1 \not\perp^w p_2$, но $p_1 \perp^q p_2$, т.е. $Th(M)$ не является вполне o-минимальной. С другой стороны, $RC(p_2) = 1$, откуда следует, что единственное A-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p_2(M)$ на бесконечно много выпуклых классов, — это тривиальное отношение эквивалентности $E_{p_2}(x,y) := x = y$. Следовательно, условие не почти вполне ортогональности для (p_1,p_2)-секатора $U(x,y) := y \leq f(x)$ выполнено. Таким образом, $p_1 \not\perp^{aq} p_2$. Заметим также, что для любых $A \subseteq M$ и $q \in S_1(A)$ либо $q \supseteq p_1$, либо $q \supseteq p_2$. Следовательно, для любых $q_1, q_2 \in S_1(A)$ с $q_1 \supseteq p_1$ имеем $q_1 \not\perp^w q_2 \Leftrightarrow q_2 \supseteq p_2$, f отображает $q_1(M')$ на $q_2(M')$ для некоторого $M' \succeq M$, и f не является биекцией. Следовательно, для любых $q_1, q_2 \in S_1(A)$ либо $q_1 \perp^w q_2$, либо $q_1 \not\perp^{aq} q_2$. Таким образом, $Th(M)$ является почти вполне o-минимальной.

Последний пример показывает, что если существует A-определимое отоб-

ражение $p(M)$ на $q(M)$ для неалгебраических типов $p, q \in S_1(A)$, то тип p не почти вполне ортогонален типу q.

Пример 2.7. Пусть $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, E^2, R^2\rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M является непересекающимся объединением интерпретаций предикатов P_1 и P_2, причем $P_1(M) < P_2(M)$. Отождествим интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченным обычным образом, и отождествим интерпретацию P_1 с $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, упорядоченным лексикографически. Бинарный символ отношения E задается следующим образом: для любых $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in P_1(M)$ $E((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \Leftrightarrow a_1 = a_2$. Бинарный символ отношения R интерпретируется так: для любых $(a_1, a_2) \in P_1(M)$ и $b \in P_2(M)$ $R((a_1, a_2), b) \Leftrightarrow b < a_1 + \sqrt{2}$.

Нетрудно также установить, что $Th(M)$ является слабо o-минимальной теорией. Отношение $E(x, y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим $P_1(M)$ на бесконечно много бесконечных выпуклых классов. Пусть $p(x) := \{P_1\}$, $q(x) := \{P_2\}$. Очевидно, $p, q \in S_1(\varnothing)$, $p \not\perp^w q$, но $p \perp^{aq} q$, т.е. $Th(M)$ не является почти вполне o-минимальной.

ЛЕММА 2.8. Пусть T — слабо o-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы, и $p \not\perp^{aq} q$. Если $RC(q) = 1$, то существует A-определимое отображение $f : p(M) \to q(M)$.

Доказательство. Поскольку $RC(q) = 1$, единственным A-определимым отношением эквивалентности, разбивающим $q(M)$ на бесконечно много выпуклых классов, является тривиальное отношение эквивалентности

$$E_q(x, y) := x = y.$$

Ввиду условия не почти вполне ортогональности, получаем, что для любого элемента $a \in p(M)$ множество $U(a, M)$ имеет правый конец, откуда заключаем, что существует A-определимое отображение $p(M)$ на $q(M)$. □

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Любая почти вполне o-минимальная теория ранга выпуклости 1 является вполне o-минимальной.

Определение 2.10. Пусть T — слабо o-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, и $p, q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы. Говорят, что тип p *не ква-*

зи вполне ортогонален типу q ($p \not\perp^{qq} q$), если существует A-определимая функция f, отображающая $p(M)$ на $q(M)$ или $q(M)$ на $p(M)$.

Говорят, что T *квази вполне о-минимальна*, если понятие слабой ортогональности для 1-типов совпадает с понятием квази вполне ортогональности.

Факт 2.11. Любая вполне о-минимальная теория является квази вполне о-минимальной.

Пример 2.12. Пусть $M = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, P_3^1, f^1, g^1\rangle$ — линейно упорядоченная структура такая, что M является непересекающимся объединением интерпретаций унарных предикатов P_1, P_2 и P_3, причем $P_1(M) < P_2(M) < P_3(M)$. Отождествим интерпретацию P_2 с множеством рациональных чисел $\mathbb{Q}$, упорядоченным обычным образом, а интерпретации P_1 и P_3 с $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, упорядоченным лексикографически. Символы f и g интерпретируются частичными унарными функциями с $\mathrm{Dom}\,(f) = P_1(M)$, $\mathrm{Range}\,(f) = P_2(M)$ и $\mathrm{Dom}\,(g) = P_3(M)$, $\mathrm{Range}\,(g) = P_2(M)$ и задаются равенствами $f((n,m)) = n$ и $g((n,m)) = n$ для всех $(n,m) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Можно доказать, что $Th(M)$ является слабо о-минимальной теорией. Пусть $p_1(x) := \{P_1\}$, $p_2(x) := \{P_2\}$ и $p_3(x) := \{P_3\}$. Очевидно, $p_1, p_2, p_3 \in S_1(\varnothing)$, $p_1 \not\perp^{qq} p_2$, $p_2 \not\perp^{qq} p_3$, но $p_1 \perp^{qq} p_3$, т.е. $Th(M)$ не является квази вполне о-минимальной.

Рассмотрим следующую формулу:

$$U(x,y) := P_1(x) \wedge P_3(y) \wedge \exists z[P_2(z) \wedge f(x) = z \wedge g(y) < z].$$

Нетрудно установить, что $U(x,y)$ является (p_1, p_3)-секатором, т.е. $p_1 \not\perp^{aq} p_3$, поскольку $U(x,y)$ удовлетворяет условию (2) в лемме 2.5. Таким образом, $Th(M)$ является почти вполне о-минимальной.

Последний пример предоставляет следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$ и $A \subseteq M$. Тогда отношение не квази вполне ортогональности ($\not\perp^{qq}$) не является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models$

T и $A \subseteq M$. Тогда отношение не почти вполне ортогональности ($\not\perp^{aq}$) является отношением эквивалентности на $S_1(A)$.

Доказательство. Рефлексивность. Покажем, что $p \not\perp^{aq} p$ выполняется для любого $p \in S_1(A)$. Действительно, тождественная функция $f(x) = x$ является A-определимой функцией, отображающей $p(M)$ на себя. Тогда $U(x, y) := y \leq f(x)$ является (p, p)-секатором, удовлетворяющим условию не почти вполне ортогональности.

Симметричность. Пусть $p_1 \not\perp^{aq} p_2$. Покажем, что $p_2 \not\perp^{aq} p_1$. Пусть $U(x, y)$ — (p_1, p_2)-секатор и $E_{p_2}(x, y)$ — A-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p_2(M)$ на бесконечно много выпуклых классов, удовлетворяющее условию не почти вполне ортогональности типа p_1 типу p_2; т.е. для любого $a \in p(M)$ существует $b \in p_2(M)$ такой, что $\sup U(a, M) = \sup E_{p_2}(b, M)$.

Рассмотрим $f(x) := \sup U(x, M)$. Поскольку f не постоянна на $p_1(M)$, она должна быть локально постоянной или локально монотонной на $p_1(M)$.

Если f строго возрастает на $p_1(M)$, то рассмотрим формулу

$$D(x, y) := \forall u[U(u, x) \to y < u].$$

Нетрудно установить, что $D(x, y)$ является (p_2, p_1)-секатором и a — правым концом множества $D(b, M)$, т.е. $a \in \mathrm{dcl}(A \cup \{b\})$, что влечет существование A-определимого отображения $p_2(M)$ на $p_1(M)$, т.е. $p_2 \not\perp^{aq} p_1$.

Если f строго убывает на $p_1(M)$, то рассмотрим формулу

$$D(x, y) := \exists u[U(u, x) \wedge y \leq u].$$

Аналогичным образом убеждаемся, что $D(x, y)$ является (p_2, p_1)-расщепляющей формулой и a также является правым концом множества $D(b, M)$.

Предположим теперь, что f не строго монотонна на $p_1(M)$. Тогда, ввиду теоремы 2.1, существует A-определимое отношение эквивалентности $E^*(x, y)$, разбивающее $p_1(M)$ на бесконечно много бесконечных выпуклых классов, так что f строго монотонна на $p_1(M)/E^*$.

Если f строго возрастает на $p_1(M)/E^*$, то рассмотрим формулу

$$D(x,y) := \forall u[U(u,x) \to y < u \wedge \neg E^*(y,u)].$$

Тогда $D(x,y)$ является (p_2,p_1)-секатором, удовлетворяющим условию (2) в лемме 2.5.

Если f строго убывает на $p_1(M)/E^*$, то рассмотрим формулу

$$D(x,y) := \exists u[U(u,x) \wedge (E^*(y,u) \vee y \leq u)].$$

Тогда $D(x,y)$ является (p_2,p_1)-секатором, удовлетворяющим условию (1) в лемме 2.5.

Транзитивность. Пусть $p_1 \not\perp^{aq} p_2$ и $p_2 \not\perp^{aq} p_3$. Покажем, что $p_1 \not\perp^{aq} p_3$. Поскольку $p_1 \not\perp^{aq} p_2$ и $p_2 \not\perp^{aq} p_3$, существуют (p_1,p_2)-секатор $U_{12}(x,y)$, (p_2,p_3)-секатор $U_{23}(x,y)$ и A-определимые отношения эквивалентности $E_{p_2}(x,y)$ и $E_{p_3}(x,y)$, разбивающие $p_2(M)$ и $p_3(M)$ соответственно на бесконечно много выпуклых классов и удовлетворяющие соответствующим условиям не почти вполне ортогональности.

Случай 1. $E_{p_2}(x,y)$ — тривиальное отношение.

Тогда для любого $a \in p_1(M)$ множество $U_{12}(a,M)$ имеет правый конец, лежащий в $p_2(M)$; т.е. существует A-определимое отображение $p_1(M)$ на $p_2(M)$. Пусть $f(x) := \sup U_{12}(x,M)$. Тогда формула

$$U_{13}(x,y) := \exists t[f(x) = t \wedge U_{23}(t,y)]$$

является, очевидно, искомым (p_1,p_3)-секатором.

Случай 2. $E_{p_2}(x,y)$ — нетривиальное отношение.

Пусть $f_{23}(x) := \sup U_{23}(x,M)$. Рассмотрим поведение функции f_{23} на $p_2(M)$.

Подслучай 2а. f_{23} постоянна на каждом E_{p_2}-классе и f_{23} строго монотонна на $p_2(M)/E_{p_2}$.

Если f_{23} строго возрастает на $p_2(M)/E_{p_2}$, то рассмотрим формулу

$$U_{13}(x,y) := \exists t[U_{12}(x,t) \wedge U_{23}(t,y)].$$

Если f_{23} строго убывает на $p_2(M)/E_{p_2}$, то рассмотрим формулу

$$U_{13}(x,y) := \exists t[U_{12}(x,t) \wedge \exists u(\forall t'[t' \leq t \rightarrow U_{23}(t',u)] \wedge [E_{p_3}(y,u) \vee y \leq u])].$$

Нетрудно убедиться, что в обоих случаях формула $U_{13}(x,y)$ является искомым (p_1,p_3)-секатором.

Подслучай 2b. f_{23} не постоянна на каждом E_{p_2}-классе, или f_{23} не строго монотонна на $p_2(M)/E_{p_2}$.

В этом случае существует A-определимое отношение эквивалентности $E^*(x,y)$, разбивающее $p_2(M)$ на бесконечно много бесконечных выпуклых классов, так что $E_{p_2}(b,M) \subseteq E^*(b,M)$ для любого $b \in p_2(M)$ и f_{23} строго монотонна на $p_2(M)/E^*$.

Рассмотрим формулу

$$E'_{p_3}(x,y)$$

$$:= \exists z_1 \exists z_2[E^*(z_1,z_2) \wedge U_{23}(z_1,x) \wedge U_{23}(z_2,y) \wedge (\neg U_{23}(z_1,y) \vee \neg U_{23}(z_2,x))].$$

Нетрудно установить, что $E'_{p_3}(x,y)$ является отношением эквивалентности, разбивающим $p_3(M)$ на бесконечно много бесконечных выпуклых классов, и $E_{p_3}(c,M) \subseteq E'_{p_3}(c,M)$ для любого $c \in p_3(M)$.

Если f_{23} строго возрастает на $p_2(M)/E^*$, то рассмотрим формулу

$$U_{13}(x,y) := \exists t_1 \exists t_2[U_{12}(x,t_1) \wedge \forall t(t_1 < t \wedge \neg E_{p_2}(t_1,t) \rightarrow \neg U_{12}(x,t))$$

$$\wedge E^*(t_1,t_2) \wedge \exists u(U_{23}(t_2,u) \wedge [E'_{p_3}(y,u) \vee y \leq u])].$$

Если f_{23} строго убывает на $p_2(M)/E^*$, то рассмотрим

$$U_{13}(x,y) := \exists t_1 \exists t_2[U_{12}(x,t_1) \wedge \forall t(t_1 < t \wedge \neg E_{p_2}(t_1,t) \rightarrow \neg U_{12}(x,t))$$

$$\wedge E^*(t_1,t_2) \wedge \exists u(\forall t'[t' \leq t_2 \rightarrow U_{23}(t',u)] \wedge [E'_{p_3}(y,u) \vee y \leq u])].$$

Нетрудно проверить, что в любом случае данная формула $U_{13}(x,y)$ является искомым (p_1,p_3)-секатором. □

3. ЧИСЛО СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ

Определение 3.1 [2]. Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, и $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Говорят, что p *квазирациональный справа* (*слева*), если существует выпуклая L_A-формула $U_p(x) \in p$ такая, что $U_p(N)^+ = p(N)^+$ ($U_p(N)^- = p(N)^-$) для любой достаточно насыщенной модели $N \succ M$. Неизолированный 1-тип называется *квазирациональным*, если он квазирационален справа или квазирационален слева. Не квазирациональный неизолированный 1-тип называется *иррациональным*.

