СИБИРСКИЙ ФОНД АЛГЕБРЫ И ЛОГИКИ

# АЛГЕБРА И ЛОГИКА

Том 63 № 5 2024

Издание основано А. И. Мальцевым в 1962 г.
Периодичность журнала: 6 номеров в год

Журнал *АЛГЕБРА и ЛОГИКА* публикует результаты новейших исследований в области современной общей алгебры и логики, в частности, изучаются упорядоченные, почти без кручения, нильпотентные и метабелевы группы, кольца изоморфизмов, алгебры Ли, иерархические множества, логические автоматы и рекурсивные функции. Результаты большинства статей докладывались на заседаниях семинара «Алгебра и логика» в Новосибирске.

**Главный редактор** Ю. Л. Ершов

**Редакционная коллегия:**

С. С. Гончаров (зам. главного редактора), Н. А. Баженов, А. В. Васильев, Н. Т. Когабаев, П. С. Колесников, В. Д. Мазуров, Н. С. Романовский, В. К. Харченко, И. П. Шестаков, А. Н. Ряскин (ответственный секретарь),

Е. И. Зельманов (Сан Диего, США), О. Х. Кегель (Фрайбург, ФРГ), А. Макинтайр (Лондон, Великобритания), А. Нероуд (Итака, США)

Английские переводы публикуются издательством Springer с 1968 г.
https://link.springer.com/journal/10469/volumes-and-issues

Журнал *Algebra and Logic* реферируется и индексируется в международных и национальных базах данных, в том числе: ANVUR, BFI List, Baidu, CLOCKSS, CNKI, CNPIEC, Dimensions, EBSCO, Gale, Google Scholar, INIS Atomindex, Japanese Science and Technology Agency (JST), Mathematical Reviews, Naver, Norwegian Register for Scientific Journals and Series, OCLC WorldCat Discovery Service, Ovid Discovery, Portico, ProQuest, SCImago, SCOPUS, Science Citation Index Expanded (SCIE), TD Net Discovery Service, Wanfang, eLibrary.ru, zbMATH.

© Сибирский фонд алгебры и логики, 2024

# АЛГЕБРА И ЛОГИКА

Том 63 № 5 2024


## СОДЕРЖАНИЕ


**Памяти Виталия Анатольевича Романькова** ..... 465

М. Г. АМАГЛОБЕЛИ, Т. З. БОКЕЛАВАДЗЕ, А. Г. МЯСНИКОВ. Соответствие Мальцева и биинтерпретируемость ..... 471

Б. А. БЕРГЕР, А. Г. МЯСНИКОВ. Теория моделей проективных пространств ..... 498

О. К. КАРИМОВА, А. А. КЛЯЧКО. Конечные симметрические группы сильно вербально замкнуты ..... 538

Н. С. РОМАНОВСКИЙ. Пополнение разрешимой группы Баумслага—Солитера: Элементарная теория ..... 547

И. П. ШЕСТАКОВ, З. ЖАНГ. Автоморфизм типа Аника свободной алгебры Пуассона ..... 564

В. Э. ШПИЛЬРАЙН. Узловые инварианты из представлений кос автоморфизмами свободной группы ..... 587

Заседания семинара «Алгебра и логика» ..... 604

Рефераты ..... 606

Рукописи принимаются по электронной почте: algeb.logic@gmail.com
Все поступившие материалы проходят рецензирование.

Алгебра и логика Том 64, No. 5, 465–470 (2025)

*Памяти Виталия Анатольевича Романькова*

13 декабря 2023 г. скоропостижно скончался Виталий Анатольевич Романьков — замечательный математик, превосходный педагог и популяризатор науки; яркий и самобытный представитель сибирской школы алгебры и логики, много сделавший для развития математики в Сибири, России и во всем мире.

Виталий Анатольевич родился 12 февраля 1948 г. в Усть-Каменогорске КазССР. После окончания средней школы с золотой медалью и набором дипломов разных степеней на Республиканских и Всесоюзных олимпиадах по математике и физике он в 1966 г. поступил на механико-математический факультет Новосибирского государственного университета, закончив его с отличием в 1971 г. (получив дипломы первой и второй степени за лучшие студенческие работы и опубликовав три статьи в крупных математических

журналах) поступил в тот же год в аспирантуру Института математики СО АН СССР, где его научным руководителем стал Владимир Никанорович Ремесленников. В 1974 г., защитив кандидатскую диссертацию, Виталий Анатольевич поступил на работу в Омский государственный университет, а в 1978 г. стал старшим научным сотрудником открывшегося в Омске Комплексного отдела Института математики СО АН СССР, по-прежнему читая лекции в ОмГУ. В 1992 г. он успешно защитил докторскую диссертацию, в 1995 г. получил звание профессора и в 1996 г. основал кафедру информационных систем (сейчас это кафедра компьютерной математики и программирования).

Даже это краткое перечисление фактов биографии показывает тесную связь Виталия Анатольевича с сибирской школой Алгебры и Логики, с Академгородком и его особым духом. Академгородок того времени: молодой и амбициозный университет НГУ, тесно работающий с только что созданными институтами, легендарные математики и физики, небывалый дух свободы и особости. Было интересно, но не просто, в НГУ собирались действительно лучшие, было мощное соревнование, можно было дрогнуть и потеряться, а можно, казалось бы, мгновенно вырасти и начать делать настоящую науку. Уехав в Омск, Виталий Анатольевич опять оказался в гуще той же самой академовской среды, дело в том, что математический факультет ОмГУ и Комплексный отдел задумывались, создавались и воспринимались как естественное продолжение матфака НГУ и Института математики СО РАН. И дух был похожий, и люди. Виталий — свободный, необычный, блестящий во всех своих начинаниях: шахматы, баскетбол, поэзия, капустники, преподавание, и самое главное, яркая самобытная математика, — был просто создан для такой среды. Вскоре он стал одним из лидеров омской математической команды, а затем и мировым экспертом в области алгоритмической и комбинаторной теории групп, теории разрешимых групп и групп автоморфизмов. Виталий Анатольевич — автор более 150 научных статей, 10 монографий и учебных пособий. Под его руководством были успешно защищены 12 кандидатских и две PhD диссертации.

Хочется отметить одну особенность математического таланта Виталия Анатольевича. Многие его теоремы получаются в результате какого-то необычного построения, он был мастером неожиданной конструкции, замечательным изобретателем в теории групп. Он легко увлекался и быстро входил в новые области исследований, не забывая свои любимые нильпотентные и разрешимые группы, возвращаясь к ним с новыми идеями и новыми задачами.

Упомянем лишь некоторые, далеко не все, результаты Виталия Анатольевича, которые либо оказали сильное влияние на развитие целых направлений теории групп, либо поменяли наше представление о каких-то задачах, либо открыли новые области исследований.

1. *Метод интерпретации диофантовых уравнений в группах.* В работах [1, 2] введен метод интерпретации диофантовых уравнений в группах и доказана неразрешимость уравнений в свободных нильпотентных и метабелевых группах. Эти результаты породили новую область теории групп с многочисленными приложениями. Удивительный результат получен в [8]: построена конечно порожденная нильпотентная группа $G$ ступени 2, в которой коммутаторные уравнения вида $[x, y] = g$, где $g$ — элемент из $G$, неразрешимы.
2. *Ширина вербальных подгрупп.* В работе [3] доказана конечность ширины вербальных подгрупп в полициклических группах. Эти и последующие фундаментальные результаты широко используются в алгоритмической и теоретико-модельной теории групп.
3. *Эквациональная нетеровость.* Работа [4] инициировала изучение эквациональной нетеровости в алгебре; сейчас это активная область исследований со многими первоклассными результатами.
4. *Автоморфизмы свободных метабелевых групп.* С. Бахмут и Х. Мочизуки, и независимо В. Романьков, доказали, что все автоморфизмы свободной метабелевой группы $M(n)$ конечного ранга $n > 3$ являются ручными [5], т.е. индуцированы автоморфизмами соответствующей абсолютно свободной группы. Ранее Чейн построил неручной автомор-

физм в $M(3)$. Романьков существенно усилил этот результат показав, что в группе $M(3)$ есть неручные примитивные элементы.

5. *Усредненные функции Дена.* В работах [6, 7] даны ответы на вопросы М. Громова: доказана субквадратичность усредненной функции Дена свободных абелевых и описан асимптотический рост усредненной функции Дена для нильпотентных групп.

6. *Алгоритмическая сложность проблем.* Работа [9] открыла путь к исследованию алгоритмической сложности проблем равенства и нахождения геодезических в разрешимых группах. В настоящее время это активно развивающаяся область алгоритмической теории групп.

7. *Подмоноиды, рациональные и вербальные множества в группах.* В. Романьков по праву является одним из основателей теории рациональных множеств в разрешимых группах. Сначала отметим один принципиальный результат, показывающий структурную сложность множества $\mathrm{Mat}(G)$ всех рациональных подмножеств конечно порожденной группы $G$: если $G$ метабелева или полициклическая, то $\mathrm{Mat}(G)$ является булевой алгеброй тогда и только тогда когда $G$ почти абелева [10]. Более того, проблема вхождения в подмоноид свободной неабелевой нильпотентной группы неразрешима [11]. Наконец, работа [12] положила начало исследованиям вербально замкнутых подгрупп в группах.

Конечно, многие замечательные результаты Виталия Анатольевича Романькова не вошли в список выше. Нельзя не отметить, что за последние 15 лет Виталий Анатольевич опубликовал статей больше, чем в любые другие 15 лет его жизни. Это тем более удивительно, что в эти годы он значительно расширил арену своих математических интересов. Этой новой ареной стала криптография, а Виталий Анатольевич стал одним из ее несомненных лидеров. Его основными результатами в этом направлении являются следующие:

8. Открыт принципиально новый метод криптографического анализа схем алгебраической криптографии — метод разложения. Первая версия ме-

тода оперирует с линейными, а вторая — нелинейным разложением. Впоследствии В. Романьковым и его учениками было установлено, что несколько десятков известных криптографических схем не защищены относительно атаки с использованием этого метода. Передаваемое в схеме сообщение эффективно раскрывается без вычисления закрытых параметров шифрования.

9. Заложены основы диофантовой криптографии.
10. Введен в рассмотрение метод шифрования, использующий скрытые множители, что позволяет создавать семантически стойкие версии алгоритмов шифрования.

Светлая память о Виталии Анатольевиче Романькове навсегда останется в наших сердцах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. А. Романьков, "О неразрешимости проблемы эндоморфной сводимости в свободных нильпотентных группах и в свободных кольцах", *Алгебра логика* **16**, No.4, 457–471 (1977).
2. В. А. Романьков, "Об уравнениях в свободных метабелевых группах", *Сиб. мат. журн.* **20**, No.3, 671–673 (1979).
3. В. А. Романьков, "О ширине вербальных подгрупп разрешимых групп", *Алгебра логика* **21**, No.1, 60–72 (1982).
4. G. Baumslag, A. Myasnikov, V. A. Roman'kov, "Two theorems about equationally Noetherian groups", *J. Algebra* **194**, No.2, 654–664 (1997).
5. В. А. Романьков, "Группы автоморфизмов свободных метабелевых групп", В: *Проблемы взаимосвязи абстрактной и прикладной алгебры*, с. 53–80, АН СССР, Новосибирск (1985).
6. Е. Г. Кукина, В. А. Романьков, "Субквадратичность усредненной функции Дена для свободных абелевых групп", *Сиб. мат. журн.* **44**, No.4, 772–778 (2003).

7. В. А. Романьков, "Об асимптотическом росте усредненной функции Дена для нильпотентных групп", *Алгебра логика* **46**, No.1, 60–74 (2007).

8. V. A. Roman'kov, "Diophantine questions in the class of finitely generated nilpotent groups", *J. Group Theory* **19**, No.3, 497–514 (2016).

9. A. Myasnikov, V. Roman'kov, A. Ushakov, A. Vershik, "The word and geodesic problems in free solvable groups", *Trans. Am. Math. Soc.* **362**, No.9, 4655–4682 (2010).

10. V. A. Roman'kov, "Polycyclic, metabelian or soluble of type $(FP)_\infty$ groups with Boolean algebra of rational sets and biautomatic soluble groups are virtually abelian", *Glasgow Math. J.* **60**, 209–218 (2018).

11. В. А. Романьков, "Неразрешимость проблемы вхождения в подмоноид свободной нильпотентной группы ступени $\ell \geqslant 2$ достаточно большого ранга", *Изв. РАН, Сер. мат.* **87**, No.4, 166–185 (2023).

12. A.G.Myasnikov, V.A.Roman'kov, "Verbally closed subgroups of free groups", *J. Group Theory* **17**, 29–40 (2014).

Редакторы и авторы журнала
*АЛГЕБРА И ЛОГИКА*

Алгебра и логика, Том 63, №5, 471–497 (2024)

УДК 512.544.33

**М. Г. Амаглобели[1], Т. З. Бокелавадзе[2], А. Г. Мясников[3]**

# СООТВЕТСТВИЕ МАЛЬЦЕВА И БИИНТЕРПРЕТИРУЕМОСТЬ

Аннотация: Статья посвящена изучению известного соответствия Мальцева между нильпотентными $k$-группами $G$ и нильпотентными алгебрами Ли $L$ над полем $k$ характеристики нуль с теоретико-модельной, алгебро-геометрической и алгоритмической точек зрения. Доказывается, что в этом случае группа $G$ и соответствующая алгебра Ли $L(G)$ биинтерпретируемы уравнениями друг в друге. Это дает существенно более точное описание соответствия, из которого следует, что в дополнение к классическим категорийным свойствам группа $G$ и алгебра $L(G)$ обладают многими другими алгебраическими, алгоритмическими и теоретико-модельными свойствами.

Ключевые слова: *Нильпотентные группы, нильпотентные алгебры Ли, соответствие Мальцева, биинтерпретируемость, диофантова проблема, геометрическая эквивалентность, логическая эквивалентность.*

*Светлой памяти Виталия Анатольевича Романькова*

## ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы изучаем знаменитое соответствие Мальцева между нильпотентными $k$-группами $G$ и нильпотентными $k$-алгебрами Ли $L$ над полем $k$ нулевой характеристики с теоретико-модельной, алгебро-геометрической

Работа выполнена при поддержке Грузинского национального фонда Шота Руставели, код проекта FR-21-4713. [1] Тбилисский государственный университет им. Ив. Джавахишвили, Тбилиси, Грузия; mikheil.amaglobeli@tsu.ge. [2] Кутаисский государственный университет им. А. Церетели, Кутаиси, Грузия; tengiz.bokelavadze@atsu.edu.ge. [3] Schaefer School Eng. Sci., Dep. of Math. Sci., Stevens Inst. Technology, Castle Point on Hudson, Hoboken NJ 07030-5991, USA; amiasnikov@gmail.com.

и алгоритмической точек зрения. Мы доказываем, что в этом случае группа $G$ и соответствующая алгебра Ли $L(G)$ являются биинтерпретируемыми уравнениями друг в друге. Это дает гораздо более точное описание соответствия, которое подразумевает, что, в дополнение к классическим категорным свойствам, группа $G$ и алгебра $L(G)$ обладают многими другими алгебраическими, алгоритмическими и теоретико-модельными свойствами. Метатеорема здесь следующая. Если $\mathscr{P}$ — свойство, сохраняющееся при биинтерпретациях, то группа $G$ удовлетворяет $\mathscr{P}$ тогда и только тогда, когда алгебра Ли $L(G)$ удовлетворяет $\mathscr{P}$. Важно отметить, что биинтерпретация, которая здесь возникает, является наилучшей из возможных: она абсолютна (никаких параметров), инъективна (отношения эквивалентности, соответствующие интерпретациям, являются просто стандартными равенствами элементов) и задается уравнениями (все формулы, участвующие в интерпретациях, являются конъюнкциями уравнений в соответствующих языках). При таких биинтерпретациях сохраняется множество свойств: элементарная эквивалентность, разрешимость элементарных теорий, разрешимость диофантовых проблем, эквивалентность категорий алгебраических и логических множеств, алгебро-геометрическая и логическая эквивалентность, элиминация мнимостей и т. д. Мы обсуждаем некоторые из этих свойств в п. 2.2 и ссылаемся на статью [1] для общих результатов о свойствах, сохраняемых при биинтерпретациях. Биинтерпретируемость $G$ и $L(G)$ дает мощный подход к теоретико-модельным проблемам в нильпотентных группах: можно изучать такие проблемы для нильпотентных алгебр Ли $L$ (что часто проще), а затем переносить результаты на нильпотентные группы с помощью соответствия Мальцева. Таким методом было решено несколько принципиальных проблем для нильпотентных групп: элементарная классификация нильпотентных конечно порожденных $k$-групп и разрешимость их элементарных теорий [2], те же проблемы для конечно порожденных свободных групп без кручения, рассматриваемых как $\mathbb{Z}$-группы [3], описание $\omega$-стабильных и конечного ранга Морли нильпотентных групп без кручения [4], элементарная эквивалентность и разрешимость элементарных теорий конечно порожденных нильпотент-

ных про-$p$-групп [5].

Скажем несколько слов о нильпотентных $k$-группах, которые являются основными объектами в соответствии Мальцева. Напомним, что группа $G$ называется *делимой* (или *полной*), если для любых $g \in G$ и $0 \neq\neq n \in \mathbb{N}$ уравнение $x^n = g$ имеет решение в $G$. Если, кроме того, каждое такое уравнение $x^n = g$ имеет единственное решение, обозначаемое $g^{\frac{1}{n}}$, то $G$ является *делимой группой с единственными корнями*. В этом случае на $G$ существует возведение в $\mathbb{Q}$-степени, т. е. отображение $G \times \mathbb{Q} \to G$, определяемое формулой $(g, \frac{m}{n}) \to (g^{\frac{1}{n}})^m$, которое удовлетворяет следующим свойствам для любых $x, y \in G$ и $a, b \in \mathbb{Q}$:

(1) $x^1 = x$,

$x^0 = e$,

$e^a = e$,

$x^a x^b = x^{a+b}$,

$(x^a)^b = x^{ab}$;

(2) $(y^{-1}xy)^a = y^{-1}x^a y$.

Такие группы мы будем называть $\mathbb{Q}$-*группами*. Мальцев доказал, что каждое уравнение $x^n = g$ имеет не более одного решения в нильпотентных группах без кручения и, следовательно, делимые нильпотентные группы без кручения являются $\mathbb{Q}$-группами. Мальцев [6, 7] изложил основы теории нильпотентных $\mathbb{Q}$-групп. Тщательное исследование произвольных $\mathbb{Q}$-групп было проведено Баумслагом [8]. Примерно в то же время в своем исследовании уравнений в свободных группах Линдон ввел понятие $R$-группы для произвольного ассоциативного унитарного кольца $R$. Это группы с отображением $G \times R \to G$, обозначаемым $(g, a) \to g^a$, которые в точности удовлетворяют аксиомам (1) и (2) выше. Мясников и Ремесленников [9] заметили, что все естественные примеры $R$-групп удовлетворяют дополнительной аксиоме для любых $x, y \in G$ и $a \in R$:

(3) $[x, y] = e \longrightarrow (xy)^a = x^a y^a$.

Аксиома (3) подразумевает, что любая абелева $R$-подгруппа $R$-группы $G$ имеет структуру $R$-модуля. Сейчас принято считать, что $R$-группы удовлетворяют аксиоме (3), более поздние разработки по общей теории $R$-

групп и, в особенности, по их тензорным пополнениям см. в [9–11]. В [12] Холл изучал нильпотентные $R$-группы, которые удовлетворяют следующей аксиоме 4) для всех $x_1, \ldots, x_n \in G$ и $a \in R$:

(4) $x_1^a x_2^a \cdots x_n^a = (x_1 x_2 \cdots x_n)^a \tau_2(\bar{x})^{\binom{a}{2}} \cdots \tau_c(\bar{x})^{\binom{a}{c}}$,

где $\tau_i$ — слова Петреску, $c$ — класс нильпотентности $G$, а $\binom{a}{i}$ — биномиальные коэффициенты.

В этом случае кольцо $R$ должно быть биномиальной областью, т. е. областью целостности, где для каждого $a \in R$ биномиальный коэффициент $\binom{a}{i} = \frac{a(a-1)\ldots(a-i+1)}{i!}$, рассматриваемый как элемент поля частных кольца $R$, принадлежит $R$. Заметим, что слово $\tau_i(\bar{x})$ принадлежит $i$-му члену нижнего центрального ряда $G$, поэтому если $[x, y] = e$, то $\tau_i(x, y) = e$ для всех $i > 1$. Значит, (4) является гораздо более сильной версией аксиомы (3) в случае нильпотентных групп. Эти группы, теперь известные как холловские $R$-группы, стали основным объектом изучения в теории нильпотентных $R$-групп. В некотором смысле они являются истинными аналогами некоммутативных (нильпотентных) модулей над кольцом $R$. Есть один важный момент, о котором мы хотели бы здесь упомянуть. Все нильпотентные $\mathbb{Q}$-группы, удовлетворяющие аксиомам (1), (2), также удовлетворяют аксиомам (3), (4) (см. п. 2.1). Следовательно, нильпотентные $\mathbb{Q}$-группы Мальцева в точности совпадают с холловскими нильпотентными $\mathbb{Q}$-группами. Однако это неверно для произвольного поля $k$ нулевой характеристики. Амаглобели и Ремесленников показали в [13], что для поля рациональных функций $\mathbb{Q}(x)$ от одной переменной и рациональных коэффициентов свободная нильпотентная $\mathbb{Q}(x)$-группа (в квазимногообразии $\mathbb{Q}(x)$-групп, удовлетворяющих аксиомам (1)–(3)) ранга 2, не является холловской $\mathbb{Q}(x)$-группой. Информацию по теории холловских нильпотентных групп см. в статье Холла [12] и книге Уорфилда [14]. Наконец, мы следуем книге Хухро [15] касательно классического соответствия Мальцева между нильпотентными $\mathbb{Q}$-группами и нильпотентными $\mathbb{Q}$-алгебрами Ли. Итак, не каждая нильпотентная $k$-группа является холловской нильпотентной $k$-группой над полем $k$ нулевой характеристики. В этой статье всюду, говоря о нильпотентных $k$-группах, будем подразумевать (если не сказано

противное) именно холловские нильпотентные $k$-группы, как раз они возникают при расширении соответствия Мальцева на случай произвольных полей $k$ характеристики нуль.

Для объяснения соответствия Мальцева зафиксируем поле $k$ нулевой характеристики. Класс $\mathbb{G}_k$ всех холловских нильпотентных $k$-групп образует *категорию* $\mathbb{G}_k$ холловских нильпотентных $k$-групп, где морфизмы являются $k$-гомоморфизмами. Аналогично, класс $\mathbb{L}_k$ всех нильпотентных $k$-алгебр Ли образует *категорию* $\mathbb{L}_k$ относительно $k$-гомоморфизмов $k$-алгебр Ли. Теорема соответствия Мальцева утверждает, что категории $\mathbb{G}_k$ и $\mathbb{L}_k$ изоморфны. Первоначально это было доказано Мальцевым для $k = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ в конечномерном случае. Позже Лазар заметил (в неопубликованной статье), что условие конечномерности можно снять. Куиллен [16] распространил эти результаты на про-нильпотентный случай, используя теорию полных алгебр Хопфа. Наконец, Уорфилд [14] сделал набросок доказательства для общего случая. Ниже (см. п. 2.1) мы даем другое, прямое, доказательство того факта, что группа $G(L)$ нильпотентной $k$-алгебры Ли $L$ является холловской нильпотентной $k$-группой.

Существует несколько различных способов доказательства теоремы Мальцева о соответствии. Следуя [15], мы опишем прямой подход, удобный для наших целей. А именно, мы строим два отображения $L \in \mathbb{L}_k \to G(L) \in \mathbb{G}_k$ и $G \in \mathbb{G}_k \to L(G) \in \mathbb{L}_k$, такие что $L(G(L)) = L$ и $G(L(G)) = G$ для $L \in \mathbb{L}_k$ и $G \in \mathbb{G}_k$. Фактически, мы доказываем, что группа $G(L)$ абсолютно определима уравнениями в алгебре Ли $L$, а алгебра Ли $L(G)$ абсолютно определима уравнениями в группе $G$ (об абсолютной определимости см. § 1). Заметим, что $\mathbb{Q} \leq k$, и, следовательно, $\mathbb{G}_k$ является подкатегорией $\mathbb{G}_\mathbb{Q}$, а $\mathbb{L}_k$ — подкатегорией в $\mathbb{L}_\mathbb{Q}$. Поэтому у нас есть два варианта: в первом мы рассматриваем группы $G \in \mathbb{G}_k$ в чисто групповом языке, а алгебры $L \in \mathbb{L}_k$ — в чисто кольцевом языке, в этих случаях поле $k$ в языке не участвует; во втором варианте мы включаем действие поля $k$ на $L$ и на $G(L)$ в сигнатуру. Мы доказываем биинтерпретируемость $L$ и $G(L)$ в обоих случаях.

Теперь опишем основные результаты и структуру статьи. В § 1 мы на-

поминаем основные определения теории интерпретаций. В п. 2.1 мы устанавливаем некоторые результаты о холловских нильпотентных $k$-группах, эти рассуждения используем в доказательствах основных теорем. В п. 2.2 мы доказываем основной технический результат статьи (теорему 2.1), а именно, показываем биинтерпретируемость $L$ и $G = G(L)$ (или, что эквивалентно, $G$ и $L(G)$ ). Заметим, что формулы, интерпретирующие $G(L)$ в $L$ (формула Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа), и формулы, интерпретирующие $L$ в $G(L)$ (групповые слова $u(x, y)$ и $v(x, y)$ из теоремы 2.1), не зависят ни от конкретной группы $G$, ни от алгебры $L$, ни от поля $k$; они зависят только от класса нильпотентности $G$ и $L$. Следовательно, интерпретации $G(L)$ в $L$ и $L(G)$ в $G$ дают в точности функторы соответствия Мальцева между категориями $\mathbb{G}_k$ и $\mathbb{L}_k$.

В § 3 мы изучаем связи между диофантовыми проблемами в $L \in \mathbb{L}_k$ и $G(L) \in \mathbb{G}_k$. Напомним, что *диофантова проблема* для структуры $\mathscr{A}$ в языке $\mathscr{L}$ — это алгоритмическая проблема, которая спрашивает, существует ли алгоритм, который по заданной конечной системе уравнений в языке $\mathscr{L}$ (с константами из $\mathscr{A}$) решает, имеет ли система решение в $\mathscr{A}$. Конечно, константы из $\mathscr{A}$ в системах уравнений предполагаются «конструктивными», т. е. они должны допускать вычислимые описания. В нашем случае группы $G$ и алгебры $L$ могут быть несчетными, поэтому не все их элементы можно описать алгоритмически. Другая проблема касается элементов поля $k$, которые также могут быть неконструктивными, см. [17] для подробного обсуждения этих вопросов. Через $D(\mathscr{A})$ мы обозначаем диофантову проблему для $\mathscr{A}$. Если мы рассматриваем не конечные системы уравнений, а отдельные уравнения, то диофантова задача, ограниченная отдельными уравнениями над $\mathscr{A}$, обозначается как $D_1(\mathscr{A})$. Важно отметить, что мы рассматриваем уравнения на чистом кольцевом языке в $L$ и чистом групповом языке в $G(L)$, хотя мы допускаем константы из $L$ или $G(L)$ в уравнениях. Мы показываем (теорема 3.2), что диофантовы задачи в $L$ и $G(L)$ сводятся друг к другу за полиномиальное время. Точно также, хотя используя другую редукцию, мы доказываем, что $D_1(L)$ и $D_1(G(L))$ также сводятся друг к другу, хотя может быть и не за полиномиальное время.

Более того, вторая редукция является явной. А именно, существует алгоритм, который для любого уравнения $P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ на языке колец Ли находит групповое уравнение $W_P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = e$, такое что для любых элементов $a_1, \ldots, a_m \in L$ множество решений уравнения $P(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 0$ в $L$ в точности совпадает с множеством решений $W_P(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = e$ в $G(L)$. Понятно, что этот же алгоритм дает явную редукцию как для уравнений, так и для конечных систем уравнений. Это сведение не зависит от того, являются ли элементы $a_1, \ldots, a_m$ конструктивными в $L$ или $G(L)$. Однако мы не можем гарантировать, что эта явная редукция строится за полиномиальное время. Действительно, для уравнения Ли $P = 0$ размер соответствующего группового уравнения $W_P = e$ может расти экспоненциально с размером $P$. Аналогичные сведения существуют от диофантовой проблемы в $G$ к диофантовой проблеме $L(G)$.

В § 4 мы изучаем категории алгебраической геометрии и логической геометрии $L$ и $G(L)$. Б. Плоткин [18]–[20] ввел и изучил категории алгебраических множеств над произвольными алгебраическими структурами. Для групп такие категории изучались Баумслагом, Мясниковым и Ремесленниковым в [21]. Алгебраическая геометрия произвольных структур (универсальная алгебраическая геометрия) получила дальнейшее развитие в книге [22] Данияровой, Мясникова и Ремесленникова. В универсальной алгебраической геометрии Плоткин сформулировал принципиальный вопрос: когда две алгебраические структуры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ одного языка $\mathscr{L}$ имеют одинаковые алгебраические геометрии (совпадают радикалы одинаковых систем уравнений в $\mathscr{A}$ и в $\mathscr{B}$ )? Он назвал такие структуры *геометрически эквивалентными* [23]. На языке категорий $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда совпадают их категории координатных алгебр [22]. Отметим, что категории координатных алгебр и категории алгебраических множеств над структурой $\mathscr{A}$ дуально эквивалентны, но изоморфизм категорий алгебраических множеств $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ в общем случае не влечет геометрической эквивалентности $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. С момента публикации оригинальной статьи Б. Плоткина в 1997 г. было проведено много

исследований по этой теме; см. [22] и статьи Б. Плоткина и Е. Плоткина [20, 23]. Следует отметить один момент. Понятие геометрической эквивалентности предполагает, что $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — структуры одного и того же языка $\mathscr{L}$, и не применяется к структурам разных языков. Например, группы и кольца не могут быть геометрически эквивалентными. Однако, в общем случае можно сказать, что произвольные структуры $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ имеют одинаковые алгебраические геометрии, если *категории их алгебраических множеств или, что эквивалентно, категории их координатных алгебр эквивалентны*. Мы доказываем здесь, что категории алгебраических множеств алгебры Ли $L \in \mathbb{L}_k$ и группы $G(L) \in \mathbb{G}_k$ *изоморфны* (теорема 4.1). Кроме того, мы показываем, что категории 0-определимых множеств в $L$ и $G(L)$ изоморфны. В силу биинтерпретируемости $L$ и $G(L)$ из теоремы 2.1 следует, что категории проективных логических множеств в $L$ и $G(L)$ эквивалентны (мы используем статью [24] об эквивалентности логических категорий и биинтерпретируемости).

## 1 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ

В этой работе мы имеем дело только с группами и кольцами, поэтому достаточно рассмотреть чисто функциональный язык $\mathscr{L}$ с конечным набором $\mathscr{F} = \{f, \ldots\}$ функциональных символов (операций) и конечным набором константных символов $\mathscr{C} = \{c, \ldots\}$. Мы пишем $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $f$ имеет арность $n$. Стандартный язык для групп — это $\mathscr{L}_{group} = \{\cdot, {}^{-1}, e\}$, а стандартный язык теории колец — это $\mathscr{L}_{ring} = \{+, \cdot, 0\}$. Иногда в случае колец Ли мы используем обозначение $(,)$ для умножения Ли, тогда произведение Ли двух элементов $a$, $b$ обозначается как $(a, b)$.

Мы обозначаем переменные строчными буквами $x, y, z, a, b, u, v, \ldots$, а те же символы с черточками $\bar{x}, \bar{y}, \ldots$ обозначают кортежи соответствующих переменных, напр., $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Интерпретацией константного символа $c$ в множестве $A$ является элемент $c^A \in A$. Для функционального символа $f$ интерпретацией в $A$ является функция $f^A \colon A^{n_f} \to A$.

Алгебраическая структура в языке $\mathscr{L}$ ($\mathscr{L}$-структура) с базовым мно-

жеством $A$ обозначается $\mathbb{A} = \langle A; \mathscr{L} \rangle$ или просто $\mathbb{A} = \langle A; f, \ldots, c, \ldots \rangle$, где $f \in \mathscr{F}$ интерпретируется операцией $f^A$, а $c \in \mathscr{C}$ интерпретируется константой $c^A$. Через $\mathscr{L}(\mathbb{A})$ мы обозначаем язык $\mathbb{A}$.

**Определение 1.1.** Алгебраическая структура $\mathbb{A} = \langle A; f, \ldots, c \ldots \rangle$ называется *инъективно* 0-*интерпретируемой* (или *абсолютно интерпретируемой*, или *интерпретируемой без параметров*) в алгебраической структуре $\mathbb{B} = \langle B; \mathscr{L}(\mathbb{B}) \rangle$, если

(1) существует 0-определимое подмножество $A^* \subseteq B^n$, т. е. определимое формулой языка $\mathscr{L}(\mathbb{B})$ без дополнительных констант из $B$;

(2) существуют интерпретации $f^A, \ldots, c^A, \ldots$ операций и констант из $\mathscr{L}(\mathbb{A})$ на множестве $A^*$ такие, что их графики 0-определимы в $\mathbb{B}$;

(3) структура $\mathbb{A}^* = \langle A^*; f^A, \ldots, c^A, \ldots \rangle$ $\mathscr{L}(\mathbb{A})$-изоморфна структуре $\mathbb{A}$.

Понятие инъективной 0-интерпретируемости $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$ является частным случаем абсолютной интерпретируемости $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$, см. [25, 26]. В общем случае интерпретируемость $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$ включает отношение эквивалентности $\sim$ в $A^*$, которое является 0-определимым в $\mathbb{B}$, операции и константы $f^A, \ldots, c^A, \ldots$ в множестве частных $A^*/\sim$, которые являются 0-определимыми в $\mathbb{B}$, при этом структура $\mathbb{A}^* = \langle A^*/\sim; f^A, \ldots, c^A, \ldots \rangle$ $\mathscr{L}(\mathbb{A})$-изоморфна структуре $\mathbb{A}$. Инъективная 0-интерпретируемость $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$ называется *интерпретируемостью уравнениями*, если формулы, определяющие функции $f^A, \ldots$ и константы $c^A, \ldots$ в $\mathbb{B}$, являются просто конъюнкциями уравнений (т. е. атомарных формул) в языке $\mathscr{L}(\mathbb{B})$.

Существует общее понятие *биинтерпретируемости* $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, см. книги [25, 26] и статьи [27, 28] с большим акцентом на теорию интерпретируемости. Однако в случае соответствия Мальцева биинтерпретируемость $k$-группы $G$ и ее нильпотентной $k$-алгебры Ли $L(G)$ имеет место в самой базовой и простой форме. А именно, группа $G(L)$ определена в алгебре $L \in \mathbb{L}_{\mathbb{Q}}$ на множестве $L$ всех элементов $L$, а групповое умножение на $G(L)$ задается формулой Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа (т. е. уравнением в $L$). Наоборот, для заданной группы $G \in \mathbb{G}_{\mathbb{Q}}$ сложение и умножение Ли алгебры $L(G)$ определяются в $G$ соответственно двумя групповыми $\mathbb{Q}$-словами $u(x, y)$ и $v(x, y)$ на множестве $G$ всех элементов $G$ (здесь груп-

повые $\mathbb{Q}$-слова являются групповыми словами в языке $\mathbb{Q}$-групп, подробности см. в п. 2.1). Более того, если $G = G(L)$, то слова $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определяют в $G(L)$ в точности начальные операции сложения и умножения в $L$. Более того, если $L = L(G)$ для некоторого $G \in \mathbb{L}_{\mathbb{Q}}$, то формула Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа определяет в $\mathscr{L}$ в точности начальное умножение на $G$. Взяв достаточно большие степени $\mathbb{Q}$-слов $u(x, y)$ и $v(x, y)$, можно получить абсолютную инъективную интерпретируемость $L(G)$ в $G$ обычными групповыми словами, в то время как взяв достаточно большое целое кратное формулы Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа, можно получить абсолютную инъективную интерпретируемость уравнениями $G(L)$ в $L$ с целыми коэффициентами (т. е. уравнениями на языке колец). Как мы уже упоминали выше, отображение тождества на множестве $L$ дает изоморфизм $L$ и $L(G(L))$, тогда как отображение тождества на $G$ дает изоморфизм $G$ и $G(L(G))$. Вместе эти взаимные интерпретации $G$ в $L$ и $L$ в $G$ дают очень специфический тип биинтерпретации $G$ и $L$, который иногда называют *абсолютной инъективной строгой биинтерпретацией уравнениями*.

## 2 СООТВЕТСТВИЕ МАЛЬЦЕВА МЕЖДУ НИЛЬПОТЕНТНЫМИ $k$-ГРУППАМИ И НИЛЬПОТЕНТНЫМИ $k$-АЛГЕБРАМИ ЛИ

**2.1. Нильпотентные $k$-группы Холла.** В этом разделе мы вводим некоторую терминологию и доказываем несколько предварительных результатов.

Пусть $k$ будет полем нулевой характеристики, а $G \in \mathbb{G}_k$. Тогда $G$ допускает функцию возведения в степень $G \times k \to G, \quad (x, a) \mapsto x^a$, удовлетворяющую аксиомам (1)–(4). Можно расширить стандартный групповой язык $\mathscr{L}_{groups}$ унарными операциями $f_\alpha$ для каждого $\alpha \in k$, чтобы получить язык $k$-групп $\mathscr{L}_{k-groups} = \mathscr{L}_{groups} \cup \{f_\alpha \mid \alpha \in k\}$. Операция $f_\alpha$ для $\alpha \in k$ интерпретируется в $k$-группе $G$ возведением в степень $f_\alpha(g) = g^\alpha$ для $g \in G$. Как обычно в универсальной алгебре, понятия

$k$-гомоморфизмов, $k$-подгрупп и $k$-пополнения можно определить в категории $\mathbb{G}_k$, рассматривая их как группы в языке $\mathscr{L}_{k-groups}$. Таким образом, гомоморфизм $\phi : G \to H$ двух нильпотентных $k$-групп $G$ и $H$ является $k$-гомоморфизмом, если $\phi(g^\alpha) = (\phi(g))^\alpha$ для всех $g \in G$ и $\alpha \in k$. Подгруппа $N \leq G$ является *$k$-подгруппой* группы $G$, если она инвариантна относительно $k$-возведения в степень; подмножество $X \subseteq G$ *$k$-порождает* $k$-подгруппу $\langle X \rangle_k$, которая является наименьшей $k$-подгруппой группы $G$, содержащей $X$. В частности, $X$ *$k$-порождает* $G$, если $\langle X \rangle_k = G$. Обратите внимание, что $G$ порождается (как $k$-группа) множеством $A \subseteq G$, если каждый элемент группы $G$ может быть представлен как $w(a_1, \ldots, a_n)$ для некоторого группового $k$-слова $w(z_1, \ldots, z_n)$ и $a_1, \ldots, a_n \in A$. Здесь, если $z_1, \ldots, z_n$ — переменные, то любое выражение $w(z_1, \ldots, z_n)$, полученное из этих переменных умножением, обращением и возведением в степень элементов из $k$, называется *групповым $k$-словом от переменных* $z_1, \ldots, z_n$ (групповые $k$-слова, это в точности термы в языке $\mathscr{L}_{k-groups}$ ). Аксиома (4) (формула Холла–Петреску) позволяет переписать любое групповое $k$-слово $w(z_1, \ldots, z_n)$ в эквивалентное слово $u(z_1, \ldots, z_n)$ вида $y_1^{\alpha_1} \ldots y_m^{\alpha_m}$, где каждый $y_i$ является одной из переменных $z_1, \ldots, z_n$ и $\alpha_i \in k$. Здесь два групповых $k$-слова $w(z_1, \ldots, z_n)$ и $u(z_1, \ldots, z_n)$ эквивалентны над группой $G$, если для любых $g_1, \ldots, g_n \in G$ выполняется $w(g_1, \ldots, g_n) = u(g_1, \ldots, g_n)$. Запишем это в следующей лемме.

**ЛЕММА 2.1.** (1) Пусть $G$ — холловская нильпотентная $k$-группа, порожденная множеством $A$ как $k$-группа. Тогда каждый элемент $G$ может быть представлен как $w(a_1, \ldots, a_n)$ для некоторых группового $k$-слова $w(z_1, \ldots, z_n)$ и элементов $a_1, \ldots, a_n \in A$.

(2) При фиксированной ступени нильпотентности $c$ каждое групповое $k$-слово $w(z_1, \ldots, z_n)$ эквивалентно слову вида $y_1^{\alpha_1} \ldots y_m^{\alpha_m}$, где каждый $y_i$ является одной из переменных $z_1, \ldots, z_n$ и $\alpha_i \in k$, над любой нильпотентной $k$-группой $G$ класса нильпотентности не выше $c$.

(3) При фиксированной ступени нильпотентности $c$ для каждого группового $\mathbb{Q}$-слова $w(z_1, \ldots, z_n)$ существует положительное целое число $M$ такое, что $w(z_1, \ldots, z_n)^M$ эквивалентно слову $y_1^{\alpha_1} \ldots y_m^{\alpha_m}$, где каждое $y_i$ яв-

ляется одной из переменных $z_1, \ldots, z_n$ и $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, над любой нильпотентной $k$-группой $G$ класса нильпотентности не выше $c$.

**Доказательство.** (1) Требуемое следует из определения.

(2) Зафиксируем произвольное $k$-слово $w(z_1, \ldots, z_n)$. Сперва покажем, что оно равно произведению вида $y_1^{\alpha_1} \ldots y_m^{\alpha_m}$, где каждый $y_i$ является одним из элементов $z_1, \ldots, z_n$ и $\alpha_i \in k$, в любой нильпотентной $k$-группе $G$, порожденной элементами $z_1, \ldots, z_n$. Воспользуемся индукцией по длине базиса Мальцева группы $G$. Если длина базиса Мальцева в $G$ равна 1, то $G$ абелева, поэтому $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ и результат тривиален. Если класс нильпотентности $G$ равен $c$, то существует нетривиальный левонормированный коммутатор $t = [t_1, \ldots, t_c] \neq e$ длины $c$, где каждый $t_i$ является одним из $z_1, \ldots, z_n$. Тогда $t = [z_1, \ldots, z_n] \in Z(G)$ и $k$-подгруппа $\langle t \rangle_k$ находится в $Z(G)$. Группа $G/\langle t \rangle_k$ имеет более короткий базис Мальцева, чем $G$, поэтому по индукции слово $w(z_1, \ldots, z_n)$ равно произведению вида $y_1^{\alpha_1} \ldots y_m^{\alpha_m} t^\beta$, где каждый $y_i$ является одним из $z_1, \ldots, z_n$ и $\alpha_i, \beta \in k$. Достаточно заметить, что

$$[t_1, \ldots, t_c]^\beta = [t_1, \ldots, t_{c-1}, t_c^\beta].$$

В частности, утверждение справедливо, когда $G$ — свободная нильпотентная ступени $c$ $k$-группа, свободно порожденная элементами $z_1, \ldots, z_n$. Таким образом, в такой группе $G$

$$w(z_1, \ldots, z_n) = y_1^{\alpha_1} \ldots y_m^{\alpha_m}, \tag{2.1}$$

где каждый $y_i$ является одним из элементов $z_1, \ldots, z_n$ и $\alpha_i \in k$. Следовательно, это верно для любого кортежа элементов $z_1', \ldots, z_n'$ в произвольной нильпотентной $k$-группе $G_1$ ступени нильпотентности не выше $c$ (отображение $z_1 \to z_1', \ldots, z_n \to z_n'$ продолжается до $k$-гомоморфизма $G \to G_1$). Поэтому (2.1) является тождеством в классе нильпотентных $k$-групп ступени нильпотентности не выше $c$.

(3) Рассмотрим произвольное групповое $\mathbb{Q}$-слово $w(z_1, \ldots, z_n)$ и свободную нильпотентную $\mathbb{Q}$-группу $G$ класса нильпотентности $c$ с базисом $z_1, \ldots, z_n$, а также ее $\mathbb{Z}$-подгруппу $G_0$, порожденную элементами $z_1, \ldots, z_n$.

Из теории $\mathbb{Q}$-пополнений Мальцева, см. [15], известно, что существует положительное натуральное число $M$, такое что $w(z_1, \ldots, z_n)^M \in G_0$, т. е. это обычное групповое слово от $z_1, \ldots, z_n$. Отсюда следует требуемое. □

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.** Пусть $G$ — делимая нильпотентная группа без кручения. Тогда $G$ — холловская нильпотентная $\mathbb{Q}$-группа.

**Доказательство.** Во введении мы упомянули, что каждая делимая нильпотентная группа без кручения $G$ является нильпотентной $\mathbb{Q}$-группой, удовлетворяющей аксиомам (1)–(3). Обратное также верно: если $G$ — нильпотентная $\mathbb{Q}$-группа, удовлетворяющая аксиомам (1)–(3), то она является делимой нильпотентной группой без кручения. Требуется показать, что $G$ удовлетворяет аксиоме (4). Поскольку аксиома (4) включает в себя только конечное число элементов из $G$, можно предположить, что $G$ конечно порождена как $\mathbb{Q}$-группа, скажем, конечным множеством $A$. Пусть $G_0$ — конечно порожденная подгруппа $G$, порожденная множеством $A$ как абстрактная группа. По лемме 2.1, $G = \sqrt{G_0}$, где для подмножества $S \subseteq G$ через $\sqrt{S}$ мы обозначаем множество всех корней элементов $S$ в $G$. Следовательно, $G$ — делимое пополнение $G_0$. По теореме Мальцева $G_0$ имеет единственное с точностью до $\mathbb{Q}$-изоморфизма делимое пополнение. Теперь достаточно заметить, что Холл [12] построил делимое пополнение $H^{\mathbb{Q}}$ любой конечно порожденной нильпотентной группы без кручения $H$, которая является холловской нильпотентной $\mathbb{Q}$-группой. Следовательно, $G$ $\mathbb{Q}$-изоморфна $G_0^{\mathbb{Q}}$, а потому будет холловской $\mathbb{Q}$-группой. □

Следующий результат известен (см. набросок в [14]), но нам потребуются аргументы в его доказательстве.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.** Пусть $L$ — нильпотентная $k$-алгебра Ли над полем $k$ нулевой характеристики. Тогда $G(L)$ — холловская нильпотентная $k$-группа.

**Доказательство.** Напомним, что группа $G(L)$ для алгебры $L \in \mathbb{L}_k$ — это множество $L$, снабженное умножением, определяемым формулой Бей-

кера — Кэмбелла — Хаусдорфа

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}(x, y)_L + \ldots, \tag{2.2}$$

где $(x, y)_L$ — умножение Ли в $L$, а многоточие здесь и далее обозначает соответствующую линейную комбинацию (с рациональными коэффициентами) коммутаторов Ли более высокой степени на $x$ и $y$. Таким образом, правая часть является полиномом Ли, обозначаемым $H(x, y)$, от $x$, $y$ с рациональными коэффициентами (этот полином зависит только от класса нильпотентности $c$ алгебры $L$). Для $x \in G(L)$ и $a \in k$ мы определяем возведение в степень $x^a = ax$, где $ax$ — скалярное умножение $x$ на $a$ в $L$. Требуется показать, что это возведение в степень удовлетворяет аксиомам (1)–(4) холловских нильпотентных $k$-групп (см. введение). Достаточно доказать это для свободных нильпотентных $k$-алгебр Ли $L$. Поскольку каждое тождество (1)–(4) включает только конечное число элементов в $G(L)$, скажем $x_1, \ldots, x_n$, можно предположить, что $L$ свободно порождается этими элементами. Следовательно, $L$ имеет конечную размерность над $k$. Заметим, что $L \simeq L_0 \otimes_{\mathbb{Q}} k$, где $L_0$ — свободная нильпотентная $\mathbb{Q}$-алгебра Ли. Это означает, что $L$ имеет базис $u = (u_1, \ldots, u_n)$ с рациональными структурными константами, поэтому для любых $u_i, u_j$ из $u$ произведение Ли $(u_i, u_j)_L$ имеет рациональные координаты в базисе $u$. Более того, в тождествах (1)–(4) встречается не более двух элементов $a, b \in k$, поэтому достаточно доказать, что тождества (1)–(4) выполняются, когда показатели степеней берутся из подкольца $\mathbb{Q}[a, b] \leq k$, порожденного над $\mathbb{Q}$ элементами $a, b$. Более того, без потери общности можно считать, что элементы $a, b$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$. Следовательно, можно считать, что $\mathbb{Q}[a, b]$ — это просто кольцо полиромов $\mathbb{Q}[t_1, t_2]$ с переменными $t_1, t_2$. Теперь возьмем тождество из (1)–(4) с $a = t_1, b = t_2$ и обозначим его через $W(x_1, \ldots, x_n) = 1$. Это тождество является групповым $\mathbb{Q}[t_1, t_2]$-словом в $G(L)$. Заменяя каждое умножение $x * y$ в $W$ на полином $H(x, y)$ из (2.2) и показатели $x^c$ на $cx$, $c \in \mathbb{Q}[t_1, t_2]$, получаем полином Ли $P_w(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами в $\mathbb{Q}[t_1, t_2]$. По построению $W = 1$ яв-

ляется тождеством в $G(L)$ тогда и только тогда, когда $P_W = 0$ является тождеством в $L$. Чтобы показать последнее, мы берем произвольные элементы $y_i \in L$, разлагаем их по базе $u$ как $y_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_j$, $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}[t_1, t_2]$ и подставляем $x_i \to \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} u_j$ в $P_W(x_1, \ldots, x_n)$. Затем, разложив полученный элемент в алгебре $L$ по базису $u$, получим где $f_i$ — некоторые полиномы из $\mathbb{Q}[t_1, t_2]$. Отсюда следует, что $P_W = 0$ является тождеством в $L$ тогда и только тогда, когда $f_1 = \ldots = f_m = 0$ в $\mathbb{Q}[t_1, t_2]$. Заметим, что кольцо $\mathbb{Q}[t_1, t_2]$ дискриминируется $\mathbb{Q}$, т. е. для любого полинома $f \neq 0$ в $\mathbb{Q}[t_1, t_2]$ существует $\mathbb{Q}$-гомоморфизм алгебр $\lambda : \mathbb{Q}[t_1, t_2] \to \mathbb{Q}$, такой что $\lambda(f) \neq 0$. Если один из полиномов, скажем $f_1$, в (2.3) отличен от нулю, то мы можем применить подходящий $\lambda : \mathbb{Q}[t_1, t_2] \to \mathbb{Q}$ с $\lambda(f_1) \neq 0$. Тогда

$$\lambda(P_W(y_1, \ldots, y_m)) = \lambda(P_W)(\lambda(y_1), \ldots, \lambda(y_m)) = \lambda(f_1)u_1 + \ldots \lambda(f_m)u_m \neq 0$$

в свободной $\mathbb{Q}$-алгебре Ли $L_0$. Ясно, что $\lambda(P_W)$ — это полином Ли, который получается из тождества $\lambda(W) = 1$, (здесь $\lambda$ применяется только к показателям $a = t_1$ и $b = t_2$ в $W$, оставляя все остальное неизменным). Так как $\lambda(a), \lambda(b) \in \mathbb{Q}$ и $G(L)$ удовлетворяют аксиомам (1)–(4) для рациональных показателей, то $\lambda(P_W)(\lambda(y_1), \ldots, \lambda(y_m)) = 0$. С другой стороны, так как базис $u$ из $L$ также является базисом $L_0$ и его структурные константы рациональны, то получаем

$$\lambda(P_W)(\lambda(y_1), \ldots, \lambda(y_m)) = \lambda(f_1)u_1 + \ldots \lambda(f_m)u_m \neq 0;$$

противоречие. Тогда $P_W = 0$ является тождеством в $L$, а значит $G(L)$ удовлетворяет всем аксиомам (1)–(4). □

**2.2. Биинтерпретируемость уравнениями $L$ и $G(L)$.** Основным результатом работы является следующая

**ТЕОРЕМА 2.1.** (1) Пусть $L$ — нильпотентная $\mathbb{Q}$-алгебра Ли. Тогда $L$ на языке колец Ли $\mathscr{L}_{rings}$ и холловская нильпотентная $\mathbb{Q}$-группа $G(L)$ на языке групп $\mathscr{L}_{groups}$ абсолютно инъективно биинтерпретируемы друг в

друге уравнениями.

(2) Пусть $L$ — нильпотентная $k$-алгебра Ли над полем $k$ нулевой характеристики. Тогда $L$ на языке $k$-алгебр Ли $\mathscr{L}_{k-algebras}$ и холловская нильпотентная $k$-группа $G(L)$ на языке $k$-групп $\mathscr{L}_{k-groups}$ абсолютно инъективно биинтерпретируемы друг в друге уравнениями.

**Доказательство.** В этом доказательстве мы следуем рассуждениям из [15, гл. 10]. Как упоминалось ранее (предложение 2.2), групповое умножение $*$ на $L$ задается формулой Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа (2.2)

$$x * y = x + y + \frac{1}{2}(x, y)_L + \dots.$$

Известно, что множество $L$ с умножением $*$ образует группу $G(L)$. Так как $L$ нильпотентна, формула Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа задается полиномом Ли с рациональными коэффициентами, который мы обозначаем $H(x, y)$. Пусть $M$ — положительное целое число, такое что полином Ли $MH(x, y)$ имеет только целые коэффициенты. Тогда уравнение $z = H(x, y)$ в $L$ эквивалентно $Mz = MH(x, y)$, поэтому предикат $z = x * y$ в $L$ определяется в $L$ уравнением Ли $Mz = MH(x, y)$ с целыми коэффициентами, которое является уравнением на языке колец. Это показывает, что $G(L)$ 0-определима в кольце $L$ уравнениями, т. е. $G(L)$ инъективно абсолютно интерпретируема в $L$. Обозначим эту интерпретацию как $G \simeq \Gamma(L)$.

Теперь докажем, что $L$ является 0-определимым в $G = G(L)$. Фактически, докажем, что существуют групповые $\mathbb{Q}$-слова $u(x, y)$ и $v(x, y)$ от переменных $x$ и $y$, такие что для любых $a, b \in L$ выполняется следующее:

$$a + b = u(a, b), \quad (a, b)_L = v(a, b),$$

здесь $u(a, b)$ и $v(a, b)$ интерпретируются как произведения относительно умножения $*$ в $L$, которое также является групповым умножением в $G(L)$.

Из формулы Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа имеем

$$[x, y] = (x, y)_L + \dots,$$

следовательно,

$$(x, y)_L = [x, y] + \ldots, \tag{2.4}$$

где $(x, y)_L$ — умножение Ли в $L$,

$[x, y]$ — коммутатор в группе $G(L)$, а точками мы снова обозначаем линейную комбинацию с рациональными коэффициентами коммутаторов Ли более высокой степени от $x$ и $y$ в $L$. По индукции для $x_1, \ldots, x_m \in G(L)$ имеем

$$[x_1, \ldots, x_m] = (x_1, \ldots, x_m)_L + \ldots,$$

где $[x_1, \ldots, x_m] = [\ldots[x_1, x_2], \ldots], x_m]$ — левонормированный коммутатор группы $G(L)$, а $(x_1, \ldots, x_m)_L = (\ldots(x_1, x_2)_L, \ldots)_L, x_m)_L$ — левонормированный коммутатор Ли в $L$. Следовательно,

$$(x_1, \ldots, x_m)_L = [x_1, \ldots, x_m] + \ldots \tag{2.5}$$

Выражая в (2.4) каждый коммутатор Ли через соответствующий коммутатор группы из формулы (2.5) для всех $x, y \in L$ получаем

$$(x, y)_L = f(x, y), \tag{2.6}$$

где $f(x, y)$ — фиксированная линейная комбинация с рациональными коэффициентами коммутаторов группы в $x$ и $y$.

Теперь мы строим слова $u(x, y)$ и $v(x, y)$ индукцией по $k$, где $k$ пробегает от фиксированного класса нильпотентности $n$ группы $G$ до 1. Если $x \in \gamma_n(G)$, $y \in G$, то из формулы Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа (2.2) вытекает

$$x + y = x * y, \quad (x, y)_L = e.$$

Предположим, что существуют слова $u_k(x, y)$ и $v_k(x, y)$, такие что для любых $a \in \gamma_k(G)$ и $b \in G$ выполняется следующее

$$a + b = u_k(a, b), \quad (a, b)_L = v_k(a, b)$$

Теперь, если $a \in \gamma_{k-1}(G)$ и $b \in G$, то элемент $f(a,b)$ из (2.6) является линейной комбинацией с рациональными коэффициентами элементов из $\gamma_k(G)$, так как $[G, \gamma_{k-1}(G)] \leq \gamma_k(G)$. Из формулы Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа следует, что для любых $z \in L$ и $r \in \mathbb{Q}$ элемент $rz$ из $L$ равен $z^r$ в $G(L)$, т. е.

$$rz = z^r, \quad z \in L, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Поэтому можно считать, что $f(x,y)$ является фиксированной суммой элементов из $\gamma_k(G)$. Теперь, используя слова $u_k(x,y)$ и $v_k(x,y)$, можно переписать $f(x,y)$ как одно слово $v_{k-1}(x,y)$. Из (2.6) следует, что для любых $a \in \gamma_{k-1}(G)$,

$b \in G$ верно

$$(a,b)_L = v_{k-1}(a,b).$$

Из формулы Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа

$$x + y = x * y - (x,y)_L - \dots,$$

поэтому

$$x + y = x * y - v_{k-1}(x,y) - \dots.$$

Используя слово $u_k(x,y)$ и подставляя коэффициенты линейной комбинации в показатели степеней элементов группы, мы можем переписать правую часть равенства выше как одно слово $u_{k-1}(x,y)$. Таким образом, для любых $a \in \gamma_{k-1}(G)$, $b \in G$ имеет место

$$a + b = u_{k-1}(a,b).$$

По индукции существуют групповые $\mathbb{Q}$-слова $u_1(x,y)$ и $v_1(x,y)$, такие что для любых $a \in \gamma_1(G) = G$ и $b \in G$ верно

$$a + b = u_1(a,b), \quad (a,b)_L = v_1(a,b).$$

Обозначим $u(x,y) = u_1(x,y)$ и $v(x,y) = v_1(x,y)$.

Заметим, что операции $z = u(x, y)$ и $z = v(x, y)$ интерпретируются уравнениями в $G$ без коэффициентов, но слова $u(x, y)$ и $v(x, y)$ содержат рациональные показатели. От этих показателей можно избавиться, используя лемму 2.1.

Действительно, поскольку извлечение корней в $G$ однозначно, уравнения

$$z = u(x, y), \quad z = v(x, y)$$

эквивалентны в $G$ соответственно уравнениям

$$z^M = u(x, y)^M, \quad z^N = v(x, y)^N,$$

для любых положительных целых чисел $M$ и $N$. По лемме 2.1 существуют положительные целые числа $M$ и $N$, такие что слова $u(x, y)^M$ и $v(x, y)^N$ эквивалентны некоторым словам в $x, y$ только с целыми показателями. Обозначим эту интерпретацию как $L \simeq \Delta(G)$.

Чтобы доказать, что $G \simeq \Gamma(L)$ и $L \simeq \Delta(G)$ дают биинтерпретацию $G$ и $L$, сначала отметим, что интерпретация $\Gamma(L)$ использует тот же базовый набор $L$ для интерпретации $G$ в $L$, то же самое справедливо и для интерпретации $\Delta(G)$. Из построений интерпретаций следует, что тождественное отображение $\mathrm{id} : L \to L$ дает изоморфизм $L \to \Delta(\Gamma(L))$, а также изоморфизм $G \to \Gamma(\Delta(G))$. □

**Замечание.** Формула Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа и слова $u(x, y)$ и $v(x, y)$, а значит, и интерпретации $G(L)$ в $L$ и $L(G)$ в $G$, зависят только от класса нильпотентности $G$ и $L$.

## 3 ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ДИОФАНТОВОЙ ПРОБЛЕМЫ НАД $L$ И $G(L)$

В этом разделе мы не решаем задачи $D(G)$ или $D(L)$ для $G \in \mathbb{G}_k$ и $L \in L_k$. Вместо этого мы показываем, что $D(G)$ и $D(L)$ эквивалентны очень простым способом. А именно, говорим, что $D(L)$ *явно сводима* к $D(G)$, если су-

ществует алгоритм, который для каждого уравнения $P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ на языке колец Ли находит уравнение $W_P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = e$ на языке групп, такое что для любых элементов $a_1, \ldots, a_m \in L$ множество решений уравнения $P(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 0$ в $L$ в точности совпадает с множеством решений $W_P(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = e$ в $G(L)$. Аналогичным образом мы определяем явное сведение $D(G)$ к $D(L(G))$. Говорим, что $D(G)$ и $D(L(G))$ *явно эквивалентны*, если они оба явно сводятся друг к другу. Эти определения позволяют нам избежать обсуждения конструктивности констант в уравнениях.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.** Пусть $L$ — нильпотентная алгебра Ли над полем $k$ нулевой характеристики и $G = G(L)$. Тогда

(1) существует алгоритм, который для каждого уравнения $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ на языке колец Ли находит уравнение $W_P(x_1, \ldots, x_n) = e$ на языке групп, такое что множество решений $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ в $L$ точно совпадает с множеством решений $W_P(x_1, \ldots, x_n) = e$ в $G(L)$ ;

(2) существует алгоритм, который для каждого группового уравнения $w(x_1, \ldots, x_n) = e$ находит уравнение $P_w(x_1, \ldots, x_n) = 0$ на языке колец такое, что множество решений $w(x_1, \ldots, x_n) = e$ в $G$ точно совпадает с множеством решений $P_w(x_1, \ldots, x_n) = 0$ в $L$.

**Доказательство.** (1) Используя слова $u(x, y)$ и $u(x, y)$ из теоремы 2.1, можно алгоритмически переписать заданный полином Ли $P(x_1, \ldots, x_n)$ на языке колец Ли с коэффициентами в $\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Q}$-слово $W(x_1, \ldots, x_n)$, такое что для любых $a_1, \ldots, a_n \in L$ верно

$$P(a_1, \ldots, a_n) = W(a_1, \ldots, a_n),$$

в этом случае пишем $P \equiv_L W$. Действительно, любое лиево (неассоциативное) произведение $p$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, т. е. лиев моном, можно записать в виде $p = (p_1, p_2)$, где $p_1$ и $p_2$ — лиевы произведения, которые короче, чем $p$. По индукции существуют $\mathbb{Q}$-слова $W_1, W_2$, такие что $W_1 \equiv_L p_1$ и $W_2 \equiv_L p_2$. Тогда $p \equiv_L v(W_1, W_2)$. Любой лиев полином $P$ с рациональными коэффициентами является линейной комбинацией $r_1 p_1 + \ldots + r_m p_m$, где

$r_i \in \mathbb{Q}$ и $p_i$ — лиевы мономы. Как мы показали выше, существуют $\mathbb{Q}$-слова $W_i$, такие что $W_i \equiv_L p_i$,

$i = 1, \ldots, m$. Тогда

$$P \equiv_L u(u(W_1^{r_1}, W_2^{r_2}), W_3^{r_3}) \ldots W_m^{r_m}).$$

Очевидно, что слово в правой части этого равенства является $\mathbb{Q}$-словом, которое обозначим через $W$. Обратите внимание, что 0 в $L$ есть $e$ в $G(L)$, поэтому уравнения $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ и $W(x_1, \ldots, x_m) = e$ имеют точно такое же множество решений в $L$ и $G(L)$ соответственно. Однако $W(x_1, \ldots, x_m) = e$ не является групповым уравнением, оно может содержать некоторые рациональные показатели. По лемме 2.1 существует положительное целое число $M$, такое что $W^M$ эквивалентно групповому слову только с целыми показателями. Обозначим это слово как $W_P(x_1, \ldots, x_m)$. Так как $G$ не имеет кручения, уравнение $W(x_1, \ldots, x_m) = e$ эквивалентно $W(x_1, \ldots, x_m)^M = e$ в $G$.

(2) Доказательство похоже на (1), но вместо слов $u(x, y)$ и $v(x, y)$ используется формула Бейкера — Кэмбелла — Хаусдорфа □

Мы можем улучшить результат, рассматривая уравнения с константами.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.** Пусть $L$ — нильпотентная алгебра Ли над полем $k$ нулевой характеристики и $G = G(L)$. Тогда

(1) существует алгоритм, который для каждого уравнения $P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ на языке колец Ли находит уравнение $W_P(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = e$ на языке групп, такое что для любых элементов $a_1, \ldots, a_m \in L$ множество решений уравнения $P(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 0$ в $L$ в точности совпадает с множеством решений $W_P(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = e$ в $G(L)$,

(2) существует алгоритм, который для каждого уравнения $w(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = e$ на языке групп находит уравнение $P_w(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ на языке колец такое, что для любых элементов $a_1, \ldots, a_m \in G$ множество решений $w(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = e$ в $G$ в точности совпадает с

множеством решений $P_w(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_m) = 0$ в $L$.

Доказательство. следует из предложения 3.1.

**ТЕОРЕМА 3.1.** Для любого поля $k$ нулевой характеристики и нильпотентной $k$-алгебры Ли $L \in \mathbb{L}_k$ справедливы следующие утверждения:

(1) диофантовы проблемы $D_1(L)$ и $D_1(G(L))$ для одиночных уравнений в $L$ и $G(L)$ явно сводятся друг к другу, поэтому они явно эквивалентны;

(2) диофантовы проблемы $D(L)$ и $D(G(L))$ явно сводятся друг к другу, поэтому они явно эквивалентны.

**Доказательство.** Утверждение (1) следует из предложения 3.2. Утверждение (2) следует из (1). □

Отметим, что алгоритм в предложении 3.1, который для каждого уравнения $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ на языке колец Ли, находит уравнение $W_P(x_1, \ldots, x_n) = e$ на языке групп, так что множество решений $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ в $L$ в точности совпадает с множеством решений $W_P(x_1, \ldots, x_n) = e$ в $L(G)$ работает не обязательно за полиномиальное время. Фактически, длина уравнения $W_P(x_1, \ldots, x_n) = e$ может расти экспоненциально относительно длины уравнения $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Однако, если мы хотим свести проблему разрешимости уравнений (или конечных систем уравнений) в $L(G)$ к разрешимости конечной системы уравнений в $G$, сведение может быть выполнено за полиномиальное время. Однако в этом случае сведение не является явным, а именно, имеет место следующая

**ТЕОРЕМА 3.2.** Пусть$L$ — нильпотентная алгебра Ли над полем $k$ нулевой характеристики. Тогда диофантовы задачи в $L$ и в $G(L)$ сводятся друг к другу за полиномиальное время.

**Доказательство.** Известно, что любая атомарная формула $\phi(\bar{x})$ на языке колец Ли (в частности, полиномиальное уравнение Ли $p(\bar{x}) = 0$) может быть алгоритмически за полиномиальное время переписана в положительную примитивную (диофантову) невложенную формулу $\phi^*(\bar{x})$ на языке колец Ли, эквивалентную $\phi(\bar{x})$ в $L$, см., например, [25, с. 58]. Точнее, здесь

$$\phi^*(\bar{x}) = \exists \bar{y} S(\bar{x}, \bar{y}),$$

где $S(\bar{x}, \bar{y})$ — конечная система уравнений типа либо $x_k + x_\ell = x_m$, либо $(x_k, x_\ell) = x_m$, либо $x_k = 0$, либо $x_k = x_m$. Например, полиномиальное уравнение типа

$$(\dots((x_1, x_2), x_3)\dots, x_n) = 0$$

(левонормированное произведение Ли) эквивалентно формуле

$$\exists \bar{y}((x_1, x_2) = y_1 \wedge (y_1, x_3) = y_2 \wedge \dots \wedge (y_{n-2}, x_n) = y_{n-1} \wedge y_{n-1} = 0).$$

Заменяя в системе уравнений $S(\bar{x}, \bar{y})$ каждое невложенное атомарное уравнение типа $(x_k, x_\ell) = x_m$ на уравнение $\mathbb{Q}$-группы $v(x_k, x_\ell) = x_m$ и каждое невложенное уравнение типа $x_k + x_\ell = x_m$ на уравнение $\mathbb{Q}$-группы $u(x_k, x_\ell) = x_m$, оставляя при этом все остальные уравнения без изменений, получаем конечную систему $S'(\bar{x}, \bar{y})$ уравнений $\mathbb{Q}$-группы, размер которой ограничен полиномом от размера системы $S(\bar{x}, \bar{y})$. Для получения чисто групповых уравнений (без рациональных показателей) достаточно заменить в системе $S'(\bar{x}, \bar{y})$ каждое уравнение вида $v(x_k, x_\ell) = x_m$ на уравнение $v(x_k, x_\ell)^M = x_m$ и каждое уравнение вида $u(x_k, x_\ell) = x_m$ на уравнение $u(x_k, x_\ell)^N = x_m$, где $M$ и $N$ — положительные целые числа, зависящие только от слов $u(x, y)$ и $v(x, y)$, см. лемму 2.1. Обозначим полученную систему через $W_\phi(\bar{x}, \bar{y})$, и положим $\Psi_\phi(\bar{x}) = \exists \bar{y} W_\phi(\bar{x}, \bar{y})$. По построению множество истинности формулы $\phi(\bar{x})$ в $L$ в точности совпадает с множеством истинности формулы $\Psi_\phi(\bar{x})$ в $G(L)$. Отсюда следует, что полиномиальное уравнение Ли $P(\bar{x}) = 0$ имеет то же множество решений, что и множество истинности формулы $\Psi_{p(\bar{x})=0}(\bar{x})$ в $G(L)$. Следовательно, уравнение $P(\bar{x}) = 0$ имеет решение в $L$ тогда и только тогда, когда система групповых уравнений $W_{P=0}(\bar{x}, \bar{y})$ имеет решение в $G(L)$. Это означает, что система полиномиальных уравнений Ли $E(\bar{x}) = \bigwedge\limits_{i=1}^{m} P_i(\bar{x}) = 0$ имеет решение в $L$ тогда и только тогда, когда система групповых уравнений $W_E(\bar{x}, \bar{y}) = \bigcup\limits_{i=1}^{m} W_{P_i=0}(\bar{x}, \bar{y})$ имеет решение в $G(L)$.

До сих пор мы рассматривали уравнения в $L$ без коэффициентов. При работе с коэффициентами мы используем тот же прием, что и в предложении 3.2. А именно, каждая конечная система $E(\bar{x}, \bar{a})$ уравнений Ли с ко-

эффициентами $\bar{a}$ в $L$ может быть получена из системы без коэффициентов $E(\bar{x}, \bar{z})$ путем замены переменных в $\bar{z}$ константами из $\bar{a}$. Действительно, система $E(\bar{x}, \bar{z})$ получается из системы $E(\bar{x}, \bar{a})$ заменой каждой константы $a_i$ в $\bar{a}$ на соответствующую новую переменную $z_i$. Как мы показали выше, система $E(\bar{x}, \bar{z})$ имеет то же множество решений в $L$, что и множество истинности формулы $\exists y W_E(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y})$. Отсюда следует, что система $E(\bar{x}, \bar{a})$ имеет решение в $L$ тогда и только тогда, когда система групповых уравнений $W_E(\bar{x}, \bar{a}, \bar{y})$ имеет решение в $G(L)$. Это показывает, что диофантова задача $D(L)$ сводится к диофантовой задаче $D(G(L))$ за полиномиальное время.

Обратное также верно, и доказательство аналогично. □

**Замечание.** В теореме 3.2 мы явно не сводим диофантовы проблемы в $L$ и $G(L)$ друг к другу. Однако аргумент в доказательстве показывает, что мы явно сводим конечные системы уравнений к диофантовым формулам.