Очевидно, 1-тип, являющийся одновременно квазирациональным справа и квазирациональным слева, является *изолированным*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2 [2]. Пусть T — слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p,q \in S_1(A)$ — неалгебраические типы и $p \not\perp^w q$. Тогда

(1) p иррационален $\Leftrightarrow$ q иррационален,

(2) p квазирационален $\Leftrightarrow$ q квазирационален.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3 [9]. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее 2^ω счетных моделей, $M \models T$, и $p \in S_1(\varnothing)$ — неизолированный. Предположим, что $E(x,y)$ — наибольшее $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечно много выпуклых классов. Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Если p иррационален, то для каждой из шести опций ниже существует счетная модель M_1 теории T, в которой она в точности реализуется:

1.1. $p(M_1) = \varnothing$;

1.2. $|p(M_1)/E| = 1$;

1.3. $p(M_1)/E$ порядково изоморфно $(0,1) \cap \mathbb{Q}$;

1.4. $p(M_1)/E$ порядково изоморфно $[0,1) \cap \mathbb{Q}$;

1.5. $p(M_1)/E$ порядково изоморфно $(0,1] \cap \mathbb{Q}$;

1.6. $p(M_1)/E$ порядково изоморфно $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.

2. Если p квазирационален справа (слева), то для каждой из трех опций ниже существует счетная модель M_1 теории T, в которой она реализована в точности:

2.1. $p(M_1) = \varnothing$;

2.2. $p(M_1)/E$ порядково изоморфно $(0,1) \cap \mathbb{Q}$;

2.3. $p(M_1)/E$ порядково изоморфно $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ ($(0,1] \cap \mathbb{Q}$).

ЛЕММА 3.4. Пусть T — слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости, $M \models T$, $p_1, p_2 \in S_1(\varnothing)$ — неалгебраические типы, $E_1(x,y)$ и $E_2(x,y)$ — наибольшие $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие $p_1(M)$ и $p_2(M)$ соответственно на бесконечно много выпуклых классов, и $p_1 \not\perp^{aq} p_2$. Тогда существует (p_1,p_2)-секатор $U(x,y)$ такой, что для любого $a \in p_1(M)$ существует $b \in p_2(M)$ такое, что $\sup U(a',M) = \sup E_2(b,M)$ для всех $a' \in E_1(a,M)$.

Доказательство. Поскольку типы p_1 и p_2 не почти вполне ортогональны, существуют (p_1,p_2)-секатор $U_{12}(x,y)$ и $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности $E_2'(x,y)$, разбивающее $p_2(M)$ на бесконечно много выпуклых классов, так что для любого $a \in p_1(M)$ существует $b \in p_2(M)$ такой, что $\sup U_{12}(a,M) = \sup E_2'(b,M)$.

Пусть $f(x) := \sup U_{12}(x,M)$. Ясно, что f не постоянна на $p_1(M)$. Поскольку $E_1(x,y)$ — наибольшее $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, разбивающее $p_1(M)$ на бесконечно много выпуклых классов, f строго монотонна на $p_1(M)/E_1$.

Случай 1. f постоянна на каждом E_1-классе.

Теперь утверждаем, что $E_2'(b,M) = E_2(b,M)$ для любого $b \in p_2(M)$. В самом деле, если это не так, то рассмотрим формулу

$$E_1'(x,y) := \exists t_1 \exists t_2 [E_2(t_1,t_2) \wedge U_{12}(x,t_1) \wedge U_{12}(y,t_2) \wedge (\neg U_{12}(x,t_2) \vee \neg U_{12}(y,t_1))].$$

Очевидно, $E_1'(x,y)$ является отношением эквивалентности на $p_1(M)$, и $E_1(a,M) \subset E_1'(a,M)$ для некоторого $a \in p_1(M)$, т.е. мы приходим к противоречию.

В этом случае $U_{12}(x,y)$ является искомым (p_1,p_2)-секатором.

Случай 2. f не постоянна на каждом E_1-классе.

Тогда f либо локально постоянна, либо локально монотонна на каждом E_1-классе. Рассмотрим формулу

$$E_2''(x,y) := \exists t_1 \exists t_2 [E_1(t_1,t_2) \wedge U_{12}(t_1,x) \wedge U_{12}(t_2,y) \wedge (\neg U_{12}(t_2,x) \vee \neg U_{12}(t_1,y))].$$

Очевидно, $E_2''(x,y)$ является отношением эквивалентности на $p_2(M)$, и $E_2'(b,M) \subset E_2''(b,M)$ для любого $b \in p_2(M)$. Поскольку $E_2(x,y)$ — наибольшее, $E_2''(b,M) \subset E_2(b,M)$ для любого $b \in p_2(M)$.

Если f строго возрастает на $p_1(M)/E_1$, то рассмотрим формулу

$$U(x,y) := \exists x_1 [E_1(x,x_1) \wedge \exists u (U_{12}(x_1,u) \wedge [E_2(u,y) \vee y \leq u])].$$

Если f строго убывает на $p_1(M)/E_1$, то рассмотрим

$$U(x,y) := \exists x_1 [E_1(x,x_1) \wedge \exists u (\forall x' [x' \leq x_1 \to U_{12}(x',u)] \wedge [E_2(u,y) \vee y \leq u])].$$

Нетрудно проверить, что в любом случае $U(x,y)$ является искомым (p_1,p_2)-секатором. □

Пример 3.5. Вернемся к примеру 2.7. Обогатим структуру $M := \langle M; <, P_1^1, P_2^1, E^2, R^2 \rangle$ счетным множеством констант, положив $M' = \langle M; <, P_1^1, P_2^1, E^2, R^2, c_i \rangle_{i \in \omega}$, где константы c_i интерпретируют бесконечную строго возрастающую последовательность на $P_1(M)$ такую, что $\lim\limits_{c_i \to \infty} = \infty_{P_1(M)}$ и $\neg E(c_i,c_j)$ выполняется для любых $i \neq j$.

В данный момент рассмотрим следующие множества формул:

$$p(x) := \{c_i < x \mid i \in \omega\} \cup \{P_1(x)\},$$

$$q(x) := \{\forall t [R(c_i,t) \to t < x \mid i \in \omega\} \cup \{P_2(x)\}.$$

Нетрудно установить, что p и q принадлежат $S_1(\varnothing)$ и являются квазирациональными справа, причем $p \not\perp^w q$, но $p \perp^{aq} q$. Следовательно, $Th(M')$ также не является почти вполне o-минимальной.

Пусть $f(x) := \sup R(x, M)$. Ясно, что f локально постоянна на $P_1(M)$ и f строго возрастает на $P_1(M)/E$. Также имеем $RC(p) = 2$ и $RC(q) = 1$.

Утверждаем, что $Th(M')$ имеет ровно четыре счетные попарно неизоморфные модели, так что имеются четыре случая: в первом случае p и q не реализуются; во втором случае $p(M)/E$ и $q(M)$ имеют порядковые типы $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ (насыщенный случай); в третьем случае $p(M)/E$ имеет порядковый тип $[0,1) \cap \mathbb{Q}$, а $q(M)$ имеет порядковый тип $(0,1) \cap \mathbb{Q}$; в четвертом случае $p(M)/E$ имеет порядковый тип $(0,1) \cap \mathbb{Q}$, а $q(M)$ имеет порядковый тип $[0,1) \cap \mathbb{Q}$.

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть T — слабо o-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее 2^ω счетных моделей, и пусть $\Gamma_1 = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$ и $\Gamma_2 = \{q_1, q_2, \ldots, q_l\}$ — максимальные попарно слабо ортогональные семейства квазирациональных и иррациональных 1-типов над $\varnothing$ соответственно для некоторых $m, l < \omega$. Тогда T имеет в точности $3^m 6^l$ счетных моделей $\Leftrightarrow T$ почти вполне o-минимальна.

Доказательство. Пусть

$$\Gamma_1^i := \{p_s^i \mid p_i \not\perp^w p_s^i, s \in \omega\}, \Gamma_2^j := \{q_k^j \mid q_j \not\perp^w q_k^j, k \in \omega\}$$

для всех $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq l$, причем $|\Gamma_1^i| = \kappa_i$ и $|\Gamma_2^j| = \lambda_j$. Обозначим через n_i и t_j числа опций для попарно неизоморфных счетных моделей T, определяемых семействами типов Γ_1^i и Γ_2^j соответственно, т.е. вклад каждого из этих семейств в счетный спектр теории T. Тогда T имеет ровно $\prod\limits_{i=1}^{m} n_i * \prod\limits_{j=1}^{l} t_j$ счетных моделей, где

$$\prod_{i=1}^{m} n_i = n_1 * n_2 * \ldots * n_m, \quad \prod_{j=1}^{l} t_j = t_1 * t_2 * \ldots * t_l.$$

($\Leftarrow$) Пусть T — почти вполне o-минимальная теория. Мы докажем, что T имеет в точности $3^m 6^l$ счетных моделей. Пусть M — счетная насыщенная модель T. Возьмем произвольное $1 \leq i \leq m$. Если $\kappa_i = 1$, то имеем $n_i = 3$ ввиду предложения 3.3. Предположим теперь, что $\kappa_i > 1$.

Тогда существует $p_s^i \in \Gamma_1^i$ такой, что $p_i \not\perp^w p_s^i$. В силу почти вполне o-минимальности T имеем $p_i \not\perp^{aq} p_s^i$. Следовательно, существует (p_i, p_s^i)-секатор $U(x,y)$ такой, что для любого $a \in p_1(M)$ и любого $a' \in E_1(a,M)$ имеем $\sup U(a',M) = \sup E_2(b,M)$ для некоторого $b \in p_s^i(M)$, где $E_1(x,y)$ и $E_2(x,y)$ — наибольшие $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие $p_i(M)$ и $p_s^i(M)$ соответственно на бесконечно много выпуклых классов; более того, функция $f(x) := \sup U(x,M)$ строго монотонна на $p_i(M)/E_1$.

Для определенности предположим, что p_i квазирационален справа (слева). Если f строго возрастает на $p_i(M)/E_1$, то p_s^i также квазирационален справа (слева), и для любой счетной модели $M_1 \models T$ множества $p_i(M_1)/E_1$ и $p_s^i(M_1)/E_2$ имеют равные порядковые типы. Если f строго убывает на $p_i(M)/E_1$, то p_s^i квазирационален слева (справа), и для любой счетной модели $M_1 \models T$ множества $p_i(M_1)/E_1$ и $p_s^i(M_1)/E_2$ имеют равные порядковые типы всякий раз, когда $p_i(M_1) = \varnothing$ или $p_i(M_1)/E_1$ порядково изоморфно $(0,1) \cap \mathbb{Q}$. Также утверждаем, что

$$p_i(M_1)/E_1 \text{ порядково изоморфно } [0,1) \cap \mathbb{Q}$$

$$\Leftrightarrow p_s^i(M_1)/E_2 \text{ порядково изоморфно } (0,1] \cap \mathbb{Q}.$$

Таким образом, $n_i = 3$ для случая $\kappa_i > 1$.

Далее рассмотрим произвольное $1 \leq j \leq l$. Если $\lambda_j = 1$, то $t_j = 6$ ввиду предложения 3.3. Предположим теперь, что $\lambda_j > 1$. Этот случай рассматривается аналогично случаю с квазирациональными типами, и мы также можем утверждать, что $t_j = 6$.

Следовательно, получаем $I(T,\omega) = 3^m 6^l$.

($\Rightarrow$) Пусть T имеет в точности $3^m 6^l$ счетных моделей. Предположим противное, что T не является почти вполне o-минимальной. Тогда существуют неизолированные $p', p'' \in S_1(\varnothing)$ такие, что $p' \not\perp^w p''$, но $p' \perp^{aq} p''$.

Случай 1. p' квазирационален.

Тогда p'' также квазирационален. Поскольку $p' \perp^{aq} p''$, для любых (p', p'')-секатора $U(x,y)$ и $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E(x,y)$,

разбивающего $p''(M)$ на бесконечно много выпуклых классов, существует $a \in p'(M)$ такой, что $\sup U(a,M) \neq \sup E(b,M)$ для любого $b \in p''(M)$.

Пусть $E'(x,y)$ и $E''(x,y)$ — наибольшие $\varnothing$-определимые отношения эквивалентности, разбивающие $p'(M)$ и $p''(M)$ соответственно на бесконечно много выпуклых классов. Рассмотрим произвольный (p',p'')-секатор $U(x,y)$. Тогда существует $a \in p'(M)$ такой, что $\sup U(a,M) \neq \sup E''(b,M)$ для любого $b \in p''(M)$. Пусть $f(x) := \sup U(x,M)$. Тогда f строго монотонна на $p'(M)/E'$. Без ограничения общности предположим, что f строго возрастает на $p'(M)/E'$, и рассмотрим следующую формулу:

$$U_0(x,y) := \exists x_1[E'(x,x_1) \wedge \exists u(U(x_1,u) \wedge [E''(u,y) \vee y \leq u])].$$

Ясно, что $U_0(x,y)$ также является (p',p'')-секатором, причем для любых $a \in p'(M)$, $a' \in E'(a,M)$ и $b \in p''(M)$ имеем $\sup U_0(a',M) \neq \sup E''(b,M)$, и $f_0(x) := \sup U_0(x,M)$ также строго возрастает на $p'(M)/E'$.