## § 4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ЛОГИЧЕСКИХ ГЕОМЕТРИЙ НАД $L$ И $G(L)$

Теперь упомянем два следствия результатов биинтерпретируемости из теоремы 2.1, которые касаются категорий алгебраических множеств и логических множеств.

Плоткин [18–20] ввел и изучил категории алгебраических множеств над произвольными алгебраическими структурами. Для групп такие категории изучались Баумслагом, Мясниковым и Ремесленниковым [21], подробнее см. книгу Данияровой, Мясникова и Ремесленникова [22]. Более общие категории определимых множеств, так называемые *логические геометрии*, были введены Плоткиным [29]. Подробнее о биинтерпретациях и эквивалентности логических геометрий см. [24].

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.** Пусть $L$ — нильпотентная $k$-алгебра Ли с коэффициентами в поле $k$ нулевой характеристики и $G = G(L)$. Тогда

(1) $G$ и $L$ имеют в точности одинаковые алгебраические множества;

(2) $G$ и $L$ имеют в точности одинаковые определимые множества.

**Доказательство.** (1) следует из предложения 3.2.

(2) Биинтерпретация $L$ и $G(L)$ из теоремы 2.1 позволяет переписать каждую формулу $\phi$ языка колец Ли в формулу $\phi^*$ на групповом языке так, что определяемые ими множества $\phi(L)$ и $\phi^*(G(L))$ совпадают. Действительно, для бескванторных формул это следует из п. (1), точнее, из предложения 3.2. В общем случае формулу $\phi$ можно представить в предваренной нормальной форме $Q_1 y_1 \dots Q_s y_s \phi_0$, где $Q_i$ — кванторы, а $\phi_0$ — бескванторная формула. Затем мы переписываем $\phi_0$ в $\phi_0^*$ согласно п. (1). На самом деле, существует очень общая процедура построения $\phi^*$ из $\phi$ для произвольных интерпретаций, см. [25, 26]. □

В качестве следствия мы получаем, что справедлива следующая

**ТЕОРЕМА 4.1.** Пусть $L$ — нильпотентная $k$-алгебра Ли с коэффициентами в поле $k$ нулевой характеристики и $G = G(L)$. Тогда

(1) $G$ и $L$ имеют изоморфные категории алгебраических множеств;

(2) $G$ и $L$ имеют изоморфные категории 0-определимых множеств.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Daniyarova, A. Myasnikov, *Applications of Biinterpretability to Logic and Algebra*, Preprint.

2. А. Г. Мясников, "Строение моделей и критерий разрешимости полных теорий конечномерных алгебр", *Изв. АН СССР, Сер. мат.* **53**, No. 2, 379–397 (1989).

3. A. G. Myasnikov, M. Sohrabi, "Groups elementarily equivalent to a free nilpotent group of finite rank", *Ann. Pure Appl. Logic* **162**, No. 11, 916–933 (2011).

4. A. G. Myasnikov, M. Sohrabi, "$\omega$-stability and Morley rank of bilinear maps, rings and nilpotent groups", *J. Symb. Log.* **82**, No. 2, 754–777 (2017).

5. А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, "Рекурсивные $p$-адические числа и элементарные теории конечно порожденных про-$p$-групп", *Изв. АН СССР, Сер. мат.* **51**, No. 3, 613–634 (1987).

6. А. И. Мальцев, "Об одном классе однородных пространств", *Изв. АН СССР. Сер. мат.* **13**, No. 1, 9–32 (1949).

7. А. И. Мальцев, "Нильпотентные группы без кручения", *Изв. АН СССР, Сер. мат.* **13**, No. 3, 201–212 (1949).

8. G. Baumslag, "Some aspects of groups with unique roots", *Acta Math.* **104**, 217–303 (1960).

9. А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, "Степенные группы. I: Основы теории и тензорные пополнения", *Сиб. матем. журн.* **35**, No. 5, 1106–1118 (1994).

10. М. Г. Амаглобели, А. Г. Мясников, Т. Т. Надирадзе, "Многообразия степенных $R$-групп", *Алгебра логика* **62**, No. 2, 179–204 (2023).

11. A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, "Exponential groups II: Extensions of centralizers and tensor completion of CSA-groups", *Int. J. Algebra Comput.* **6**, No. 6, 687–711 (1996).

12. P. Hall, *Nilpotent groups. Notes of lectures given at the Canadian Mathematical Congress (summer Sem., Univ. Alberta, Edmonton, 12-30 August, 1957), (Queen Mary College Math. Notes),* London, Queen Mary College (1969).

13. М. Г. Амаглобели, В. Н. Ремесленников, "Свободные 2-ступенно нильпотентные $R$-группы", *Докл. РАН* **443**, No. 4, 410–413 (2012).

14. R. B. Warfield, jun., *Nilpotent Groups*, springer, Berlin etc. (1976).

15. E. I. Khukhro, *p-Automorphisms of Finite p-Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1998).

16. D. Quillen, "Rational homotopy theory", *Ann. Math.* **90**, 205–295 (1969).

17. А. Г. Мясников, М. Сохраби, "Диофантовы проблемы в классических матричных группах", *Изв. АН СССР, Сер. мат.* **85**, No. 6, 205–244 (2021).

18. B. Plotkin, "Varieties of algebras and algebraic varieties. Categories of algebraic varieties", *Sib. Adv. Math.* **7**, No. 2, 64–97 (1997).

19. B. Plotkin, *Seven Lectures on the Universal Algebraic Geometry*, arXiv:math/0204245 (2002).

20. Б. И. Плоткин, "Геометрическая эквивалентность, геометрическое подобие и геометрическая совместимость алгебр", *Зап. научн. сем. ПОМИ* **330**, 201–222 (2006).

21. G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, "Algebraic geometry over groups. I: Algebraic sets and ideal theory", *J. Algebra* **219**, No. 1, 16–79 (1999).

22. Э. Ю. Даниярова, А. Г. Мясников, В. Н. Ремесленников, *Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами,* Изд-во СО РАН, Новосибирск (2016).

23. B. Plotkin, E. Plotkin, "Multi-sorted logic and logical geometry: some problems", *Demonstr. Math.* **48**, No. 4, 578–618 (2015).

24. E. Daniyarova, A. Myasnikov, *Theory of Interpretations II. Categorical Equivalence of Projective Logical Geometries*, Preprint.

25. W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).

26. D. Marker, *Model Theory: an Introduction*, Springer, New York (2002).

27. E. Daniyarova, A. Myasnikov, *Theory of Interpretations. I: Foundations*, Preprint.

28. O. Kharlampovich, A. Myasnikov, M. Sohrabi, "Rich groups, weak second-order logic, and applications", In: *Groups and Model Theory. GAGTA book 2,* pp. 127–191, De Gruyter, Berlin (2021).

29. B. Plotkin, *Algebraic Logic and Logical Geometry in Arbitrary Varieties of Algebras*, arXiv:1205.6235 (2012).

Статья поступила в редакцию 16 декабря 2024 г.
после доработки 3 января 2025 г.
принята к публикации 19 марта 2025 г.

Алгебра и логика Том 64, No. 5, 498–537 (2025)

УДК 510.6:512.54:514.146.01

**Б. А. Бергер**[1], **А. Г. Мясников**[2]

# ТЕОРИЯ МОДЕЛЕЙ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Аннотация: Доказывается, что для любого векторного пространства $V$ над полем $F$ конечной размерности не менее 3 проективное пространство $P(V)$ (множество всех подпространств $V$ с бинарным предикатом включения) регулярно инъективно би-интерпретируемо с полем $F$.

Ключевые слова: *векторное пространство, поле, проективная геометрия, би-интерпретация.*

*Памяти В. А. Романькова*

## ВВЕДЕНИЕ

Здесь мы доказываем, что для любого векторного пространства $V$ над полем $F$ конечной размерности не ниже 3 проективное пространство $P(V)$ (множество всех подпространств $V$, снабженное бинарным предикатом включения) регулярно инъективно биинтерпретируемо с полем $F$. Доказательство базируется на классическом аргументе основной теоремы проективной геометрии (в дальнейшем ОТПГ); однако результат дает гораздо больше, чем сама основная теорема; излагается точный механизм для переноса различных свойств $F$ в $P(V)$ и обратно. Следовательно, $P(V)$ и $F$ имеют много общих алгебраических, алгоритмических и теоретико-модельных свойств, см. ниже. Эту регулярную биинтерпретируемость $F$ и

Работа выполнена при поддержке Грузинского национального фонда Шота Руставели, код проекта FR-21-4713. [1] Department of Mathematical Sciences, Stevens Institute of Technology, Castle Point on Hudson, Hoboken, NJ 07030, USA; bberger1@stevens.edu. [2] Department of Mathematical Sciences, Stevens Institute of Technology, Castle Point on Hudson, Hoboken, NJ 07030, USA; amiasnik@stevens.edu.

$P(V)$ можно рассматривать как более сильную и точную версию ОТПГ. На самом деле, ОТПГ следует из регулярной интерпретируемости $F$ в $P(V)$; для этого результата не требуется биинтерпретируемость. Однако биинтерпретируемость действительно необходима для других приложений.

ОТПГ утверждает, что для любых векторных пространств $V_1$ и $V_2$ конечной размерности над полями $F_1$ и $F_2$, где $\dim_{F_1} V_1 \geq 3$, если их проективные пространства $P(V_1)$ и $P(V_2)$ изоморфны, то $\dim_{F_1} V_1 = \dim_{F_2} V_2$ и поля $F_1$ и $F_2$ изоморфны; более того, каждый изоморфизм $P(V_1) \to P(V_2)$ индуцируется некоторым полулинейным изоморфизмом $V_1 \to V_2$. ОТПГ известна уже более 175 лет; первоначально это было доказано фон Штаудтом [1] в 1847 г. С тех пор появилось много версий и обобщений этого результата. Существуют различные способы связать некоторую алгебраическую структуру с проективной геометрией, хотя все они в некотором смысле эквивалентны друг другу. Конечно, ОТПГ справедлива для всех них, но их эквивалентность идет намного глубже этого факта; на самом деле, все эти алгебраические структуры, связанные с проективной геометрией пространства $V$, взаимно интерпретируются друг в друге, поэтому выбор структуры, которая представляет проективную геометрию $V$, по большей части не имеет значения. Будем следовать классической книге Артина [2] и отождествлять проективное пространство над векторным пространством $V$ с алгебраической системой $P(V)$. Общие сведения по проективной геометрии см. в [3–5].

Развитие общей теории проективных плоскостей восходит к работе Маршалла Холла [6], где он ввел и изучил свободные проективные плоскости.

Позднее Ширшов и Никитин[7] рассматривали проективные плоскости как двусортные алгебраические структуры (интуитивно, один сорт для прямых, другой — для точек), снабженные частичной бинарной коммутативной операцией (пересечение двух прямых дает точку, а две различные точки определяют прямую), что позволило им ввести классические алгебраические понятия (порождающие множества, свободные объекты, гомоморфизмы и т. д.) в теорию проективных плоскостей. Они поставили два основных теоретико-модельных вопроса о свободных проективных плос-

костях: элементарно эквивалентны ли свободные проективные плоскости друг другу и разрешима ли их общая теория?

В 2021 г. Хюттинен и Пиолини, вдохновленные решением задач Тарского для свободных групп, решили эти задачи утвердительно [8]. Они показали, что свободные проективные плоскости элементарно эквивалентны, а их общая теория первого порядка — это в точности теория открытых проективных плоскостей. Следовательно, теория открытых проективных плоскостей полна, а поскольку имеет хорошую систему аксиом, то и разрешима. Ими также была доказана стабильность этой теории. Они рассматривали проективные плоскости в языке с двумя сортами, определяющими множество точек и множество прямых, а также симметричным бинарным отношением для инцидентности точка–прямая.

Десятилетием ранее Когабаев [9] показал, что класс симметричных ирефлексивных графов относительно элементарно определим в классе всех проективных плоскостей, поэтому теория всех проективных плоскостей неразрешима. Он рассматривал проективные плоскости на языке, похожем на язык в подходе Ширшова и Никитина (заменяя частичную бинарную операцию соответствующим предикатом).

Как упоминалось ранее, мы изучаем теорию моделей структуры $P(V)$, где $V$ — векторное пространство размерности не меньше 3 над полем $F$. Используя биинтерпретируемость $P(V)$ и $F$, мы устанавливаем следующие результаты:

(1) Даем критерий разрешимости теории первого порядка $P(V)$ (она разрешима тогда и только тогда, когда разрешима теория поля $F$), см. § 3.2;

(2) описываем все структуры, элементарно эквивалентные $P(V)$ (они являются в точности моделями типа $P(\widetilde{V})$, где $\widetilde{V}$ — векторное пространство над полем $\widetilde{F}$, причем $F \equiv \widetilde{F}$ и $\dim_F V = \dim_{\widetilde{F}} \widetilde{V}$), см. § 3.3;

(3) описываем богатые проективные пространства $P(V)$, где теория первого порядка структуры $P(V)$ имеет ту же выразительную силу, что и слабая логика второго порядка в $P(V)$ (мы доказываем, что теория $P(V)$ богата тогда и только тогда, когда богата теория $F$), и приводим различные примеры богатых пространств $P(V)$, см. § 3.4;

(4) описываем, когда структура $P(V)$ допускает элиминацию мнимостей (тогда и только тогда, когда $F$ допускает), см. § 3.5.

Основная теорема не является чем-то специфичным только для проективной геометрии. Существует множество подобных результатов для других геометрий. Так, существует фундаментальная теорема аффинной геометрии, см., напр., [2], Патнэм [10] доказал основную теорему симплектической проективной геометрии, а Джефферс [11] сделал это для гиперболической геометрии. Оджангурен и Шридхаран [12] обобщили основную теорему проективной геометрии на произвольные коммутативные кольца.

Кроме того, существуют некоммутативные аналоги ОТПГ, где вместо векторного пространства $V$ рассматривается группа $G$, возможно, некоммутативная. В этом случае, в качестве $P(G)$ берется множество всех, или некоторых специальных, подгрупп $G$, в языке с предикатом включения $\subseteq$ (здесь мы используем обозначение $P(G)$, хотя в этой области обычно используется обозначение $S(G)$). Говорится, что ОТПГ справедлива для $G$, если каждый изоморфизм структуры $S(G)$ индуцируется некоторым изоморфизмом группы $G$. Например, для алгебраической группы $G$ над полем $F$ множество $P(G)$ может быть множеством некоторых $F$-определенных алгебраических подгрупп $G$, снабженных включением. Титс [13] доказал ОТПГ для абсолютно простых присоединенных алгебраических групп $G$ над полем $F$, где $P(G)$ — множество параболических $F$-подгрупп $G$. Существует довольно много исследований по основной теореме проективной геометрии для нильпотентных алгебраических (унипотентных) групп $G$ над полем или биномиальной областью целостности $K$ (в этом случае $P(G)$ — это множество всех $K$-подгрупп $G$), см. статьи Бокелавадзе, Лашхи [14, 15] и Бокелавадзе, Тавадзе [16]. Лашхи [17] изучал основную теорему аффинной геометрии для алгебр Ли.

В области абстрактных групп исследования, связанные с ОТПГ, еще более многочисленны. Они начались в 1928 г. с оригинальной статьи Роттлендер [18], среди последующих публикаций мы хотели бы упомянуть работы Бэра [19], Садовского [20–23] и Плоткина [24], книги Судзуки [25] и Шмидта [26], последняя является наиболее полным изложением результа-

тов по этой теме. Здесь для абстрактной группы $G$ рассматривается множество всех подгрупп $P(G)$ (иногда обозначаемое как $S(G)$ или $L(G)$), снабженное бинарным предикатом $\subseteq$. Группа $G$ называется *определяемой решеткой своих подгрупп*, если для любой группы $\bar{G}$ изоморфизм структур $P(G)$ и $P(\bar{G})$ (которые являются решетками) влечет изоморфизм групп $G$ и $\bar{G}$. Более того, $G$ *сильно определяется решеткой своих подгрупп*, если любой изоморфизм $P(G) \to P(\bar{G})$ индуцируется некоторым изоморфизмом групп $G \to \bar{G}$ (и потому $G$ удовлетворяет групповой версии ОТПГ). Мы упоминаем здесь следующие классы групп, которые сильно определяются своими решетками подгрупп: абелевы группы, содержащие два независимых элемента бесконечного порядка, см. Бэр [19]; свободные группы ранга $\geq 2$, см. Садовский [20]; неабелевы нильпотентные группы без кручения, см. Садовский [22]; метабелевы группы, содержащие два независимых элемента бесконечного порядка, никакие нетривиальные степеней которых не коммутируют, см. Пекелис [27].

Мы предполагаем, что за всеми этими результатами по основным теоремам для различных алгебраических структур $G$ стоит некоторая интерпретация или биинтерпретация $G$ (или некоторого кольца $K$, связанного с $G$) с проективным пространством $P(G)$. В связи с этим мы предлагаем следующую программу исследований.

МЕТАПРОБЛЕМА. Для каждой алгебраической структуры $G$, для которой справедлива фундаментальная теорема проективной (или аффинной) геометрии, доказать, что либо $G$ регулярно интерпретируема в $P(G)$, либо $P(G)$ и некоторое кольцо $K$, которое естественным образом связано с $G$, являются биинтерпретируемыми (или, по крайней мере, взаимно интерпретируемыми) друг в друге.

## 1 ИНТЕРПРЕТИРУЕМОСТЬ

В этом разделе мы обсуждаем различные типы интерпретируемости структур; некоторые из них хорошо известны, другие являются новыми. Каж-

дая из них служит различным целям. В основном мы сосредоточены на регулярной интерпретируемости, которая хорошо подходит для приложений теории моделей.

Пусть $L$ — язык (сигнатура) с набором функциональных (операционных) символов $\{f, \ldots\}$ вместе с их арностями $n_f \in \mathbb{N}$, набором символов отношений (или предикатов) $\{R, \ldots\}$ вместе с их арностями $n_R \in \mathbb{N}$ и набором константных символов $\{c, \ldots\}$. Мы записываем $f(x_1, \ldots, x_n)$ или $R(x_1, \ldots, x_n)$, чтобы показать, что $n_f = n$ или $n_R = n$. Здесь мы рассматриваем два языка: стандартный язык колец $L_{rings} = \{+, \cdot\}$ и язык проективных пространств $L_{\subseteq} = \{\subseteq\}$, где $\subseteq$ — бинарный предикат. Мы следуем книге [28] в наших обозначениях языков, формул и моделей.

Алгебраическая структура в языке $L$ ($L$-структура) с базовым множеством $A$ обозначается как $\mathbb{A} = \langle A; L\rangle$, или как $\mathbb{A} = \langle A; f, \ldots, R, \ldots, c, \ldots\rangle$, или как $\mathbb{A} = \langle A; f^A, \ldots, R^A, \ldots, c^A, \ldots\rangle$, где $f^A, P^A, c^A$ — функции, предикаты и константы, интерпретирующие соответствующие символы $f, P, c$ в $\mathbb{A}$. Для заданной структуры $\mathbb{A}$ через $L(\mathbb{A})$ мы обозначаем язык структуры $\mathbb{A}$.

**1.1. Определимые множества.** Пусть $\mathbb{B} = \langle B; L(\mathbb{B})\rangle$ — алгебраическая структура. Подмножество $X \subseteq B^n$ называется 0-*определимым* (или *абсолютно определимым*, или *определимым без параметров*) в $\mathbb{B}$, если существует формула первого порядка $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ в языке $L(\mathbb{B})$, такая что $X$ — множество истинности $\phi$:

$$\phi(\mathbb{B}) = \{(b_1, \ldots, b_n) \in B^n \mid \mathbb{B} \models \phi(b_1, \ldots, b_n)\}.$$

Если $\psi(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k)$ — формула в $L(\mathbb{B})$ и $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_k)$ — кортеж элементов из $B$, то множество

$$\psi(\mathbb{B}, \bar{p}) = \{(b_1, \ldots, b_n) \in B^n \mid \mathbb{B} \models \psi(b_1, \ldots, b_n, p_1, \ldots, p_k)\}$$

называется *определимым* в $\mathbb{B}$ (*с параметрами* $\bar{p}$).

Эквивалентно, $X \subseteq B^n$ определимо в $\mathbb{B}$ тогда и только тогда, когда

существуют конечный набор параметров $P \subseteq B$ и формула $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ в языке $L(\mathbb{B}) \cup P$, такие что $X = \psi(\mathbb{B}_P)$. Здесь алгебраическая структура $\mathbb{B}_P = \langle B; L(\mathbb{B}) \cup P \rangle$ получается из $\mathbb{B}$ добавлением новых константных символов из $P$ в язык.

Пусть $X \subseteq B^n$, $Y \subseteq B^m$ — множества, а $\sim_X$, $\sim_Y$ — отношения эквивалентности на $X$, $Y$ соответственно. Отображение $g\colon X/\!\sim_X \to Y/\!\sim_Y$ называется *определимым* в $\mathbb{B}$, если следующее множество (называемое *графом* $g$)

$$\{(b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m) \in B^{n+m} \mid g((b_1, \ldots, b_n)/\!\sim_X) = (c_1, \ldots, c_m)/\!\sim_Y, \\ (b_1, \ldots, b_n) \in X,\ (c_1, \ldots, c_m) \in Y\}$$

определимо в $\mathbb{B}$. Заметим, что здесь $g$ может быть также функцией арности 0 (напр., точкой или константой). Если $Q$ — отношение на множестве $X \subseteq B^n$ (не обязательно $Q$ из $L(\mathbb{B})$), то его *график* — это само множество $Q \subseteq B^n$.

### 1.2. Интерпретации.

**Определение 1.1.** Алгебраическая структура

$$\mathbb{A} = \langle A; f, \ldots, R, \ldots, c, \ldots \rangle$$

является 0-*интерпретируемой* (или *абсолютно интерпретируемой*, или *интерпретируемой без параметров*) в алгебраической структуре

$$\mathbb{B} = \langle B; L(\mathbb{B}) \rangle,$$

если выполняются следующие условия:

(1) существует подмножество $A^* \subseteq B^n$, 0-определимое в $\mathbb{B}$,

(2) существует отношение эквивалентности $\sim$ на $A^*$, 0-определимое в $\mathbb{B}$,

(3) существуют интерпретации $f^A, \ldots, R^A, \ldots, c^A, \ldots$ символов $f, \ldots, R, \ldots, c, \ldots$ на фактор-множестве $A^*/\!\sim$, все 0-определимые в $\mathbb{B}$,

(4) структура $\mathbb{A}^* = \langle A^*/{\sim}; f^A, \ldots, R^A, \ldots, c^A, \ldots\rangle$ $L(\mathbb{A})$-изоморфна $\mathbb{A}$.

Более общий случай — интерпретация с параметрами.

**Определение 1.2.** Алгебраическая структура $\mathbb{A} = \langle A; L(\mathbb{A})\rangle$ является *интерпретируемой* (с параметрами) в алгебраической структуре $\mathbb{B} = \langle B; L(\mathbb{B})\rangle$, если существует конечное подмножество параметров $P \subseteq B$, такое что $\mathbb{A}$ абсолютно интерпретируема в $\mathbb{B}_P$.

Структура $\mathbb{A}^*$ из определения 1.1 полностью описывается набором всех формул на языке $L(\mathbb{B})$, используемых для определения множеств в (1)–(3) выше, мы обозначаем ее как

$$\Gamma = \{U_\Gamma(\bar{x}, \bar{y}), E_\Gamma(\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}), Q_\Gamma(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{t_Q}, \bar{y}) \mid Q \in L(\mathbb{A})\}, \qquad (1.1)$$

где $\bar{x}$, $\bar{x}'$ и $\bar{x}_i$ — это $n$-кортежи переменных, а $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ — кортеж дополнительных переменных для параметров, и кортежем $\bar{p}$ всех параметров, используемых в этих формулах. А именно, формула $U_\Gamma$ определяет в $\mathbb{B}$ множество $A_\Gamma = U_\Gamma(B^n, \bar{p}) \subseteq B^n$ (множество $A^*$ в определении 1.1), $E_\Gamma$ определяет отношение эквивалентности $\sim_\Gamma$ на $A_\Gamma$ (отношение эквивалентности $\sim$ в определении 1.1), а формулы $Q_\Gamma$ определяют прообразы графиков для констант, функций и предикатов $Q \in L(\mathbb{A})$ на фактор-множестве $A_\Gamma/{\sim_\Gamma}$ так, что структура $\Gamma(\mathbb{B}, \bar{p}) = \langle A_\Gamma/{\sim_\Gamma}; L(\mathbb{A})\rangle$ изоморфна $\mathbb{A}$. Заметим, что мы интерпретируем константу $c \in L(\mathbb{A})$ в структуре $\Gamma(\mathbb{B}, \bar{p})$ классом $\sim_\Gamma$-эквивалентности некоторого кортежа $\bar{b}_c \in A_\Gamma$, определенного в $\mathbb{B}$ формулой $c_\Gamma(\bar{x}, \bar{p})$.

Мы называем $\Gamma$ *кодом интерпретации* или просто *кодом* интерпретации $\mathbb{A} \rightsquigarrow \mathbb{B}$. Иногда мы идентифицируем интерпретацию $\mathbb{A} \rightsquigarrow \mathbb{B}$ с ее кодом $\Gamma$ или $(\Gamma, \bar{p})$ (если интерпретация имеет параметры $\bar{p}$), мы также можем использовать запись $\mathbb{A} \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$ или $\mathbb{A} \simeq \Gamma(\mathbb{B}, \bar{p})$. Если интерпретация абсолютна, то мы просто пишем $\mathbb{A} \simeq \Gamma(\mathbb{B})$ или $\mathbb{A} \simeq \Gamma(\mathbb{B}, \varnothing)$. Число $n$ называется *размерностью* $\Gamma$, обозначаемой $n = \dim \Gamma$. Мы называем $k$ *параметрической размерностью* $\Gamma$ и обозначаем как $\dim_{par} \Gamma$.

Через $\mu_\Gamma$ мы обозначаем сюръективное отображение $A_\Gamma \to A$, которое порождает изоморфизм $\bar{\mu}_\Gamma \colon \Gamma(\mathbb{B}, \bar{p}) \to \mathbb{A}$, и называем его *координатным*

*отображением* интерпретации $(\Gamma, \bar{p})$. Заметим, что такое $\mu_\Gamma$ может быть не единственным, поскольку $\bar{\mu}_\Gamma$ определено с точностью до автоморфизма $\mathbb{A}$. По этой причине координатное отображение $\mu_\Gamma$ иногда добавляется к обозначению интерпретации: $(\Gamma, \bar{p}, \mu_\Gamma)$. Координатное отображение $\mu_\Gamma \colon A_\Gamma \to A$ порождает отображение $\mu_\Gamma^m \colon A_\Gamma^m \to A^m$ на соответствующих декартовых степенях, которые мы часто обозначаем просто как $\mu_\Gamma$.

Когда формула $E_\Gamma$ определяет тождественное отношение $(x_1 = x_1') \wedge \ldots \wedge (x_n = x_n')$, сюръекция $\mu_\Gamma$ является инъективной. В этом случае $(\Gamma, \bar{p}, \mu_\Gamma)$ называется *инъективной интерпретацией*.

**Определение 1.3.** Мы говорим, что алгебраическая структура $\mathbb{A}$ *регулярно интерпретируема* в алгебраической структуре $\mathbb{B}$, если существуют код $\Gamma$ (1.1) и $L(\mathbb{B})$-формула $\phi(y_1, \ldots, y_k)$, такие что $\phi(\mathbb{B}) \neq \varnothing$ и для каждого $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_k) \in \phi(\mathbb{B})$ $\Gamma(\mathbb{B}, \bar{p})$ является интерпретацией $\mathbb{A} \simeq \Gamma(\mathbb{B}, \bar{p})$ алгебраической структуры $\mathbb{A}$ в алгебраической структуре $\mathbb{B}$.

Мы обозначаем через $(\Gamma, \phi)$ регулярную интерпретацию с кодом $\Gamma$ и формулой $\phi$ для параметров. Если для всех $\bar{p} \in \phi(\mathbb{B})$ интерпретация $(\Gamma, \bar{p})$ инъективна, то регулярная интерпретация $(\Gamma, \phi)$ называется *инъективной*. Мы пишем $\mathbb{A} \simeq \Gamma(\mathbb{B}, \phi)$, если $\mathbb{A}$ регулярно интерпретируется в $\mathbb{B}$ с помощью кода $\Gamma$ и формулы $\phi$.

Заметим, что каждая абсолютная интерпретация $\Gamma$ является частным случаем регулярной интерпретации. Действительно, можно добавить некоторую фиктивную переменную $y$ во все формулы кода $\Gamma$ и положить $\phi(y) = (y = y)$.

Пусть $\Gamma$ будет кодом, описанным в (1.1). *Условия допустимости* $\mathscr{AC}_\Gamma(\bar{y})$, см. [29], для кода $\Gamma$ представляют собой набор формул на языке $L(\mathbb{B})$ со свободными переменными $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_k)$, где $k = \dim_{par} \Gamma$, такими что для произвольной $L(\mathbb{B})$-структуры $\widetilde{\mathbb{B}}$ и произвольного кортежа $\bar{q}$ из $\widetilde{\mathbb{B}}$ конструкция $\Gamma(\widetilde{\mathbb{B}}, \bar{q})$, описанная в определении (1.1), действительно задает $L(\mathbb{A})$-структуру тогда и только тогда, когда $\widetilde{\mathbb{B}} \models \mathscr{AC}_\Gamma(\bar{q})$. Заметим, что условия допустимости $\mathscr{AC}_\Gamma(\bar{q})$ утверждают, что $L(\mathbb{A})$-структура $\Gamma(\widetilde{\mathbb{B}}, \bar{q})$ корректно определена, но они не утверждают, что $\mathbb{A} \simeq \Gamma(\widetilde{\mathbb{B}}, \bar{q})$.

**1.3. Композиция интерпретаций.** Известно, что отношение $\mathbb{A} \rightsquigarrow \mathbb{B}$ транзитивно на алгебраических структурах, см., напр., [29, 30]. Доказательство этого факта основано на понятии $\Gamma$-трансляции и композиции кодов, которые мы сейчас кратко изложим.

Пусть

$$\Gamma = \{U_\Gamma(\bar{x}, \bar{y}), E_\Gamma(\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}), Q_\Gamma(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{t_Q}, \bar{y}) \mid Q \in L(\mathbb{A})\} -$$

код, как выше, состоящий из $L(\mathbb{B})$-формул. Тогда для любой формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ в языке $L(\mathbb{A})$ существует формула $\varphi_\Gamma(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y})$ в языке $L(\mathbb{B})$, такая что если $\mathbb{A} \simeq \Gamma(\mathbb{B}, \bar{p})$, то для любого координатного отображения $\mu_\Gamma \colon A_\Gamma \to A$ имеем

$$\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_m) \iff \mathbb{B} \models \varphi_\Gamma(\mu_\Gamma^{-1}(a_1), \ldots, \mu_\Gamma^{-1}(a_m), \bar{p})$$

для любых элементов $a_i \in A$, см. [29]. Здесь $\mu_\Gamma^{-1}(a_i)$ означает произвольный прообраз $a_i$ при $\mu_\Gamma$. Более того, для любых элементов $\bar{b}_i \in B^n$ если $\mathbb{B} \models \varphi_\Gamma(\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_m, \bar{p})$ то $\bar{b}_i \in \mu_\Gamma^{-1}(a_i)$ для некоторого $a_i \in A$ с условием $\mathbb{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_m)$.

Заметим, что если язык $L(\mathbb{A})$ вычислим, то существует алгоритм, который по формуле $\varphi$ вычисляет $\varphi_\Gamma$.

**Определение 1.4.** Пусть $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ — алгебраические структуры. Рассмотрим коды

$$\Gamma = \{U_\Gamma(\bar{x}, \bar{y}), E_\Gamma(\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}), Q_\Gamma(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{t_Q}, \bar{y}) \mid Q \in L(\mathbb{A})\},$$

как выше, и

$$\Delta = \{U_\Delta(\bar{u}, \bar{z}), E_\Delta(\bar{u}, \bar{u}', \bar{z}), Q_\Delta(\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_{t_Q}, \bar{z}) \mid Q \in L(\mathbb{B})\},$$

которые состоят из $L(\mathbb{C})$-формул, где $|\bar{u}| = |\bar{u}'| = |\bar{u}_i| = \dim \Delta$, $|\bar{z}| =$

$\dim_{par} \Delta$. Тогда *композиция* кодов $\Gamma$ и $\Delta$ — это код

$$\Gamma \circ \Delta = \{U_{\Gamma\circ\Delta}, E_{\Gamma\circ\Delta}, Q_{\Gamma\circ\Delta} \mid Q \in L(\mathbb{A})\} = \{(U_\Gamma)_\Delta, (E_\Gamma)_\Delta, (Q_\Gamma)_\Delta \mid Q \in L(\mathbb{A})\},$$

где $\dim \Gamma \circ \Delta = \dim \Gamma \cdot \dim \Delta$ и $\dim_{par} \Gamma \circ \Delta = \dim_{par} \Gamma \cdot \dim \Delta + \dim_{par} \Delta$.

Ниже приведен важный технический результат о транзитивности интерпретаций.

**ЛЕММА 1.1** [29]**.** Пусть $\mathbb{A} = \langle A; L(\mathbb{A})\rangle, \mathbb{B} = \langle B; L(\mathbb{B})\rangle$ и $\mathbb{C} = \langle C; L(\mathbb{C})\rangle$ — алгебраические структуры, а $\Gamma, \Delta$ — коды, как выше. Если $\mathbb{A} \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$ и $\mathbb{B} \overset{\Delta}{\rightsquigarrow} \mathbb{C}$, то $\mathbb{A} \overset{\Gamma\circ\Delta}{\rightsquigarrow} \mathbb{C}$.

Кроме того, справедливы следующие утверждения:

(1) если $\bar{p}, \bar{q}$ — параметры, а $\mu_\Gamma, \mu_\Delta$ — координатные отображения интерпретаций $\Gamma, \Delta$, то $(\bar{\bar{p}}, \bar{q})$, где $\bar{\bar{p}} \in \mu_\Delta^{-1}(\bar{p})$, являются параметрами для $\Gamma \circ \Delta$;

(2) для любого координатного отображения $\mu_\Delta$ интерпретации $\mathbb{B} \simeq \Delta(\mathbb{C}, \bar{q})$ и любого кортежа $\bar{\bar{p}} \in \mu_\Delta^{-1}(\bar{p})$ $L(\mathbb{A})$-структура $\Gamma \circ \Delta(\mathbb{C}, (\bar{\bar{p}}, \bar{q}))$ корректно определена и изоморфна $\mathbb{A}$;

(3) $L(\mathbb{A})$-структура $\Gamma \circ \Delta(\mathbb{C}, (\bar{\bar{p}}, \bar{q}))$ не зависит от выбора $\bar{\bar{p}} \in \mu_\Delta^{-1}(\bar{p})$, когда $\mu_\Delta$ фиксирована;

(4) $\mu_\Gamma \circ \mu_\Delta = \mu_\Gamma \circ \mu_\Delta^n\big|_{U_{\Gamma\circ\Delta}(\mathbb{C}, (\bar{\bar{p}}, \bar{q}))}$ — координатное отображение интерпретации $\mathbb{A} \simeq \Gamma \circ \Delta(\mathbb{C}, (\bar{\bar{p}}, \bar{q}))$, и любое координатное отображение

$$\mu_{\Gamma\circ\Delta} \colon U_{\Gamma\circ\Delta}(\mathbb{C}, (\bar{\bar{p}}, \bar{q})) \to A$$

имеет вид $\mu_{\Gamma 1} \circ \mu_\Delta$ для подходящего координатного отображения $\mu_{\Gamma,1}$ интерпретации $\mathbb{A} \simeq \Gamma(\mathbb{B}, \bar{p})$ при фиксированном $\mu_\Delta$;

(5) если $\Gamma, \Delta$ абсолютны, то $\Gamma \circ \Delta$ тоже абсолютна;

(6) если $\Gamma, \Delta$ инъективны, то $\Gamma \circ \Delta$ тоже инъективна;

(7) если $\Gamma, \Delta$ регулярны с соответствующими формулами $\varphi, \psi$, то $\Gamma \circ \Delta$ тоже регулярна с формулой $\varphi_\Delta \wedge \psi$.

**Замечание 1.1.** По построению структура $\Gamma \circ \Delta(\mathbb{C}, (\bar{\bar{p}}, \bar{q}))$ зависит от выбора $\mu_\Delta$, т. е. множество $U_{\Gamma\circ\Delta}(\mathbb{C}, (\bar{\bar{p}}, \bar{q})) \subseteq C^{\dim \Gamma\circ\Delta}$, отношение $\sim_{\Gamma\circ\Delta}$,

константы $c_{\Gamma\circ\Delta}$, функции $f_{\Gamma\circ\Delta}$ и предикаты $R_{\Gamma\circ\Delta}$ в общем случае зависят от $\mu_\Delta$. С другой стороны, структура $\Gamma\circ\Delta(\mathbb{C},(\bar{\bar{p}},\bar{q}))$ не зависит от выбора $\mu_\Gamma$.

**Замечание 1.2.** Пусть $(\Gamma,\phi),(\Delta,\psi)$ — регулярные интерпретации, как в лемме 1.1(7). Для любых кортежей параметров $\bar{p}\in\varphi(\mathbb{B})$, $\bar{q}\in\psi(\mathbb{C})$ и координатного отображения $\mu_\Delta$ интерпретации $\mathbb{B}\simeq\Delta(\mathbb{C},\bar{q})$ и произвольных прообразов $\bar{\bar{p}}\in\mu_\Delta^{-1}(\bar{p})$ кортеж $(\bar{\bar{p}},\bar{q})$ находится в $\varphi_\Delta\wedge\psi(\mathbb{C})$. Также $L(\mathbb{A})$-структура $\Gamma\circ\Delta(\mathbb{C},(\bar{\bar{p}},\bar{q}))$ корректно определена и изоморфна $\mathbb{A}$, по лемме 1.1(2). Наоборот, любой кортеж $\bar{r}\in\varphi_\Delta\wedge\psi(\mathbb{C})$ имеет вид $\bar{r}=(\bar{\bar{p}},\bar{q})$, где $\bar{q}\in\psi(\mathbb{C})$, $\bar{\bar{p}}\in\varphi_\Delta(\mathbb{C},\bar{q})$. Для любого координатного отображения $\mu_\Delta$ интерпретации $\mathbb{B}\simeq\Delta(\mathbb{C},\bar{q})$ кортеж $\bar{p}=\mu_\Delta(\bar{\bar{p}})$ находится в $\varphi(\mathbb{B})$. Итак, $L(\mathbb{A})$-структура $\Gamma\circ\Delta(\mathbb{C},\bar{r})=\Gamma\circ\Delta(\mathbb{C},(\bar{\bar{p}},\bar{q}))$ корректно определена и изоморфна $\mathbb{A}$, опять же благодаря п. 1.1(2).

**1.4. Биинтерпретации.** В этом разделе мы обсуждаем очень сильную версию взаимной интерпретируемости двух структур, так называемую *биинтерпретацию*. Следующее определение использует обозначения из леммы 1.1.

**Определение 1.5.** Алгебраические структуры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ называются *сильно биинтерпретируемыми* (с параметрами) друг в друге, если

(1) существуют интерпретация $(\Gamma,\bar{p},\mu_\Gamma)$ $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$ и интерпретация $(\Delta,\bar{q},\mu_\Delta)$ $\mathbb{B}$ в $\mathbb{A}$, поэтому алгебраические структуры $\Gamma\circ\Delta(\mathbb{A},(\bar{\bar{p}},\bar{q}))$ и $\Delta\circ\Gamma(\mathbb{B},(\bar{\bar{q}},\bar{p}))$ определены однозначно и $\Gamma\circ\Delta(\mathbb{A},(\bar{\bar{p}},\bar{q}))$ изоморфна $\mathbb{A}$, а $\Delta\circ\Gamma(\mathbb{B},(\bar{\bar{q}},\bar{p}))$ изоморфна $\mathbb{B}$;

(2) композиция $\mu_\Gamma\circ\mu_\Delta\colon U_{\Gamma\circ\Delta}(\mathbb{A},(\bar{\bar{p}},\bar{q}))\to A$ определима в $\mathbb{A}$ и композиция $\mu_\Delta\circ\mu_\Gamma\colon U_{\Delta\circ\Gamma}(\mathbb{B},(\bar{\bar{q}},\bar{p}))\to B$ определима в $\mathbb{B}$.

Заметим, что существует еще одно немного отличающееся понятие *биинтерпретации*, которое мы иногда называем *слабой биинтерпретацией* для контраста, где в приведенном выше определении условие определимости отображений $\mu_\Gamma\circ\mu_\Delta$ и $\mu_\Delta\circ\mu_\Gamma$ заменено на более слабое, которое требует определимости некоторых координатных отображений $A_{\Gamma\circ\Delta}\to A$ и $B_{\Delta\circ\Gamma}\to B$.

Часто авторы даже не упоминают разницу, неявно предполагая либо одно, либо другое. Для избежания двусмысленности мы различаем явно два этих понятия. Заметим, что биинтерпретация, определенная в [30, 31], является слабой, но в статье [32] она является сильной. Существует много интересных приложений сильных биинтерпретаций, которые мы не можем вывести из слабых. Однако важно отметить, что сейчас у нас нет примеров слабых интерпретаций алгебраических структур, которые не являются сильными.

**Определение 1.6.** Алгебраические структуры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ называются *регулярно биинтерпретируемыми*, если

(1) существуют регулярная интерпретация $(\Gamma, \varphi)$ $\mathbb{A}$ в $\mathbb{B}$ и регулярная интерпретация $(\Delta, \psi)$ $\mathbb{B}$ в $\mathbb{A}$;

(2) существует формула $\theta_{\mathbb{A}}(\bar{u}, x, \bar{r})$ в $L(\mathbb{A})$, где $|\bar{u}| = \dim\Gamma \cdot \dim\Delta$, $|\bar{r}| = \dim_{par}\Gamma\circ\Delta$, такая что для любого кортежа $\bar{r}_0 \in \varphi_\Delta \wedge \psi(\mathbb{A})$ формула $\theta_{\mathbb{A}}(\bar{u}, x, \bar{r}_0)$ определяет некоторое координатное отображение $U_{\Gamma\circ\Delta}(\mathbb{A}, \bar{r}_0) \to A$;

(3) существует формула $\theta_{\mathbb{B}}(\bar{u}, x, \bar{t})$ в $L(\mathbb{B})$, где $|\bar{u}| = \dim\Gamma \cdot \dim\Delta$, $|\bar{t}| = \dim_{par}\Delta\circ\Gamma$, такая, что для любого кортежа $\bar{t}_0 \in \psi_\Gamma \wedge \varphi(\mathbb{B})$ формула $\theta_{\mathbb{B}}(\bar{u}, x, \bar{t}_0)$ определяет некоторое координатное отображение $U_{\Delta\circ\Gamma}(\mathbb{B}, \bar{t}_0) \to B$.

Регулярная биинтерпретация называется *инъективной*, если оба $(\Gamma, \phi)$ и $(\Delta, \psi)$ инъективны.

**Определение 1.7.** Мы говорим, что $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ *строго регулярно биинтерпретируемы*, если они регулярно биинтерпретируемы, т. е. (1)–(3) выполняются, и дополнительно

(4) для любой пары параметров $(\bar{p}, \bar{q})$, $\bar{p} \in \varphi(\mathbb{B})$, $\bar{q} \in \psi(\mathbb{A})$, существует пара координатных отображений $(\mu_\Gamma, \mu_\Delta)$ для интерпретаций $(\Gamma, \bar{p})$ и $(\Delta, \bar{q})$, такая, что для любых $\bar{r}_0 = (\bar{\bar{p}}, \bar{q})$, $\bar{\bar{p}} \in \mu_\Delta^{-1}(\bar{p})$ и $\bar{t}_0 = (\bar{\bar{q}}, \bar{p})$, $\bar{\bar{q}} \in \mu_\Gamma^{-1}(\bar{q})$, координатные отображения

$$\mu_\Gamma \circ \mu_\Delta \colon U_{\Gamma\circ\Delta}(\mathbb{A}, \bar{r}_0) \to A,$$
$$\mu_\Delta \circ \mu_\Gamma \colon U_{\Delta\circ\Gamma}(\mathbb{B}, \bar{t}_0) \to B$$

определяются в $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ соответственно формулами $\theta_{\mathbb{A}}(\bar{u}, x, \bar{r}_0)$ и $\theta_{\mathbb{B}}(\bar{u}, x, \bar{t}_0)$.

**Замечание 1.3.** Заметим, что п. (4) в определении 1.7 не влечет пп. (2), (3) в определении 1.6. Утверждение в п. (2) должно быть истинным для всех кортежей параметров из множества $X = \varphi_\Delta \wedge \psi(\mathbb{A})$. В силу замечания 1.2

$$X = \{(\bar{\bar{p}}, \bar{q}) \mid \bar{q} \in \psi(\mathbb{A}),\ \bar{p} \in \varphi(\mathbb{B}),\ \bar{\bar{p}} \in \mu_\Delta^{-1}(\bar{p})\},$$

где $\mu_\Delta$ пробегает множество всех координатных отображений интерпретации $\mathbb{B} \simeq \Delta(\mathbb{A}, \bar{q})$. Обозначим через $\mu_\Delta^{\bar{p},\bar{q}}$ координатное отображение интерпретации $\mathbb{B} \simeq \Delta(\mathbb{A}, \bar{q})$ из п. (4), которая соответствует паре параметров $(\bar{p}, \bar{q})$. Таким образом, утверждение в п. (4) должно быть истинным для всех кортежей параметров из множества

$$Y = \{(\bar{\bar{p}}, \bar{q}) \mid \bar{q} \in \psi(\mathbb{A}),\ \bar{p} \in \varphi(\mathbb{B}),\ \bar{\bar{p}} \in (\mu_\Delta^{\bar{p},\bar{q}})^{-1}(\bar{p})\}.$$

Таким образом, $Y \subseteq X$, но не исключено, что $Y \neq X$.

Если алгебраические структуры $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ строго регулярно биинтерпретируемы, то мы можем использовать все выводы как из регулярной биинтерпретируемости, так и из сильной биинтерпретации с параметрами.

**Определение 1.8.** Мы говорим, что $\mathbb{B}$ (*строго*) *полуабсолютно биинтерпретируется* в $\mathbb{A}$, если существует (строго) регулярная биинтерпретация

$$\mathbb{A} \underset{\Delta}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} \mathbb{B},$$

где $\Delta$ абсолютна.

**1.5. Приложения интерпретируемости.** Варианты интерпретируемости, описанные выше, позволяют получать разные следствия [29, 31].

Напомним, что теория первого порядка $\mathtt{Th}(\mathbb{A})$ структуры $\mathbb{A}$ в языке $L(\mathbb{A})$ разрешима, если существует алгоритм, который для заданного предложения $\psi$ языка $L(\mathbb{A})$ решает, является ли $\phi$ истинным в $L(\mathbb{A})$.

**ТЕОРЕМА 1.1** [29, 31]**.** Предположим, что алгебраическая структура $\mathbb{A}$ регулярно интерпретируема в алгебраической структуре $\mathbb{B}$. Если теория

первого порядка $\mathtt{Th}(\mathbb{B})$ разрешима, то $\mathtt{Th}(\mathbb{A})$ также разрешима. Соответственно, если $\mathtt{Th}(\mathbb{A})$ неразрешима, то $\mathtt{Th}(\mathbb{B})$ также неразрешима.

Регулярная биинтерпретируемость между $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ позволяет нам описывать модели элементарной теории $\mathtt{Th}(\mathbb{B})$ с помощью моделей элементарной теории $\mathtt{Th}(\mathbb{A})$.

**ТЕОРЕМА 1.2** [29]**.** Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ регулярно биинтерпретируемы друг в друге, и потому $\mathbb{A} \simeq \Gamma(\mathbb{B}, \phi)$ и $\mathbb{B} \simeq \Delta(\mathbb{A}, \psi)$.

(1) Для любой $L(\mathbb{B})$-структуры $\widetilde{\mathbb{B}} \equiv \mathbb{B}$ пара $(\Gamma, \phi)$ определяет в $\widetilde{\mathbb{B}}$ $L(\mathbb{A})$-структуру $\widetilde{\mathbb{A}} \simeq \Gamma(\widetilde{\mathbb{B}}, \phi)$, которая элементарно эквивалентна $\mathbb{A}$ ($\widetilde{\mathbb{A}} \equiv \mathbb{A}$); более того, $\widetilde{\mathbb{B}} \simeq \Delta(\widetilde{\mathbb{A}}, \psi)$.

(2) Для любой $L(\mathbb{A})$-структуры $\widetilde{\mathbb{A}} \equiv \mathbb{A}$ существует $L(\mathbb{B})$-структура $\widetilde{\mathbb{B}} \equiv \mathbb{B}$, такая что $\widetilde{\mathbb{A}} \simeq \Gamma(\widetilde{\mathbb{B}}, \phi)$, а именно, $\widetilde{\mathbb{B}} \simeq \Delta(\widetilde{\mathbb{A}}, \psi)$.

Напомним следующее определение.

**Определение 1.9** [31]**.** Алгебраическая структура $\mathbb{A}$ в языке $L(\mathbb{A})$ называется *абсолютно богатой*, если каждая формула $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ слабой логики второго порядка в $L(\mathbb{A})$ эквивалентна над $\mathbb{A}$ некоторой формуле языка первого порядка $\phi^*(x_1, \ldots, x_n)$ в $L(\mathbb{A})$.

**ТЕОРЕМА 1.3** [31, лемма 4.15]**.** Пусть структура $\mathbb{B}$ полуабсолютно биинтерпретируема в структуре $\mathbb{A}$. Если $\mathbb{A}$ абсолютно богата, то $\mathbb{B}$ также абсолютно богата.

Напомним следующее определение.

**Определение 1.10** [29]**.** Алгебраическая структура $\mathbb{B} = \langle B; L(\mathbb{B})\rangle$ допускает *равномерную элиминацию мнимостей* (*с параметрами*), если для произвольного натурального числа $n$ и любого определимого (с параметрами) отношения эквивалентности $\sim$ на $B^n$ существует формула $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ языка $L(\mathbb{B})$ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ и некоторыми параметрами, такая что для любого $\bar{b} \in B^n$ существует единственный $\bar{c} \in B^m$ с условием

$$\bar{b} \sim \bar{b}' \iff \mathbb{B} \models \psi(\bar{b}', \bar{c}), \quad \bar{b}' \in B^n,$$

т. е. $\psi(B^n, \bar{c})$ является классом эквивалентности элемента $\bar{b}$.

**ТЕОРЕМА 1.4** [29]**.** Пусть $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ строго инъективно биинтерпретируемы с параметрами. Структура $\mathbb{A}$ допускает равномерную элиминацию мнимостей с параметрами тогда и только тогда, когда структура $\mathbb{B}$ допускает равномерную элиминацию мнимостей с параметрами.

## 2 БИИНТЕРПРЕТИРУЕМОСТЬ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА И ПОЛЯ

Пусть $\mathscr{V}$ будет классом всех конечномерных векторных пространств над полями. Для $n \in \mathbb{N}$ через $\mathscr{V}_n$ мы обозначаем подкласс $\mathscr{V}$, состоящий из всех векторных пространств $V$ размерности $n$. Если $V \in \mathscr{V}_n$, то $V$ является векторным пространством размерности $n$ над некоторым полем, которое, если не указано иное, мы обозначаем через $F$. Как мы упоминали во введении, проективное пространство векторного пространства $V$ — множество $P(V)$ всех линейных подпространств $V$, снабженное бинарным отношением $\subseteq$, включением, т. е. является алгебраической структурой $\langle P(V); \subseteq \rangle$.

В этом разделе мы, во-первых, изучаем свойства проективных пространств $P(V)$, которые определяются формулами языка $L_{\subseteq} = \{\subseteq\}$. Во-вторых, для каждого $n \in \mathbb{N}$ строим регулярную инъективную интерпретацию $(\Gamma, \phi_{\text{par}})$ формулами языка $L_{\subseteq}$, которая для каждого $V \in \mathscr{V}_n$ регулярно интерпретирует поле $F$ в $P(V)$, так что $F \simeq \Gamma(P(V), \phi_{\text{par}})$. В-третьих, для каждого $n \in \mathbb{N}$ описываем абсолютную интерпретацию $\Delta$ на языке теории полей, которая для каждого $V \in \mathscr{V}_n$ инъективно интерпретирует $P(V)$ в $F$. Наконец, показываем, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ интерпретации $(\Gamma, \phi_{\text{par}})$ и $\Delta$ дают регулярную инъективную сильную биинтерпретацию $P(V)$ и $F$.

Всюду далее для подмножества $A \subseteq V$ мы обозначаем через $\langle A \rangle$ подпространство $V$, натянутое на $A$.

**2.1. Свойства проективных пространств, определяемых формулами.** Множество $P(V)$ можно также рассматривать как решетку с операциями $\cap$ (как *meet*) и $+$ (как *join*). Здесь для $U_1, U_2 \in P(V)$ $U_1 + U_2 =$

$\{v_1 + v_2 \mid v_1 \in U_1, v_2 \in U_2\}$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1.** Следующие утверждения верны:

(1) операции $\cap$ и $+$, а также константы $\{0\}$ и $V$, являются 0-определимыми в $\langle P(V); \subseteq\rangle$;

(2) бинарный предикат $\subseteq$ является 0-определимым как в $\langle P(V); \cap\rangle$, так и в $\langle P(V); +\rangle$;

(3) структуры $\langle P(V); \subseteq\rangle$, $\langle P(V); \cap, +\rangle$ и $\langle P(V); \cap, +, \{0\}, V\rangle$ абсолютно сильно инъективно биинтерпретируемы друг в друге.

Более того, все формулы, которые встречаются в (1)–(3) выше, не зависят от поля $F$ или размерности $\dim_F V$.

**Доказательство.** (1) Формула

$$\phi_\cap(z_1, z_2, y) = y \subseteq z_1 \wedge y \subseteq z_2 \wedge \forall w((w \subseteq z_1 \wedge w \subseteq z_2) \longrightarrow w \subseteq y)$$

определяет в $\langle P(V); \subseteq\rangle$ график операции $\cap$, а формула

$$\phi_+(z_1, z_2, y) = z_1 \subseteq y \wedge z_2 \subseteq y \wedge \forall w((z_1 \subseteq w \wedge z_2 \subseteq w) \longrightarrow y \subseteq w)$$

определяет в $\langle P(V); \subseteq\rangle$ операцию $+$. Элементы $\{0\}$ и $V$ также 0-определимы в $\langle P(V); \subseteq\rangle$ как наименьший и наибольший элементы относительно частичного порядка $\subseteq$.

(2) Формула

$$\phi_\subseteq(z_1, z_2) = (z_1 \cap z_2 = z_1)$$

определяет $\subseteq$ в $\langle P(V); \cap\rangle$, а формула

$$\psi_\subseteq(z_1, z_2) = (z_1 + z_2 = z_2)$$

определяет $\subseteq$ в $\langle P(V); +\rangle$.

(3) Пункты (1) и (2) показывают, что структуры $\langle P(V); \subseteq\rangle$, $\langle P(V); \cap, +\rangle$ и $\langle P(V); \cap, +, \{0\}, V\rangle$ абсолютно инъективно интерпретируемы друг в друге. Во всех этих случаях тождественные отображения служат координатными отображениями. Следовательно, эти интерпретации порождают аб-

солютные инъективные сильные биинтерпретации. □

**Замечание 2.1.** Ввиду предложения 2.1 при доказательстве того, что некоторое множество определимо (или 0-определимо) в $P(V)$, достаточно доказать, что множество определимо (0-определимо) в

$$\langle P(V); \subseteq, \cap, +, \{0\}, V\rangle.$$

С этого момента мы используем этот подход без прямых ссылок на предложение 2.1.

**ЛЕММА 2.1.** Для всех $m \in \mathbb{N}$ существует формула $\psi_m(z_1, \ldots, z_m, z)$ в языке $L_{\subseteq}$, такая что для любых $V \in \mathscr{V}$ и $U_1, \ldots, U_m, U \in P(V)$ справедливо

$$P(V) \models \psi_m(U_1, \ldots, U_m, U)$$

тогда и только тогда, когда существуют $x_1, \ldots, x_m \in V$ такие, что

(1) $U_1 = \langle x_1\rangle, \ldots, U_m = \langle x_m\rangle$;

(2) $x_1, \ldots, x_m$ образуют базис $U$.

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное $V \in \mathscr{V}$. Формула

$$Dim_1(z) = (z \neq \{0\}) \wedge \forall y(y \subseteq z \longrightarrow y = \{0\} \vee y = z)$$

верна на подпространстве $U$ из $V$ тогда и только тогда, когда $\dim_F U = 1$. Пусть

$$\psi_m(z_1, \ldots, z_m, z) = \bigwedge_{i=1}^{m} Dim_1(z_i) \bigwedge_{i=1}^{m-1} (z_1 + \ldots + z_i \subsetneq z_1 + \ldots + z_{i+1})$$
$$\bigwedge(z_1 + \ldots + z_m = z).$$

Для любого $U_1, \ldots, U_m, U \in P(V)$ имеет место

$$P(V) \models \psi_m(U_1, \ldots, U_m, U)$$

тогда и только тогда, когда каждое $U_i$ имеет размерность 1 над $F$. Значит,

$U_i = \langle x_i \rangle$ для некоторого $x_i \in V$, и $x_1, \ldots, x_m$ образуют базис $U$. □

**СЛЕДСТВИЕ 2.1.** Для любого $m \in \mathbb{N}$ существует формула $Dim_m(z)$ в языке $L_\subseteq$, такая что для любого векторного пространства $V \in \mathscr{V}$ и произвольного $U \in P(V)$

$$P(V) \models Dim_m(U) \Longleftrightarrow \dim_F(U) = m.$$

**Доказательство.** Положим

$$Dim_m(z) = \exists z_1 \ldots \exists z_m \psi_m(z_1, \ldots, z_m, z).$$

Требуемое следует из леммы 2.1. □

**СЛЕДСТВИЕ 2.2.** Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует предложение $D_n$ в языке $L_\subseteq$, такое что для любого векторного пространства $V \in \mathscr{V}$

$$P(V) \models D_n \Longleftrightarrow \dim_F V = n.$$

Формула $\phi_{\text{par}}$ из следующего результата будет описывать параметры в регулярной интерпретации $F$ в $P(V)$, отсюда и название.

**ЛЕММА 2.2.** Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует формула

$$\phi_{\text{par}}(z_1, \ldots, z_n, y_2, \ldots, y_n)$$

в языке $L_\subseteq$, такая что для любых $V \in \mathscr{V}$ и $L_1, \ldots, L_n, M_{1,2}, \ldots, M_{1,n} \in P(V)$

$$P(V) \models \phi_{\text{par}}(L_1, \ldots, L_n, M_{1,2}, \ldots, M_{1,n})$$

тогда и только тогда, когда существуют элементы $x_1, \ldots, x_n \in V$, для которых выполняются следующие условия:

(1) $L_1 = \langle x_1 \rangle, \ldots, L_n = \langle x_n \rangle$ и $\{x_1, \ldots, x_n\}$ является базисом $V$;

(2) $M_{1,2} = \langle x_1 + x_2 \rangle, \ldots, M_{1,n} = \langle x_1 + x_n \rangle$.

**Доказательство.** Требуется показать, что в языке $L_\subseteq$ существуют формулы, описывающие условия (1) и (2) в любом векторном простран-

стве $V \in \mathscr{V}$. Формула $\psi_n(z_1, \ldots, z_n, z)$ из леммы 2.1 описывает (1), когда $V$ (которое является 0-определимым элементом в $P(V)$) подставляется вместо $z$. Для описания (2) заметим, что для $i > 1$ любое подпространство $\langle x_1 + \alpha x_i \rangle$ с $\alpha \neq 0$ может быть выбрано в качестве $M_{1,i}$, поскольку замена $x_i$ на $x_i' = \alpha x_i$ дает $\langle x_i \rangle = \langle x_i' \rangle$ и $\langle x_1 + \alpha x_i \rangle = \langle x_1 + x_i' \rangle$. Поэтому условия (1) и (2) выполняются.

$M_{1,i}$ можно определить следующим условием

$$(y_i \subseteq \langle x_1 \rangle + L_i) \wedge (y_i \neq \{0\}) \wedge (y_i \neq \langle x_1 \rangle) \wedge (y_i \neq L_i) \wedge (y_i \neq \langle x_1 \rangle + L_i).$$

Следовательно, требуемая формула может быть записана как

$$\phi_{\mathrm{par}}(\bar{z}, \bar{y}) = \psi_n(z_1, \ldots, z_n, V) \wedge \bigwedge_{i=2}^{n} \Big( (y_i \subseteq z_1 + z_i) \\ \wedge (y_i \neq \{0\} \wedge (y_i \neq z_1) \wedge (y_i \neq z_i) \wedge (y_i \neq z_1 + z_i)) \Big).$$

□

**Обозначение 2.1.** Для $V \in \mathscr{V}_n$ обозначим через $\mathscr{D}$ множество всех кортежей $\bar{p}$, удовлетворяющих формуле $\phi_{\mathrm{par}}$ в $P(V)$, т. е.

$$\mathscr{D} = \{\bar{p} = (\langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_n \rangle, \langle x_1 + x_2 \rangle, \ldots, \langle x_1 + x_n \rangle) \mid \bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \\ \text{является базисом } V\}.$$

Однако $\bar{x}$ не определяется кортежем $\bar{p}$ однозначно; возможно, что $\langle x_i \rangle = \langle x_i' \rangle$ и $\langle x_1 + x_i \rangle = \langle x_1' + x_i' \rangle$, $i = 1, \ldots, n$ для некоторых других $x_i' \in V$. Легко проверить, что это происходит тогда и только тогда, когда $x_i' = \alpha x_i$, $i = 1, \ldots, n$, для некоторого $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$. Поэтому $\bar{p}$ определяет $\bar{x}$ однозначно с точностью до умножения на скаляр. Выберем любую из этих баз и обозначим ее как $\bar{x}_{\bar{p}}$. С этого момента, когда $\bar{p}$ и $\bar{x}$ появляются в тексте, предполагаем, что $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, где $\bar{x} = \bar{x}_{\bar{p}}$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2.** Для любых $n \geq 3$ и $2 \leq i < j \leq n$ существует формула $\Pi_{i,j}(z, \bar{t})$ в языке $L_{\subseteq}$, такая что для любых $V \in \mathscr{V}_n$, $\bar{p} \in \mathscr{D}$ и

$U \in P(V)$ имеет место

$$P(V) \models \Pi_{i,j}(U, \bar{p}) \Longleftrightarrow U = \langle x_i - x_j \rangle.$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные $V \in \mathscr{V}_n$ и

$$\bar{p} = (\langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_n \rangle, \langle x_1 + x_2 \rangle, \ldots, \langle x_1 + x_n \rangle) \in \mathscr{D}.$$

Заметим, что

$$\langle x_i + \beta x_j \rangle \subseteq \langle x_1 + x_i \rangle + \langle x_1 + x_j \rangle \Longleftrightarrow \beta = -1. \tag{2.1}$$

Действительно, левая часть (2.1) подразумевает

$$x_i + \beta x_j = \gamma_1(x_1 + x_i) + \gamma_2(x_1 + x_j)$$

для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in F$. Поскольку $\{x_1, \ldots, x_n\}$ является базисом $V$, то $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = -1$ и $\beta = -1$, как и утверждается. Обратное очевидно.

Теперь требуемую формулу $\Pi_{i,j}(z, \bar{p})$ можно записать как

$$\Pi_{i,j}(z, \bar{p}) = (z \subseteq \langle x_i \rangle + \langle x_j \rangle) \wedge (z \subseteq \langle x_1 + x_i \rangle + \langle x_1 + x_j \rangle) \wedge Dim_1(z).$$

По построению формула $\Pi_{i,j}(z, \bar{p})$ имеет один и тот же вид для всех параметров $\bar{p} \in \mathscr{D}$. Следовательно, она происходит из некоторой формулы $\Pi_{i,j}(z, \bar{t})$, которая получается из $\Pi_{i,j}(z, \bar{p})$ путем замены кортежа параметров $\bar{p}$ соответствующим кортежем новых переменных $\bar{t}$. □

**Обозначение 2.2.** Для $V \in \mathscr{V}_n$, $\bar{p} \in \mathscr{D}$ и $i$, $2 \leq i \leq n$, рассмотрим множество прямых

$$A_i = \{\langle x_1 + \alpha x_i \rangle \mid \alpha \in F\},$$

оно определимо в $P(V)$ формулой

$$\mathscr{A}_i(z, \bar{p}) = z \subseteq \langle x_1 \rangle + \langle x_i \rangle \wedge Dim_1(z) \wedge z \neq \langle x_i \rangle$$

с параметрами $\bar{p}$. Отображение $f_i : A_i \to F$, заданное $\langle x_1 + \alpha x_i\rangle \mapsto \alpha$, является биекцией.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.** Для любого натурального $n \geq 3$ и любого $2 \leq i < j \leq n$ существует формула $\Phi_{i,j}(z_1, z_2, \bar{t})$ в языке $L_{\subseteq}$, такая что для любых $V \in \mathscr{V}_n$, $\bar{p} \in \mathscr{D}$ и $U_1, U_2 \in P(V)$ имеет место

$$P(V) \models \Phi_{i,j}(U_1, U_2, \bar{p}) \Longleftrightarrow \exists \alpha \in F\big(U_1 = \langle x_1 + \alpha x_i\rangle \wedge U_2 = \langle x_1 + \alpha x_j\rangle\big).$$

**Доказательство.** Достаточно доказать результат для $i = 2$, так как в общем случае $3 \leq i < j \leq n$ можно взять

$$\Phi_{i,j}(z_1, z_2, \bar{t}) = \exists s(\Phi_{2,i}(s, z_1, \bar{t}) \wedge \Phi_{2,j}(s, z_2, \bar{t})).$$

Зафиксируем произвольные $V \in \mathscr{V}_n$ и $\bar{p} = (\langle x_1\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle, \langle x_1 + x_2\rangle, \ldots, \langle x_1 + x_n\rangle) \in \mathscr{D}$. Заметим, что для любых $\alpha, \beta \in F$ и $3 \leq j \leq n$ верно

$$\langle x_2 - x_j\rangle \subseteq \langle x_1 + \alpha x_2\rangle + \langle x_1 + \beta x_j\rangle \Longleftrightarrow \alpha = \beta. \tag{2.2}$$

Действительно, если $\alpha = \beta$, то $x_1 + \alpha x_2 - (x_1 + \beta x_j) = \alpha(x_2 - x_j)$, поэтому $\langle x_2 - x_j\rangle \subseteq \langle x_1 + \alpha x_2\rangle + \langle x_1 + \beta x_j\rangle$.

И наоборот, если $\langle x_2 - x_j\rangle \subseteq \langle x_1 + \alpha x_2\rangle + \langle x_1 + \beta x_j\rangle$, то

$$x_2 - x_j = \gamma_1(x_1 + \alpha x_2) + \gamma_2(x_1 + \beta x_j)$$

для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 \in F$. Следовательно, $\gamma_2 = -\gamma_1$, $\gamma_1\alpha = 1$, $-\gamma_1\beta = -1$, поэтому $\alpha = \beta$. Теперь формулу $\Phi_{2,j}(z_1, z_2, \bar{p})$ можно записать следующим образом

$$\Phi_{2,j}(z_1, z_2, \bar{p}) = z_1 \in A_2 \wedge z_2 \in A_j \wedge \exists u(\Pi_{2,j}(u, \bar{p}) \wedge u \subseteq z_1 + z_2),$$

где $z_1 \in A_2$ и $z_2 \in A_j$ обозначают формулы $\mathscr{A}_2(z_1, \bar{p})$ и $\mathscr{A}_j(z_2, \bar{p})$ из обозначения (2.2), которые определяют в $P(V)$ множества $A_2$ и $A_j$, в то время как формула $\Pi_{2,j}(u, \bar{p})$ из предложения (2.2) определяет в $P(V)$ элемент

$\langle x_2 - x_j \rangle$. По построению формула $\Phi_{2,j}(z_1, z_2, \bar{p})$ имеет один и тот же вид для всех параметров $\bar{p} \in \mathscr{D}$. Следовательно, она происходит от формулы $\Phi_{2,j}(z_1, z_2, \bar{t})$, которая получается из $\Phi_{2,j}(z_1, z_2, \bar{p})$ заменой кортежа параметров $\bar{p}$ соответствующим кортежем новых переменных $\bar{t}$. □

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4.** Для любого натурального $n \geq 3$ существует формула $\Lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{t})$ в языке $L_{\subseteq}$, такая что для любых $V \in \mathscr{V}_n$, $\bar{p} \in \mathscr{D}$ и $W, U_2, \ldots, U_n \in P(V)$ выполняется

$$P(V) \models \Lambda(W, U_2, \ldots, U_n, \bar{p})$$

тогда и только тогда, когда

$$U_2 = \langle x_1 + \alpha_2 x_2 \rangle, \ldots, U_n = \langle x_1 + \alpha_n x_2 \rangle, \quad W = \langle x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \rangle.$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное $V \in \mathscr{V}_n$ и произвольный набор $\bar{p} = (\langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_n \rangle, \langle x_1 + x_2 \rangle, \ldots, \langle x_1 + x_n \rangle) \in \mathscr{D}$. Для любого одномерного подпространства $\langle x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \rangle \in P(V)$ и произвольного $2 \leq i \leq n$ для всяких $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_i \in F$ выполняется

$$\alpha_i = \beta_i \Longleftrightarrow \langle x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \rangle \subseteq \langle x_1 + \beta_i x_i \rangle + \langle x_2 \rangle + \ldots + \langle x_n \rangle, \quad (2.3)$$

где $\langle x_i \rangle$ опущено в правой сумме выше. Это доказывается простой проверкой, аналогичной тем, что были в предыдущих предложениях. Утверждение (2.3) можно записать с помощью формулы

$$\Lambda'_i(z_1, s, \bar{p}) = z_1 \subseteq s + \langle x_2 \rangle + \ldots + \langle x_n \rangle \wedge 0 \neq s \in A_i \wedge Dim_1(z_1),$$

где $\langle x_i \rangle$ опущено в правой сумме выше, а $s \in A_i$ обозначает формулу $\mathscr{A}_i(s, \bar{p})$ из обозначения (2.2), а элементы $\langle x_2 \rangle, \ldots, \langle x_n \rangle$ являются параметрами из $\bar{p}$. Формула $\Lambda'_i(z_1, s, \bar{p})$ почти та, которая нас интересует, но в этой формуле $s$ принимает значение в $A_i$, хотя нам требуется, чтобы $s$ принимал значение в $A_2$. Корректируем формулу $\Lambda'_i$, используя формулу $\Phi_{i,j}$ из

предложения (2.3) следующим образом

$$\Lambda_i(z_1, z_i, \bar{p}) = \exists s(\Phi_{2,i}(z_i, s, \bar{p}) \wedge \Lambda'_i(z_1, s, \bar{p})).$$

Теперь искомую формулу $\Lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{p})$ можно получить как конъюнкцию

$$\Lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{p}) = \bigwedge_{i=2}^{n} \Lambda_i(z_1, z_i, \bar{p}).$$

Для завершения доказательства отметим, что по построению формула $\Lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{p})$ имеет один и тот же вид для всех параметров $\bar{p} \in \mathscr{D}$. Следовательно, она происходит из некоторой формулы $\Lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{t})$, которая получается из $\Lambda(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{p})$ путем замены кортежа параметров $\bar{p}$ соответствующим кортежем новых переменных $\bar{t}$. □

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.** Для любого натурального $n \geq 3$ существует формула $\Sigma(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{t})$ в языке $L_{\subseteq}$, такая что для любых $V \in \mathscr{V}_n$, $\bar{p} \in \mathscr{D}$ и $W, U_2, \ldots, U_n \in P(V)$ выполняется

$$P(V) \models \Sigma(W, U_2, \ldots, U_n, \bar{p})$$

тогда и только тогда, когда существуют $\alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$, такие что

$$U_2 = \langle x_1 + \alpha_2 x_2 \rangle, \ldots, U_n = \langle x_1 + \alpha_n x_2 \rangle, \quad W = \langle \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \rangle.$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные $V \in \mathscr{V}_n$ и

$$\bar{p} = (\langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_n \rangle, \langle x_1 + x_2 \rangle, \ldots, \langle x_1 + x_n \rangle) \in \mathscr{D}.$$

Если все $\alpha_i = 0$, то все $U_i = \langle x_1 \rangle$, и $W = \{0\}$. Этот случай легко записывается формулой

$$\Sigma^0(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{p}) = \bigwedge_{i=2}^{n} (z_i = \langle x_1 \rangle) \longrightarrow (z_1 = \{0\})$$

с параметрами $\bar{p}$.