Если p' квазирационален справа, то p'' также квазирационален справа, поскольку f_0 строго возрастает на $p'(M)/E'$. Следовательно, возможными множествами реализаций этих типов являются следующие порядковые типы: $\varnothing$, $[0,1) \cap \mathbb{Q}$, $(0,1) \cap \mathbb{Q}$.

Очевидно, поскольку p' и p'' не слабо ортогональны, $p'(M_1) = \varnothing \Leftrightarrow p''(M_1) = \varnothing$ для любой счетной модели $M_1 \models T$. Предположим, что множество $p'(M_1)/E'$ порядково изоморфно $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ для некоторой счетной модели $M_1 \models T$. Мы должны показать, что $p''(M_1)/E''$ не может быть порядково изоморфно $[0,1) \cap \mathbb{Q}$. Действительно, если это не так, то возьмем $a \in p'(M_1)$, лежащий в крайнем левом E'-классе, и рассмотрим $U_0(a,M_1)$. Ясно, что существует $b \in p''(M_1)$, лежащий в крайнем левом E''-классе, для которого $M \models U_0(a,b)$ выполняется. Тогда очевидно, что $\inf U_0(M_1,b) = \inf E'(a,M_1)$.

Рассмотрим следующую формулу:

$$U''(x,y) := \exists t[U_0(t,x) \wedge \forall t'(t' < t \wedge \neg E'(t',t) \rightarrow \neg U_0(t',x)) \wedge (E'(t,y) \vee y \leq t)].$$

Тогда $U''(x,y)$ является, очевидно, (p'',p')-секатором и

$$\sup U''(b,M_1) = \sup E'(a,M_1),$$

т.е. $p'' \not\perp^{aq} p'$, что противоречит сделанному выше предположению. Таким образом, если $p'(M_1)/E'$ порядково изоморфно $[0,1)\cap\mathbb{Q}$, то $p''(M_1)/E''$ должно быть порядково изоморфно $(0,1)\cap\mathbb{Q}$. Ввиду симметрии не почти вполне ортогональности заключаем, что если $p''(M_1)/E''$ порядково изоморфно $[0,1)\cap\mathbb{Q}$, то $p'(M_1)/E'$ должно быть порядково изоморфно $(0,1)\cap\mathbb{Q}$. В случае счетной насыщенной модели M как $p'(M)/E'$, так и $p''(M)/E''$ порядково изоморфны $(0,1)\cap\mathbb{Q}$. Таким образом, для некоторого $1\le i\le m$ получаем $n_i\ge 4$, откуда $I(T,\omega)\ne 3^m6^l$. Противоречие. Также если имеется n не слабо ортогональных квазирациональных 1-типов над $\varnothing$, которые попарно почти вполне ортогональны для некоторого $n\ge 2$, то мы видим, что $n_i = n+2$ (ср. [10, Пример 5.5]).

Случай 2. p' иррационален.

Тогда p'' также иррационален. Этот случай рассматривается аналогично случаю 1, и мы получаем $t_j\ge 12$ для некоторого $1\le j\le l$. Противоречие. Также если имеется n не слабо ортогональных иррациональных 1-типов над $\varnothing$, которые попарно почти вполне ортогональны для некоторого $n\ge 2$, то мы видим, что $t_j = 4n+2+2C_n^2$, где C_n^2 — биномиальный коэффициент (ср. [10, Пример 5.7]). □

СЛЕДСТВИЕ 3.7. Пусть T — слабо o-минимальная теория конечного ранга выпуклости, имеющая менее 2^ω счетных моделей, и пусть $\Gamma_1 = \{p_1,p_2,\ldots,p_m\}$ и $\Gamma_2 = \{q_1,q_2,\ldots,q_l\}$ — максимальные попарно слабо ортогональные семейства квазирациональных и иррациональных 1-типов над $\varnothing$ соответственно для некоторых $m,l<\omega$. Тогда $I(T,\omega)=\omega \Leftrightarrow$ существует $p\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$, который не слабо ортогонален счетному числу попарно почти вполне ортогональных неалгебраических типов над $\varnothing$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Macpherson, D. Marker, Ch. Steinhorn, “Weakly o-minimal structures

and real closed fields", *Trans. Am. Math. Soc.* **352**, No. 12, 5435–5483 (2000).

2. B. S. Baizhanov, "Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates", *J. Symb. Log.* **66**, No. 3, 1382–1414 (2001).
3. B. Sh. Kulpeshov, "The convexity rank and orthogonality in weakly o-minimal theories", *Izv. NAN RK, Ser. Fiz.-Mat.* No. 227, 26–31 (2003).
4. Б. Ш. Кулпешов, "Ранг выпуклости и ортогональность в слабо о-минимальных теориях", *Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат.* **227**, 26–31 (2003).
5. B. Sh. Kulpeshov, "Weakly o-minimal structures and some of their properties", *J. Symb. Log.* **63**, No. 4, 1511–1528 (1998).
6. L. L. Mayer, "Vaught's conjecture for o-minimal theories", *J. Symb. Log.* **53**, No. 1, 146–159 (1988).
7. B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, "Vaught's conjecture for quite o-minimal theories", *Ann. Pure Appl. Log.* **168**, No. 1, 129–149 (2017).
8. Б. Ш. Кулпешов, "Критерий бинарности почти ω-категоричных слабо о-минимальных теорий", *Сиб. мат. журн.* **62**, No. 6, 1313–1329 (2021).
9. B. Sh. Kulpeshov, "Criterion for binarity of $\aleph_0$-categorical weakly o-minimal theories", *Ann. Pure Appl. Log.* **145**, No. 3, 354–367 (2007).
10. Б. Ш. Кулпешов, "Гипотеза Воота для слабо о-минимальных теорий конечного ранга выпуклости", *Изв. РАН, Сер. мат.* **84**, No. 2, 126–151 (2020).
11. A. Alibek, B. S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov, S. Zambarnaya, "Vaught's conjecture for weakly o-minimal theories of convexity rank 1", *Ann. Pure Appl. Log.* **169**, No. 11, 1190–1209 (2018).

Статья поступила в редакцию 21 ноября 2022 г.
после доработки 6 апреля 2023 г.
принята к публикации 7 июня 2023 г.

Алгебра и логика Том 63, No. 4, 427–442 (2024)

УДК 512.554.31:510.67

У. Л. Мариано[1], **Ж. Шварц**[2]

ГИПОТЕЗА ГЕЛЬФАНДА — КИРИЛЛОВА КАК ФОРМУЛА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аннотация: Показано, что для данной (приведенной) системы корней Σ (см. [20, 11.1]) и любого алгебраически замкнутого поля k характеристики нуль справедливость гипотезы Гельфанда — Кириллова для конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$ — единственной полупростой алгебры Ли над k с системой корней Σ — эквивалентна доказуемости определенного предложения первого порядка на языке колец $\mathscr{L}(0,1,+,*,-)$ в теории ACF_0 алгебраически замкнутых полей характеристики нуль.

Ключевые слова: *алгебраически замкнутое поле, гипотеза Гельфанда — Кириллова, конечномерная алгебра Ли.*

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известны связи между алгеброй и логикой [1, 2].

В приложениях к алгебраической геометрии применение логических методов началось с работы А. Тарского об исследовании разрешимости в теории алгебраически замкнутых полей при помощи элиминации кванторов и достигло значительных успехов в последующие годы при помощи более тонких методов теории моделей таких как работа Акса, Кочена и Ершова о гипотезе Артина или знаменитое доказательство гипотезы Морделла — Ленга Грушовским (см. [3]–[6]).

*Работа поддержана FAPESP, грант № 2018/18146-5. [1] Instituto de Matematica e Estatistica, Universidade de Sao Paulo, Sao Paulo, Brasil; hugomar@ime.usp.br. [2] Centro de Matematica, Computacao e Cognicao, Universidade Federal do ABC Santo Andre, Brasil; jfschwarz.0791@gmail.com.

Зафиксируем некоторые обозначения и допущения. Все кольца и поля будем рассматривать как алгебры над некоторым основным полем k.

Одной из основных проблем в алгебраической геометрии является задача бирациональной классификации многообразий [7]. В случае, когда поле k алгебраически замкнуто и мы работаем в категории аффинных неприводимых многообразий, задача относительно проста: если даны две конечно порожденные области A, B и соответствующие многообразия $X = \operatorname{Spec} A$, $Y = \operatorname{Spec} B$, то они бирационально эквивалентны тогда и только тогда, когда $\operatorname{Frac} A = \operatorname{Frac} B$. В общем случае два многообразия бирационально эквивалентны, если их поля функций изоморфны [7]. Актуальное введение в эту тему можно найти в [8].

Исследование бирациональной геометрии некоммутативных объектов началось в 1966 г. В своем докладе на Международном конгрессе математиков в Москве в 1966 г. А. А. Кириллов предложил классифицировать с точностью до бирациональной эквивалентности обертывающие алгебры $U(\mathfrak{g})$ конечномерных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ для случая, когда k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики. Это означает, что нужно найти канонические кольца с делением такие, что каждое тело вида $\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g})$ изоморфно одному из них. Напомним, что не любую некоммутативную область можно вложить в тело (это было показано А. И. Мальцевым), но обертывающие алгебры являются областями Оре, поэтому для них тело частных может быть относительно легко построено, см. [9, гл. 4].

Эта идея полностью вызрела в новаторской работе [10] (в той же работе было введено ныне широко использующееся понятие размерности Гельфанда – Кириллова, см. [11, гл. 8], а также такой важный инвариант, как степень трансцендентности Гельфанда — Кириллова), где была сформулирована гипотеза, известная в настоящее время как гипотеза Гельфанда —- Кириллова. Прежде чем привести ее формулировку, напомним некоторые определения.

Определение 1. *Алгеброй Вейля ранга* n называется алгебра $A_n(\mathsf{k})$, порожденная элементами $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ с определяющими соотношениями $[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0$, $[y_i, x_j] = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$. Обозначим

через $A_{n,s}(\mathsf{k})$ алгебру $A_n(\mathsf{k}(t_1,\dots,t_s))$ для $n \geq 1$, $s \geq 0$. Для упрощения обозначений пусть $A_{0,s}(\mathsf{k}) = \mathsf{k}(t_1,\dots,t_s)$. Как хорошо известно, над полем характеристики нуль алгебры Вейля — это конечно порожденные простые нётеровы области [11]. Обозначим через $\mathbb{D}_{n,s}(\mathsf{k})$, $\mathbb{D}_n(\mathsf{k})$ тела частных соответственно для $A_{n,s}(\mathsf{k})$, $A_n(\mathsf{k})$. Эти кольца с делением называются *телами Вейля*.

Гипотеза (Гельфанд — Кириллов). Рассмотрим обертывающую алгебру $U(\mathfrak{g})$ конечномерной алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над алгебраически замкнутым полем k характеристики нуль. Тогда его тело частных $\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g})$ изоморфно одному из тел $\mathbb{D}_{n,s}(\mathsf{k})$ для некоторых $n, s \geq 0$.

Справедливость этой гипотезы была установлена в [10] для $\mathfrak{gl}_n$ и $\mathfrak{sl}_n$, а также для нильпотентных алгебр Ли. Позднее в [12–14] этот факт был обобщен на разрешимые алгебры Ли. Другие случаи были рассмотрены в [15–17] и, с некоторыми модификациями, — в [18] и [19]. Гипотеза Гельфанда — Кириллова оказала значительное влияние на развитие теории алгебр Ли (см. [20, проблема 3]), а относительно недавно q-аналог этой гипотезы исследовался в теории квантовых групп [21, пп. I.2.11 и II.10.4]. Она также стала каноническим примером для изучения тел частных различных областей Оре, см. [22]–[24]. Однако в конечном итоге было показано, что гипотеза в общем случае неверна [25]. Для простых алгебр Ли типа A справедливость гипотезы была доказана в упомянутой работе Гельфанда и Кириллова. Впоследствии в работе Премета [26] при помощи методов редукции по простому модулю было показано, что гипотеза Гельфанда — Кириллова неверна для типов B, D, E, F. Относительно типов C, G на данный момент вопрос остается открытым.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы доказать следующее неожиданное наблюдение: для данной (приведенной) системы корней Σ (см. [20, 11.1]) и *любого* алгебраически замкнутого поля k характеристики нуль справедливость гипотезы Гельфанда — Кириллова для конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$ — единственной полупростой алгебры Ли над k с системой корней Σ — эквивалентна доказуемости определенного предложения пер-

вого порядка на языке колец $\mathscr{L}(0,1,+,*,-)$ в теории ACF_0 алгебраически замкнутых полей характеристики нуль (см. [3]).

ТЕОРЕМА 1. Для данной системы корней Σ существует предложение первого порядка ϕ_Σ на языке колец $\mathscr{L}(1,0,+,*,-)$ такое, что следующие условия эквивалентны:

(1) для некоторого алгебраически замкнутого поля k нулевой характеристики гипотеза Гельфанда — Кириллова выполняется для $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$,

(2) для любого алгебраически замкнутого поля k нулевой характеристики гипотеза Гельфанда — Кириллова выполняется для $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$,

(3) $ACF_0 \vdash \phi_\Sigma$.