Теперь заметим, что для любых $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_2, \ldots, \beta_n \in F$, таких что

некоторый $\alpha_i$ отличен от 0, имеем

$$\langle \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \rangle \subseteq \langle x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \rangle + \langle x_1 \rangle \tag{2.4}$$

тогда и только тогда, когда $\alpha_2 = \gamma\beta_2, \ldots, \alpha_n = \gamma\beta_n$ для некоторого $0 \neq \gamma \in F$, что эквивалентно $\langle \alpha_2 x_2 + \ldots \alpha_n x_n \rangle = \langle \beta_2 x_2 + \ldots \beta_n x_n \rangle$. Это показывает, что если некоторое $\alpha_i \neq 0$, то требуемая формула может быть записана как

$$\begin{aligned}\Sigma'(z_1, \ldots, z_n, \bar{p}) = z_1 \subseteq \langle x_2 \rangle + \ldots + \langle x_n \rangle \wedge Dim_1(z_1) \\ \wedge \exists s\big(z_1 \subseteq s + \langle x_1 \rangle \wedge \Lambda(s, z_2, \ldots, z_n, \bar{p})\big),\end{aligned}$$

где $\Lambda(s, z_2, \ldots, z_n, \bar{p})$ — формула из предложения 2.4.

Теперь требуемую формулу $\Sigma(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{p})$ можно выразить как конъюнкцию

$$\begin{aligned}\Sigma(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{p}) = \left(\bigwedge_{i=2}^{n} (z_i = \langle x_1 \rangle) \longrightarrow z_1 = \{0\}\right) \\ \wedge \left(\bigvee_{i=2}^{n} (z_i \neq \langle x_1 \rangle) \longrightarrow \Sigma'(z_1, \ldots, z_n, \bar{p})\right).\end{aligned}$$

Опять же, как мы утверждали в предложениях выше, по построению формула $\Sigma(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{p})$ имеет один и тот же вид для всех параметров $\bar{p} \in \mathscr{D}$. Следовательно, она происходит от формулы $\Sigma(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{t})$, которая получается из $\Sigma(z_1, z_2, \ldots, z_n, \bar{p})$, где кортеж параметров $\bar{p}$ заменяется соответствующим кортежем новых переменных $\bar{t}$. □

### 2.2. Регулярная инъективная интерпретация $F$ в $P(V)$.

**ТЕОРЕМА 2.1.** Для любого натурального $n \geq 3$ существует регулярная инъективная интерпретация $(\Gamma, \phi_{\text{par}})$ в языке $L_{\subseteq}$, которая для любого $V \in \mathscr{V}_n$ регулярно инъективно интерпретирует поле $F$ в $P(V)$.

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное $V \in \mathscr{V}_n$ и произвольный кортеж $\bar{p} = (\langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_n \rangle, \langle x_1 + x_2 \rangle, \ldots, \langle x_1 + x_n \rangle) \in \mathscr{D}$. Напомним, что множество $\mathscr{D}$ определимо в $P(V)$ формулой $\phi_{\text{par}}$ из леммы 2.1.

Определим бинарные операции $\oplus$ и $\odot$ на множестве $A_2 = \{\langle x_1 + \alpha x_2\rangle \mid \alpha \in F\}$ с помощью параметров $\bar{p}$. Заметим, что $A_2$ определимо в $P(V)$ формулой $\mathscr{A}_2(z, \bar{p})$ из нотации (2.2) с параметрами $\bar{p}$. Покажем, что это приводит к регулярной интерпретации $F$ в $P(V)$ с набором параметров $\mathscr{D}$ и биекцией $f_2 : A_2 \to F$, см. обозначение (2.2), в качестве координатного отображения интерпретации.

Пусть $U_1 = \langle x_1 + \alpha_1 x_2\rangle$, $U_2 = \langle x_1 + \alpha_2 x_2\rangle$, $U_3 = \langle x_1 + \alpha_3 x_2\rangle$. Зададим операции

$$U_1 \oplus U_2 = U_3 \Longleftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$$

и

$$U_1 \odot U_2 = U_3 \Longleftrightarrow \alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_3.$$

Достаточно показать, что операции $\oplus$ и $\odot$ определимы в $P(V)$ с параметрами $\bar{p}$, множество $A_2$ с операциями $\oplus$ и $\odot$ является полем, изоморфным полю $F$ посредством биекции $f_2 : A_2 \to F$ (напомним, что $f_2 : \langle x_1 + \alpha x_2\rangle \in A_2 \to \alpha \in F$), а полученная интерпретация $F$ в $P(V)$ является регулярной, т. е. формулы, дающие интерпретации, являются однородными в $\bar{p} \in \mathscr{D}$.

Относительно сложения $\oplus$ заметим, что для $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in F$ выполняется следующая эквивалентность:

$$\langle x_1 + \alpha_3 x_2 + x_3\rangle \subseteq \langle x_1 + \alpha_1 x_2\rangle + \langle \alpha_2 x_2 + x_3\rangle \iff \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2. \qquad (2.5)$$

( $\Longleftarrow$ ) Очевидно.

( $\Longrightarrow$ ) Для некоторых $\delta_1, \delta_2 \in F$ имеет место

$$x_1 + \alpha_3 x_2 + x_3 = \delta_1(x_1 + \alpha_1 x_2) + \delta_2(\alpha_2 x_2 + x_3),$$

и мы можем видеть, что $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$. Таким образом, $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2$.

Используя формулу $\Lambda(z_1, \ldots, z_n, \bar{p})$ из предложения 2.4, получаем, что линия $\langle x_1 + \alpha_3 x_2 + x_3\rangle$ является единственной, удовлетворяющей формуле

$$\Lambda^*(z, U_3, \bar{p}) = \Lambda(z, U_3, \langle x_1 + x_2\rangle, \langle x_1\rangle, \ldots, \langle x_1\rangle, \bar{p}).$$

Аналогично, используя формулу $\Sigma(z_1, \ldots, z_n, \bar{p})$ из предложения 2.5, получаем, что линия $\langle \alpha_2 x_2 + x_3 \rangle$ является единственной, удовлетворяющей формуле

$$\Sigma^*(z, U_2, \bar{p}) = \Sigma(z, U_2, \langle x_1 + x_2 \rangle, \langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_1 \rangle, \bar{p}).$$

Ясно, что условие (2.5) можно задать следующей формулой

$$\Phi_{\oplus}(z_1, z_2, z_3, \bar{p}) = \exists s \exists t (s \subseteq z_1 + t \wedge \Lambda^*(s, z_3, \bar{p}) \wedge \Sigma^*(t, z_2, \bar{p})),$$

которая определяет сложение $\oplus$ на $A_2$.

Относительно умножения $\odot$ заметим, что

$$\langle x_1 + \gamma x_2 + \beta x_3 \rangle \subseteq \langle x_1 \rangle + \langle \alpha x_2 + x_3 \rangle \iff \gamma = \alpha\beta. \tag{2.6}$$

( $\Longleftarrow$ ) Требуемое следует из

$$x_1 + \alpha\beta x_2 + \beta x_3 = x_1 + \beta(\alpha x_2 + x_3).$$

( $\Longrightarrow$ ) Для некоторых $\delta_1, \delta_2 \in F$ имеет место

$$x_1 + \gamma x_2 + \beta x_3 = \delta_1 x_1 + \delta_2(\alpha x_2 + x_3),$$

откуда $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \beta$. Таким образом, $\gamma = \alpha\beta$.

Прямая $\langle x_1 + \alpha_3 x_2 + \alpha_2 x_3 \rangle$ является единственной, удовлетворяющей формуле

$$\Lambda^{**}(z, U_3, U_2, \bar{p}) = \Lambda(z, U_3, U_2, \langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_1 \rangle, \bar{p}).$$

Аналогично, прямая $\langle \alpha_1 x_2 + x_3 \rangle$ является единственной, удовлетворяющей формуле

$$\Sigma^{**}(z, U_1, \bar{p}) = \Sigma(z, U_1, \langle x_1 + x_3 \rangle, \langle x_1 \rangle, \ldots, \langle x_1 \rangle, \bar{p}).$$

Ясно, что условие (2.6) можно описать формулой

$$\Phi_{\odot}(z_1, z_2, z_3, \bar{p}) = \exists s \exists t (s \subseteq \langle x_1 \rangle + t \wedge \Lambda^{**}(s, z_3, z_2, \bar{p}) \wedge \Sigma^{**}(t, z_1, \bar{p})),$$

которая определяет умножение $\odot$ на $A_2$.

По построению отображение $f_2 : A_2 \to F$ дает изоморфизм алгебраических структур $f_2 : \langle A_2; \oplus, \odot\rangle \to F$. Это показывает, что формулы

$$\Gamma = \{\mathscr{A}_2(z, \bar{t}), \Phi_\oplus(z_1, z_2, z_3, \bar{t}), \Phi_\odot(z_1, z_2, z_3, \bar{t})\}$$

вместе с формулой $\phi_{\text{par}}(\bar{t})$ из леммы 2.2, которая 0-определяет множество параметров $\mathscr{D}$ в $P(V)$, дают регулярную инъективную интерпретацию $F$ в $P(V)$, поэтому $F \simeq \Gamma(P(V), \phi_{\text{par}})$, и отображения $f_2$ (которые зависят от параметра $\bar{p} \in \mathscr{D}$) являются координатными отображениями этой интерпретации. $\square$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6.** Для любых $n \geq 3$, $m \geq 1$ существует формула $\Theta_{m,n}(x, \bar{z}_{i,j}, \bar{t})$ в языке $L_\subseteq$, где $\bar{z}_{i,j}$ — это кортеж из $m \times n$ переменных, такая что для любых $V \in \mathscr{V}_n$, $W, U_{ij} \in P(V)$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ и $\bar{p} \in \mathscr{D}$ выполняется

$$P(V) \models \Theta_{m,n}(W, \bar{U}_{ij}, \bar{p})$$

тогда и только тогда, когда

$$U_{ij} = \langle x_1 + \alpha_{i,j} x_2\rangle, \tag{2.7}$$

$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $\alpha_{i,j} \in F$,

$$W = \langle \alpha_{1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{1,n}x_n,\ \ldots,\ \alpha_{m,1}x_1 + \ldots + \alpha_{m,n}x_n\rangle. \tag{2.8}$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольные $V \in \mathscr{V}_n$ и $\bar{p} \in \mathscr{D}$. Сначала отметим, что отношение (2.7) определимо в $P(V)$ с параметрами $\bar{p}$ по формуле $\mathscr{A}_2(z, \bar{p})$ из обозначения (2.2). По предложениям 2.4 и 2.5 для заданных подпространств $U_{i,j}$ из (2.7) отношение

$$W_i = \langle \alpha_{i,1}x_1 + \ldots + \alpha_{i,n}x_n\rangle$$

определимо в $P(V)$ с параметрами $\bar{p}$. Действительно, если $\alpha_{i,1} = 0$, то по

предложению 2.5 имеет место

$$P(V) \models \Sigma(W_i, U_{i,2}, \ldots, U_{i,n}, \bar{p}) \Longleftrightarrow W_i = \langle \alpha_{i,2}x_2 + \ldots + \alpha_{i,n}x_n \rangle.$$

В противном случае, если $\alpha_{i,1} \neq 0$, кортеж

$$U'_{i,2} = \left\langle x_1 + \frac{\alpha_{i,2}}{\alpha_{i,1}}x_2 \right\rangle, \ldots, U'_{i,n} = \left\langle x_1 + \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,1}}x_2 \right\rangle$$

определим в $P(V)$ (при данных $U_{i,j}$ и $\bar{p}$) с помощью формулы $\Phi_{\odot}$ из теоремы 2.1 (которая интерпретирует умножение $\odot$ на $A_2$). В этом случае по предложению 2.4

$$P(V) \models \Lambda(W_i, U'_{i,1}, \ldots, U'_{i,n}, \bar{p}) \Longleftrightarrow W_i = \left\langle x_1 + \frac{\alpha_{i,2}}{\alpha_{i,1}}x_2 + \ldots + \frac{\alpha_{i,n}}{\alpha_{i,1}}x_n \right\rangle$$
$$= \langle \alpha_{i,1}x_1 + \ldots + \alpha_{i,n}x_n \rangle.$$

Теперь отношение (2.8) эквивалентно следующему

$$W = W_1 + \ldots + W_n \bigwedge_{i=1}^{n} W_i = \langle \alpha_{i,1}x_1 + \ldots + \alpha_{i,n}x_n \rangle,$$

которое определимо в $P(V)$ формулой, содержащей $U_{i,j}$ и параметры $\bar{p}$. Как и в предложениях 2.4 и 2.5 структура этой формулы не зависит от $U_{i,j}$ и $\bar{p}$, поэтому действительно существует требуемая формула $\Theta_{m,n}(x, \bar{z}_{i,j}, \bar{t})$. □

**2.3. Абсолютная интерпретация $P(V)$ в $F$.** Чтобы доказать инъективную интерпретируемость $P(V)$ в $F$, нам понадобятся некоторые результаты из линейной алгебры. Пусть $V$ — векторное пространство конечной размерности $n$ над полем $F$. Зафиксируем базис $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ в $V$. Тогда каждый вектор $u \in V$ может быть однозначно представлен своим кортежем координат $a \in F^n$ в базисе $\bar{x}$. Для произвольной $n \times n$-матрицы $A \in M_n(F)$ с коэффициентами в $F$ обозначим через $S(A)$ подпространство в $V$, натянутое на векторы, соответствующие строкам $A$. Очевидно, что каждое подпространство в $V$ равно $S(A)$ для некоторого $A \in M_n(F)$.

Используя элементарные операции со строками, каждую такую матрицу $A$ можно преобразовать в матрицу $B \in M_n(F)$, которая находится в *редуцированной ступенчатой форме по строкам*, т. е. $B$ находится в ступенчатой форме по строкам, все ее опорные элементы равны 1, и опорные элементы являются единственными ненулевыми элементами в своих столбцах. Заметим, что если $B$ приводится элементарными преобразованиями строк к $A$, то $S(B) = S(A)$. Хорошо известно [33], что для каждой $A \in M_n(F)$ существует единственная матрица $B$ в редуцированной ступенчатой форме по строкам такая, что $A$ приводится элементарными преобразованиями строк к $B$. Нам потребуется этот результат в следующей форме

**УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1** [33]**.** Пусть $V$ — векторное пространство размерности $n$ над полем $F$. Тогда для каждого подпространства $U \subseteq V$ существует единственная $n \times n$-матрица $A$ над полем $F$ в приведенной ступенчатой форме по строкам, такая что $U = S(A)$.

**ТЕОРЕМА 2.2.** Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует абсолютная инъективная интерпретация $\Delta$ на языке колец, которая для любого поля $F$ абсолютно инъективно интерпретирует в $F$ проективное пространство $P(V)$ для любого $V \in \mathscr{V}_n$.

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное поле $F$ и $F$-векторное пространство $V$ размерности $n$. Мы рассматриваем кортежи в $F^{n^2}$ как матрицы $n \times n$. Напомним, что для каждого подпространства $U$ из $V$ существует единственная $n \times n$ матрица $A$ над полем $F$ в приведенной ступенчатой форме по строкам, такая что $U = S(A)$. Пусть

$$R = \{A \in F^{n^2} \mid A \text{ находится в форме редуцированного ступенчатого ряда}\}.$$

Мы используем $R$ в качестве области нашей интерпретации.

Покажем, что $R$ является 0-определимым. Пусть $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ — любая (включая пустую) возрастающая последовательность из $\{1, \ldots, n\}$. Матрица $A = (A_{i,j})$, рассматриваемая как кортеж $A = (A_{1,1}, \ldots, A_{1,n}, \ldots, A_{n,1}, \ldots, A_{n,n}) \in F^{n^2}$, находится в приведенной нормальной форме по стро-

кам и имеет опорную 1 точно в столбцах $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ тогда и только тогда, когда $A$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) $A_{i,1} = 0, \ldots, A_{i,\sigma_i - 1} = 0$, $A_{i,\sigma_i} = 1$ для всех $i = 1, \ldots, k$ (это означает, что 1 является опорной точкой в $i$-й строке, $\sigma_i$-м столбце).

(2) $A_{j,\sigma_i} = 0$ для всех $1 \leq i \neq j \leq k$ (это означает, что все элементы, кроме $A_{i,\sigma_i}$, равны 0 в столбце $\sigma_i$).

(3) $A_{i,j} = 0$ для всех $i > k$, $j = 1, \ldots, n$ (это означает, что все строки ниже строки $k$ являются нулевыми).

Условия (1)–(3) выше можно задать формулой на языке $F$, обозначим ее $\phi_\sigma(A)$.

Тогда $R$ 0-определимо в $F$ следующей формулой

$$\Phi_R(A) = \bigvee_\sigma \phi_\sigma(A),$$

где дизъюнкция имеет место по всем последовательностям $\sigma$, описанным выше.

Зафиксируем базис $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ в $V$ и определим отображение $\mu_\Delta : R \to P(V)$, $\mu_\Delta(A) = S(A)$, где $S(A)$ — подпространство в $V$, порожденное строками $A$, рассматриваемыми как векторы в $V$ относительно базиса $\bar{x}$. Как обсуждалось выше, см. утверждение 2.1, $\mu_\Delta$ является биекцией. Определим бинарное отношение $\subseteq_R$ на $R$ посредством

$$A \subseteq_R B \Longleftrightarrow S(A) \subseteq S(B),$$

где $A, B \in R$. Мы утверждаем, что отношение $\subseteq_R$ на множестве $R$ является 0-определимым в $F$. Пусть $A = (A_{i,j})$, $B = (B_{i,j})$. $S(A) \subseteq S(B)$ тогда и только тогда, когда каждая строка $A$ является линейной комбинацией строк $B$. Следовательно, мы можем определить $\subseteq_R$ на $R$ по формуле

$$\Phi_\subseteq(A, B) = \Phi_R(A) \wedge \Phi_R(B) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} \exists c_1 \ldots \exists c_n \left( \bigwedge_{j=1}^{n} (A_{i,j} = c_1 \cdot B_{1,j} + \ldots + c_n \cdot B_{n,j}) \right).$$

Отображение $\mu_\Delta$ дает изоморфизм структур $\mu_\Delta : \langle R; \subseteq_R\rangle \to \langle P(V); \subseteq\rangle$. Следовательно, набор формул $\Delta = \{\Phi_R, \Phi_\subseteq\}$ дает инъективную абсолютную интерпретацию $P(V)$ в $F$, $P(V) \simeq \Delta(F)$, с координатным отображением $\mu_\Delta$. □

**2.4. Регулярная инъективная сильная биинтерпретация $P(V)$ и $F$.** Основным техническим результатом служит следующая

**ТЕОРЕМА 2.3.** Для любого натурального $n \geq 3$ интерпретации $(\Gamma, \phi_{\mathrm{par}})$ и $\Delta$ из теорем выше дают для любого $V \in \mathscr{V}_n$ инъективную сильную полуабсолютную биинтерпретацию $P(V)$ в $F$.

**Доказательство.** Зафиксируем векторное пространство $V \in \mathscr{V}_n$. Пусть $\Delta(F)$ — абсолютная инъективная интерпретация $P(V)$ в $F$ с координатным отображением $\mu_\Delta$ из теоремы 2.2 и $F \simeq \Gamma(P(V), \phi_{\mathrm{par}})$ — регулярная инъективная интерпретация $F$ в $P(V)$ из теоремы 2.1. Зафиксируем кортеж параметров $\bar{p} = (\langle x_1\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle, \langle x_1 + x_2\rangle, \ldots, \langle x_1 + x_n\rangle) \in \mathscr{D}$, где $\mathscr{D} = \phi_{\mathrm{par}}(P(V))$. Напомним, что отображение

$$f_{2,\bar{p}} : A_{2,\bar{p}} = \{\langle x_1 + \alpha x_2\rangle \mid \alpha \in F\} \longrightarrow F,$$

определенное как $\langle x_1 + \alpha x_2\rangle \to \alpha$ для $\alpha \in F$, является координатным отображением $\mu_\Gamma : \Gamma(P(V), \bar{p}) \to F$, которое дает изоморфизм полей. Здесь мы немного меняем обозначения из теоремы 2.1, вводя параметры $\bar{p}$ в $A_{2,\bar{p}}$ и $f_{2,\bar{p}}$. Для доказательства биинтерпретируемости рассмотрим два случая.

*Случай 1.* Для интерпретаций

$$F \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} P(V) \overset{\Delta}{\rightsquigarrow} F$$

нам нужно показать, что существует формула $\theta_F(\bar{u}, x, \bar{y})$ такая, что для параметров $\bar{\bar{p}} = \mu_\Delta^{-1}(\bar{p})$ формула $\theta_F(\bar{u}, x, \bar{\bar{p}})$ определяет координатное отображение $\mu_\Gamma \circ \mu_\Delta \colon U_{\Gamma\circ\Delta}(F, \bar{\bar{p}}) \to F$ (см. обозначения в п. 1.4). Заметим, что параметры $\bar{\bar{p}} = \mu_\Delta^{-1}(\bar{p})$ дают $\mu_\Delta^{-1}(\langle x_1\rangle)$ и $\mu_\Delta^{-1}(\langle x_2\rangle)$, которые являются матрицами в форме сокращенного ступенчатого ряда, имеющими только первую строку, отличную от нуля. Мы можем предположить, что эти

строки являются в точности вектор-строками $x_1$ и $x_2$. Итак, если задана $\mu_\Delta^{-1}(\langle x_1 + \alpha x_2\rangle)$ (которая снова является матрицей в форме сокращенного ряда строк, содержащей только одну, первую, ненулевую строку), мы можем записать формулу $\theta_F(\bar{u}, x, \bar{y})$ в $F$, такую что

$$F \models \theta_F(\mu_\Delta^{-1}(\langle x_1 + \alpha x_2\rangle), \alpha, \bar{\bar{p}}) \Longleftrightarrow \mu_\Delta^{-1}(\langle x_1 + \alpha x_2\rangle) = x_1 + \alpha x_2.$$

Формула $\theta_F(\mu_\Delta^{-1}(\langle x_1 + \alpha x_2\rangle), \alpha, \bar{\bar{p}})$ определяет в $F$ отображение $\mu_\Gamma \circ \mu_\Delta$.

*Случай 2.* Для интерпретаций

$$P(V) \overset{\Delta}{\rightsquigarrow} F \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} P(V)$$

требуется показать, что существует формула $\theta_{P(V)}(\bar{u}, x, \bar{y})$, такая что для параметров $\bar{p}$ формула $\theta_{P(V)}(\bar{u}, x, \bar{p})$ определяет в $P(V)$ координатное отображение $\mu_\Delta \circ \mu_\Gamma \colon U_{\Delta\circ\Gamma}(P(V), \bar{p}) \to P(V)$.

Напомним, что $\mu_\Delta$ отображает матрицу $A \in R$ в подпространство $S(A)$ из $V$, охватываемое строками $A$, рассматриваемыми как векторы в $V$ относительно некоторого фиксированного базиса $\bar{x}$ из $V$. Принимая разные базисы $\bar{x}$, мы можем получить разные координатные отображения $\mu_\Delta$, хотя $S(A)$ для $\bar{x}$ и $\alpha\bar{x}$, $\alpha \in F$, одинаковы. При задании кортежа параметров $\bar{p} = (\langle x_1\rangle, \ldots, \langle x_n\rangle, \langle x_1 + x_2\rangle, \ldots, \langle x_1 + x_n\rangle) \in \mathscr{D}$ мы имеем базис $\bar{x}_{\bar{p}}$ для $V$ (см. обозначение 2.1), который определен однозначно с точностью до умножения на скаляр. Для параметров $\bar{p}$ мы определяем $\mu_\Delta$ как указано выше с $\bar{x} = \bar{x}_{\bar{p}}$. Как упоминалось выше, в этом случае $S(A)$ однозначно определяется кортежем $\bar{p}$.

Для $U \in P(V)$ положим $\mu_\Delta^{-1}(U) = A = (A_{i,j}) \in R \subseteq F^{n^2}$, где $R$ — множество приведенных $n \times n$ матриц в ступенчатой форме над $F$ из теоремы 2.2. Затем

$$(\mu_\Gamma^{-1} \circ \mu_\Delta^{-1})(U) = \mu_\Gamma^{-1}(A) = \begin{bmatrix} \langle x_1 + A_{1,1}x_2\rangle & \ldots & \langle x_1 + A_{1,n}x_2\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_1 + A_{n,1}x_2\rangle & \ldots & \langle x_1 + A_{n,n}x_2\rangle \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

где $\mu_\Gamma^{-1}$ применяется к $A$ по-координатно. Поскольку интерпретации $\Gamma$ и $\Delta$ инъективны, отображения $\mu_\Gamma^{-1}$ и $\mu_\Delta^{-1}$ определены корректно. Обозначим матрицу в (2.9) через $A^*$. Очевидно, что множество матриц $R^* = \{A^* \mid A \in R\}$ определимо в $P(V)$ с параметрами $\bar{p}$, поскольку включение $A^*_{i,j} \in A_{2,\bar{p}}$ определимо в $P(V)$, а множество $R$ определимо в $F$ (см. аргументы в теореме 2.2), следовательно $R^*$ определимо в интерпретации $\langle A_{2,\bar{p}}; \oplus, \odot\rangle$ поля $F$ в $P(V)$, а значит и в $P(V)$.

Чтобы установить существование формулы $\theta_{P(V)}(\bar{u}, x, \bar{y})$, такой что для параметров $\bar{p}$ формула $\theta_{P(V)}(\bar{u}, x, \bar{p})$ определяет в $P(V)$ координатное отображение $\mu_\Delta \circ \mu_\Gamma$, достаточно показать, что для $U \in P(V)$ и $A^* \in R^*$ вида (2.9) соотношение

$$U = \langle A_{1,1}x_1 + \ldots + A_{1,n}x_n\rangle + \ldots + \langle A_{n,1}x_1 + \ldots + A_{n,n}x_n\rangle \qquad (2.10)$$

определимо в $P(V)$ с параметрами $\bar{p}$. Именно это и сделано в предложении 2.6.

Это доказывает, что $P(V)$ и $F$ регулярно сильно инъективно биинтерпретируемы друг в друге. Так как интерпретация $\Delta$ абсолютна, то полученная регулярная биинтерпретация полуабсолютна. □

## 3 ПРИЛОЖЕНИЯ

В этом разделе мы описываем некоторые приложения биинтерпретируемости $F$ и $P(V)$. Мы показываем, что фундаментальная теорема проективной геометрии следует из регулярной интерпретируемости $F$ в $P(V)$; для этого не нужна биинтерпретация. Другие теоретико-модельные результаты являются прямыми следствиями общих свойств регулярных биинтерпретаций, изложенных в § 1.5.

**3.1. Основная теорема проективной геометрии.** Регулярная интерпретируемость $F$ и $P(V)$ (теорема 2.1) влечет исходную основную теорему проективной геометрии, здесь не требуется биинтерпретируемость.

Напомним, что отображение $f : V_1 \to V_2$ между векторными пространствами $V_1$ и $V_2$ над изоморфными полями $F_1$ и $F_2$ является полулинейным, если существует изоморфизм полей $\sigma : F_1 \to F_2$, такой что для всех $x, y \in V_1$ и $\alpha, \beta \in F_1$ имеет место равенство $f(\alpha x + \beta y) = \sigma(\alpha)f(x) + \sigma(\beta)f(y)$.

**ТЕОРЕМА** (основная теорема проективной геометрии)**.** Пусть $V_1$ и $V_2$ — конечномерные векторные пространства над полями $F_1$ и $F_2$ соответственно, и $\dim_{F_1} V_1 \geq 3$. Если проективные пространства $P(V_1)$ и $P(V_2)$ изоморфны, то поля $F_1$ и $F_2$ изоморфны и $\dim_{F_1} V_1 = \dim_{F_2} V_2$. Более того, любой изоморфизм $\pi : P(V_1) \to P(V_2)$ индуцируется полулинейной биекцией $f : V_1 \to V_2$.

**Доказательство.** Пусть $\pi$ — изоморфизм, $\pi : P(V_1) \to P(V_2)$. По следствию 3.2, $\dim_{F_1} V_1 = \dim_{F_2} V_2$. Возьмем произвольный кортеж параметров $\bar{p}_1$, который удовлетворяет формуле $\phi_{\text{par}}$ в $P(V_1)$. Тогда $\bar{p}_2 = \pi(\bar{p}_1)$ удовлетворяет формуле $\phi_{\text{par}}$ в $P(V_2)$. Из теоремы 2.1 следует, что интерпретация $\Gamma(P(V_1), \bar{p}_1)$ изоморфна полю $F_1$, а интерпретация $\Gamma(P(V_2), \bar{p}_2)$ — полю $F_2$. Изоморфизм $\pi$ дает изоморфизм $\sigma : \Gamma(P(V_1), \bar{p}_1) \to \Gamma(P(V_2), \bar{p}_2)$. В частности, поля $F_1$ и $F_2$ изоморфны. Мы утверждаем, что $\pi$ индуцируется некоторым полулинейным отображением $V_1 \to V_2$ относительно изоморфизма полей $\sigma$. Обозначим $F_1^* = \Gamma(P(V_1), \bar{p}_1)$ и $F_2^* = \Gamma(P(V_2), \bar{p}_2)$ и отождествим $F_1$ с $F_1^*$ и $F_2$ с $F_2^*$.

Возьмем произвольный элемент $W \in P(V_1)$. Тогда

$$W = \langle \alpha_{1,1}x_1 + \ldots + \alpha_{1,n}x_n, \ldots, \alpha_{m,1}x_1 + \ldots + \alpha_{m,n}x_n \rangle \tag{3.1}$$

для некоторых $\alpha_{i,j} \in F_1$ и базиса $\bar{x} = \bar{x}_{\bar{p}_1}$. По предложению 2.6 равенство (3.1) выполняется в $P(V_1)$ тогда и только тогда, когда

$$P(V_1) \models \Theta_{m,n}(W, \bar{U}_{ij}, \bar{p}_1)$$

где

$$U_{ij} = \langle x_1 + \alpha_{i,j}x_2 \rangle,$$

$1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Учитывая, что $\pi : P(V_1) \to P(V_2)$ является изомор-

физмом, получаем

$$P(V_2) \models \Theta_{m,n}(\pi(W), \overline{\pi(U_{ij})}, \pi(\bar{p}_1))$$

где

$$\pi(U_{ij}) = \langle y_1 + \sigma(\alpha_{i,j})y_2 \rangle,$$

$1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, $\pi(\bar{p}) = \bar{p}_2$, и $\bar{x}_{\bar{p}_2} = (y_1, \ldots, y_n)$. Снова по предложению 2.6,

$$\pi(W) = \langle \sigma(\alpha_{1,1})y_1 + \ldots + \sigma(\alpha_{1,n})y_n, \ldots, \sigma(\alpha_{m,1})y_1 + \ldots + \sigma(\alpha_{m,n})y_n \rangle.$$

Следовательно, $\pi$ индуцируется $\sigma$-полулинейным отображением $g : V_1 \to V_2$, которое определяется действием $x_1 \to y_1, \ldots, x_n \to y_n$. □

**3.2. Разрешимость теории первого порядка.**

**ТЕОРЕМА 3.1.** Пусть $V$ — векторное пространство размерности $n \geq 3$ над полем $F$. Теория $\mathtt{Th}(P(V))$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима теория $\mathtt{Th}(F)$.

Известно, что теории первого порядка поля $\mathbb{R}$ действительных чисел, поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел и поля $\mathbb{Q}_p$ $p$-адических чисел имеют разрешимые теории первого порядка. В то время как поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, а также все его конечные алгебраические расширения (мы называем их *числовыми полями*) имеют неразрешимые теории первого порядка.

**СЛЕДСТВИЕ 3.1.** Пусть $V$ — векторное пространство размерности $n \geq 3$ над полем $F$.

(1) Если $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}_p\}$, то теория первого порядка проективного пространства $P(V)$ разрешима.

(2) Если $F$ — это либо $\mathbb{Q}$, либо числовое поле, то теория первого порядка проективного пространства $P(V)$ неразрешима.

**3.3. Классификация первого порядка.** Регулярная биинтерпретируемость $F$ и $P(V)$ дает полное решение задачи классификации моделей теории первого порядка проективного пространства $P(V)$ с $\dim_F V \geq 3$.

Пусть $\subseteq$ — бинарный предикат, а $\mathscr{P} = \langle P; \subseteq \rangle$ — произвольная структура в языке $\{\subseteq\}$. Задача классификации первого порядка для проективного пространства $P(V)$ требует описания всех структур $\mathscr{P} = \langle P; \subseteq \rangle$ таких, что $P(V) \equiv \mathscr{P}$.

**ТЕОРЕМА 3.2.** Пусть $V$ — векторное пространство размерности $n \geq 3$ над полем $F$. Для любой алгебраической структуры $\mathscr{P} = \langle P; \subseteq \rangle$ выполняется $P(V) \equiv \mathscr{P}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{P}$ изоморфна $P(\bar{V})$, где $\bar{V}$ — векторное пространство размерности $n$ над полем $\bar{F}$, таким что $F \equiv \bar{F}$.

Результат ниже характеризует случай, когда два проективных пространства конечной размерности не менее 3 над полями элементарно эквивалентны.

**ТЕОРЕМА 3.3.** Пусть $V_1$, $V_2$ — конечномерные векторные пространства над полями $F_1$ и $F_2$ соответственно, где $n = \dim_{F_1} V_1$, $m = \dim_{F_2} V_2$ и $n \geq 3$. Тогда

$$P(V_1) \equiv P(V_2) \iff F_1 \equiv F_2 \ \& \ n = m.$$

**Доказательство.** Предположим, что $P(V_1) \equiv P(V_2)$. По следствию 2.2, $\dim_{F_1} V_1 = \dim_{F_2} V_2$. По теореме 2.1, $F_i$ регулярно интерпретируется в $P(V_i)$ теми же формулами $(\Gamma, \phi_{\text{par}})$, поэтому $F_i \simeq \Gamma(P(V_i), \phi_{\text{par}})$, $i = 1, 2$. Так как $P(V_1) \equiv P(V_2)$, то $F_1 \equiv F_2$. Наоборот, предположим, что $F_1 \equiv F_2$ и $m = n$. По теореме 2.2, $P(V_1)$ и $P(V_2)$ абсолютно интерпретируемы в $F_1$ и $F_2$ формулами $\Delta$, поэтому $P(V_1) \simeq \Delta(F_1)$ и $P(V_2) \simeq \Delta(F_2)$. Следовательно, $P(V_1) \equiv P(V_2)$. □

### 3.4. Богатые проективные геометрии.

**ТЕОРЕМА 3.4.** Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство над полем $F$ размерности $n \geq 3$. Если поле $F$ абсолютно богатое, то проективное пространство $P(V)$ также абсолютно богатое.