Более того, ϕ_Σ естественным образом строится как экзистенциальное замыкание булевых комбинаций атомарных формул на языке колец.

Заметим, что поскольку ACF_0 допускает элиминацию кванторов, каждое предложение на языке колец эквивалентно булевой комбинации атомарных предложений.

Теорема 1 является неожиданной в том смысле, что нет априорной причины для того, чтобы гипотеза Гельфанда — Кириллова могла быть выражена формулой первого порядка. В последующем $\mathbb{A}$ обозначает поле алгебраических чисел.

Чтобы получить лучшее понимание о природе нашего результата, напомним отдельные моменты теории колец. Пусть $\mathscr{R} = \mathscr{L}(1,0,+,*,-)$ — язык первого порядка в сигнатуре колец, и пусть $\mathscr{R}^2$ — соответствующий язык второго порядка.

Для данного кольца E определим радикал Джекобсона, который мы обозначим через J_E, как предикат: $J_E(r)$ означает $r \in J_E$ для данного $r \in E$. Приведенное ниже обсуждение радикала Джекобсона можно найти в классических монографиях, напр., [9].

Первым способом J_E можно определить как пересечение аннуляторов всех неприводимых левых E-модулей. Если принять такое определение, что мы вынуждены работать в ZFC: найдется формула первого порядка $\phi(x)$ на языке ZFC с единственной свободной переменной x такая, что

$J_E(r)$ тогда и только тогда, когда

$$ZFC \vdash \phi(r), \quad r \in E.$$

Другое определение радикала Джекобсона J_E — как пересечение всех левых максимальных идеалов кольца E. В этом случае найдется формула $\phi_2(x) \in \mathscr{R}^2$ с единственной свободной переменной x такая, что $J_E(r)$ тогда и только тогда, когда

$$E \models \phi_2(r), \quad r \in E,$$

в полной семантике второго порядка.

Наконец, имеется еще одна эквивалентная характеризация радикала: $r \in J_E$ тогда и только тогда, когда для любого $s \in E$ элемент $1 - sr$ обратим слева в E. Это свойство, очевидно, может быть выражено формулой первого порядка на языке $\mathscr{R}$.

Пусть Σ — система корней и k — алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Определим предикат $\mathscr{GK}(\mathsf{k}, \Sigma)$, который означает, что гипотеза Гельфанда–Кириллова верна для $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$. Исходное определение использует язык ZFC.

Даже если для каждого k мы сумеем найти формулу $\theta_{\mathsf{k},\Sigma}$ на языке $\mathscr{R}$ такую, что $\mathscr{GK}(\mathsf{k}, \Sigma)$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{k} \models \theta_{\mathsf{k},\Sigma}$, то это уже будет замечательный результат.

Однако мы покажем, что существует формула первого порядка θ_Σ на языке $\mathscr{R}$ такая, что $\mathscr{GK}(\mathsf{k}, \Sigma)$ для произвольного k тогда и только тогда, когда $\mathbb{A} \models \theta_\Sigma$. Поскольку AFC_0 является полной теорией, это условие выполнено, если и только если $AFC_0 \vdash \theta_\Sigma$.

Отметим также, что представление того или иного утверждения в виде предложения первого порядка в ACF_0 является очень важным вопросом. Одним из основных приложений этой идеи является принцип Лефшеца в алгебраической геометрии: поскольку ACF_0 является полной теорией [3], то для доказательства какого-либо утверждения для многообразия над алгебраически замкнутым полем k нулевой характеристики достаточно доказать его для $\mathsf{k} = \mathbb{C}$, где применимы трансцендентные методы. Гипотеза

Гельфанда — Кириллова, очевидно, относится к области некоммутативной алгебраической геометрии, но в качестве иллюстрации нашего результата отметим, что справедливость гипотезы Гельфанда — Кириллова для простых алгебр Ли типа C или G (где она все еще открыта) над любым алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики эквивалентна ее справедливости над $\mathbb{C}$, где можно использовать сложные методы теории групп Ли и другие аналитические и геометрические подходы. Здесь, однако, необходимо соблюдать осторожность, поскольку не каждый геометрический аспект может быть выражен в логике первого порядка (ср. [27]). Общее ощущение, что принцип Лефшеца справедлив для любого достаточно простого утверждения в алгебраической геометрии, было формализовано в [28].

1 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Наш метод очень прост. Премет [26, теорема 2] доказал следующее: если гипотеза Гельфанда — Кириллова выполняется для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$ в характеристике 0, то ее модульная версия также выполняется в характеристике p для достаточно больших p. Внимательно анализируя его доказательство (см. теорему 2 ниже), мы получаем формулу первого порядка $\phi_{\mathsf{k},\Sigma}$ на языке $\mathscr{R}$ такую, что гипотеза Гельфанда — Кириллова выполняется для $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{k} \models \phi_{\mathsf{k},\Sigma}$. Затем мы показываем, что формула ϕ_Σ в теореме 1 может быть выбрана как $\phi_{\mathbb{A},\Sigma}$, где $\mathbb{A}$ — поле алгебраических чисел.

Пусть Tdeg обозначает степень трансцендентности Гельфанда — Кириллова алгебры над k (см. [10, 29]); trdeg будет обозначать обычную степень трансцендентности коммутативных полей. Над полем k характеристики 0 $\operatorname{Tdeg} \mathbb{D}_{n,l}(\mathsf{k}) = 2n + l$, как вычислено в [10, Thm. 2].

Замечание. Степень трансцендентности Гельфанда — Кириллова не следует путать с более привычной размерностью Гельфанда — Кириллова (см., например, [11, гл. 8]). Они не совпадают: как показано в [30], поля Вейля содержат в качестве подалгебр некоммутативные свободные алгеб-

ры, поэтому их размерности Гельфанда — Кириллова бесконечны, в то время как степень трансцендентности Гельфанда — Кириллова для поля Вейля конечна.

Напомним некоторые факты о конечномерных полупростых алгебрах Ли и их обертывающих алгебрах. Пусть Σ — система корней с фиксированным базисом Δ простых корней; группа Вейля будет обозначаться через W. Рассмотрим кольцо Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z},\Sigma}$, построенное с помощью базиса Шевалле для соответствующей комплексной алгебры Ли (см. [31, п. 25.2]).

Для любого алгебраически замкнутого поля k характеристики 0 имеем $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma} = \mathfrak{g}_{\mathbb{Z},\Sigma} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{k}$ и аналогично $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}) = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{Z},\Sigma}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathsf{k}$ (см. [31, п. 25.5] или [32, гл. 1, 2.9]). Также ясно, что если $\mathsf{k} \subset \mathsf{k}'$, то $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{Z},\Sigma}) \subset U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}) \subset U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k}',\Sigma})$.

Определим $\mathscr{K} = \{U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}) \mid \operatorname{char} \mathsf{k} = 0, \bar{\mathsf{k}} = \mathsf{k}\}$, $U_{\mathbb{Z}} = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{Z},\Sigma})$. Строго говоря, $\mathscr{K}$ является собственным классом, а не множеством, но мы можем не беспокоиться об этом мелком основательном вопросе.

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [33, гл. 5]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Все кольца в $\mathscr{K}$, а также $U_{\mathbb{Z}}$ являются нётеровыми (следовательно, Ope) областями целостности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Для алгебры $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ верно следующее:

(1) $Z(\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})) \cong \operatorname{Frac} Z(U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}))$,

(2) $\operatorname{Tdeg} \operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}) = \dim_{\mathsf{k}} \mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$,

(3) $Z(U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}))$ является полиномиальной алгеброй $\mathsf{k}[x_1, \ldots, x_K]$, где $x_1, \ldots, x_K \in U_{\mathbb{Z}}$.

Доказательство. (1) доказано в [20, п. 4.3.2]; (2) содержится в [29, теорема 1.1]; (3) можно найти в [20, п. 7.4.6]. □

Следующая лемма очевидна, но весьма важна для дальнейшего изложения.

ЛЕММА 4. Пусть k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}) \in \mathscr{K}$. Если $\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}) \cong \mathbb{D}_{n,l}(\mathsf{k})$, то

$$\operatorname{Frac} Z(U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})) \cong \mathsf{k}(x_1, \ldots, x_l).$$

Доказательство очевидно, поскольку

$$Z(\mathbb{D}_{n,l}(\mathsf{k})) = \mathsf{k}(x_1, \ldots, x_l),$$

(см. [10, теорема 2]) и ввиду изоморфизма в предложении 3(1). □

Следующее предложение является широким обобщением леммы 1.2.3 из [34] и представляет самостоятельный интерес.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть A — область Оре над k произвольной характеристики с $\operatorname{Tdeg} A = 2n + l$. Предположим, что существуют элементы $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_l$ из $\operatorname{Frac} A$ такие, что $[x_i, y_j] = \delta_{i,j}$ и все остальные коммутаторы между этими элементами равны нулю. Пусть B — подалгебра в $\operatorname{Frac} A$, порожденная этими элементами. Если $\operatorname{Frac} B = \operatorname{Frac} A$, то $B \cong A_{n,l}(\mathsf{k})$ и $\operatorname{Frac} A \cong \mathbb{D}_{n,l}(\mathsf{k})$.

Доказательство. Используя представление алгебры Вейля образующими и соотношениями, получаем сюръективный гомоморфизм $\theta : A_{n,l}(\mathsf{k}) \to B$ с ядром I. По [29, Thm. 1.1, Prop. 3.1] имеем $2n+l = \operatorname{GKdim} A_{n,l}(\mathsf{k}) \geq \operatorname{GKdim} B \geq \operatorname{Tdeg} B \geq \operatorname{Tdeg} \operatorname{Frac} B = 2n + l$. Предположим $I \neq \{0\}$. Тогда $\operatorname{GKdim} B < \operatorname{GKdim} A_{n,l}(\mathsf{k})$ (см. [11, Cor. 8.3.6]), что противоречит неравенствам. Следовательно, θ — искомый изоморфизм. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ — алгебра из $\mathscr{K}$ и $x_1, \ldots, x_n$ — базис $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$, содержащийся в $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z},\Sigma}$. В этом случае

$$\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}) \cong \mathbb{D}_{m,l}(\mathsf{k})$$

тогда и только тогда, когда существуют $w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_{2m}$ в $\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ такие, что $[w_i, w_j] = [w_{m+i}, w_{m+j}] = 0$, $[w_i, w_{m+j}] = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, m$, и многочлены p_i, q_i от переменных w_i с коэффициентами в $Z(U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}))$ такие, что $q_i x_i = p_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Необходимость очевидна; единственный момент, заслуживающий внимания, касается многочленов p_i, q_i. Они существуют, поскольку подалгебра, порожденная внутри $\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ элементами $w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_{2m}$, имеет в качестве базиса мономы, в которых эти пере-

менные входят с неотрицательными целыми показателями. Достаточность следует из предложения 5. □

Следующий результат является в некотором роде аналогом теоремы Гильберта о нулях (Nullstellensatz); его доказательство близко следует [26, теорема 2.1].

ТЕОРЕМА 7. Пусть $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}) \in \mathscr{K}$. Тогда для $N \gg 0$ существует локально замкнутое подмногообразие X^{k} в k^N, заданное многочленами с целыми коэффициентами и такое, что гипотеза Гельфанда — Кириллова выполняется для $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ тогда и только тогда, когда $X^{\mathsf{k}} \neq \varnothing$.

Доказательство. Предположим $\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}) \cong \mathbb{D}_{m,l}(\mathsf{k})$. По предложению 6 можно найти элементы $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{g}_{\mathbb{Z},\Sigma}$, образующие базис $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$, элементы $w_1, \ldots, w_m, w_{m+1}, \ldots, w_{2m}$ в $\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ такие, что

$$[w_i, w_j] = [w_{m+i}, w_{m+j}] = 0, \quad [w_i, w_{m+j}] = \delta_{ij},\ i,j = 1, \ldots, m, \tag{$\dagger$}$$

и многочлены p_i, q_i от переменных w_i с коэффициентами в $Z(A_{\mathsf{k}})$ такие, что

$$q_i x_i = p_i,\ i = 1, \ldots, n. \tag{$\ddagger$}$$

Напомним, что $Z(U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})) = \mathsf{k}[\phi_1, \ldots \phi_l]$, $\phi_i \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{Z},\Sigma})$. Фильтрация PBW алгебры $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ обозначается через $\mathscr{F}_{\mathsf{k}} = \{F_{i,\mathsf{k}}\}_{i \geq 0}$ в соответствии с предложением 2.