Известно, что поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$, как и все числовые поля, абсолютно богаты. Отсюда и из теоремы 3.4 вытекает

**СЛЕДСТВИЕ 3.2.** Пусть $F$ — поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ или числовое поле, а $V$ — векторное пространство размерности $n \geq 3$ над $F$. Тогда

проективное пространство $P(V)$ абсолютно богато.

Этот результат показывает, что если $F$ — это $\mathbb{Q}$ или числовое поле, а $V$ — это то же самое, что и выше, то логика первого порядка проективного пространства $P(V)$ чрезвычайно мощна.

**3.5. Элиминация мнимостей.**

**ТЕОРЕМА 3.5.** Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство размерности $n \geq 3$ над полем $F$. $P(V)$ допускает равномерную элиминацию мнимостей с параметрами тогда и только тогда, когда $F$ допускает равномерную элиминацию мнимостей с параметрами.

Известно, что поля $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ и все числовые поля допускают равномерную элиминацию мнимостей (с параметрами). Поэтому имеет место

**СЛЕДСТВИЕ 3.3.** Пусть $V$ — конечномерное векторное пространство размерности $n \geq 3$ над полем $F$. Если $F \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, то проективное пространство $P(V)$ допускает равномерную элиминацию мнимостей с параметрами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. K. G. C. von Staudt, *Geometrie der Lage*, Nürnberg (1874).
2. E. Artin, *Geometric Algebra*, Intersci. Publ., New York (1957).
3. H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley, New York (1969).
4. A. Beutelspacher and U. Rosenbaum, *Projective Geometry: From Foundations to Applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1998).
5. D. Hughes and F. Piper, *Projective Planes* Springer, New York (1982).
6. M. Hall, "Projective planes", *Trans. Am. Math. Soc.* **54**, No. 2, 229–277 (1943).
7. А. И. Ширшов, А. А. Никитин, *Алгебраическая теория проективных плоскостей*, НГУ, Новосибирск (1987).
8. T. Hyttinen and G. Paolini, "First-order model theory of free projective planes"б *Ann. Pure Appl. Log.* **172**, No. 2, Article ID 102888 (2021).

9. Н. Т. Когабаев, "Неразрешимость теории проективных плоскостей", *Алгебра логика*, **49**, No. 1, 3–17 (2010).

10. A. Putnam, *The Fundamental Theorem of Projective Geometry. 2010–2016.*

    https://www3.nd.edu/ andyp/notes/FunThmProjGeom.pdf

11. J. Jeffers, "Lost theorems of geometry"б *Am. Math. Mon.* **107**, No. 9, 800–812 (2000).

12. M. Ojanguren and R. Sridharan, "A note on the fundamental theorem of projective geometry", *Comment. Math. Helv.*, **44**, 310–315 (1969).

13. J. Tits, *Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs*, Springer, Berlin (1974).

14. T. Bokelavadze, A. Lashkhi, "Affine isomorphisms of power groups", *Bull. Georgian Natl. Acad. Sci.* **6**, No. 3, 25–29 (2012).

15. T. Bokelavadze, A. Lashkhi, "Affine lattices of power groups", *J. Math. Sci., New York* **193**, No. 3, 382–387 (2013).

16. T. Bokelavadze, A. Tavadze, "Subgroup lattices of Hall's $W$-power groups", *J. Math. Sci., New York* **191**, No. 6, 751–756 (2013).

17. A. Lashkhi, "Fundamental theorem of affine geometry for Lie algebras", *J. Math. Sci., New York* **191**, No. 6, 768–775 (2013).

18. A. Rottlaender, "Nachweis der Existenz nicht isomorpher Gruppen von gleicher Situation der Untergruppen", *Math. Z.*, **28**, 641–653 (1928).

19. R. Baer, "The significance of the system of subgroups for the structure of the group", *Am. J. Math.*, **61**, No. 1, 1-44 (1939).

20. Л. Е. Садовский, "О структурных изоморфизмах свободных произведений групп", *Мат. сб.* **21**, No. 1, 63–82 (1947).

21. Л. Е. Садовский, "Структурные изоморфизмы свободной метабелевой группы", *Мат. сб.* **42**, No. 4, 445–460 (1957).

22. Л. Е. Садовский, "Проектирования и изоморфизмы нильпотентных групп", *Изв. АН СССР, Сер. мат.* **29**, No. 1, 171–208 (1965).

23. Л. Е. Садовский, "Некоторые теоретико-структурные вопросы теории групп", *Успехи мат. наук* **23**, No. 3, 123–157 (1968).

24. Б. И. Плоткин, "Обобщенные разрешимые и обобщенные нильпотентные группы", *Успехи мат. наук* **13**, No. 4, 89–172 (1958).

25. М. Судзуки, *Строение группы и строение структуры ее подгрупп*, ИЛ, М. (1960)

26. R. Schmidt, *Subgroup Lattices of Groups*, Walter de Gruyter, Berlin (1994).

27. А. С. Пекелис, "Структурные изоморфизмы смешанных метабелевых групп", *Сиб. мат. журн.* **8**, No. 4, 827–834 (1967).

28. D. Marker, "Model Theory: an Introduction", Springer, New York etc. (2002).

29. E. Daniyarova, A. Myasnikov, *Theory of Interpretations. I: Foundations*, Preprint.

30. W. Hodges, *Model Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).

31. O. Kharlampovich, A. Myasnikov, M. Sohrabi, "Rich groups, weak second-order logic, and applications"„ In: *Groups and Model Theory GAGTA Book 2*, pp. 127–191, De Gruyter, Berlin (2021).

32. M. Aschenbrenner, A. Khélif, E. Naziazeno, T. Scanlon, "The logical complexity of finitely generated commutative rings", *Int. Math. Res. Not.*, **2020**, No. 1, 112–166 (2020).

33. S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear Algebra*, Pearson Education, New Jersey (2018).

Статья поступила в редакцию 10 января 2025 г.
после доработки 10 января 2025 г.
принята к публикации 19 марта 2025 г.

Алгебра и логика Том 63, No. 5, 538–546 (2024)

УДК 512.543.72:512.542.7:512.543.22:512.543.27

**О. К. Каримова**[1], **А. А. Клячко**[2]

# КОНЕЧНЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ГРУППЫ СИЛЬНО ВЕРБАЛЬНО ЗАМКНУТЫ

Аннотация: Отвечая на вопрос А. В. Васильева, показываем, что каждая конечная симметрическая (или знакопеременная) группа $H$ является ретрактом всякой группы, содержащей $H$ в качестве вербально замкнутой подгруппы.

Ключевые слова: *Симметрическая группа, ретракт, вербально замкнутая подгруппа.*

*Памяти Виталия Анатольевича Романькова*

Подгруппа $H$ группы $G$ называется *вербально замкнутой* [1], если всякое уравнение вида $w(x, y, \dots) = h$, где $w$ — это элемент свободной группы $F(x, y, \dots)$ и $h \in H$, обладающее решением в $G$, имеет решение и в $H$. Если же каждая конечная система уравнений с коэффициентами из $H$ (т. е. $\{w_1(x, y, \dots) = 1, \dots, w_m(x, y, \dots) = 1\}$, где $w_i \in H * F(x, y, \dots)$, а $*$ обозначает свободное произведение), имеющая решение в $G$, имеет решение в $H$, то подгруппу $H$ называют *алгебраически замкнутой* в $G$.

Алгебраическая замкнутость — это более сильное свойство, чем вербальная замкнутость, однако удивительно часто эти свойства оказываются эквивалентными. Первый нетривиальный результат на эту тему был доказан в 2014 г.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No. 22-11-00075. [1] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; 985481@gmail.com. [2] Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия; klyachko@mech.math.msu.su.

**ТЕОРЕМА** (Мясников — Романьков [1])**.** Вербально замкнутая подгруппа свободной группы конечного ранга алгебраически замкнута.

Позже выяснилось, что имеет место значительно более общий факт: Свободная вербально замкнутая подгруппа любой группы алгебраически замкнута [2].

Этот результат делает осмысленным следующее определение: группу $H$ называют *сильно вербально замкнутой* [3], если она алгебраически замкнута во всякой группе, содержащей $H$ в качестве вербально замкнутой подгруппы. Таким образом, вербальная замкнутость — это свойство подгруппы, а сильная вербальная замкнутость — это свойство абстрактной группы.

Класс сильно вербально замкнутых групп оказался довольно широк. Например, сильно вербально замкнутыми являются

- все абелевы группы [3],
- все свободные группы [2],
    - и даже все почти свободные группы, не содержащие неединичных конечных нормальных подгрупп [2, 4] (напомним, что *почти свободная* группа — это группа, содержащая свободную подгруппу конечного индекса),
- все группы, раскладывающиеся в свободное произведение нетривиальным образом [5],
- фундаментальная группа любой связной поверхности, кроме бутылки Клейна, см. [3, 6],
    - и даже все ацилиндрически гиперболические группы без нетривиальных конечных нормальных подгрупп [7] (это обобщает несколько из приведенных выше результатов),
- все конечные группы с неабелевым монолитом (в частности, все конечные простые группы) [8],

- все диэдральные группы, порядок которых не делится на восемь [8].

Отметим общую теорему о вложении, полученную в [8]: Каждая группа $H$ вкладывается в сильно вербально замкнутую группу мощности $|H|+\aleph_0$, удовлетворяющую всем тождествам группы $H$.

Класс всех групп, удовлетворяющих всем тождествам группы $H$, называют *многообразием, порожденным группой* $H$ и обозначают $\mathbf{var}\,H$, см. [9]. Роль тождеств в этой науке объясняется следующим (простым) замечанием: Если группа $H$ является ретрактом всякой конечно порожденной группы $G \in \mathbf{var}\,H$, содержащей $H$ в качестве вербально замкнутой подгруппы, то $H$ сильно вербально замкнута [1].

Напомним, что *ретрактом* группы называют образ эндоморфизма $\rho$, такого что $\rho \circ \rho = \rho$. Это достаточное условие сильной вербальной замкнутости кажется очень ограничительным, однако, на самом деле, многие группы обладают даже более сильным свойством: группа $H$ называется *сильным ретрактом* [8], если она является ретрактом любой группы $G \supseteq H$ из многообразия $\mathbf{var}\,H$.

**ТЕОРЕМА** (КМО)[8]. Сильными ретрактами являются

- все конечные группы с неабелевым монолитом (в частности, все конечные простые группы),

- каждая конечная группа $H$, содержащая нормальную подгруппу $C$, такую что $C$ совпадает со своим централизатором, не разлагается в прямое произведение нетривиальных нормальных в $H$ подгрупп и $\text{НОД}\,(|C|, |H/C|) = 1$.

Напомним, что *монолитом* группы называется пересечение всех ее неединичных нормальных подгрупп, а *монолитической* — группа с неединичным монолитом.

В общем случае, конечно же, сильная ретрактность гораздо сильнее сильной вербальной замкнутости. Например, все абелевы группы сильно вербально замкнуты (как было отмечено выше), но лишь немногие из них являются сильными ретрактами, как показывает следующая теорема.

**ТЕОРЕМА** (о нильпотентных сильных ретрактах [10]**.** Нильпотентная группа является сильным ретрактом тогда и только тогда, когда она абелева и

- либо делимая,
- либо раскладывается в прямую сумму циклических групп ограниченных в совокупности порядков, любые два неизоморфных слагаемых в которой имеют взаимно простые порядки.

Эта заметка служит ответом на вопрос А. В. Васильева: все ли конечные симметрические группы сильно вербально замкнуты? Для большинства таких групп ответ легко вытекает из теоремы КМО. Трудным казался случай симметрической группы степени четыре, но, как выяснилось, из некоторых давно известных фактов нетрудно выводится, что и эта группа не является исключением, см. далее.

**ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА.** Все конечные симметрические и знакопеременные группы являются сильными ретрактами (в частности, они сильно вербально замкнуты).

**Вопрос.** Будут ли бесконечные симметрические (финитарные и полные) и знакопеременные группы сильно вербально замкнутыми?

У неискушенного читателя может сложиться впечатление, что чуть ли не все группы сильно вербально замкнуты. Действительно, доказать отсутствие этого свойства бывает не просто. До недавнего времени были известны лишь единичные примеры не сильно вербально замкнутых групп:

- две неабелевы группы порядка восемь [2, 11],
- фундаментальная группа бутылки Клейна $\langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$, [6].

Жесткие необходимые условия сильной вербальной замкнутости были получены лишь недавно:

*центр конечно порожденной сильно вербально замкнутой группы*

- *выделяется в ней прямым сомножителем, если группа конечна* [8],

- *чист (=сервантен), если группа, напр., линейна (и вообще практически всегда, т. е. при некоторых дополнительных предположениях, которые почти всегда выполнены)* [12].

Например, не являются сильно вербально замкнутыми

- все конечные нильпотентные неабелевы группы (и даже все конечно порожденные нильпотентные группы с неабелевой периодической частью [10]),
- все неабелевы группы кос,
- группа $\mathbf{SL}_{2024}(\mathbb{Z})$.

Другие результаты о вербальной замкнутости см. в работах [13]–[17].

Назовем группу $H$ *максимальной монолитической* в классе групп $\mathscr{K} \ni H$, если она не содержится ни в какой бóльшей группе из $\mathscr{K}$, монолит которой содержит монолит группы $H$ (т. е. из включений $H \subseteq G \in \mathscr{K}$ и (монолит группы $H$) $\subseteq$ (монолит группы $G$) вытекает равенство $G = H$).

**ЛЕММА** (о монолитических сильных ретрактах)**.** Конечная монолитическая группа $H$ является сильным ретрактом тогда и только тогда, когда она является максимальной монолитической в классе конечных групп из $\mathbf{var}\, H$.

**Доказательство.** В одну сторону утверждение очевидно: ядро ретракции $G \to H$ на собственную подгруппу обязано содержать монолит группы $G$, поэтому он должен тривиально пересекать $H$.

Докажем в другую сторону, т. е. предположим, что группа $H$ максимальная монолитическая в классе конечных групп из $\mathbf{var}\, H \ni G \supseteq H$. Мы хотим построить ретракцию $G \to H$. Воспользуемся следующим утверждением: Конечная подгруппа $A$ группы $B$ является ретрактом тогда и только тогда, когда она является ретрактом каждой конечно порожденной подгруппы группы $B$, содержащей $A$, [8, § 2].

Таким образом, группу $G$ можно считать конечно порожденной, т. е. даже конечной, поскольку многообразие, порожденное конечной группой

состоит из локально конечных групп [9]. Выберем в $G$ максимальную нормальную подгруппу $N$, тривиально пересекающую $H$ (или, что то же самое, не содержащую монолит $M$ группы $H$). Тогда

- естественный гомоморфизм $\pi\, G \to G/N$ будет инъективным на $H$;

- группа $G/N$ окажется монолитической с монолитом, содержащим $\pi(M)$ (в силу максимальности нормальной подгруппы $N$);

- $G/N = \pi(H)$ (поскольку $\pi(H) \simeq H$ максимальная монолитическая в классе конечных групп из $\mathbf{var}\, H$);

- тогда композиция $G \xrightarrow{\pi} G/N = \pi(H) \simeq H$ (с подходящим изоморфизмом) окажется искомой ретракцией $G \to H$.

Это завершает доказательство леммы. □

**Доказательство основной теоремы..** Симметрические группы степени, не превосходящей двух, и знакопеременные группы степени, не превосходящей трех, являются циклическими и, следовательно, сильными ретрактами по теореме Денисова о нильпотентных сильных ретрактах, см. введение.

Симметрические и знакопеременные группы конечной степени $n \geqslant 5$ являются монолитическими с неабелевым монолитом, поэтому они тоже суть сильные ретракты по теореме КМО.

Монолиты симметрической группы $S_3$ степени три и знакопеременной группы $A_4$ степени четыре абелевы (это знакопеременная группа $A_3$ степени три и четверная группа Клейна $V_4$), поэтому первое утверждение теоремы КМО неприменимо, зато второе применимо (в качестве $C$ следует взять монолит).

Единственный оставшийся случай — это симметрическая группа $H = S_4$ степени четыре. Эта группа монолитическая (монолит — это четверная группа Клейна $V_4$). Классификация монолитических групп из многообра-

зия, порожденного симметрической группой степени четыре, известна:

> *конечные ненильпотентные монолитические группы из многообразия* $\mathbf{var}\, S_4$ *— это в точности симметрические группы степеней три и четыре и знакопеременная группа степени четыре* [18]. (∗)

Таким образом, $S_4$ — это максимальная монолитическая группа в классе конечных групп из $\mathbf{var}\, S_4$. Применение леммы о монолитических сильных ретрактах завершает доказательство. □

Дадим некоторые пояснения относительно классификации (∗). Доказан более общий результат, а именно имеет место

**ЛЕММА** ([18, лемма 4.3.1])**.** Если конечная ненильпотентная монолитическая группа $G \in \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2$, силовская 2-подгруппа которой лежит в $\mathfrak{D}$, удовлетворяет тождеству $\left[[x,y]^3, y^3, y^2\right] = 1$, то $G$ изоморфна $S_4$, $A_4$ или $S_3$.

Здесь $\mathfrak{A}_n$ — это многообразие абелевых групп экспоненты $n$, а $\mathfrak{D}$ — это многообразие, порожденное диэдральной группой порядка восемь (оно же порождается группой кватернионов, и оно же задается тождествами $x^4 = 1$ и $[x^2, y] = 1$).

- Многообразие, порожденное группой $S_4$, конечно же, содержится в произведении многообразий $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ и $\mathfrak{A}_2$, поскольку сама группа $S_4$ там содержится: факторы субнормального ряда $\{1\} \lhd V_4 \lhd A_4 \lhd S_4$ являются абелевыми группами экспонент два, три и два.

- Симметрическая группа $S_4$ (а следовательно, всякая группа из $\mathbf{var}\, S_4$) удовлетворяет тождеству $\left[[x,y]^3, y^3, y^2\right] = 1$, что легко проверить (на самом деле, в [18] выписан в явном виде базис тождеств группы $S_4$).

- Силовская 2-подгруппа всякой конечной группы из $\mathbf{var}\, S_4$ лежит в $\mathfrak{D}$. Это вытекает из того, что силовская 2-подгруппа группы $S_4$ является диэдральной группой порядка восемь, и из следующего общего факта (который непосредственно следует из теоремы Биркгофа):

*силовская $p$-подгруппа всякой конечной группы из многообразия, порожденного конечной группой $G$, содержится в многообразии, порожденном силовской $p$-подгруппой группы $G$.*

Тем самым классификация $(*)$ действительно является частным случаем для [18, лемма 4.3.1].

**Благодарности.** Авторы выражают свою благодарность А. Ю. Ольшанскому за ценное замечание. Второй автор благодарит Фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Myasnikov, V. Roman'kov, "Verbally closed subgroups of free groups", *J. Group Theory*, **17**, No. 1, 29–40 (2014).
2. А. А. Клячко, А. М. Мажуга, "Вербально замкнутые почти свободные подгруппы", *Мат. сб.*, **209**, No. 6, 75–82 (2018).
3. A. M. Mazhuga, "Strongly verbally closed groups", *J. Algebra*, **493**, 171–184 (2018).
4. A. A. Klyachko, A. M. Mazhuga, V. Yu. Miroshnichenko, "Virtually free finite-normal-subgroup-free groups are strongly verbally closed", *J. Algebra*, **510**, 319–330 (2018).
5. А. М. Мажуга, "Свободные произведения групп сильно вербально замкнуты" *Мат. сб.*, **210**, No. 10, 122–160 (2019).
6. A. A. Klyachko, "The Klein bottle group is not strongly verbally closed, though awfully close to being so", *Can. Math. Bull.*, **64**, No. 2, 491–497 (2021).
7. O. Bogopolski, "Equations in acylindrically hyperbolic groups and verbal closedness", *Groups, Geom. Dyn.*, **16**, No. 2, 613–682 (2022).
8. A. A. Klyachko, V. Yu. Miroshnichenko, A. Yu. Olshanskii, "Finite and nilpotent strongly verbally closed groups", *J. Algebra Appl.*, **22**, No. 9, Article ID 2350188, 19 p. (2023).
9. Х. Нейман, *Многообразия групп*, Мир, М. (1969).

10. F. D. Denissov, "Finite normal subgroups of strongly verbally closed groups", *J. Group Theory*, **27**, No. 5, 1039–1057 (2024).

11. В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, А. А. Конырханова, "Алгебраически и вербально замкнутые подгруппы и ретракты конечно порожденных нильпотентных групп", *Сиб. мат. журн.*, **58**, No. 3, 686–699 (2017).

12. F. D. Denissov, A. A. Klyachko, "The centre of a finitely generated strongly verbally closed group is almost always pure", *Q. J. Math.*, **75**, No. 3, 1149–1156 (2024).

13. V. A. Roman'kov, "Equations over groups", *Groups Complex. Cryptol.*, **4**, No. 2, 191–239 (2012).

14. В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, "Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп", *Алгебра и логика*, **52**, No. 4, 502–525 (2013).

15. A. M. Mazhuga, "On free decompositions of verbally closed subgroups in free products of finite groups", *J. Group Theory*, **20**, No. 5, 971–986 (2017).

16. В. А. Романьков, Е. И. Тимошенко, "О вербально замкнутых подгруппах свободных разрешимых групп", *Алгебра и логика*, **59**, No. 3, 367–384 (2020).

17. Е. И. Тимошенко, "Ретракты и вербально замкнутые подгруппы относительно свободных разрешимых групп", *Сиб. мат. журн.*, **62**, No. 3, 659–667 (2021).

18. J. Cossey, S. O. MacDonald, A. P. Street, "On the laws of certain finite groups", *J. Aust. Math. Soc.*, **11**, No. 4, 441–489 (1970).

Статья поступила в редакцию 2 июня 2024 г.
после доработки 2 июня 2024 г.
принята к публикации 18 декабря 2024 г.

Алгебра и логика Том 63, No. 5, 547–563 (2024)

УДК 512.5:510.6

**Н. С. Романовский**

# ПОПОЛНЕНИЕ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ БАУМСЛАГА — СОЛИТЕРА: ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ

Аннотация: Для разрешимой группы Баумслага — Солитера $\mathrm{BS}(1,n)$ $(n>1)$ определяется делимое пополнение $\mathrm{BSd}(1,n)$. Описываются группы, элементарно эквивалентные группе $\mathrm{BSd}(1,n)$, находится аксиоматика теории группы $\mathrm{BSd}(1,n)$, доказывается разрешимость этой теории.

Ключевые слова: *Разрешимая группа Баумслага — Солитера, делимое пополнение, разрешимая теория.*

*Светлой памяти Виталия Анатольевича Романькова*

## ВВЕДЕНИЕ

В работах автора и А. Г. Мясникова изучалась алгебраическая геометрия над так называемыми жесткими группами, а затем и теория моделей этих групп (см. обзор автора, изложенный в [1]). Были также определены делимые жесткие группы и доказано, что всякая жесткая группа вкладывается в делимую. Теория класса делимых $m$-жестких (ступени разрешимости $m$) групп оказалась похожа на классическую теорию алгебраически замкнутых полей, она полна, разрешима, $\omega$-стабильна и обладает другими хорошими свойствами. Имеется обобщение понятия жесткой группы: в [2] определены обобщенно жесткие или $r$-группы. Для них, однако, многие

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (тема FWNF-2022-0002). Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; rmnvski@math.nsc.ru.

вопросы алгебраической геометрии и теории моделей оказались сложнее, чем для жестких групп.

В [3, 4] изучались 2-ступенно разрешимые $r$-группы. Поскольку в настоящей работе речь также пойдет, в основном, о 2-ступенно разрешимых группах, удобно будет рассмотреть подкласс класса 2-ступенно разрешимых обобщенно жестких групп, который в [4] обозначался через $\mathscr{R}_2$. Прежде, чем его определить, напомним, что если в группе $G$ есть абелева нормальная подгруппа $B$ и $A = G/B$, то действие группы $G$ на $B$ сопряжениями

$$b \to b^g = g^{-1}bg$$

определяет на $B$ структуру правого модуля над групповым кольцом $\mathbb{Z}A$.

Говорят, что 2-ступенно разрешимая группа $G$ является *жесткой* (2-*жесткой*), если в ней есть нормальный ряд

$$G = \rho_1(G) > \rho_2(G) > \rho_3(G) = 1, \tag{0.1}$$

с абелевыми факторами $A = G/\rho_2(G),\ \rho_2(G)$, причем группа $A$ не имеет $\mathbb{Z}$-кручения, а модуль $\rho_2(G)$ не имеет $\mathbb{Z}A$-кручения.

Откажемся теперь от последнего ограничения и допускаем, что модуль $\rho_2(G)$ может иметь $\mathbb{Z}A$-кручение. Возьмем тогда аннулятор $\mathrm{An}(\rho_2(G))$ модуля $\rho_2(G)$ в $\mathbb{Z}A$ и рассмотрим кольцо $R = \mathbb{Z}A/\mathrm{An}(\rho_2(G))$. Понятно, что $\rho_2(G)$ можно рассматривать как $R$-модуль. Если в определении 2-жесткой группы заменить условие „$\rho_2(G)$ не имеет $\mathbb{Z}A$-кручения“ на „$\rho_2(G)$ не имеет $R$-кручения и группа $A$ канонически вкладывается в мультипликативную группу обратимых элементов $R^*$ кольца $R$,“ то получим определение группы класса $\mathscr{R}_2$. В такой группе ряд (1), если вообще существует, определяется однозначно и называется *жестким*. Поэтому для членов ряда используется обозначение $\rho_i(G)$. Легко видеть, что кольцо $R$ является областью целостности, а централизатор любого нетривиального элемента из $\rho_2(G)$ совпадает с $\rho_2(G)$. В частности, подгруппа $\rho_2(G)$ равняется централизатору любого неединичного коммутатора двух элементов и поэтому может быть определена в сигнатуре теории групп как $\exists$-, так и $\forall$-формулой. В

рассматриваемой ситуации будем говорить, что пара $(A, R)$ ассоциируется с группой $G$. В ней по построению $R$ — коммутативная область целостности, $A$ — подгруппа без кручения из $R^*$, порождающая все $R$ как кольцо. Если какая-то другая группа $G' \in \mathscr{R}_2$ содержит $G$ и $(A', R')$ — ассоциированная с ней пара, то $(A, R)$ будет ее подпарой, т. е. $A$-подгруппа в $A'$, $R$ — подкольцо в $R'$.

Разрешимая группа Баумслага–Солитера

$$\mathrm{BS}(1, n) = \langle a, b \mid a^{-1}ba = b^n \rangle \ (n > 1)$$

не является жесткой, но принадлежит классу $\mathscr{R}_2$. Для нее $R = \mathbb{Q}_n = \mathbb{Q}[1/n]$ — кольцо рациональных чисел, представимых в виде дробей, знаменатели которых являются степенями $n$, $A = n^{\mathbb{Z}}$ — бесконечная циклическая мультипликативная группа с порождающим $n$, сама группа отождествляется с группой матриц

$$\begin{pmatrix} n^{\mathbb{Z}} & 0 \\ \mathbb{Q}_n & 1 \end{pmatrix}.$$

Группа $G \in \mathscr{R}_2$ называется *делимой*, если $A$ — делимая абелева группа (она тогда представима в виде прямой суммы копий $\mathbb{Q}$), и модуль $\rho_2(G)$ является делимым $R$-модулем, а тогда на $\rho_2(G)$ можно смотреть как на векторное пространство над полем частных $K$ кольца $R$. Пусть $\mathscr{D}_2$ обозначает класс делимых групп из $\mathscr{R}_2$. Известны следующие факты.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1** [3, теорема 3]**.** Каждая группа из класса $\mathscr{R}_2$ вкладывается в делимую.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2** [3, теорема 2]**.** Каждая группа $G \in \mathscr{D}_2$ расщепляется в полупрямое произведение $A \cdot \rho_2(G)$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3** [2, теоремы 3, 4]**.** Существуют рекурсивные системы аксиом в сигнатуре теории групп, определяющие каждый из классов $\mathscr{R}_2$ и $\mathscr{D}_2$.

Непосредственно проверяется полезное для реализации каких-то усло-

вий в виде формул следующее

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.** Пусть $G \in \mathscr{R}_2$ и $(A, R)$ — ассоциированная с $G$ пара. По определению всякий элемент из $R$ может быть выражен через какие-то элементы $x_1, \ldots, x_s$ из $A$, т. е. представим в виде линейной комбинации $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_q u_q$ мономов $u_1, \ldots, u_q$ от $x_1^{\pm 1}, \ldots, x_s^{\pm 1}$ с целыми коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. Тогда формула от переменных $x_1, \ldots, x_s$

$$\bigwedge_i (x_i \in A) \wedge (\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_q u_q = 0)$$

интерпретируется над $G$ в сигнатуре теории групп как $\forall$-формула

$$\forall z_1 \forall z_2 (([z_1, z_2]^{u_1})^{\alpha_1} \ldots ([z_1, z_2]^{u_q})^{\alpha_q} = 1),$$

или как $\exists$-формула

$$\exists z_1 \exists z_2 (([z_1, z_2] \neq 1) \wedge (([z_1, z_2]^{u_1})^{\alpha_1} \ldots ([z_1, z_2]^{u_q})^{\alpha_q} = 1)).$$

Группа Баумслага — Солитера $\mathrm{BS}(1, n)$ $(n > 1)$ вкладывается в делимую группу

$$\mathrm{BSd}(1, n) = \begin{pmatrix} n^{\mathbb{Q}} & 0 \\ \mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}}) & 1 \end{pmatrix},$$

представленную матрицами над полем $\mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}})$, здесь $n^{\mathbb{Q}}$ обозначает множество рациональных степеней числа $n$.

Легко доказывается

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.** Если группа $G \in \mathscr{D}_2$ содержит $\mathrm{BS}(1, n)$ $(n > 1)$ в качестве подгруппы, то она содержит группу $\mathrm{BSd}(1, n)$, которая будет наименьшей делимой подгруппой в $G$, содержащей $\mathrm{BS}(1, n)$.

Поэтому мы можем назвать $\mathrm{BSd}(1, n)$ *делимым пополнением группы Баумслага — Солитера* $\mathrm{BS}(1, n)$. Отметим, что эта группа будет полной в терминологии теории групп, т. е. в ней из любого элемента (однозначно) извлекается корень любой натуральной степени.

Известная теорема Носкова [5] утверждает, что элементарная теория

конечно порожденной разрешимой группы алгоритмически разрешима тогда и только тогда, когда группа почти абелева (является расширением абелевой группы с помощью конечной). В частности, теория группы $\mathrm{BS}(1,n)$ неразрешима. Иная ситуация в случае делимого пополнения $\mathrm{BSd}(1,n)$. Прежде, чем сформулировать основные результаты, отметим, что группы Баумслага–Солитера $\mathrm{BS}(1,n)$ $(n>1)$ при разных $n$ различны, а вот их пополнения могут совпадать. Введем эквивалентность $n_1 \sim n_2 \Leftrightarrow \mathrm{BSd}(1,n_1) = \mathrm{BSd}(1,n_2)$, последнее условие равносильно $n_1^{\mathbb{Q}} = n_2^{\mathbb{Q}}$. В каждом классе эквивалентности существует (единственное) *приведенное число*, т. е. такое $n>1$, которое не является собственной степенью. Поэтому при изучении групп $\mathrm{BSd}(1,n)$ можно предполагать, что $n$ — приведенное натуральное число.

Обозначим через $\mathscr{B}_n$ класс групп $G \in \mathscr{D}_2$, содержащих в качестве подгруппы $\mathrm{BSd}(1,n)$ и удовлетворяющих требованию: если $(A,R)$ — ассоциированная с $G$ пара и множество $\{n\} \cup Y$ составляет базу $A$ как $\mathbb{Q}$-группы, то элементы из $Y$ алгебраически независимы (над $\mathbb{Z}$ в $R$). В этой ситуации $R$ можно отождествить с групповой алгеброй над кольцом $\mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}]$ свободной абелевой $\mathbb{Q}$-группы с базой $Y$. Группа $G$ отождествляется с группой матриц $\begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix}$, где $V$ — некоторое векторное пространство над полем частных кольца $R$. Из определений получается $\mathscr{B}_{n_1} = \mathscr{B}_{n_2} \Leftrightarrow n_1 \sim n_2$.

**ТЕОРЕМА 1.** *Если группа $G$ элементарно эквивалентна* $\mathrm{BSd}(1,n)$, *то* $G \in \mathscr{B}_n$.

Из доказательства теоремы будет извлечена рекурсивная система аксиом $\Sigma$, которая определяет класс групп $\mathscr{B}_n$.

**ТЕОРЕМА 2.** Теория класса групп $\mathscr{B}_n$, т. е. определенная аксиомами $\Sigma$, является полной и поэтому она совпадает с теорией группы $\mathrm{BSd}(1,n)$, в частности, эта теория разрешима.

В доказательстве теоремы 1 существенно используются идеи из работы [6], а в доказательстве теоремы 2 — из [7]. Мы планируем в дальнейшем показать, что изучаемая теория будет $\omega$-стабильной, и исследовать другие аспекты этой теории.

## 1 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1

**Доказательство теоремы 1.** Без ограничения общности можно предполагать, что $n$ — приведенное натуральное число. Тогда любой многочлен вида $x^m - n$ ($m \in \mathbb{N}$) неприводим над $\mathbb{Q}$, и следовательно степень расширения полей $\mathbb{Q}(\sqrt[m]{n})/\mathbb{Q}$ равна $m$. Действительно, если $x^m - n$ разлагается в произведение целочисленных многочленов $h_1(x)$ и $h_2(x)$ степеней $k$ и $m-k$ со старшим коэффицентом 1, то свободный член многочлена $h_1(x)$, пусть это будет $a$, с точностью до знака равен произведению $k$ корней многочлена $x^m - n$, каждый из которых равен значению $\sqrt[m]{n}$, умноженному на какой-то корень из 1 степени $m$. Тогда модуль целого числа $a$ равен $(\sqrt[m]{n})^k$. Разложим $|a|$ на простые множители $|a| = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$. Имеем $((\sqrt[m]{n})^k)^m = n^k = p_1^{\alpha_1 m} \dots p_s^{\alpha_s m}$. Так как $n$ — приведенное число, в целых числах из $n^k$ могут извлекаться корни только степеней, делящих $k$. У нас же видно, что извлекается корень степени $m > k$; противоречие.

Если группа $G$ элементарно эквивалентна $\mathrm{BSd}(1,n)$, то, по предложению 3, $G \in \mathscr{D}_2$. Пусть $(A,R)$ — ассоциированная с $G$ пара. По предложению 2 имеется расщепление $G = A \cdot \rho_2(G)$. Легко понять, что кольцо $R$ содержит $\mathbb{Q}_n$ и $n \in A$, откуда группа $\mathrm{BS}(1,n)$ содержится в качестве подгруппы в $G$, а тогда и группа $\mathrm{BSd}(1,n)$ содержится в $G$ (предл. 5). Группа $A$ является делимой абелевой группой без кручения, пусть $\{n\} \cup Y$ — ее база как $\mathbb{Q}$-группы. Требуется доказать, что элементы из $Y$ алгебраически независимы.