Используя тот факт, что $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ является областью Оре, мы можем найти $a_i, b_j \in F_{d(i),\mathsf{k}}$, $i = 1, \ldots, 2m$, где $d(i) \in \mathbb{N}$ — некоторые индексы, для которых $w_i = b_i^{-1} a_i$. Аналогично найдем $a_{i,j}, b_{i,j} \in F_{d(i,j),\mathsf{k}}$, $i,j = 1, \ldots, n$, такие что

$$b_{i,j} a_i = a_{i,j} b_j, \quad i,j = 1, \ldots, 2m. \tag{1}$$

Затем введем $c_{i,j}, d_{i,j} \in F_{d(i,j),\mathsf{k}}$, полагая

$$c_{i,j} b_{i,j} b_i = d_{i,j} b_{j,i} b_j, \quad i,j = 1, \ldots, 2m. \tag{2}$$

Следовательно, ввиду (†) имеем

$$c_{i,j}a_{i,j}a_j = d_{i,j}a_{j,i}a_i, \quad i,j = 1,\dots,m \text{ или } i,j = m,\dots,2m, \tag{3}$$

$$c_{i,m+j}a_{i,m+j}a_{m+j} = \delta_{i,j}c_{i,m+j}b_{i,m+j}b_i + d_{i,m+j}a_{m+j,i}a_i, \quad i,j = 1,\dots,m. \tag{4}$$

Если $\mathsf{m} \geq 3$ и существует m-набор $\mathsf{i} = (i(1),\dots,i(\mathsf{m}))$ индексов с $1 \leq i(1) \leq \dots \leq i(\mathsf{m}) \leq 2m$, можно индуктивно найти элементы $a_{i(1)\dots i(k)}, b_{i(1)\dots i(k)}$ в $F_{d(\mathsf{i}),\mathsf{k}}$, где $3 \leq k \leq \mathsf{m}$, такие что

$$b_{i(1)\dots i(k)}a_{i(1)\dots i(k-1)}a_{i(k-1)} = a_{i(1)\dots i(k)}b_{i(k)}. \tag{5}$$

Положим $b_{\mathsf{i}} = \prod_{k=1}^{\mathsf{m}} b_{i(1)\dots i(\mathsf{m}-k+1)}$ и $a_{\mathsf{i}} = a_{i(1)\dots i(\mathsf{m})}a_{i(\mathsf{m})}$. Рассмотрим m-наборы i такие, как выше, для которых

$$\sum_{\ell=1}^{\mathsf{m}} i(\ell) \leq M,$$

где

$$M = \max\{\deg p_i, \deg q_i \mid i = 1,\dots,n\}.$$

Обозначим их $\{\mathsf{i}(1),\dots,\mathsf{i}(r)\}$. Тогда

$$p_k = \sum_{j=1}^{r} \lambda_{j,k}b_{\mathsf{i}(j)}^{-1}a_{\mathsf{i}(j)}, \quad q_k = \sum_{j=1}^{r} \mu_{j,k}b_{\mathsf{i}(j)}^{-1}a_{\mathsf{i}(j)}.$$

Запишем

$$\lambda_{j,k} = \sum \lambda_{j,k}(n_1,\dots,n_l)\phi_1^{n_1}\dots\phi_l^{n_l},$$

$$\mu_{j,k} = \sum \mu_{j,k}(n_1,\dots,n_l)\phi_1^{n_1}\dots\phi_l^{n_l},$$

где суммирование ведется по конечному множеству наборов $(n_1,\dots,n_l) \in \mathbb{N}^l$ и $\lambda_{j,k}(n_1,\dots,n_l), \mu_{j,k}(n_1,\dots,n_l) \in \mathsf{k}$.

Существуют $0 \neq e_{\mathsf{i}(j);k}, f_{\mathsf{i}(j);k} \in F_{d(\mathsf{i}(j);k),\mathsf{k}}$ такие, что

$$a_{\mathsf{i}(j)}x_k f_{\mathsf{i}(j);k} = b_{\mathsf{i}(j)}e_{\mathsf{i}(j);k}, \quad j = 1,\dots,r,\ k = 1,\dots n, \tag{6}$$

и тогда $p_k = q_k x_k$ влечет

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_{j,k} b_{\mathrm{i}(j)}^{-1} a_{\mathrm{i}(j)} = \sum_{j=1}^{r} \mu_{j,k} e_{\mathrm{i}(j);k} f_{\mathrm{i}(j);k}^{-1}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Теперь введем $a_{\mathrm{i}(j)}(0) = a_{\mathrm{i}(j)}$, $b_{\mathrm{i}(j)}(0) = b_{\mathrm{i}(j)}$, $e_{\mathrm{i}(j);k}(0) = e_{\mathrm{i}(j);k}$ и $f_{\mathrm{i}(j);k}(0) = f_{\mathrm{i}(j);k}$, и индуктивно для каждого $0 < s < j \leq r$ определим $a_{\mathrm{i}(j)}(s)$, $b_{\mathrm{i}(j)}(s)$, $e_{\mathrm{i}(j);k}(s)$ и $f_{\mathrm{i}(j);k}(s)$ в $F_{d(\mathrm{i}(j),k,s),\mathsf{k}}$ такие, что

$$b_{\mathrm{i}(j)}(s) b_{\mathrm{i}(s)}(s-1) = a_{\mathrm{i}(j)}(s) b_{\mathrm{i}(j)}(s-1), \tag{7}$$

$$f_{\mathrm{i}(j);k}(s-1) e_{\mathrm{i}(j);k}(s) = f_{\mathrm{i}(s);k}(s-1) f_{\mathrm{i}(j);k}(s). \tag{8}$$

Наконец, выполняется следующее алгебраическое соотношение:

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_{j,k} \prod_{\ell=1}^{r-j} b_{\mathrm{i}(r-\ell+1)}(r-\ell) \prod_{\ell=1}^{j} a_{\mathrm{i}(j-\ell+1)}(j-\ell)) \prod_{\ell=1}^{r} f_{\mathrm{i}(\ell);k}(\ell-1)$$

$$= \prod_{\ell=1}^{r} b_{\mathrm{i}(r-\ell+1)}(r-\ell) \sum_{j=1}^{r} \mu_{j,k} \prod_{\ell=1}^{j} e_{\mathrm{i}(\ell);k}(\ell-1) \prod_{\ell=j+1}^{r} f_{\mathrm{i}(\ell);k}(\ell-1). \tag{9}$$

Из вышеизложенного следует, что у нас есть элементы

$$a_i, b_i, a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, d_{i,j}, a_{i(1)\ldots i(s)}, b_{i(i)\ldots i(s)}, a_{\mathbf{i}(j)}(\ell), b_{\mathbf{i}(j)}(\ell), e_{\mathbf{i}(j);k}(\ell), f_{\mathbf{i}(j);k}(\ell),$$

где $i, j, k, s, \mathbf{i}(j), \ell$ пробегают конечное множество индексов и принадлежат $F_{M,\mathsf{k}}$ для $M \gg 0$, а также две конечные совокупности элементов из k: $\lambda_{j,k}(a_1, \ldots, a_l), \mu_{j,k}(a_1, \ldots, a_l)$, которые связаны алгебраическими уравнениями (1)–(9). Эти данные могут быть параметризованы локально замкнутым подмножеством, задаваемым совместным обращением в нуль многочленов $\{f_1, \ldots, f_r\}$ и ненулевыми значениями некоторых $g \in \{g_1, \ldots, g_s\}$ в k^N, достаточно большом аффинном пространстве, причем все многочлены имеют целые коэффициенты. Обозначим это многообразие через X^{k}. Тогда выполнение гипотезы Гельфанда — Кириллова для $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ влечет $X^{\mathsf{k}} \neq \varnothing$. Процесс обратим, следовательно, мы имеем эквивалентность

между $X^{\mathsf{k}} \neq \varnothing$ и гипотезой Гельфанда — Кириллова для $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$. □

ТЕОРЕМА 8. В обозначениях предыдущей теоремы пусть $\psi_{\mathsf{k},\Sigma} := \left(\bigwedge f_i = 0\right) \wedge \left(\bigvee g_j \neq 0\right)$, и обозначим через $\phi_{\mathsf{k},\Sigma}$ ее экзистенциальное замыкание. Тогда гипотеза Гельфанда — Кириллова выполняется тогда и только тогда, когда $\mathsf{k} \models \phi_{\mathsf{k},\Sigma}$.

Доказательство. $X^{\mathsf{k}} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда существует элемент $\lambda \in \mathsf{k}$ такой, что $\left(\bigwedge f_i(\lambda) = 0\right) \wedge \left(\bigvee g_j(\lambda) \neq 0\right)$. Это, очевидно, эквивалентно $\mathsf{k} \models \phi_{\mathsf{k},\Sigma}$. □

Как мы увидим, $\phi_{\mathbb{A},\Sigma}$ и есть искомая формула для теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ 9. Если гипотеза Гельфанда — Кириллова верна для некоторой $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}) \in \mathscr{K}$, где k — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, то она выполняется для $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},\Sigma})$.

Доказательство. По теореме 8 (с использованием тех же обозначений) $X^{\mathsf{k}} \neq \varnothing$. Следовательно, $X^{\mathsf{k}}(\mathbb{A}) \neq \varnothing$, поскольку X задается многочленами с целыми коэффициентами. Процесс, описанный в доказательстве теоремы 7, обратим, и соотношение (9) в нем относится к основному полю; следовательно, мы можем предположить, что элементы в (†), (‡) принадлежат $\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},\Sigma})$. Поскольку элементы $x_1, \ldots, x_n$ также принадлежат $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z},\Sigma}$ и по определению являются базисом этого векторного пространства, мы можем применить предложение 6 и заключить, что гипотеза Гельфанда — Кириллова верна для $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},\Sigma})$. □

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Если гипотеза Гельфанда — Кириллова верна для $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},\Sigma})$, то она верна для всех $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$, где k — любое алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики.

Доказательство. Если гипотеза Гельфанда — Кириллова верна для $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},\Sigma})$ и мы нашли элементы x_i в $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},\Sigma})$ и w_i в $\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},\Sigma})$ такие, как в предложении 6, то эти элементы также лежат в $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ и $\operatorname{Frac} U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$ соответственно. Применяя предложение 6 в обратном направлении, заключаем, что гипотеза Гельфанда — Кириллова верна для $U(\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma})$. □

ТЕОРЕМА 11. Гипотеза Гельфанда — Кириллова верна для $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{A},\Sigma})$ тогда и только тогда, когда $ACF_0 \vdash \phi_\Sigma$, где ϕ_Σ — формула на языке колец

$\mathscr{R}$, которая является экзистенциальным замыканием булевой комбинации атомарных формул.

Доказательство. Согласно доказательству теоремы 7 существует локально замкнутое подмногообразие $X^{\mathbb{A}}$ некоторого $\mathbb{A}^N$ такое, что гипотеза Гельфанда — Кириллова Верна тогда и только тогда, когда $X^{\mathbb{A}} \neq \varnothing$. Напомним, что $X^{\mathbb{A}}$ задается совместным обращением в нуль многочленов $\{f_1, \ldots, f_r\}$ и ненулевыми значениями некоторых $g \in \{g_1, \ldots, g_s\}$ в $\mathbb{A}^N$. Пусть $\psi_\Sigma = \left(\bigwedge f_i = 0\right) \wedge \left(\bigvee g_j \neq 0\right)$ и обозначим через ϕ_Σ экзистенциальное замыкание ψ_Σ. Очевидно, $X^{\mathbb{A}} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{A} \models \phi$. Поскольку теория алгебраически замкнутых полей фиксированной характеристики полна ([3]), это имеет место тогда и только тогда, когда $ACF_0 \vdash \phi$. □

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы 1. Условие (1) влечет (2) по следствию 9 и предложению 10. Из (2) следует (1) тривиально. Пусть ϕ_Σ — формула из теоремы 11. Тогда по предложению 10 и теореме 11 условия (2) и (3) эквивалентны.

Благодарности. Ж. Шварц благодарит М. Суариса и С. Хоффманна Пануччи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. M. Cohn, *Universal Algebra*, Reidel, Dordrecht (1981).
2. А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, М. (1970).
3. W. Hodges, *A Shorter Model Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1997).
4. E. Bouscaren (ed.), *Model Theory and Algebraic Geometry: An Introduction to E. Hrushovski's Proof of the Geometric Mordell–Lang Conjecture Lect. Notes Math.* **1696**, Springer, Berlin (1998).
5. B. Hart et al. (Eds.), *Lectures on Algebraic Model Theory*, Am. Math. Soc., Providence, RI (2002).
6. D. Marker, M. Messmer, A. Pillay, *Model Theory of Fields* ASL, Wellesley, MA (2006).

7. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, New York (1977).

8. J. Kollar, S. Mori, *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1998).

9. T. Y. Lam, *Lectures on Modules and Rings*, Springer, New York (1999).

10. I. M. Gelfand, A. A. Kirillov, "Sur les corps lies aux algebres enveloppantes des algebres de Lie", *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **31**, 5–19 (1966).

11. J. C. McConnell, J. C. Robinson, *Noncommutative Noetherian Rings* Am. Math. Soc., Providence, RI (2001).

12. J. C. McConnel, "Representations of solvable Lie algebras and the Gelfand–Kirillov conjecture", *Proc. London Math. Soc.* **29**, No. 3, 453–484 (1974).

13. A. Joseph, "Proof of the Gelfand–Kirillov conjecture for solvable Lie algebras", *Proc. Am. Math. Soc.* **45**, 1–10 (1974).

14. W. Borho, P. Gabriel, R. Rentschler, *Primideale in Einhullenden auflosbarer Lie-Algebren*, Springer, Berlin etc. (1973).

15. X. H. Nghiem, "Reduction de produits semi-directs et conjecture de Gelfand et Kirillov", *Bull. Soc. Math. France* **107**, 241–267 (1979).

16. J. Alev, A. I. Ooms, M. Van den Bergh, "The Gelfand–Kirillov conjecture for Lie algebras of dimension at most eight", *J. Alg.* **227**, No. 2, 549–581 (2000).

17. A. I. Ooms, "The Gelfand–Kirillov conjecture for semi-direct products of Lie algebras", *J. Alg.* **305**, No. 2, 901–911 (2006).

18. И. М. Гельфанд, А. А. Кириллов, "Структура тела, связанного с полупростой расщепимой алгеброй Ли", *Функц. анал. прил.* **3**, No. 1, 7–26 (1969).

19. N. Conze, "Algebres d'operateurs differentiels et quotients des algebres enveloppantes", *Bull. Soc. Math. France* **102**, 379–415 (1974).

20. J. Dixmier, *Algebres Enveloppantes*, Gauthier-Villard, Paris (1974).

21. K. Brown, K. R. Goodearl, *Lectures on Algebraic Quantum Groups*, Birkhäuser, Basel (2002).

22. P. Etingof, V. Ginzburg, "Symplectic reflection algebras, Calogero–Moser space, and deformed Harish–Chandra homomorphism", *Invent. Math.* **147**, No. 2, 243–348 (2002).

23. J. Alev, F. Dumas, "Operateurs differentiels invariants et probleme de Noether", *Progr. Math.* **243**, 21–50 (2006).

24. J. Alev, F. Dumas, "On enveloping skew fields of some Lie superalgebras", *J. Algebra Appl.* **15**, No. 4 (2016), 1650071.

25. J. Alev, F. Dumas, M. Van den Bergh, "A class of counterexamples to the Gel'fand–Kirillov conjecture", *Trans. Am. Math. Soc.* **348**, No. 5, 1709–1716 (1996).

26. A. Premet, "Modular Lie algebras and the Gelfand–Kirillov conjecture", *Invent. Math.* **181**, No. 2, 395–420 (2010).

27. A. Seidenberg, "Comments on Lefschetz's principle", *Am. Math. Monthly* **65**, 685–690 (1958).

28. P. C. Eklof, "Lefschetz's principle and local functors", *Proc. AMS* **37**, 333–339 (1973).

29. J. J. Zhang, "On Gel'fand–Kirillov transcendence degree", *Trans. Am. Math. Soc.* **348**, 2867–2899 (1996).

30. L. Makar-Limanov, "The skew field of fractions of the Weyl algebra contains a free noncommutative subalgebra", *Comm. Alg.* **11**, 2003–2006 (1983).

31. J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, New York (1978).

32. N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras. Chapters 1–3*, Springer, New York (1998).

33. N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover, New York (1979).

34. J.-M. Bois, “Gelfand–Kirillov conjecture in positive characteristics”, *J. Alg.* **305**, No. 2, 820–844 (2006).

Статья поступила в редакцию 26 мая 2024 г.
после доработки 28 сентября 2024 г.
принята к публикации 18 декабря 2024 г.

Алгебра и логика, Том 63, №4, 443–453 (2024)

УДК 512.56

М. В. Швидефски

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Аннотация: Заметка содержит необходимые дополнения и исправления к статье автора “Дуальность Стоуна для дистрибутивных частично упорядоченных множеств”, *Алгебра логика* **62**, No. 5, 637–664 (2023). В частности, уточняется определение топологического пространства с базой, исправляются доказательства теоремы 3.4 и утверждения 5.3, а также приводится исправленная таблица категорий почти собранных пространств с базой.

Ключевые слова: *Дистрибутивные частично упорядоченные множества, дуальность Стоуна, почти собранные пространства, спектральные пространства, категории.*

1 ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА С БАЗОЙ

В [1] определение топологического пространства с базой (см. [1, определение 3.2]) следует читать следующим образом.

Определение 1. Тройка $\mathbb{X} = \langle X, \mathscr{T}, \mathscr{B}\rangle$ называется *топологическим пространством с базой*, или просто *пространством с базой*, если выполнены следующие условия:

(i) $\langle X, \mathscr{T}\rangle$ является топологическим T_0-пространством и $\mathscr{B}$ образует базу топологии $\mathscr{T}$,

(ii) $\varnothing \in \mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}$ является собранным и частично упорядоченное множество $\langle \mathscr{B}; \subseteq\rangle$ направлено вниз,

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН (проект FWNF-2022-0012) и при поддержке Российского научного фонда (проект No. 22-21-00104/). Новосибирский государственный университет и Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; m.schwidefsky@g.nsu.ru.

(iii) $X \in \mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}$ компактно и частично упорядоченное множество $\langle \mathscr{B}; \subseteq \rangle$ направлено вверх.

В этом случае мы пишем $\mathscr{T}(\mathbb{X})$ для $\mathscr{T}$ и $\mathscr{B}(\mathbb{X})$ для $\mathscr{B}$.

Мы говорим, что $\mathbb{X}$ является *топологическим пространством с направленной вверх базой* (*направленной вниз базой*), если частично упорядоченное множество $\langle \mathscr{B}; \subseteq \rangle$ направлено вверх (направлено вниз); $\mathbb{X}$ является *пространством с* 1*-базой* (0*-базой*), если $\langle \mathscr{B}; \subseteq \rangle$ имеет наибольший элемент (наименьший элемент). Кроме того, $\mathbb{X}$ является *пространством с мультипликативной базой*, если $\mathscr{B}$ замкнуто относительно конечных непустых пересечений; $\mathbb{X}$ является *пространством с аддитивной базой*, если $\mathscr{B}$ замкнуто относительно конечных непустых объединений.

Ясно, что если $\mathbb{X}$ является топологическим пространством с мультипликативной (аддитивной) базой, или пространством с 0-базой (1-базой), то $\mathbb{X}$ является пространством с направленной вниз (направленной вверх) базой.

Доказательство некоторых результатов из разделов 5 и 6 в [1] неявно использует следующее утверждение, которое может быть установлено непосредственно.

ЛЕММА 2. Пусть $\mathscr{P} = \langle P; \leq, \varphi \rangle$ — c-дистрибутивное частично упорядоченное множество и $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,\mathscr{P} = \langle \mathrm{Spec}\,\mathscr{P}, \mathscr{T}, \mathscr{B} \rangle$ — его спектр, где $\mathscr{B} = \{V_a \mid a \in P\}$.

(i) Множество V_a с $a \in P$ является наименьшим элементом в $\langle \mathscr{B}; \subseteq \rangle$ тогда и только тогда, когда a является наименьшим элементом в $\mathscr{P}$; в этом случае $V_a = \varnothing$.

(ii) Множество V_a с $a \in P$ является наибольшим элементом в $\langle \mathscr{B}; \subseteq \rangle$ тогда и только тогда, когда a является наибольшим элементом в $\mathscr{P}$; в этом случае $V_a = \mathrm{Spec}\,\mathscr{P}$.

(iii) $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,\mathscr{P}$ является топологическим пространством с базой.

2 ФУНКТОР P

ЛЕММА 3. Пусть $\mathbb{X}$ — почти собранное топологическое пространство с

базой.

(i) $\mathbb{X}$ является пространством с 0-базой тогда и только тогда, когда $\varnothing \in \mathscr{B}(\mathbb{X})$.

(ii) $\mathbb{X}$ является пространством с 1-базой тогда и только тогда, когда $X \in \mathscr{B}(\mathbb{X})$.

Доказательство. (i) Ясно, что $\mathbb{X}$ является пространством с 0-базой всякий раз, когда $\varnothing \in \mathscr{B}(\mathbb{X})$. Предположим, что $\mathscr{B}(\mathbb{X})$ содержит наименьший элемент U; тогда $\mathscr{B}(\mathbb{X})$ направлено вниз относительно $\subseteq$. Если $U \neq \varnothing$, то пересечение двух непустых открытых множеств в $\mathbb{X}$ непусто, и следовательно X является неприводимым замкнутым множеством. Более того, так как $\mathbb{X}$ является T_0-пространством, U содержит единственный элемент, скажем, $U = \{a\}$. Тогда a является наибольшим элементом в $\langle X; \leq \rangle$, т.е. $\mathbb{X}$ собранно. По определению 1(ii), $\varnothing \in \mathscr{B}(\mathbb{X})$; таким образом $U = \varnothing$.

Доказательство (ii) аналогично доказательству (i). □

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $\mathbb{X}$ — почти собранное топологическое пространство с базой.

(i) $\mathbb{X}$ является пространством с 0-базой тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}$ является собранным пространством с направленной вниз базой.

(ii) $\mathbb{X}$ является пространством с 1-базой тогда и только тогда, когда $\mathbb{X}$ является компактным пространством с направленной вверх базой.

Доказательство теоремы 3.4 в [1] следует читать следующим образом.

ТЕОРЕМА 5 [1, теорема 3.4]. Пусть $\mathbb{X} = \langle X, \mathscr{T}(\mathbb{X}), \mathscr{B} \rangle$ — почти собранное пространство. Тогда отображение

$$f_{\mathbb{X}} \colon \mathbb{X} \to \mathbb{S}pec\,\mathfrak{B}, \quad f_{\mathbb{X}} \colon x \mapsto \{V \in \mathscr{B} \mid x \notin V\}$$

является гомеоморфизмом. Более того, $f_{\mathbb{X}}^{-1}(V_A) = A$ для всех $A \in \mathscr{B}$, и следовательно $f_{\mathbb{X}}$ является гомеоморфизмом топологических пространств с базой.

Доказательство. Согласно определению и лемме 3.1, $\mathfrak{B} = \langle \mathscr{B}; \subseteq, \varphi_{\mathscr{B}} \rangle$ является дистрибутивным c-частично упорядоченным множеством, и следовательно $\mathrm{Spec}\mathfrak{B} \neq \varnothing$ по теореме 1.5. Для упрощения обозначений мы

пишем $\mathscr{T}$ вместо $\mathscr{T}(\mathbb{S}\mathrm{pec}\,\mathfrak{B})$. Напомним, что порядок специализации в $\mathbb{S}\mathrm{pec}\,\mathfrak{B}$ совпадает с отношением $\supseteq$ обратного включения. □

УТВЕРЖДЕНИЕ 6 [1, утверждение 3.1]. Для каждого $x \in X$, $f_{\mathbb{X}}(x) \neq \varnothing$.

Доказательство. Зафиксируем элемент $x \in X$. Если $\varnothing \in \mathscr{B}$, то $\varnothing \in f_{\mathbb{X}}(x)$, откуда $f_{\mathbb{X}}(x) \neq \varnothing$. Предположим, что $\varnothing \notin \mathscr{B}$. По определению 1 это означает, что пространство $\mathbb{X}$ не является собранным либо его база $\mathscr{B}$ не направлена вниз относительно $\subseteq$.

Если пространство $\mathbb{X}$ не является собранным, то множество X является неприводимым ввиду того, что $\mathbb{X}$ почти собранное, но $\mathbb{X}$ не содержит наибольшего элемента относительно порядка специализации. Это означает, что существует элемент $y \in X$ такой, что $y \not\leq x$. Поскольку $\mathscr{B}$ является базой топологии $\mathscr{T}(\mathbb{X})$, имеем $y \in U$ и $x \notin U$ для некоторого $U \in \mathscr{B}$. В этом случае $U \in f_{\mathbb{X}}(x) \neq \varnothing$.

Предположим теперь, что $\mathscr{B}$ не является направленным вниз множеством относительно $\subseteq$. Это означает, что существуют открытые множества $U_0, U_1 \in \mathscr{B}$ такие, что $U_0 \cap U_1 = \varnothing$. По нашему предположению, что $\varnothing \notin \mathscr{B}$, заключаем, что множества U_0 и U_1 оба непусты. Тогда $x \notin U_i$ для некоторого $i < 2$; то есть $U_i \in f_{\mathbb{X}}(x) \neq \varnothing$. □

Доказательство следующего утверждения повторяет доказательство утверждения 3.2 из [1].

УТВЕРЖДЕНИЕ 7 [1, утверждение 3.2]. Отображение $f_{\mathbb{X}}$ определено корректно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 8 [1, утверждение 3.3]. Отображение $f_{\mathbb{X}}$ является взаимно однозначным и сюръективным.

Доказательство. Действительно, рассмотрим произвольный простой идеал I в $\mathfrak{B}$. Пусть $U = \bigcup_{V \in I} V$; тогда $U \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$ и множество $F = X \backslash U$ является замкнутым в $\mathbb{X}$. Имеем $F \neq \varnothing$, так как в противном случае мы получили бы, что $V \in I$ для всех $V \in \mathscr{B}$, что противоречит нашему предположению о том, что идеал I является простым. Мы показываем, что F является неприводимым множеством. Действительно, пусть

$U_0 \cap F \neq \varnothing$ и $U_1 \cap F \neq \varnothing$ для некоторых $U_0, U_1 \in \mathscr{T}(\mathbb{X})$. Так как $\mathscr{B}$ образует базу для $\mathscr{T}(\mathbb{X})$, существуют $V_0, V_1 \in \mathscr{B}$ такие, что $V_0 \cap F \neq \varnothing$, $V_1 \cap F = \varnothing$, и $V_i \subseteq U_i$ для всех $i < 2$. Таким образом, $V_0, V_1 \nsubseteq U$, откуда $V_0, V_1 \notin I$. Ввиду простоты I это означает, что $V \notin I$ для некоторого множества $V \in \mathscr{B}$ такого, что $V \subseteq V_0 \cap V_1$. Имеем $V \nsubseteq U$, так как в противном случае мы получили бы, что $V \in U = \varphi_{\mathscr{B}}(I) = I$. Следовательно, $U_0 \cap U_1 \cap F \supseteq V_0 \cap V_1 \cap F \supseteq V \cap F \neq \varnothing$, что означает, что F является неприводимым множеством.

Если $F = X$, то $U = \varnothing$, и следовательно неравенство $I \neq \varnothing$ влечет $I = \{\varnothing\}$. Поэтому $\varnothing \in \mathscr{B}$ и пространство $\mathbb{X}$ собранное по определению 1(ii). Таким образом, $F = {\downarrow}x$ для некоторого $x \in X$; в частности, x является наибольшим элементом $\mathbb{X}$ относительно порядка специализации. Тогда имеем $I = \{\varnothing\} = f_{\mathbb{X}}(x)$.