Допустим противное, найдутся набор $(y_1, \dots, y_s)$ различных элементов из $Y$ и нетривиальный многочлен $f(x_1, \dots, x_s)$ с целыми коэффициентами, для которого $f(y_1, \dots, y_s) = 0$. Очевидно, что набор $(y_1, \dots, y_s)$ не может удовлетворять никакому равенству $n^k x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s} = n^l x_1^{l_1} \dots x_s^{l_s}$, где $(k, k_1 \dots k_s)$, $(l, l_1 \dots l_s)$ — различные наборы целых чисел. Представим многочлен $f$ в виде $f_1 - f_2$, где в $f_1$ собраны мономы с положительными коэффициентами, а в $-f_2$ — с отрицательными. Затем коэффициенты многочленов $f_1$ и $f_2$ разложим по степеням $n$. Многочлену $f$ сопоставим множество $M = M(f)$ элементов вида $n^k x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s}$, где $k, k_1, \dots, k_s$ — целые

неотрицательные числа, участвующих в этих разложениях, и его разбиение на подмножества $M_1$ и $M_2$ так, что $f_i$ $(i = 1, 2)$ представляет из себя линейную комбинацию элементов из $M_i$ с коэффициентами из множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$. По построению, если $n^k x_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s} \in M_1$, $n^l x_1^{l_1} \ldots x_s^{l_s} \in M_2$, то наборы $(k_1 \ldots k_s)$, $(l_1 \ldots l_s)$ различны. Обозначим через $\varphi_f(x_1, \ldots, x_s)$ конъюнкцию всех неравенств $u(x_1, \ldots, x_s) \neq v(x_1, \ldots, x_s)$, где $u, v$ — различные элементы из $M$. Очевидно, на $G$ истинна формула

$$\sigma_f = \exists x_1 \ldots \exists x_s \left( \bigwedge_i (x_i \in A) \wedge \varphi_f(x_1, \ldots, x_s) \wedge (f(x_1, \ldots, x_s) = 0) \right). \quad (1.1)$$

Конечно, выражение $\sigma_f$ строго не является формулой в языке теории групп, однако с помощью предложения 4 его можно переписать, что важно, в виде $\exists$-формулы. Эта формула должна быть истинна и на группе $\mathrm{BSd}(1, n)$. Поэтому найдется набор элементов $(c_1, \ldots, c_s)$ из $n^{\mathbb{Q}}$, являющийся решением формулы $\varphi_f(x_1, \ldots, x_s) \wedge (f(x_1, \ldots, x_s) = 0)$.

Выберем натуральное число $m$, для которого все $c_i \in \langle n^{1/m} \rangle$. Поле $\mathbb{Q}(n^{\frac{1}{m}})$ разлагается в прямую сумму $\mathbb{Q}$-модулей

$$\mathbb{Q},\ n^{\frac{1}{m}} \cdot \mathbb{Q},\ n^{\frac{2}{m}} \cdot \mathbb{Q}, \ldots,\ n^{\frac{m-1}{m}} \cdot \mathbb{Q}.$$

Возьмем произвольный элемент $n^k x_1^{k_1} \ldots x_s^{k_s}$ из $M$. Его значение $n^k c_1^{k_1} \ldots c_s^{k_s}$ будет принадлежать одному из смежных классов

$$n^{\mathbb{Z}},\ n^{\frac{1}{m}} \cdot n^{\mathbb{Z}},\ n^{\frac{2}{m}} \cdot n^{\mathbb{Z}}, \ldots,\ n^{\frac{m-1}{m}} \cdot n^{\mathbb{Z}}$$

циклической группы $(n^{\frac{1}{m}})^{\mathbb{Z}}$ по подгруппе $n^{\mathbb{Z}}$. Эти классы лежат в указанных выше соответствующих $\mathbb{Q}$-модулях. Без ограничения общности (ведь мы можем многочлен $f$ умножить на подходящую натуральную степень $n$) будем предполагать, что все значения элементов из $M$ при $x_1 = c_1, \ldots, x_s = c_s$ лежат в объединении

$$n^{\mathbb{N}} \cup\ n^{\frac{1}{m}} \cdot n^{\mathbb{N}} \cup\ n^{\frac{2}{m}} \cdot n^{\mathbb{N}} \cup \ldots \cup\ n^{\frac{m-1}{m}} \cdot n^{\mathbb{N}}.$$

К примеру, пусть $\{u_1, u_2, u_3\}$ — множество тех элементов из $M_1$, значения которых лежат в $n^{\frac{1}{m}} \cdot n^{\mathbb{N}}$. Тогда эти значения имеют вид $n^{\frac{1}{m}} \cdot n^{k_1}, n^{\frac{1}{m}} \cdot n^{k_2}, n^{\frac{1}{m}} \cdot n^{k_3}$, где $k_1, k_2, k_3$ — различные натуральные числа, а проекция $f_1(c_1, \ldots, c_s)$ на модуль $n^{\frac{1}{m}} \cdot \mathbb{Q}$ представима в виде

$$n^{\frac{1}{m}}(\alpha_1 \cdot n^{k_1} + \alpha_2 \cdot n^{k_2} + \alpha_3 \cdot n^{k_3}),\ \alpha_i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Если же взять значения элементов из $M_2$, которые лежат в $n^{\frac{1}{m}} \cdot n^{\mathbb{N}}$, то они имеют вид $n^{\frac{1}{m}} \cdot n^l$, где $l \neq k_1, k_2, k_3$. Из этого следует, что $f_1(c_1, \ldots, c_s) \neq f_2(c_1, \ldots, c_s)$, последнее противоречит равенству $f(c_1, \ldots, c_s) = 0$. Следовательно, формула $\sigma_f$ ложна на $\mathrm{BSd}(1, n)$, что противоречит предположению об элементарной эквивалентности групп $G$ и $\mathrm{BSd}(1, n)$. Теорема 1 доказана. □

**Замечание 1.** Из доказательства теоремы 1 вытекает, что если группа $G \in \mathscr{D}_2$ содержит $\mathrm{BSd}(1, n)$ и не принадлежит классу $\mathscr{B}_n$, то на ней выполняется одна из формул вида $\sigma_f$, в то время как все такие формулы не выполняются на $\mathrm{BSd}(1, n)$.

По предложению 3 существует рекурсивная система аксиом $\Sigma_1$ в сигнатуре теории групп, которая определяет класс групп $\mathscr{D}_2$. Несложно выписать систему аксиом $\Sigma_2$, которая для группы $G \in \mathscr{D}_2$ реализует условие: $G$ содержит в качестве подгруппы $\mathrm{BS}(1, n)$ (тогда она содержит и $\mathrm{BSd}(1, n)$). Обозначим также через $\Sigma_3$ множество аксиом $\neg\sigma_f$, см. формулу (2), по всем нетривиальным целочисленным многочленам $f$ от любого конечного числа переменных. Система аксиом $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ эквивалентна некоторой рекурсивной системе аксиом, которую обозначим через $\Sigma$. По построению группа $\mathrm{BSd}(1, n)$ удовлетворяет аксиомам $\Sigma$.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.** Рекурсивная система аксиом $\Sigma$ определяет класс групп $\mathscr{B}_n$.

**Доказательство.** Из замечания 1 следует, что группы, удовлетворяющие аксиомам $\Sigma$ принадлежат классу $\mathscr{B}_n$. Покажем обратное. По построению группы из $\mathscr{B}_n$ удовлетворяют аксиомам $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Требуется показать, что они удовлетворяют аксиомам $\Sigma_3$. При доказательстве теоремы 1 мы

установили, что этим аксиомам удовлетворяет группа $\mathrm{BSd}(1,n)$. Поскольку $\Sigma_3$ состоит из $\forall$-формул, достаточно понять, что любая группа $G \in \mathscr{B}_n$ универсально эквивалентна $\mathrm{BSd}(1,n)$.

Напомним определение из [4]. Назовем морфизмом $(A_1,R_1) \to (A_2,R_2)$ двух пар гомоморфизм колец $R_1 \to R_2$, переводящий $A_1$ в $A_2$. Будем говорить, что морфизм существенный, если образ $A_1$ в $A_2$ неединичная подгруппа.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7** [4]**.** Универсальные теории двух расщепленных групп $G_1, G_2 \in \mathscr{R}_2$ совпадают тогда и только тогда, когда каждая из соответствующих пар $(A_1,R_1)$, $(A_2,R_2)$ локально дискриминируется другой существенными морфизмами.

Итак, пусть $G \in \mathscr{B}_n$ и $(A,R)$ — соответствующая пара. Пара $(n^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}])$, соответствующая группе $\mathrm{BSd}(1,n)$, является подпарой в $(A,R)$, поэтому достаточно доказать, что $(A,R)$ локально дискриминируется парой $(n^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}])$. Пусть $F$ — конечно подмножество ненулевых элементов из $R$, которое мы хотим дискриминировать. Тогда в $(A,R)$ найдутся такие подпара $(A',R')$ и натуральное число $m$, что $A'$ — свободная абелева группа с базой $\{n^{\frac{1}{m}}, y_1, \ldots, y_s\}$, $R'$ — кольцо лорановых многочленов над $\mathbb{Z}[n^{\pm\frac{1}{m}}]$ от $y_1, \ldots, y_s$ и $F \subseteq R'$. Задача легко сводится к случаю, когда $F$ состоит просто из одного нетривиального лоранова многочлена $f(y_1, \ldots, y_s)$ над кольцом $\mathbb{Z}[n^{\pm\frac{1}{m}}]$. Очевидно, существует набор натуральных чисел $(k_1, \ldots, k_s)$ такой что $f(n^{k_1}, \ldots, n^{k_s}) \neq 0$. Искомый морфизм пар $(A',R') \to (n^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}])$ задается тождественным отображением на $\mathbb{Z}[n^{\pm\frac{1}{m}}]$ и $y_1 \to n^{k_1}, \ldots, y_s \to n^{k_s}$. Предложение 6 доказано. □

## 2 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

**2.1.** В этом разделе приведем некоторые вспомогательные утверждения.

**ЛЕММА 1.** Пусть $C = (c_{ij})$ — квадратная матрица порядка $r$, составленная из натуральных чисел; $M$ — максимальное значение $c_{ij}$ по всем $(i,j) \neq (r,r)$; определитель матрицы, полученной вычеркиванием последней строки и последнего столбца, отличен от нуля; $c_{rr} \geq M^r \cdot r!$. Тогда

$\det C \neq 0$.

Для доказательства достаточно рассмотреть разложение $\det C$ по последней строке.

**ЛЕММА 2.** Пусть набор натуральных чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ удовлетворяет неравенствам $c_i \geq c_{i-1}^i \cdot i!$ при $i = 2, \ldots, m$. Для $k < m$ рассмотрим матрицу

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_k \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m-k+1} & c_{m-k+2} & \ldots & c_m \end{pmatrix}.$$

Тогда любой минор этой матрицы отличен от нуля.

**Доказательство.** Пусть число строк $m - k + 1$ и число столбцов $k$ рассматриваемой матрицы не меньше $r \geq 2$, и по индукции любой минор порядка $r - 1$ отличен от нуля. Возьмем минор порядка $r$. Тогда можно утверждать, что он удовлетворяет условию леммы 1 и, следовательно, отличен от нуля. Лемма доказана. □

Пусть $n$ — приведенное натуральное число и $u \in \mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}})$. Тогда найдется такое натуральное число $m$, что $u \in \mathbb{Q}(\alpha)$, где $\alpha = n^{\frac{1}{m}}$. Элемент $u$ однозначно представим в виде линейной комбинации элементов $1, \alpha, \ldots, \alpha^{m-1}$ с рациональными коэффициентами. Назовем *длиной* $u$ число ненулевых коэффициентов в таком представлении. Легко видеть, что длина не зависит от выбора $m$ и не меняется при умножении на элемент из $n^{\mathbb{Q}}$, а также, что длина произведения $uv$ не превосходит произведение длин $u$ и $v$.

**ЛЕММА 3.** Пусть $n$ — приведенное натуральное число, $\alpha = n^{\frac{1}{m}}$,

$$u = c_1 + c_2\alpha + \ldots + c_m\alpha^{m-1},$$

где $c_i$ — натуральные числа с условием $c_i \geq c_{i-1}^i \cdot i!$ при $i = 2, \ldots, m$. Если длина элемента $v \in \mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}})$ равна $s + 1$ $(s \geq 0)$, то длина элемента $uv$ не меньше $m - s(s^2 + s + 1)$.

**Доказательство.** Сначала рассмотрим основной случай, когда $v \in$

$\mathbb{Q}(\alpha)$. Можно предполагать, что

$$v = b_o + b_1\alpha^{k_1} + \ldots + b_s\alpha^{k_s},\ 0 \neq b_i \in \mathbb{Q},\ 0 < k_1 < \ldots < k_s < m.$$

Отождествим $u$ с координатной строкой $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ и разобьем ее на подстроки $(w_{s+1}, w_s, \ldots, w_2, w_1)$, где длина строки $w_1$ равна $k_1$, длина строки $(w_2, w_1)$ равна $k_2$, ... , длина строки $(w_s, \ldots, w_2, w_1)$ равна $k_s$. Тогда

$$\begin{aligned} u\alpha^{k_1} &= (nw_1, w_{s+1}, \ldots, w_2), \\ u\alpha^{k_2} &= (nw_2, nw_1, w_{s+1}, \ldots, w_3), \\ &\ldots, \\ u\alpha^{k_s} &= (nw_s, \ldots, nw_1, w_{s+1}). \end{aligned}$$

Составим матрицу

$$W = \begin{pmatrix} w_{s+1} & w_s & \ldots & w_2 & w_1 \\ w_1 & w_{s+1} & \ldots & w_3 & w_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_s & w_{s-1} & \ldots & w_1 & w_{s+1} \end{pmatrix}.$$

Проведем в этой матрице вертикальные линии, соответствующие разбиениям строк. Например, первой строке соответствуют линии на расстояниях, считая справа, $k_1, k_2, \ldots, k_s$, второй на расстояниях $k_2 - k_1, k_3 - k_1, \ldots, m - k_1$ и т. д. Всего будет проведено $s(s+1)$ линий, причем некоторые из проведенных линий могут совпадать. В результате матрица $W$ разобьется на вертикальные полосы в количестве не более $s(s+1)+1 = s^2+s+1$. Рассмотрим какую-то одну полосу. Координатная строка элемента $uv$ в пределах этой полосы, пусть это будет $e$, является линейной комбинацией строк полосы с соответствующими коэффициентами $b_i$ или $b_i n$ $(i = 0, 1, \ldots, s)$. Покажем, что в $e$ имеется не более $s$ нулей. Если ширина полосы не превосходит $s$, то доказывать нечего. Пусть ширина полосы равна $r \geq s + 1$. Рассмотрим полосу как матрицу. По построению в ней нет одинаковых строк и каждая строка имеет вид $(c_i, , c_{i+1}, \ldots, c_{i+r-1})$. Переставляя стро-

ки матрицы, можно добиться того, что первый столбец, а тогда и любой другой, имеет вид $\begin{pmatrix} c_{i_0} \\ c_{i_1} \\ \dots \\ c_{i_s} \end{pmatrix}$, где $i_o < i_1 < \ldots < i_s$. Если в строке $e$ имеется $s+1$ нулей, то в полосе соответствующий минор $(s+1)$-го порядка должен равняться нулю. Любой минор полосы является минором матрицы из леммы 2; получаем противоречие с утверждением этой леммы. Итак, координатная строка элемента $uv$ в каждой полосе имеет не более $s$ нулей. Так как число полос ограничено значением $s^2+s+1$, длина элемента $uv$ не меньше $m - s(s^2+s+1)$. Таким образом случай, когда $v \in \mathbb{Q}(\alpha)$, рассмотрен.

В общем случае можно предполагать, что $v \in \mathbb{Q}(\beta)$, где $\alpha = \beta^l$ $(l \in \mathbb{N})$ и

$$v = b_o + b_1\beta^{k_1} + \ldots + b_s\beta^{k_s},\ 0 \neq b_i \in \mathbb{Q},\ 0 < k_1 < \ldots < k_s < ml.$$

Разобьем $v$ в сумму $v' + v''$, где в $v'$ собраны слагаемые слагаемые $b_i\beta^{k_i}$, где $k_i$ делится на $l$, а в $v''$ остальные. Проекция элемента $uv$ на $\mathbb{Q}$-модуль

$$\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\cdot\alpha + \ldots + \mathbb{Q}\cdot\alpha^{m-1}$$

будет равна $uv'$ Так как длина $v'$ не больше $s+1$, то можно воспользоваться уже доказанным. Лемма доказана. □

Рассмотрим группу $G \in \mathscr{B}_n$ и соответствующую пару $(A, R)$. Пусть $X = (x_{ij})$ — конечная таблица, имеющая $q$ строк не обязательно одинаковой длины, составленная из переменных $x_{ij}$, и $L = (l_{ij})$ — таблица того же размера из ненулевых целых чисел. Полагаем $w_i = \sum\limits_j l_{ij}x_{ij}$ $(i = 1, \ldots, q)$. Если $T$ — правый $R$-модуль и $(t_1, \ldots, t_q)$ — набор элементов из $T$, то назовем нетривиальной линейной комбинацией этого набора над $R$ с конфигурацией $L$ любое выражение $t_1w_1 + \ldots + t_qw_q$, когда значения переменных $x_{ij}$ равны некоторым $a_{ij} \in A$ и при этом значения всех $w_i$ в $R$ отличны от нуля. Если при этом $t_1w_1 + \ldots + t_qw_q = 0$, то будем говорить, что имеется нетривиальная линейная зависимость набора $(t_1, \ldots, t_q)$ над $R$ с

конфигурацией $L$. По условию пара $(A, R)$ содержит в качестве подпары $(n^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}])$.

**ЛЕММА 4.** Пусть $(t_1, \ldots, t_q)$ — набор элементов из $\mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}]$, и имеется нетривиальная линейная зависимость этого набора над $R$ с конфигурацией $L$. Тогда существует аналогичная зависимость над $\mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}]$.

**Доказательство.** В предыдущем параграфе при доказательстве предложения 6 мы установили, что пара $(A, R)$ локально дискриминируется парой $(n^{\mathbb{Q}}, \mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}])$. Применим это здесь. Пусть заданная зависимость получается при $x_{ij} = a_{ij} \in A$. Тогда найдется натуральное число $m$ и алгебраически независимые элементы $y_1, \ldots, y_s \in A$, для которых все $t_1, \ldots, t_q$ содержатся в $\mathbb{Z}[n^{\pm\frac{1}{m}}]$, а все $a_{ij}$ — в мультипликативной группе $\langle n^{\frac{1}{m}}, y_1, \ldots, y_s\rangle$. Далее выбираем эпиморфизм колец

$$\varphi : \mathbb{Z}[n^{\pm\frac{1}{m}}, y_1^{\pm 1}, \ldots, y_s^{\pm 1}] \to \mathbb{Z}[n^{\pm\frac{1}{m}}],$$

который тождественно действует на $\mathbb{Z}[n^{\pm\frac{1}{m}}]$, переводит $y_1, \ldots, y_s$ в $n^{k_1}, \ldots, n^{k_s}$ $(k_i \in \mathbb{N})$ соответственно, и при этом все $w_i\varphi \neq 0$. Применяя $\varphi$ к левой части равенства $t_1w_1 + \ldots + t_qw_q = 0$, получаем требуемую зависимость. Лемма доказана. □

**2.2.** Назовем *размерностью* группы $G \in \mathscr{D}_2$ с соответствующей парой $(A, R)$ набор $d(G) = (d_1, d_2)$, где $d_1$ — размерность $A$ над $\mathbb{Q}$, $d_2$ — размерность векторного пространства $\rho_2(G)$ над полем частных $K$ кольца $R$. Легко доказывается

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.** Две группы из класса $\mathscr{B}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

Принципиальным утверждением в доказательстве теоремы 2 является следующее

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.** Пусть $U$ — неглавный ультрафильтр на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$, $H$ — счетная группа из класса $\mathscr{B}_n$, $G = H^{\mathbb{N}/U}$ — соответствующая ультрастепень группы $H$. Тогда $d(G) = (2^\omega, 2^\omega)$.

**Доказательство.** Можно предполагать, что $n$ — приведенное нату-

ральное число. Группа $G$ принадлежит классу $\mathscr{B}_n$, пусть $(A, R)$ — соответствующая пара. Формульная подгруппа $\rho_2(G)$ равна $\rho_2(H)^{\mathbb{N}/U}$ по теореме Лося, а фактор-группа $A = G/\rho_2(G)$ равна $(H/\rho_2(H))^{\mathbb{N}/U}$. Последняя группа континуальна, поэтому первый параметр в $d(G)$ равен $2^\omega$. По аналогичным соображениям второй параметр не больше $2^\omega$ и требуется показать, что он в точности равен $2^\omega$.

Сначала рассмотрим случай, когда $H = \mathrm{BSd}(1, n)$. В этой ситуации мы непосредственно укажем континуальное множество $F = \{f_r \mid 2 \leq r \in \mathbb{R}\}$ элементов из декартовой степени $\rho_2(H)^{\mathbb{N}}$ группы $\rho_2(H)$, образы которых в ультрастепени $\rho_2(H)^{\mathbb{N}/U}$ будут линейно независимы над ассоциированным с группой $G$ кольцом $R$, а тогда и над полем частных этого кольца. Укажем какой элемент из группы $\rho_2(H)$, которая отождествляется с аддитивной группой поля $\mathbb{Q}(n^{\mathbb{Q}})$, стоит в $l$-ой ($l \in \mathbb{N}$) компоненте $f_r(l)$ элемента $f_r$. Сначала положим $m = m(r, l) = [l^r]!$, здесь $[l^r]$ — целая часть от $l^r$. Отметим, что при $r > r'$ число $m(r, l)$ делится на число $m(r', l)$ и при достаточно большом $l$ значительно его превосходит. Точнее, нам понадобится, чтобы для любых констант $L_1, L_2 > 1$ нашелся номер $l_0$, при котором в случае $l \geq l_0$ выполнялось бы неравенство $m(r, l) > m(r', l) \cdot L_1 + L_2$. Полагаем

$$f_r(l) = c_1 + c_2\alpha + \ldots + c_m\alpha^{m-1},$$

где $\alpha = n^{\frac{1}{m}}$, $c_1 = 1$, а далее $c_i = c_{i-1}^i \cdot i!$.

Следует доказать, что для любого набора действительных чисел $(r_1, r_2, \ldots, r_q)$, где $r_1 > r_2 > \ldots > r_q$ образы $\overline{f}_{r_1}, \overline{f}_{r_2}, \ldots, \overline{f}_{r_q}$ элементов $f_{r_1}, f_{r_2}, \ldots f_{r_q}$ в $\rho_2(H)^{\mathbb{N}/U}$ линейно независимы над $R$. Допустим противное и

$$\overline{f}_{r_1}\overline{v}_1 + \overline{f}_{r_2}\overline{v}_2 + \ldots + \overline{f}_{r_q}\overline{v}_q = 0,$$

где можно предполагать, что каждое $\overline{v}_i \neq 0$ является целочисленной линейной комбинацией нескольких элементов группы $(n^{\mathbb{Q}})^{\mathbb{N}/U}$. Пусть $s + 1$ ограничивает число таких элементов по всем $i$. Зафиксируем какие-то прообразы этих элементов в декартовой степени $(n^{\mathbb{Q}})^{\mathbb{N}}$ и обозначим через $v_i$ соответствующие линейные комбинации. Мы получим противоречие, если

докажем, что множество номеров $l \in \mathbb{N}$, для которых

$$f_{r_1}(l)v_1(l) + f_{r_2}(l)v_2(l) + \ldots + f_{r_q}(l)v_q(l) \neq 0$$

принадлежит ультрафильтру $U$. По условию $\{l \mid v_i(l) \neq 0;\ i = 1, \ldots, q\} \in U$. По лемме 3 длина элемента $f_{r_1}(l)v_1(l)$ не меньше $m(r_1, l) - s(s^2 + s + 1)$. При $i > 1$ длина $f_{r_i}(l)v_i(l)$ не превосходит $m(r_i, l)(s + 1)$, а тогда длина суммы $f_{r_2}(l)v_2(l) + \ldots + f_{r_q}(l)v_q(l)$ не превосходит

$$(m(r_2, l) + \ldots + m(r_q, l))(s + 1) \leq m(r_2, l)(q - 1)(s + 1).$$

По условию найдется $l_0 \in \mathbb{N}$, такое что при $l \geq l_0$ значение $m(r_1, l) - s(s^2 + s + 1)$ будет превосходить $m(r_2, l)(q - 1)(s + 1)$. Поэтому

$$\{l \mid (v_i(l) \neq 0;\ i = 1, \ldots, q) \wedge (f_{r_1}(l)v_1(l) + f_{r_2}(l)v_2(l) + \ldots + f_{r_q}(l)v_q(l) \neq 0)\} \in U.$$

Случай $H = \mathrm{BSd}(1, n)$ рассмотрен.

В общем случае $H$ содержит в качестве подгруппы $\mathrm{BSd}(1, n)$ и $G = H^{\mathbb{N}/U}$ содержит $BSd(1, n)^{\mathbb{N}/U}$. Мы ранее предположили, что $G$ соответствует пара $(A, R)$, пусть группе $BSd(1, n)^{\mathbb{N}/U}$ соответствует пара $(A', R')$. Достаточно показать, что образы в $\rho_2(G)$ элементов множества $F$, построенного выше (мы доказали, что они линейно независимы над $R'$), остаются линейно независимыми над $R$. Это обеспечивает следующая

**ЛЕММА 5.** Пусть $(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_q)$ — набор элементов из $(\mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}])^{\mathbb{N}/U}$ и имеется нетривиальная линейная зависимость $\bar{t}_1\bar{v}_1 + \ldots + \bar{t}_q\bar{v}_q = 0$ над $R$ с конфигурацией $L$. Тогда существует аналогичная зависимость над $R'$.

Для каждого $\bar{t}_i$ выберем прообраз $t_i \in (\mathbb{Z}[n^{\mathbb{Q}}])^{\mathbb{N}}$. Пусть $X = (x_{ij})$ — соответствующая конфигурации $L$ таблица переменных, и $x_{ij} = a_{ij} \in A$ — значения переменных, для которых получается указанная линейная зависимость. Пусть $b_{ij}$ обозначают какие-то прообразы этих значений в $(H/\rho_2(H))^{\mathbb{N}}$. Заменой $a_{ij}$ на $b_{ij}$ получаем из $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_m)$ набор $(v_1, \ldots, v_m)$.

Можно утверждать, что множество $\Delta$ номеров $l \in \mathbb{N}$, для которых

$$t_1(l)v_1(l) + \ldots + t_q(l)v_q(l) = 0$$

и при этом все $v_i(l) \neq 0$, принадлежит ультрафильтру $U$. По лемме 4 для каждого $l \in \Delta$ найдутся такие $\gamma_{ijl} \in \mathbb{Q}$, что если мы в $v_1(l), \ldots, v_q(l)$ заменим $b_{ij}(l)$ на $n^{\gamma_{ijl}}$, то нетривиальные зависимости $f_1(l)v_1(l) + \ldots + f_q(l)v_q(l) = 0$ сохранятся. Определим $c_{ij} \in (n^{\mathbb{Q}})^{\mathbb{N}}$ условием: $c_{ij}(l) = n^{\gamma_{ijl}}$ при $l \in \Delta$ и $c_{ij}(l) = 1$ при $l \notin \Delta$. Подставляя вместо $x_{ij}$ образы $c_{ij}$ в $(n^{\mathbb{Q}})^{\mathbb{N}/\mathbb{U}}$, получаем требуемую нетривиальную линейную зависимость над $R'$. Лемма 5, а вместе с ней и предложение 9 доказаны. □

Из предложений 8 и 9 вытекает, что ультрастепени по неглавному ультрафильтру на счетном множестве любых двух счетных моделей теории класса $\mathscr{B}_n$ изоморфны, а тогда по теореме Кейслера–Шелаха эта теория полна и совпадает с теорией группы $\mathrm{BSd}(1, n)$. Теория имеет рекурсивную аксиоматику, поэтому она разрешима. Теорема 2 доказана.

**Благодарности.** Автор выражает свою благодарность Ф. А. Дудкину и А. А. Бутурлакину за полезные обсуждения некоторых аспектов этой работы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. N. Romanovskii, “Rigid solvable groups. Algebraic geometry and model theory”, In: *Groups and Model Theory. GAGTA book 2*, pp. 193–229, De Gruyter, Berlin (2021).
2. Н. С. Романовский, “Обобщенно жесткие группы: определение, базисные факты, проблемы,” *Сиб. мат. журн.* **59**, No. 4, 891–896 (2018).
3. Н. С. Романовский, “Обобщенно жесткие метабелевы группы”, *Сиб. мат. журн.* **60**, No. 1, 194–200 (2019).
4. Н. С. Романовский, “Об универсальных теориях метабелевых обобщенно жестких групп”, *Сиб. мат. журн.* **61**, No. 5, 1101–1107 (2020).
5. Г. А. Носков, “Об элементарной теории конечно порожденной почти

разрешимой группы", *Изв. АН СССР. Сер. матем.* **47**, No. 3, 498–517 (1983).

6. Н. С. Романовский, "Группы, универсально эквивалентные разрешимой группе Баумслага–Солитера", *Сиб. мат. журн.* **63**, No. 1, 197–201 (2022).

7. Н. С. Романовский, "Делимые жесткие группы. Алгебраическая замкнутость и элементарная теория", *Алгебра логика* **56**, No. 5, 593–612 (2017).

Статья поступила в редакцию 9 августа 2024 г.
после доработки 21 января 2025 г.
принята к публикации 19 марта 2025 г.

Алгебра и логика Том 64, No. 5, 564–586 (2024)

УДК 512.579:512.714.5: 512.554.342

512.628.2:512.54.05

**И. П. Шестаков**[1], **З. Жанг**[2]

# АВТОМОРФИЗМ ТИПА АНИКА СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ ПУАССОНА

Аннотация: Изучаются автоморфизмы типа Аника свободной алгебры Пуассона. Устанавливаются новые свойства таких автоморфизмов и их связь с автоморфизмами свободной ассоциативной алгебры. В частности, доказывается, что группа автоморфизмов типа Аника свободной алгебры Пуассона изоморфна группе автоморфизмов типа Аника свободной ассоциативной алгебры.

Ключевые слова: *Автоморфизм типа Аника, алгебра Пуассона, автоморфизм, свободная алгебра.*

*Светлой памяти Виталия Анатольевича Романькова*

## ВВЕДЕНИЕ

Напомним, что *алгебра Пуассона* — это векторное пространство $\mathscr{P}$ над полем $k$, снабженное двумя билинейными операциями: умножением, обозначаемым как $x \otimes y \mapsto x \cdot y$, и скобкой Пуассона, обозначаемой как $x \otimes y \mapsto [x, y]$, такими что $(\mathscr{P}, \cdot)$ — коммутативная ассоциативная алгебра,

Работа первого автора выполнена при поддержке CNPq, Proc. 304313/2019-0, Бразилия, и Международного математического центра, Южно-Китайский технологический университет, Китай. Работа второго автора выполнена при поддержке NNSF Китая (грант No. 12101248) и Гуандунского фонда фундаментальных и прикладных фундаментальных исследований (грант No. 2024A1515013122). [1] Институт математики и статистики, Университет Сан Паулу, Сан Паулу, Бразилия; Международный математический центр Южно-Китайского технологического университета, Шэньчжэнь, Китай; shestak@ime.usp.br. [2] Южно-Китайский педагогический университет, Школа математических наук, Гуанчжоу, Китай; zeruizhang@scnu.edu.cn.

$(\mathscr{P}, [-,-])$ — алгебра Ли, а $\mathscr{P}$ удовлетворяет *тождеству Лейбница*

$$[x, y \cdot z] = y \cdot [x, z] + z \cdot [x, y].$$

Алгебра Пуассона $\mathscr{P}$ называется *унитальной*, если $(\mathscr{P}, \cdot)$ унитальна. В этой статье мы всегда предполагаем, что рассматриваемая алгебра Пуассона унитальна. Мы обычно опускаем операцию $\cdot$, если не возникает несогласованность.

Ясно, что алгебры полиномов являются алгебрами Пуассона с тривиальной скобкой Пуассона. С другой стороны, пусть $\mathscr{L}$ — свободная алгебра Ли, порожденная произвольным множеством $X$, и $Y$ — линейный базис $\mathscr{L}$. Тогда симметрическая алгебра Пуассона $S(\mathscr{L})$ пространства $\mathscr{L}$, а именно полиномиальная алгебра со свободным порождающим множеством $Y$, является свободной алгеброй Пуассона, порожденной $X$, [1]. Исследование автоморфизмов полиномиальных алгебр является очень важной темой, поэтому естественно изучать также автоморфизмы свободных алгебр Пуассона.

Введем некоторые основные термины. Пусть $A_n$ — произвольная свободная алгебра с множеством свободных порождающих $X := \{x_1, \ldots, x_n\}$, обозначим через $\mathsf{Aut}(A_n)$ группу автоморфизмов $A_n$. Автоморфизм вида

$$\sigma(i, \alpha, f) := (x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha x_i + f, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

где $1 \leq i \leq n$, $0 \neq \alpha \in k$, и $f$ лежит в подалгебре $A_n$, порожденной $X \backslash \{x_i\}$, называется *элементарным автоморфизмом* алгебры $A_n$. Подгруппа $\mathsf{TA}(A_n)$ группы $\mathsf{Aut}(A_n)$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами, называется *группой ручных автоморфизмов* алгебры $A_n$. Элементы подгруппы $\mathsf{TA}(A_n)$ называются *ручными автоморфизмами*, а элементы из $\mathsf{Aut}(A_n) \setminus \mathsf{TA}(A_n)$ — *дикими автоморфизмами*. Здесь и ниже мы обозначаем через

$$\varphi = (f_1, \ldots, f_n)$$

эндоморфизм алгебры $A_n$, определяемый правилом $\varphi(x_i) = f_i \in A_n$ для

всех $i \leq n$.

Существуют тесные связи между автоморфизмами полиномиальных алгебр, свободных ассоциативных алгебр и свободных алгебр Пуассона. Например, автоморфизмы полиномиальных алгебр (свободных ассоциативных алгебр и свободных алгебр Пуассона соответственно) от двух переменных являются ручными [2–6], где для алгебр Пуассона характеристика основного поля предполагается равной 0. Более того, группы автоморфизмов вышеупомянутых двупорожденных свободных алгебр изоморфны.

С другой стороны, автоморфизмы полиномиальной алгебры и свободной ассоциативной алгебры от трех переменных могут быть дикими. Наиболее известными примерами служат автоморфизм Нагаты [7–9] и автоморфизм Аника [10]. Любой автоморфизм $n$-порожденной полиномиальной алгебры может быть поднят до автоморфизма $n$-порожденной свободной алгебры Пуассона, поэтому 3-порожденные свободные алгебры Пуассона также имеют дикие автоморфизмы. Однако, насколько нам известно, остается открытым вопрос, каждый ли дикий автоморфизм $n$-порожденной свободной алгебры Пуассона индуцирует дикий автоморфизм $n$-порожденной полиномиальной алгебры при проекции, переводящей скобки Пуассона в нуль. В этой статье мы строим дикий автоморфизм типа Аника

$$\delta := (x_1 + [x_3, x_1x_3 - [x_3, x_2]], x_2 + (x_1x_3 - [x_3, x_2])x_3, x_3) \qquad (0.1)$$

3-порожденной свободной алгебры Пуассона, который индуцирует ручной автоморфизм полиномиальной алгебры от 3 переменных. Поскольку $\delta(x_1x_3 - [x_3, x_2]) = x_1x_3 - [x_3, x_2]$, видим, что $\delta$ является эпиморфизмом. Следуя рассуждениям из [11, с. 343, предложение 8.1], заключаем, что $\delta$ является автоморфизмом.

В § 1 мы исследуем связи между группами ручных автоморфизмов свободной алгебры Пуассона и полиномиальной алгебры. В § 2 определяем матрицы Якоби для эндоморфизмов свободных алгебр Пуассона и доказываем цепное правило. Хотя цепное правило выполняется в общем случае [12], для полноты и удобства читателей мы все равно включаем дока-

зательство. В § 3 устанавливаем наш главный результат: автоморфизм $\delta$ в (1) является диким и стабильно ручным.

Наш подход в первую очередь вдохновлен статьей [10]; вносим некоторые изменения, которые упрощают доказательства.