Предположим, что F является собственным неприводимым замкнутым множеством в $\mathbb{X}$. Ввиду почти собранности $\mathbb{X}$ существует $x \in X$ такой, что $F = {\downarrow}x$. Мы доказываем, что $f_{\mathbb{X}}(x) = I$ в этом случае. Действительно, для произвольного множества $V \in \mathscr{B}$ условие $V \notin f_{\mathbb{X}}(x)$ эквивалентно условию $x \in V$, которое выполнено тогда и только тогда, когда $V \cap F \neq \varnothing$. Последнее эквивалентно условию $V \nsubseteq U$, которое в свою очередь эквивалентно $V \notin \varphi_{\mathscr{B}}(I) = I$. Следовательно, $f_{\mathbb{X}}(x) = I$ и $f_{\mathbb{X}}$ сюръективно.

Кроме того, пусть $x \not\leqslant y$ в $\mathbb{X}$. Это означает, что $x \in U$ и $y \notin U$ для некоторого $U \in \mathscr{B}$, то есть $U \in f_{\mathbb{X}}(y) \backslash f_{\mathbb{X}}(x)$. Следовательно, отображение $f_{\mathbb{X}}$ взаимно однозначно. □

Далее доказательство повторяет доказательство теоремы 3.4 из [1].

Доказательство утверждения 5.3 в [1] должно быть таким.

УТВЕРЖДЕНИЕ 9 [1, утверждение 5.3]. Функтор P определен корректно.

Доказательство. Согласно [1, лемме 3.1], P определен корректно на объектах. Для каждого **AS**-морфизма $f\colon \mathbb{X}_0 \to \mathbb{X}_1$ и каждого $U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$ имеем $\mathsf{P}(f)(U) = f^{-1}(U) \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_0)$ по [1, опр. 4.2]. Остается показать, что $\mathsf{P}(f)$ является строгим отображением. Действительно, пусть I — простой идеал дистрибутивного c-частично упорядоченного множества $\mathsf{P}(\mathbb{X}_0)$; име-

ем

$$J = \mathsf{P}(f)^{-1}(I) = \big\{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1) \mid \mathsf{P}(f)(U) \in I\big\} = \big\{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1) \mid f^{-1}(U) \in I\big\}.$$

Тогда для каждого $V \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$ имеем $V \in \varphi_{\mathscr{B}(\mathbb{X}_1)}(J)$ тогда и только тогда, когда $V \subseteq \bigcup\big\{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1) \mid f^{-1}(U) \in I\big\}$, что влечет

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) \subseteq & f^{-1}\Big(\bigcup\big\{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1) \mid f^{-1}(U) \in I\big\}\Big) \\ = & \bigcup\big\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1),\ f^{-1}(U) \in I\big\} \subseteq \bigcup\big\{U' \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_0) \mid U' \in I\big\}, \end{aligned}$$

т.е. $f^{-1}(V) \in \varphi_{\mathscr{B}(\mathbb{X}_0)}(I) = I$. Следовательно, $V \in J$ и $J = \varphi_{\mathscr{B}(\mathbb{X}_1)}(J)$ является идеалом дистрибутивного c-частично упорядоченного множества $\mathsf{P}(\mathbb{X}_0)$.

Далее мы доказываем, что $\mathsf{P}(f)^{-1}(I)$ является собственным идеалом. Действительно, если $\mathsf{P}(f)^{-1}(I) = \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$ то, учитывая равенство $X_1 = \bigcup\limits_{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)} U$, получаем $X_0 = f^{-1}(X_1) = \bigcup\limits_{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)} f^{-1}(U) \subseteq \bigcup\limits_{V \in I} V$. Так как I является собственным идеалом в $\mathsf{P}(\mathbb{X}_0)$, существует $V' \in \mathscr{B}(X_0)$ такой, что $V' \notin I$. Тогда $V' \subseteq X_0 \subseteq \bigcup\limits_{V \in I} V$, откуда $V' \in \varphi_{\mathscr{B}(\mathbb{X}_0)}(I) = I$, что невозможно. Это противоречие показывает, что $\mathsf{P}(f)^{-1}(I) \neq \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$.

Мы доказываем, что $\mathsf{P}(f)^{-1}(I) \neq \varnothing$. Возможны два случая.

Случай 1: $\varnothing \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$. В этом случае $\varnothing \in \mathsf{P}(f)^{-1}(I)$, так как $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in I$.

Случай 2: $\varnothing \notin \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$. В этом случае пространство $\mathbb{X}_1$ является почти собранным, но не собранным либо база $\mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$ не направлена вниз, как следует из определения 1(ii).

Во втором случае мы видим, что существуют два непустых открытых множества $V_0, V_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$ таких, что $V_0 \cap V_1 = \varnothing$. В обоих случаях, следовательно, $\mathbb{X}_1$ не имеет наибольшего элемента относительно порядка специализации $\leq_{\mathbb{X}_1}$. Возможны два подслучая.

Случай 2a. Пусть $I = \{\varnothing\}$. В этом случае $\mathbb{X}_0$ является собранным пространством по определению 1(ii). Более того, $F = \mathscr{B}(\mathbb{X}_0)\backslash I$ является собственным фильтром. Следовательно, пересечение двух непустых откры-

тых базисных множеств в $\mathbb{X}_0$ не пусто, а значит, не пусто и пересечение двух непустых открытых множеств в $\mathbb{X}_0$. Это означает, что X_0 является замкнутым неприводимым множеством. Так как $\mathbb{X}_0$ является собранным пространством, мы заключаем, что $\mathbb{X}_0$ содержит наибольший элемент $\top$. Если $f^{-1}(U) \notin I$, то $f^{-1}(U) \neq \varnothing$ для всех $U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$. Следовательно,

$$\top \in \bigcap_{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)} f^{-1}(U) = f^{-1}\Big(\bigcap_{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)} U\Big).$$

Тогда $f(\top) \in \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)} U$ и $f(\top)$ должен быть наибольшим элементом в $\mathbb{X}_1$ относительно $\leq_{\mathbb{X}_1}$, чем он не является. Это противоречие показывает, что $f^{-1}(U) = \varnothing \in I$ для некоторого $U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$, так что $\mathsf{P}(f)^{-1}(I) \neq \varnothing$ в этом случае, что и требовалось.

Случай 2b. Пусть $I \neq \{\varnothing\}$. Так как I является собственным идеалом в $\mathsf{P}(\mathbb{X}_0)$, существует $V' \in \mathscr{B}(X_0)$ такой, что $\varnothing \neq V' \in I$. Тогда множество $W = X_0 \backslash V'$ является собственным замкнутым множеством в $\mathbb{X}_0$. Кроме того, $\varnothing \neq F = \mathscr{B}(\mathbb{X}_0) \backslash I$ является собственным фильтром. Более того, $\varnothing \notin F$, так как в противном случае мы имели бы $F = \mathscr{B}(\mathbb{X}_0)$, что невозможно. Если $\mathsf{P}(f)^{-1}(I) = \varnothing$ в этом случае, то $f^{-1}(U) \in F$ для всех $U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$. Так как F является фильтром, семейство F состоит из непустых компактных открытых множеств и направлено вниз. Если $V \in F$, то $V \nsubseteq V'$, откуда $V \cap W \neq \varnothing$. Это доказывает, что семейство $F \cup \{W\}$ обладает свойством конечного пересечения. По [2, т. 11], это семейство имеет непустое пересечение. Поскольку $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)\} \subseteq F$, имеем

$$\varnothing \neq \bigcap_{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)} f^{-1}(U) = f^{-1}\Big(\bigcap_{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)} U\Big).$$

Пусть $a \in f^{-1}\big(\bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)} U\big)$. Тогда $f(a) \in \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)} U$, так что $f(a)$ является наибольшим элементом в $\mathbb{X}_1$ относительно $\leq_{\mathbb{X}_1}$, противоречие. Это доказывает, что $\mathsf{P}(f)^{-1}(I) \neq \varnothing$ и $\mathsf{P}(f)^{-1}(I)$ является поэтому собственным идеалом в $\mathsf{P}(\mathbb{X}_1)$, что и требовалось.

Остается установить, что $\mathsf{P}(f)^{-1}(I)$ является простым идеалом. Действительно, пусть $U_0, U_1 \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$ таковы, что $\mathscr{U} = \{U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1) \mid U \subseteq U_0 \cap U_1\} = L(U_0, U_1) \subseteq \mathsf{P}(f)^{-1}(I)$. Это означает, что $f^{-1}(\mathscr{U}) = \{f^{-1}(U) \mid U \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_1),\ U \subseteq U_0 \cap U_1\} \subseteq I$. Так как $\mathscr{B}(\mathbb{X}_1)$ образует базу $\mathscr{T}(\mathbb{X}_1)$, мы заключаем, что $U_0 \cap U_1 = \bigcup \mathscr{U}$. Тогда $f^{-1}(U_0) \cap f^{-1}(U_1) = f^{-1}(U_0 \cap$

$U_1) = \bigcup f^{-1}(\mathscr{U})$. Следовательно, для каждого $V \in \mathscr{B}(\mathbb{X}_0)$ такого, что $V \subseteq f^{-1}(U_0) \cap f^{-1}(U_1)$, имеем $V \subseteq \bigcup f^{-1}(\mathscr{U})$, и так $V \in \varphi_{\mathscr{B}(\mathbb{X}_0)}(I) = I$. Таким образом $L\big(f^{-1}(U_0), f^{-1}(U_1)\big) \subseteq I$. Так как I является простым идеалом, в силу [1, леммы 1.2], имеем $f^{-1}(U_i) \in I$, и следовательно $U_i \in \mathsf{P}(f)^{-1}(I)$ для некоторого $i < 2$. Применяя снова [1, лемму 1.2], получаем, что $\mathsf{P}(f)^{-1}(I)$ действительно является простым идеалом. □

3 КАТЕГОРИИ ПОЧТИ СОБРАННЫХ ПРОСТРАНСТВ С БАЗОЙ

Напомним, что топологическое пространство $\mathbb{X}$ является *почти спектральным* (*спектральным*), если оно является почти собранным пространством (собранным компактным пространством), которое имеет аддитивную и мультипликативную базу. В этом случае из [1, лемма 3.3] следует, что эта база является либо множеством всех открытых непустых компактных множеств, либо множеством всех открытых компактных множеств (множеством всех открытых компактных множеств) в $\mathbb{X}$.

Таблица полных подкатегорий категории **DP**, а также дуальных им полных подкатегорий категории **AS** из [1] должна выглядеть следующим образом.

DP	Объекты: дистрибутивные c-ч.у. множества Морфизмы: строгие отображения	**AS**	Объекты: почти полуспектральные пространства с базой Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DP}_0$	Объекты: дистрибутивные c-ч.у. множества с 0 Морфизмы: строгие отображения (сохраняющие 0)	$\mathbf{AS}_s$	Объекты: (собранные) почти полуспектральные пространства с 0-базой Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DP}_1$	Объекты: дистрибутивные c-ч.у. множества с 1 Морфизмы: строгие отображения (сохраняющие 1)	$\mathbf{AS}_c$	Объекты: (компактные) почти полуспектральные пространства с 1-базой Морфизмы: спектральные отображения

$\mathbf{DP}_{01}$	Объекты: дистрибутивные c-ч.у. множества с 0 и 1 Морфизмы: строгие отображения (сохраняющие 0 и 1)	**S**	Объекты: полуспектральные пространства с $(0,1)$-базой Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DSL}^{\wedge}$	Объекты: дистрибутивные $\wedge$-полурешетки Морфизмы: строгие гомоморфизмы $\wedge$-полурешеток	**ASp**	Объекты: почти спектральные пространства с базой Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DSL}_0^{\wedge}$	Объекты: дистрибутивные $\wedge$-полурешетки с 0 Морфизмы: строгие гомоморфизмы $(\wedge,0)$-полурешеток	$\mathbf{ASp}_s$	Объекты: собранные почти спектральные пространства с базой Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DSL}_1^{\wedge}$	Объекты: дистрибутивные $\wedge$-полурешетки с 1 Морфизмы: строгие гомоморфизмы $(\wedge,1)$-полурешеток	$\mathbf{ASp}_c$	Объекты: (компактные) почти спектральные пространства с 1-базой Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DSL}_{01}^{\wedge}$	Объекты: дистрибутивные $\wedge$-полурешетки с 0 и 1 Морфизмы: строгие гомоморфизмы $(\wedge,0,1)$-полурешеток	**Sp**	Объекты: спектральные пространства с 1-базой Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DSL}^{\vee}$	Объекты: дистрибутивные $\vee$-полурешетки Морфизмы: строгие гомоморфизмы $\vee$-полурешеток	**AsSpec**	Объекты: почти полуспектральные пространства с аддитивной базой Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DSL}_0^{\vee}$	Объекты: дистрибутивные $\vee$-полурешетки с 0 Морфизмы: строгие гомоморфизмы $(\vee,0)$-полурешеток	$\mathbf{AsSpec}_s$	Объекты: (собранные) почти полуспектральные пространства с аддитивной 0-базой Морфизмы: спектральные отображения

$\mathbf{DSL}_1^\vee$	Объекты: дистрибутивные $\vee$-полурешетки с 1 Морфизмы: строгие гомоморфизмы $(\vee, 1)$-полурешеток	$\mathbf{AsSpec}_c$	Объекты: компактные почти полуспектральные пространства с аддитивной базой Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DSL}_{01}^\vee$	Объекты: дистрибутивные $\vee$-полурешетки с 0 и 1 Морфизмы: строгие гомоморфизмы $(\vee, 0, 1)$-полурешеток	**sSpec**	Объекты: полуспектральные пространства с аддитивной 0-базой Морфизмы: спектральные отображения
DL	Объекты: дистрибутивные решетки Морфизмы: строгие гомоморфизмы решеток	**ASpec**	Объекты: почти спектральные пространства Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DL}_0$	Объекты: дистрибутивные решетки с 0 Морфизмы: строгие гомоморфизмы 0-решеток	$\mathbf{ASpec}_s$	Объекты: собранные почти спектральные пространства Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DL}_1$	Объекты: дистрибутивные решетки с 1 Морфизмы: строгие гомоморфизмы 1-решеток	$\mathbf{ASpec}_c$	Объекты: компактные почти спектральные пространства Морфизмы: спектральные отображения
$\mathbf{DL}_{01}$	Объекты: дистрибутивные решетки с 0 и 1 Морфизмы: гомоморфизмы $(0, 1)$-решеток	**Spec**	Объекты: спектральные пространства Морфизмы: спектральные отображения

Благодарности. Автор благодарен профессору Цзин Лу (Шэньсийский педагогический университет) за тщательное прочтение [1] и указание на тот факт, что определение топологических пространств с базой, данное в [1, определение 3.2], содержит излишне сильные требования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. В. Швидефски, "Дуальность Стоуна для дистрибутивных частично упорядоченных множеств", *Алгебра логика* **62**, No. 5, 637–664 (2023).
2. Ю. Л. Ершов, М. В. Швидефски, "К спектральной теории частично упорядоченных множеств. II", *Сиб. мат. журн.* **61**, No. 3, 572–586 (2020).

Статья поступила в редакцию 27 октября 2024 г.
после доработки 3 января 2025 г.
принята к публикации 19 мая 2025 г.

Алгебра и логика, Том 63, №4, 454–458 (2024)

ЗАСЕДАНИЯ
семинара «Алгебра и логика»

Сессия расширенных заседаний семинара в рамках конференции
«Мальцевские чтения» (13–17 ноября 2023 г.)

2243-е заседание. 15 ноября 2023 г.
Заседание секции теории вычислимости

П. Е. Алаев. The inversion in fields computable in polynomial time.

М. В. Коровина, О. В. Кудинов. Index sets for order positive fields.

А. В. Селиверстов (Москва). О длине невыполнимой подформулы.

Н. А. Баженов, А. Г. Мельников (Веллингтон, Новая зеландия), К. М. Нг (Сингапур). On Δ^0_2 Polish spaces.

С. С. Оспичев. Минимальные нумерации семейств функционалов конечного типа.

2244-е заседание. 15 ноября 2023 г.
Заседание секции теории колец

А. А. Лопатин (Кампинас, Бразилия), А. Н. Зубков (Омск). Разделяющие инварианты алгебр Мальцева.

А. В. Попов (Ульяновск). Тождества супералгебры Капланского.

А. С. Монастырева (Барнаул). Строение конечных колец с ациклическими сжатыми графами делителей нуля.

С. С. Коробков (Екатеринбург). О решеточной определяемости полулокальных колец.

А. В. Кухарев (Красноярск). О коммутативных сильно консервативных алгебрах.

2245-е заседание. 16 ноября 2023 г.
Пленарное заседание

А. В. Нечесов. Problem oriented approach to artificial intelligence.

С. П. Одинцов. On the algebraic semantics of connexive logics.

М. В. Зайцев (Москва). On existence of Pi-exponent of codimension growth.

А. В. Кислицин (Барнаул). Identities of vector space and nonassociative linear algebras.

2246-е заседание. 16 ноября 2023 г.
Заседание секции алгебро-логических методов в ИТ

А. В. Бессонов. Аргумент Гёделя–Лукаса–Пенроуза некорректен.

Д. Е. Пальчунов. Теоретико-модельные методы формализации рассуждений и рефлексии.

Д. Н. Гаврилин, Д. Э. Гаврилина. Интеграция логико-вероятностного искусственного интеллекта в bSystem.

А. А. Якобсон. Организация семантического хранения прецедентов для аргументативной диалоговой системы.

Э. Ю. Ахмедов. Предварительная обработка данных для анализа эмоций в текстах узбекского языка.

Ч. А. Найданов. Теоретико-модельный подход к формализации бизнес-процессов университетской кафедры.

С. А. Балашова. Извлечение эмоциональных оценок из текстов естественного языка.

О. Д. Пальчунова. Разработка алгоритма распознавания речевых ошибок.

С. К. Чеболтасова. Разработка цифрового ассистента для анализа финансовых продуктов.

Т. М. Цивинская. Разработка консольной версии программного обеспечения для формирования и первичного анализа выборок нуклеотидных последовательностей.

А. С. Янин. Методы частичного исполнения для специализации интерпретатора на языке WebAssembly.

В. И. Архипова. Методы извлечения знаний о ситуациях и событиях из текста естественного языка.

А. А. Шишкин. Оценка соответствия вакансии и опыта соискателя с помощью нейронных сетей.

В. С. Миронов. Извлечение эмоций из текстов естественного языка при помощи LogicText.

О. А. Ковалевская. Разработка сервиса для автоматизированной рассылки электронных писем.

О. А. Гуртуева. Разработка методов определения эмоций пользователя на основе анализа текстовых и звуковых данных.

А. Шабалин. Разработка методов анализа пользовательских намерений для реализации виртуального помощника.

2247-е заседание. 16 ноября 2023 г.
Заседание секции неклассических логик и универсальной алгебры

Д. Ю. Емельянов. Об алгебрах бинарных изолирующих формул для теорий зиг-заг произведений.

Б. Ш. Кулпешов (Алма-Ата, Казахстан). Об алгебрах бинарных формул для слабо циклически минимальных теорий: кусочно монотонный случай.

Б. Ш. Кулпешов (Алма-Ата, Казахстан), С. В. Судоплатов. О вариациях жесткости для упорядоченных теорий.

Ин. И. Павлюк, С. В. Судоплатов. О степенях алгебраизации для конечных структур.

С. В. Судоплатов. Об условных характеристиках жесткости.

А. А. Степанова (Владивосток), Е. Л. Ефремов (Владивосток), С. Г. Чеканов (Владивосток). Псевдоконечные полигоны.

В. В. Вербовский (Алма-Ата, Казахстан). Об обобщениях слабой о-минимальности на частичные порядки.

Е. Л. Ефремов (Владивосток). Строение связного конгруэнц-перестановочного полигона над коммутативным моноидом.

С. Б. Малышев. О предгеометриях теорий унаров.

И. А. Сахаров (Владивосток). Инъективные унары.

2248-е заседание. 16 ноября 2023 г.
Заседание секции теории вычислимости

Ш. Д. Нодиров (Карши, Узбекистан), М. Х. Файзрахманов (Казань, Россия). О бесконечных прямых суммах однозначных нумераций функциональных семейств.

А. Аскарбеккызы (Алма-Ата, Казахстан), Р. Р. Багавиев (Казань), В. Исаков (Новосибирск), Б. Калмурзаев (Алма-Ата, Казахстан), Д. Д. Нурланбек (Алма-Ата, Казахстан), Ф. Ракымжанкызы (Алма-Ата, Казахстан), А. В. Слобожанин. Пунктуальные нумерации для семейств множеств.

А. М. Искаков (Алма-Ата, Казахстан), Н. А. Баженов, Б. С. Калмурзаев (Алма-Ата, Казахстан). Undecidability of the theory of the primitive recursive many-one degrees of recursive sets.

А. В. Слобожанин. Rogers semilattices of Grzegorczyk hierarchy.

М. М. Ямалеев (Казань). Non-uniformity and downwards density in the Turing degrees.

Р. Р. Багавиев (Казань). Структурные свойства 2-в.п. конъюнктивных и дизъюнктивных степеней.

С. Л. Кузнецов, С. О. Сперанский (Москва). On the complexity of infinitary action logic with multiplexing.

2249-е заседание. 16 ноября 2023 г.
Заседание секции теории групп и ее приложений

О. В. Кравцова (Красноярск). Диэдральные и кватернионные подгруппы автотопизмов полуполевых проективных плоскостей.

Е. В. Соколов (Иваново). О нильпотентной аппроксимируемости обобщенных свободных произведений групп.

А. В. Рожков (Краснодар). Об одной модификации AT-групп.

М. А. Лисицына (Санкт-Петербург). Совершенные k-раскраски бесконечных циркулянтных графов со сплошным набором дистанций.

И. Л. Сохор (Гомель). О группах с модулярными подгруппами Шмидта.

О. Ю. Дашкова (Севастополь). Разрешимые периодические группы конечного нормального ранга.

А. В. Грешнов, В. С. Костыркин. Горизонтальные ломаные и группа Гурса.

В. И. Мурашко (Гомель). О наследственных формациях Бэра–Шеметкова конечных групп.

2250-е заседание. 17 ноября 2023 г.
Пленарное заседание

Д. О. Ревин. The Baer–Suzuki width for certain group-theoretical classes.

М. А. Гречкосеева. The spectra of almost simple exceptional groups of Lie type.

С. В. Скресанов. Diameters of finite groups and related graphs.

2251-е заседание. 17 ноября 2023 г.
Заседание секции теории вычислимости

Ш. Т. Ишмухаметов, Н. А. Антонов, Б. Г. Мубараков, Р. Г. Рубцова (Казань). Об одном комбинированном тесте простоты (дистанционный доклад).

А. А. Викентьев. О некоторых проблемах теории моделей и распознавания образов.

Алгебра и логика, Том 63, №4, 459–461 (2024)

Р Е Ф Е Р А Т Ы

УДК 510.535

М. М. Арсланов, И. И. Батыршин, М. М. Ямалеев, CEA-операторы и иерархия Ершова. II, Алгебра и логика, **63**, № 4 (2024), 355—376.

Продолжается и завершатся работа авторов [Алгебра и логика, **63**, № 3 (2024), 248—270]. Доказывается существование такого невычислимого низкого в. п. множества A, что любое множество, являющееся $CEA(A)$ и 2-в. п., имеет в. п. степень.

Ключевые слова: CEA-иерархия, иерархия Ершова, тьюрингова степень.

УДК 512.54:510.67

Ф. А. Дудкин, Обобщенные группы Баумслага — Солитера, универсально эквивалентные древесным, Алгебра и логика, **63**, № 4 (2024), 377—389.

Конечно порожденная группа, которая действует на дереве так, что все вершинные и реберные стабилизаторы — бесконечные циклические группы, называется *обобщённой группой Баумслага — Солитера* (GBS *группа*). Всякая GBS группа является фундаментальной группой $\pi_1(\mathbb{A})$ подходящего графа с метками $\mathbb{A}$. Если $\mathbb{A}$ — дерево с метками, то будем называть $\pi_1(\mathbb{A})$ *древесной* GBS группой. Известно, что GBS группы, изоморфные древесным, сами являются древесными. Показывается, что GBS группы, универсально эквивалентные древесным, не обязаны быть древесными. Более того, дается описание всех GBS групп, универсально эквивалентных древесным.

Ключевые слова: обобщенная группа Баумслага–Солитера, универсальная эквивалентность, экзистенциальная эквивалентность.

УДК 510.67

К. Ж. Кудайбергенов, О числе счетных моделей полной теории и ее несущественного расширения, Алгебра и логика, **63**, № 4 (2024), 390—405.

Доказывается, что (а) существует полная счетная теория, имеющая 2^ω счетных моделей, некоторое несущественное расширение которой имеет ω счетных моделей; (б) существует полная счетная теория, имеющая 2^ω счетных моделей, некоторое несущественное расширение которой имеет конечное число счетных моделей. Это дает ответ на вопрос А. Д. Таймановa.

Ключевые слова: полная счетная теория, несущественное расширение, число счетных моделей.

УДК 510.67

Б. Ш. Кулпешов, С. В. Судоплатов, О новом варианте ортогональности 1-типов в слабо о-минимальных теориях, Алгебра и логика, **63**, № 4 (2024), 406—426.

Вводится новый вариант ортогональности неалгебраических 1-типов в слабо о-минимальных теориях: почти вполне ортогональность. Устанавливается, что отношение не почти вполне ортогональности является отношением эквивалентности. Основным результатом является критерий того, что слабо о-минимальная теория конечного ранга выпуклости с $1 < I(T, \omega) < 2^\omega$ имеет в точности $3^m 6^l$ счетных попарно неизоморфных моделей для некоторых неотрицательных целых чисел $m, l < \omega$ в терминах введенного варианта ортогональности.

Ключевые слова: слабая о-минимальность, ортогональность, гипотеза Воота, счетная модель, ранг выпуклости.

УДК 512.554.31:510.67

У. Л. Мариано, Ж. Шварц, Гипотеза Гельфанда — Кириллова как формула первого порядка, Алгебра и логика, **63**, № 4 (2024), 427—441.

Показывается, что для данной (приведенной) системы корней Σ и любого алгебраически замкнутого поля k характеристики нуль справедли-

вость гипотезы Гельфанда — Кириллова для конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathsf{k},\Sigma}$ — единственной полупростой алгебры Ли над k с системой корней Σ — эквивалентна доказуемости определенного предложения первого порядка на языке колец $\mathscr{L}(0,1,+,*,-)$ в теории ACF_0 алгебраически замкнутых полей характеристики нуль.

Ключевые слова: алгебраически замкнутое поле, гипотеза Гельфанда — Кириллова, конечномерная алгебра Ли.