## 1 РУЧНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ СВОБОДНЫХ АЛГЕБР ПУАССОНА

В этом разделе исследуем связь между ручными автоморфизмами свободных алгебр Пуассона и алгебр полиномов. Обозначим через $P_n$ свободную алгебру Пуассона со свободным порождающим множеством $X := \{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть $C_n$ — алгебра полиномов с переменными $x_1, \ldots, x_n$. Всегда предполагаем, что $C_n$ снабжена тривиальной скобкой Пуассона. Тогда существует гомоморфизм алгебр Пуассона

$$\pi_n : P_n \longrightarrow C_n, \quad x_i \mapsto x_i, \text{ для всех } 1 \leq i \leq n.$$

Ядро $\mathsf{Ker}(\pi_n)$ гомоморфизма $\pi_n$ является идеалом алгебры $P_n$, порожденным $\{[x_i, x_j] \mid x_i, x_j \in X, i > j\}$. Наконец, для каждого эндоморфизма $\varphi = (f_1, \ldots, f_n)$ алгебры $P_n$ обозначаем через $\overline{\varphi} = (\pi_n(f_1), \ldots, \pi_n(f_n))$ индуцированный эндоморфизм алгебры $C_n$. Если $\varphi$ является автоморфизмом, то $\overline{\varphi}$ также является автоморфизмом. Очевидно, что любой элементарный автоморфизм $\varphi$ вида

$$\sigma(i, 1, f), f \in \mathsf{Ker}(\pi_n), \tag{1.1}$$

удовлетворяет тому, что $\overline{\varphi} = \mathsf{id}$ — тождественное отображение алгебры $C_n$.

Для $p \neq q$ обозначаем через $\sigma_{pq}$ автоморфизм $A_n$, который меняет местами $x_p$ и $x_q$, в то время как остальные переменные фиксированы. Тогда $\sigma_{pq}$ является ручным и

$$\sigma_{pq} = \sigma(q, -1, x_p)\sigma(p, 1, -x_q)\sigma(q, 1, x_p).$$

Нетрудно видеть, что в $A_n$ справедливы следующие соотношения между элементарными автоморфизмами [13, 10]:

$$\sigma(i,\alpha,f)\sigma(i,\beta,g) = \sigma(i,\alpha\beta,\beta f+g); \tag{1.2}$$

$$\sigma(i,\alpha,f)^{-1}\sigma(j,\beta,g)\sigma(i,\alpha,f) = \sigma(j,\beta,\sigma(i,\alpha,f)^{-1}(g)), \tag{1.3}$$

где $i \neq j$ и $f$ лежат в подалгебре $A_n$, порожденной $X \setminus \{x_i, x_j\}$;

$$\sigma_{pq}\sigma(i,\alpha,f)\sigma_{pq} = \sigma(j,\alpha,\sigma_{pq}(f)), \tag{1.4}$$

где $1 \leq p \neq q \leq n$ и $x_j = \sigma_{pq}(x_i)$.

Для $j > 1$ непосредственной проверкой (или в силу [10]) убеждаемся, что $\sigma_{1j}$ удовлетворяет свойству

$$\sigma_{1j} = \sigma(1,-1,0)\sigma(1,1,x_j)\sigma(j,1,-x_1)\sigma(1,1,x_j). \tag{1.5}$$

Таким образом, в силу (5) получаем

$$\sigma(j,\alpha,g) = \sigma_{1j}\sigma(1,\alpha,\sigma_{1j}(g))\sigma_{1j}. \tag{1.6}$$

Заметим, что равенства (6) и (7) являются общими фактами об элементарных автоморфизмах, не зависящими от рассматриваемой свободной алгебры.

В общем случае неизвестно, образуют ли соотношения (3)–(5) полный набор определяющих соотношений для группы $\mathsf{TA}(A_n)$, но они образуют его, если $A_n = C_3$ — алгебра полиномов с переменными $x_1, x_2, x_3$ над полем характеристики 0, [13].

**ЛЕММА 1.1.** Пусть $\Pi$ — индуцированный гомоморфизмом групп:

$$\Pi : \mathsf{TA}(P_n) \longrightarrow \mathsf{TA}(C_n),\ \varphi \mapsto \overline{\varphi}.$$

Тогда ядро $\Pi$, как нормальная подгруппа группы $\mathsf{TA}(P_n)$, порождается всеми элементарными автоморфизмами вида (2).

**Доказательство.** Пусть $N$ — нормальная подгруппа группы $\mathsf{TA}(P_n)$, порожденная всеми элементарными автоморфизмами вида (2). Очевидно, что $N \subseteq \mathsf{Ker}(\Pi)$, поэтому имеется корректно определенный гомоморфизм групп

$$\Pi_1 : \mathsf{TA}(P_n)/N \longrightarrow \mathsf{TA}(C_n),\ \varphi N \mapsto \overline{\varphi}.$$

Достаточно показать, что $\Pi_1$ является изоморфизмом.

Для каждого элемента $f \in P_n$ выполняется $f = f_0 + f_1$, где $f_0$ не содержит скобок Пуассона, а $f_1$ лежит в $\mathsf{Ker}(\pi_n)$. Более того, для $\sigma(i,\alpha,f) \in \mathsf{TA}(P_n)$ в силу (3) верно

$$\sigma(i,\alpha,f) = \sigma(i,\alpha,f_0)\sigma(i,1,f_1).$$

Таким образом, $\sigma(i,\alpha,f)N = \sigma(i,\alpha,f_0)N$ и

$$\Pi_1(\sigma(i,\alpha,f)N) = \Pi_1(\sigma(i,\alpha,f_0)N) = \overline{\sigma(i,\alpha,f_0)} = \sigma(i,\alpha,f_0) \in \mathsf{TA}(C_n). \tag{1.7}$$

С другой стороны, пусть $\varphi = (g_1,\ldots,g_n)$ — (ручной) автоморфизм $C_n$. Рассматривая $g_1,\ldots,g_n$ как элементы в $P_n$, получаем $\varphi_P := (g_1,\ldots,g_n) \in \mathsf{Aut}(P_n)$. Определим отображение

$$\Omega : \mathsf{TA}(C_n) \longrightarrow \mathsf{TA}(P_n)/N,\ \varphi \mapsto \varphi_P N.$$

Очевидно, что $\Omega$ — гомоморфизм групп, и

$$\Omega(\sigma(i,\alpha,f)) = \sigma(i,\alpha,f)N. \tag{1.8}$$

Элементарные автоморфизмы порождают группы ручных автоморфизмов, и по (8), (9) справедливы

$$\Omega\Pi_1 = \mathsf{Id} \text{ и } \Pi_1\Omega = \mathsf{Id}',$$

где $\mathsf{Id}$ и $\mathsf{Id}'$ — тождественные отображения групп $\mathsf{TA}(P_n)/N$ и $\mathsf{TA}(C_n)$ соответственно. □

## 2 ЯКОБИЕВЫ МАТРИЦЫ И ЦЕПНОЕ ПРАВИЛО

В этом разделе мы сначала напоминаем конструкцию универсальной (мультипликативной) обертывающей алгебры $\mathscr{P}^e$ произвольной алгебры Пуассона $\mathscr{P}$ в многообразии алгебр Пуассона, [14]. Затем определяем якобиевы матрицы для эндоморфизмов $P_n$. Наконец, доказываем, что цепное правило выполняется.

Пусть $M_{\mathscr{P}} = \{M_a \mid a \in \mathscr{P}\}$ и $H_{\mathscr{P}} = \{H_a \mid a \in \mathscr{P}\}$ — две копии $\mathscr{P}$, такие что отображения $M : \mathscr{P} \longrightarrow M_{\mathscr{P}}$, отправляющее $a$ в $M_a$, и $H : P \longrightarrow H_{\mathscr{P}}$, отправляющее $a$ в $H_a$, являются линейными изоморфизмами. Тогда $\mathscr{P}^e$ — это ассоциативная алгебра, порожденная прямой суммой пространств $M_{\mathscr{P}} \oplus H_{\mathscr{P}}$, с определяющими соотношениями

$$M_a M_b = M_{ab}, \tag{2.1}$$

$$H_{[a,b]} = H_a H_b - H_b H_a, \tag{2.2}$$

$$H_{ab} = M_b H_a + M_a H_b, \tag{2.3}$$

$$H_a M_b = M_{[a,b]} + M_b H_a, \tag{2.4}$$

$$M_1 = 1 \tag{2.5}$$

для всех $a, b \in \mathscr{P}$. Из (12) и (14) следует, что $H_1 = 0$. Более того, каждый (унитальный) $\mathscr{P}$-модуль $\mathscr{V}$ является левым $\mathscr{P}^e$-модулем с действиями

$$M_a(v) = a \cdot v \text{ и } H_a(v) = [a, v]$$

для всех $a \in \mathscr{P}$ и $v \in \mathscr{V}$. Предположим, что $\mathscr{P}$ порождается множеством $X$. Переписывая все члены в левой части приведенных выше уравнений в (10)–(13), мы видим, что элементы вида $M_a H_{x_{i_1}} \dots H_{x_{i_t}}$ при $t \geq 0$ линейно порождают $\mathscr{P}^e$. Определим

$$P_n^e = (P_n)^e \text{ и } C_n^e = (C_n)^e.$$

**ЛЕММА 2.1** [14, следствие 3]**.** Каждый ненулевой элемент в $P_n^e$ может

быть однозначно записан в виде

$$\sum_{1\leq i\leq q} M_{a_i} w_i,$$

где каждый $a_i$ лежит в $P_n$, каждый $w_i$ имеет вид $H_{x_{i_1}} \dots H_{x_{i_t}}$, где $t$ зависит от $i$, и $w_i \neq w_j$ при $i \neq j$.

Поскольку $C_n$ — алгебра Пуассона с тривиальными скобками Пуассона, из уравнений (10), (11) и (13) следует, что $C_n^e$ — коммутативная алгебра. Объединяя это с леммой 2.1, получаем

**СЛЕДСТВИЕ 2.1.** $C_1^e = P_1^e$ — алгебра многочленов от переменных $M_{x_1}$ и $H_{x_1}$.

Заметим, что гомоморфизмы алгебр Пуассона индуцируют гомоморфизмы соответствующих им универсальных обертывающих алгебр. Пусть $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ — две алгебры Пуассона, и $\varphi$ — гомоморфизм алгебр Пуассона из $\mathscr{P}_1$ в $\mathscr{P}_2$. Поскольку $(\mathscr{P}_1)^e$ и $(\mathscr{P}_2)^e$ оба определены соотношениями вида (10)–(14), мы можем построить ассоциативный гомоморфизм алгебр

$$\varphi^e : (\mathscr{P}_1)^e \longrightarrow (\mathscr{P}_2)^e,\ M_a \mapsto M_{\varphi(a)},\ H_a \mapsto H_{\varphi(a)}$$

для всех $a \in \mathscr{P}_1$. В частности, получаем гомоморфизм алгебр

$$\pi_n^e : P_n^e \longrightarrow C_n^e.$$

Теперь вспомним, что производные Фокса $\frac{\partial(-)}{\partial x_i}$ — это линейные отображения из $P_n$ в $P_n^e$, определяемые правилами:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{i,j},\\
&\frac{\partial(ab)}{\partial x_i} = M_a \frac{\partial b}{\partial x_i} + M_b \frac{\partial a}{\partial x_i},\\
&\frac{\partial[a,b]}{\partial x_i} = H_a \frac{\partial b}{\partial x_i} - H_b \frac{\partial a}{\partial x_i},
\end{aligned}$$

для всех $a, b \in P_n$, где $\delta_{i,i} = 1$ и $\delta_{i,j} = 0$, если $i \neq j$. Легко показать, что $\frac{\partial(-)}{\partial x_i}$ корректно определено.

Пусть $\mathscr{P}$ — алгебра Пуассона. Для всех $a_1, \ldots, a_t \in \mathscr{P}$ определим

$$[a_1, \ldots, a_t] = [\ldots [[a_1, a_2], a_3], \ldots, a_t],$$

где $[a_1, \ldots, a_t]$ означает $a_1$, если $t = 1$. Тогда у нас есть следующая формула для производной Фокса, действующей на элементы, включающие скобки Пуассона.

**ЛЕММА 2.2.** Пусть $\mathscr{P}$ — алгебра Пуассона. Тогда для всех $a_1, \ldots, a_t \in \mathscr{P}$ с $t \geq 2$, справедливо

$$\frac{\partial [a_1, \ldots, a_t]}{\partial x_r} = \sum_{1 \leq j \leq t} (-H_{a_t}) \ldots (-H_{a_{j+1}}) H_{[a_1, \ldots, a_{j-1}]} \frac{\partial a_j}{\partial x_r}.$$

**Доказательство.** Используем индукцию по $t$. Для $t = 2$ верно

$$\frac{\partial [a_1, a_2]}{\partial x_r} = (-H_{a_2}) \frac{\partial a_1}{\partial x_r} + H_{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_r}.$$

Предположим, что $t > 2$. Определим $b_1 = [a_1, a_2]$ и $b_j = a_{j+1}$ для всех $2 \leq j \leq t-1$. По индукционному предположению справедливо

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [a_1, \ldots, a_t]}{\partial x_r} &= \sum_{1 \leq p \leq t-1} (-H_{b_{t-1}}) \ldots (-H_{b_{p+1}}) H_{[b_1, \ldots, b_{p-1}]} \frac{\partial b_p}{\partial x_r} \\
&= \sum_{2 \leq p \leq t-1} (-H_{a_t}) \ldots (-H_{a_{p+2}}) H_{[a_1, \ldots, a_p]} \frac{\partial a_{p+1}}{\partial x_r} \\
&\quad + (-H_{a_t}) \ldots (-H_{a_3}) \frac{\partial [a_1, a_2]}{\partial x_r} \\
&= \sum_{3 \leq j \leq t} (-H_{a_t}) \ldots (-H_{a_{j+1}}) H_{[a_1, \ldots, a_{j-1}]} \frac{\partial a_j}{\partial x_r} \\
&\quad + (-H_{a_t}) \ldots (-H_{a_3}) \left( (-H_{a_2}) \frac{\partial a_1}{\partial x_r} + H_{a_1} \frac{\partial a_2}{\partial x_r} \right).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Теперь мы определим матрицы Якоби для эндоморфизмов $P_n$ способом, который немного отличается от [14], поскольку будет удобнее иметь дело с матрицами над коммутативной ассоциативной алгеброй, а не над некоммутативной. Для произвольной ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ обозна-

чаем через $M_{n\times n}(\mathscr{A})$ множество всех $n \times n$ матриц над $\mathscr{A}$. Для каждого эндоморфизма $\varphi$ алгебры $P_n$ определяем матрицу Якоби $J(\varphi)$ эндоморфизма $\varphi$ как

$$J(\varphi) = \pi_n^e \left( \left( \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j} \right)_{n\times n} \right) = \left( \pi_n^e \left( \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j} \right) \right)_{n\times n} \in M_{n\times n}(C_n^e),$$

где $\pi_n^e(\frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial x_j})$ лежит в $i$-й строке и $j$-м столбце матрицы $J(\varphi)$. Поскольку $C_n^e$ коммутативна, определитель $|J(\varphi)|$ матрицы $J(\varphi)$ имеет смысл.

Напомним, что каждый эндоморфизм $\varphi$ из $P_n$ индуцирует эндоморфизм $\overline{\varphi}$ из $C_n$, удовлетворяющий условию

$$\overline{\varphi}\pi_n = \pi_n\varphi,$$

т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_n & \xrightarrow{\varphi} & P_n \\ {\scriptstyle \pi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_n} \\ C_n & \xrightarrow[\overline{\varphi}]{} & C_n \end{array}$$

коммутативна. В частности, отсюда непосредственно следует, что

$$\overline{\varphi}^e \pi_n^e = (\overline{\varphi}\pi_n)^e = (\pi_n\varphi)^e = \pi_n^e \varphi^e. \tag{2.6}$$

Найдем форму цепного правила в соответствии с вышеупомянутым определением матриц Якоби, доказательство которого по сути такое же, как в [12].

**ЛЕММА 2.3** (цепное правило)**.** Пусть $\varphi$ и $\psi$ — два эндоморфизма $P_n$. Тогда

$$J(\varphi\psi) = \overline{\varphi}^e(J(\psi))J(\varphi).$$

В частности, если $\psi$ — автоморфизм, то $J(\psi)$ обратим и $J(\psi)^{-1} = \overline{\psi}^e(J(\psi^{-1}))$.

**Доказательство.** Предположим, что $\psi(x_i) = f = f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда

$\varphi\psi(x_i) = f(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\pi_n^e\left(\frac{\partial\varphi\psi(x_i)}{\partial x_j}\right) &= \sum_{1\le t\le n} \pi_n^e\varphi^e\left(\frac{\partial f}{\partial x_t}\right)\pi_n^e\left(\frac{\partial\varphi(x_t)}{\partial x_j}\right)\\ &= \sum_{1\le t\le n} \overline{\varphi}^e\pi_n^e\left(\frac{\partial f}{\partial x_t}\right)\pi_n^e\left(\frac{\partial\varphi(x_t)}{\partial x_j}\right)\\ &= \overline{\varphi}^e\left(\pi_n^e\left(\frac{\partial\psi(x_i)}{\partial x_1}\right), \ldots, \pi_n^e\left(\frac{\partial\psi(x_i)}{\partial x_n}\right)\right)\\ &\quad \left(\pi_n^e\left(\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_j}\right), \ldots, \pi_n^e\left(\frac{\partial\varphi(x_n)}{\partial x_j}\right)\right)^T,\end{aligned}$$

где $(-)^T$ означает транспонированную матрицу Отсюда следует, что $J(\varphi\psi) = \overline{\varphi}^e(J(\psi))J(\varphi)$. Следовательно,

$$E_n = J(\psi^{-1}\psi) = \overline{\psi^{-1}}^e(J(\psi))J(\psi^{-1})$$

и

$$E_n = J(\psi\psi^{-1}) = \overline{\psi}^e(J(\psi^{-1}))J(\psi),$$

где $E_n$ — единичная матрица. Итак,

$$E_n = \overline{\psi}^e(E_n) = \overline{\psi}^e\overline{\psi^{-1}}^e(J(\psi))\overline{\psi}^e(J(\psi^{-1})) = J(\psi)\overline{\psi}^e(J(\psi^{-1})).$$

Требуемое вытекает непосредственно. □

С помощью цепного правила мы можем вывести новые свойства матриц Якоби.

**ЛЕММА 2.4.** Пусть $\varphi$ — такой эндоморфизм $P_n$, что $\overline{\varphi} = \mathsf{id}$. Тогда для любого автоморфизма $\psi \in \mathsf{Aut}(P_n)$ имеем

$$J(\psi\varphi\psi^{-1}) = J(\psi)^{-1}\overline{\psi}^e(J(\varphi))J(\psi)$$

и

$$|J(\psi\varphi\psi^{-1})| = \overline{\psi}^e(|J(\varphi)|).$$

**Доказательство.** По цепному правилу имеем

$$\begin{aligned} J(\psi\varphi\psi^{-1}) &= \overline{\psi}^e(J(\varphi\psi^{-1}))J(\psi) \\ &= \overline{\psi}^e(\overline{\varphi}^e(J(\psi^{-1}))J(\varphi))J(\psi) \\ &= J(\psi)^{-1}\overline{\psi}^e(J(\varphi))J(\psi). \end{aligned}$$

Второе утверждение следует из первого, поскольку $\overline{\psi}^e$ является гомоморфизмом алгебр. □

Пусть $P\{x_3\}$ — свободная алгебра Пуассона, порожденная $x_3$. Тогда $P\{x_3\}$ — это алгебра многочленов, снабженная тривиальной скобкой Пуассона. Чтобы доказать, что автоморфизм типа Аника $\delta$ в (1) является диким, нам понадобится следующий гомоморфизм алгебр Пуассона:

$$\eta : C_3 \longrightarrow P\{x_3\}, x_1 \mapsto 0,\ x_2 \mapsto 0,\ x_3 \mapsto x_3.$$

Очевидно, что $\eta$ определен корректно. Итак, для каждого эндоморфизма $\varphi$ из $P_3$ имеем

$$\eta^e(J(\varphi)) = \left(\eta^e\pi_3^e\left(\frac{\partial\varphi(x_i)}{\partial x_j}\right)\right)_{n\times n}.$$

Нам понадобится следующее наблюдение о производных Фокса, действующих на элементы $\mathsf{Ker}(\pi_3)$ относительно $x_3$.

**ЛЕММА 2.5.** Для каждого $f \in \mathsf{Ker}(\pi_3)$ справедливо

$$\eta^e\pi_3^e\Big(\frac{\partial f}{\partial x_3}\Big) = 0.$$

**Доказательство.** Для всех $x_{i_1}, \ldots, x_{i_t} \in X$, таких что $i_2 < i_1 \leq 3$, верно

$$\eta\pi_3(x_{i_2}) = 0 = \frac{\partial x_{i_2}}{\partial x_3}.$$

Таким образом, по лемме 2.2 получаем, что

$$\eta^e\pi_3^e\left(\frac{\partial[x_{i_1}, \ldots, x_{i_t}]}{\partial x_3}\right) = \sum_{1\leq j\leq t}(-H_{\eta\pi_3(x_{i_t})})\ldots(-H_{\eta\pi_3(x_{i_{j+1}})})H_{\eta\pi_3([x_{i_1},\ldots,x_{i_{j-1}}])}$$

$$\eta^e\pi_3^e\left(\frac{\partial x_{i_j}}{\partial x_3}\right)$$
$$= 0.$$

Следовательно, для каждого элемента вида $[x_{i_1},\dots,x_{i_t}]g$ из $\mathsf{Ker}(\pi_3)$ $(t\geq 2)$, выполняется

$$\eta^e\pi_3^e\left(\frac{\partial([x_{i_1},\dots,x_{i_t}]g)}{\partial x_3}\right) = M_{\eta\pi_3(g)}\eta^e\pi_3^e(\frac{\partial[x_{i_1},\dots,x_{i_t}]}{\partial x_3}) + M_{\eta\pi_3([x_{i_1},\dots,x_{i_t}])}\frac{\partial g}{\partial x_3}$$
$$= 0.$$

Так как элементы вида $[x_{i_1},\dots,x_{i_t}]g$ $(t\geq 2)$ линейно порождают $\mathsf{Ker}(\pi_3)$, отсюда следует нужный результат. □

Мы завершим этот раздел следующим свойством элемента $\eta^e(J(\varphi))$ для эндоморфизма $\varphi$ из $P_3$, такого что $\overline{\varphi} = \mathsf{id}$ — тождественное отображение $C_3$.

**ЛЕММА 2.6.** Для любых автоморфизмов $\varphi,\psi\in\mathsf{Aut}(P_3)$, где $\overline{\varphi}=\mathsf{id}$, справедливо

$$\eta^e(J(\psi\varphi\psi^{-1})) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & 1\end{pmatrix}$$

для некоторых элементов $a_{p,q}$ $(1\leq p\leq 3, 1\leq q\leq 2)$ в $P\{x_3\}^e$, таких что

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = \eta^e\overline{\psi}^e(|J(\varphi)|).$$

В частности, если $\varphi$ — элементарный автоморфизм вида $\sigma(i,1,f)$, где $f\in\mathsf{Ker}(\pi_3)$, то $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=1$.

**Доказательство.** Поскольку $\overline{\psi\varphi\psi^{-1}} = \overline{\varphi} = \mathsf{id}$, мы можем предположить $\psi\varphi\psi^{-1} = (x_1+f_1, x_2+f_2, x_3+f_3)$ и $f_1,f_2,f_3\in\mathsf{Ker}(\pi_3)$. По лемме 2.5 получаем искомый третий столбец $\eta^e(J(\psi\varphi\psi^{-1}))$. По лемме 2.4 верно

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} = |\eta^e(J(\psi\varphi\psi^{-1}))| = \eta^e(|(J(\psi\varphi\psi^{-1}))|) = \eta^e\overline{\psi}^e(|J(\varphi)|).$$

Для последнего утверждения достаточно показать, что $|J(\varphi)|=1$, по-

скольку $\eta^e\overline{\psi}^e(1) = 1$. Пусть $J(\varphi) = (c_{pq})_{n\times n}$. Поскольку $f$ не включает $x_i$, прямой проверкой устанавливаем, что

$$c_{pq} = \begin{cases} \delta_{p,q}, & \text{если } p \neq i, \\ 1, & \text{если } p = q = i, \\ \pi_3^e(\frac{\partial f}{\partial x_q}), & \text{если } p = i, q \neq i. \end{cases} \tag{2.7}$$

Отсюда следует требуемое. □

## 3 ПОСТРОЕННЫЙ АВТОМОРФИЗМ ТИПА АНИКА ЯВЛЯЕТСЯ ДИКИМ

В этом разделе установим наш главный результат: автоморфизм типа Аника $\delta$ в (1) является диким. Для произвольной ассоциативной алгебры $\mathscr{A}$ мы называем матрицы из $M_{2\times 2}(\mathscr{A})$ вида

$$E_{12}(a) := \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или

$$E_{21}(a) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$$

элементарными $2 \times 2$ матрицами или элементарными матрицами, где $a \in \mathscr{A}$. Обозначим через $E_2(\mathscr{A})$ подгруппу общей линейной группы $GL_2(\mathscr{A})$, порожденную всеми элементарными $2\times 2$ матрицами. Следующий важный и полезный результат доказан в [15], см. также [10].

**ЛЕММА 3.1** [15]**.** Пусть $k[x, y]$ — алгебра многочленов с переменными $x$ и $y$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} 1 + xy & y^2 \\ -x^2 & 1 - xy \end{pmatrix}$$

не лежит в $E_2(k[x,y])$. Следовательно, транспонированная матрица

$$\begin{pmatrix} 1+xy & -x^2 \\ y^2 & 1-xy \end{pmatrix}$$

также не принадлежит $E_2(k[x,y])$.

Пусть $\varphi$ — эндоморфизм алгебры $P_3$. Следуя обозначениям из [10], определим

$$J_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \pi_3^e(\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_1}) & \pi_3^e(\frac{\partial\varphi(x_1)}{\partial x_2}) \\ \pi_3^e(\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_1}) & \pi_3^e(\frac{\partial\varphi(x_2)}{\partial x_2}) \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

**ТЕОРЕМА 3.1.** Пусть $\varphi \in \mathsf{Aut}(P_3)$ — элементарный автоморфизм вида $\sigma(i,1,f)$, где $f \in \mathsf{Ker}(\pi_3)$. Тогда для любого ручного автоморфизма $\psi \in \mathsf{TA}(P_3)$ выполняется $\eta^e(J_2(\psi\varphi\psi^{-1})) \in E_2(P\{x_3\}^e)$.

**Доказательство.** Поскольку $\psi$ — ручной, $\psi$ будет произведением элементарных автоморфизмов вида $\sigma(j,\alpha,g)$. В силу равенств (6) и (7) мы можем предположить, что $\psi$ является произведением элементарных автоморфизмов вида

$$\sigma(1,\alpha,g) \text{ или } \sigma(j,1,-x_1) \text{ где } j \in \{2,3\}, \tag{3.2}$$

т. е. $\psi = \psi_1\psi_2\dots\psi_t$, где каждый $\psi_p$ имеет вид (18).

Воспользуемся индукцией по $t$. Для $t=0$ верно $\psi\varphi\psi^{-1} = \varphi = \sigma(i,1,f)$. По лемме 2.5 имеем $\eta^e\pi_3^e(\frac{\partial f}{\partial x_3}) = 0$. Поскольку $f$ не включает $x_i$, то $\eta^e\pi_3^e(\frac{\partial f}{\partial x_i}) = 0$. Рассмотрим возможные случаи. Если $i=1$, то в силу (17) получаем

$$\eta^e(J_2(\varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & \eta^e\pi_3^e(\frac{\partial f}{\partial x_2}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_2(P\{x_3\}^e).$$

Если $i=2$, то

$$\eta^e(J_2(\varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta^e\pi_3^e(\frac{\partial f}{\partial x_1}) & 1 \end{pmatrix} \in E_2(P\{x_3\}^e);$$

Если $i = 3$, то

$$\eta^e(J_2(\varphi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E_2(P\{x_3\}^e).$$

Пусть теперь $t > 0$. Обозначим $\psi_2 \dots \psi_t \varphi (\psi_2 \dots \psi_t)^{-1}$ через $\varphi_1$. По предположению индукции и лемме 2.6 мы можем предположить, что

$$\eta^e(J(\varphi_1)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{2\times 2} & 0 \\ B_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix}$$

где $A_{2\times 2}$ лежит в $E_2(P\{x_3\}^e)$. Обозначим через $\widetilde{\psi_1}$ автоморфизм $P\{x_3\}$, индуцированный $\overline{\psi_1}$. Поскольку диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_3 & \xrightarrow{\overline{\psi_1}} & C_3 \\ {\scriptstyle\eta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\eta} \\ P\{x_3\} & \xrightarrow[\widetilde{\psi_1}]{} & P\{x_3\} \end{array}$$

коммутативна, получаем, что

$$\eta^e \overline{\psi_1}^e = (\eta\overline{\psi_1})^e = (\widetilde{\psi_1}\eta)^e = \widetilde{\psi_1}^e \eta^e.$$

Объединив приведенную выше формулу с леммой 2.4, получим

$$\begin{aligned} \eta^e(J(\psi\varphi\psi^{-1})) &= \eta^e(J(\psi_1\varphi_1\psi_1^{-1})) \\ &= \eta^e(J(\psi_1)^{-1})\widetilde{\psi_1}^e \eta^e(J(\varphi_1))\eta^e(J(\psi_1)). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть

$$\widetilde{\psi_1}^e \eta^e(J(\varphi_1)) = \begin{pmatrix} \widetilde{\psi_1}^e(A_{2\times 2}) & 0 \\ \widetilde{\psi_1}^e(B_{1\times 2}) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{2\times 2} & 0 \\ V_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\widetilde{\psi_1}^e$ отображает элементарные матрицы над $P\{x_3\}^e$ в элементарные матрицы над $P\{x_3\}^e$, то $U_{2\times 2} \in E_2(P\{x_3\}^e)$.

Если $\psi_1 = \sigma(2, 1, -x_1)$, то

$$\eta^e(J(\psi_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \eta^e(J(\psi_1)^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По (19),

$$\begin{aligned} \eta^e(J(\psi\varphi\psi^{-1})) &= \begin{pmatrix} E_{21}(1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2\times 2} & 0 \\ V_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{21}(-1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} E_{21}(1)U_{2\times 2}E_{21}(-1) & 0 \\ V_{1\times 2}E_{21}(-1) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\eta^e(J_2(\psi\varphi\psi^{-1})) = E_{21}(1)U_{2\times 2}E_{21}(-1) \in E_2(P\{x_3\})^e.$$

Если $\psi_1 = \sigma(3, 1, -x_1)$, то

$$\eta^e(J(\psi_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } \eta^e(J(\psi_1)^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим матрицу-строку $(-1, 0)$ через $W_{1\times 2}$. По (19) выполняются равенства

$$\begin{aligned} \eta^e(J(\psi\varphi\psi^{-1})) &= \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ -W_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2\times 2} & 0 \\ V_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ W_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} U_{2\times 2} & 0 \\ -W_{1\times 2}U_{2\times 2} + V_{1\times 2} + W_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Итак,

$$\eta^e(J_2(\psi\varphi\psi^{-1})) = U_{2\times 2} \in E_2(P\{x_3\})^e.$$

Наконец, если $\psi_1 = \sigma(1, \alpha, g)$ с $\alpha \neq 0$, скажем,

$$w_1 = \eta^e \pi_3^e(\frac{\partial g}{\partial x_2}) \quad w_2 = \eta^e \pi_3^e(\frac{\partial g}{\partial x_3}),$$

то

$$\eta^e(J(\psi_1)) = \begin{pmatrix} \alpha & w_1 & w_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{2\times 2} & G_{2\times 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\eta^e(J(\psi_1)^{-1}) = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -\alpha^{-1}w_1 & -\alpha^{-1}w_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_{2\times 2} & Z_{2\times 1} & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Снова используя (19), выводим, что

$$\begin{aligned} \eta^e(J(\psi\varphi\psi^{-1})) &= \begin{pmatrix} Y_{2\times 2} & Z_{2\times 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2\times 2} & 0 \\ V_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{2\times 2} & G_{2\times 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Y_{2\times 2}U_{2\times 2} + Z_{2\times 1}V_{1\times 2} & Z_{2\times 1} \\ V_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{2\times 2} & G_{2\times 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ V_{1\times 2}W_{2\times 2} & V_{1\times 2}G_{2\times 1} + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= Y_{2\times 2}U_{2\times 2}W_{2\times 2} + Z_{2\times 1}V_{1\times 2}W_{2\times 2}, \\ R_2 &= Y_{2\times 2}U_{2\times 2}G_{2\times 1} + Z_{2\times 1}V_{1\times 2}G_{2\times 1} + Z_{2\times 1}. \end{aligned}$$

По лемме 2.6 выполняются

$$\begin{aligned} 1 &= V_{1\times 2}G_{2\times 1} + 1, \\ Y_{2\times 2}U_{2\times 2}G_{2\times 1} &+ Z_{2\times 1}V_{1\times 2}G_{2\times 1} + Z_{2\times 1} = 0. \end{aligned}$$

Предположим, что $V_{1\times 2} = (v_1, v_2)$. Тогда

$$v_1 w_2 = V_{1\times 2} G_{2\times 1} = 0.$$

Таким образом,

$$Z_{2\times 1} = -Y_{2\times 2} U_{2\times 2} G_{2\times 1}.$$

Алгебра $P\{x_3\}^e$ коммутативна, поэтому $w_2 v_1 = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\eta^e(J_2(\psi\varphi\psi^{-1})) =& Y_{2\times 2} U_{2\times 2} W_{2\times 2} + Z_{2\times 1} V_{1\times 2} W_{2\times 2} \\
=& Y_{2\times 2} U_{2\times 2} W_{2\times 2} - Y_{2\times 2} U_{2\times 2} G_{2\times 1} V_{1\times 2} W_{2\times 2} \\
=& Y_{2\times 2} U_{2\times 2} (E_2 - G_{2\times 1} V_{1\times 2}) W_{2\times 2}. \\
=& Y_{2\times 2} U_{2\times 2} E_{12}(-w_2 v_2) W_{2\times 2} \\
=& \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E_{12}(-w_1) U_{2\times 2} E_{12}(-w_2 v_2) E_{12}(w_1) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Заметим, что для всех $u \in P\{x_3\}^e$ в силу [10, 15] имеем

$$E_{12}(u) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E_{12}(\alpha^{-1} u)$$

и

$$E_{21}(u) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E_{21}(\alpha u).$$

По вышеприведенным рассуждениям получаем

$$\eta^e(J_2(\psi\varphi\psi^{-1})) \in \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E_2(P\{x_3\}^e) = E_2(P\{x_3\}^e).$$

Теорема доказана. □

**СЛЕДСТВИЕ 3.1.** Для $\varphi \in \mathsf{TA}(P_3)$, если $\overline{\varphi} = \mathsf{id}$, то

$$\eta^e(J_2(\varphi)) \in E_2(P\{x_3\}^e).$$

**Доказательство.** По лемме 1.1 можно предположить, что

$$\varphi = \psi_1\varphi_1\psi_1^{-1}\dots\psi_t\varphi_t\psi_t^{-1}$$

для некоторого $t \geq 1$, где каждый $\varphi_j$ является элементарным автоморфизмом вида (2) с $n = 3$.

Определим $\theta_j = \psi_j\varphi_j\psi_j^{-1}$ для каждого $1 \leq j \leq t$. Тогда $\overline{\theta_j} = \mathsf{id}$. По лемме 2.3, воспользовавшись индукцией по $t$, имеем

$$\begin{aligned} J(\varphi) &= J(\theta_1\dots\theta_t) \\ &= \overline{\theta_1\dots\theta_{t-1}}^e(J(\theta_t))J(\theta_1\dots\theta_{t-1}) \\ &= J(\theta_t)J(\theta_1\dots\theta_{t-1}) \\ &= J(\theta_t)\dots J(\theta_1). \end{aligned}$$

По лемме 2.6 и теореме 3.1 можно предположить,что

$$\eta^e(J(\theta_j)) = \begin{pmatrix} A_j & 0 \\ V_j & 1 \end{pmatrix}$$

где $A_j \in E_2(P\{x_3\}^e)$. Индукцией по $t$ легко показать, что

$$\eta^e(J(\theta_1\dots\theta_t)) = \eta^e(J(\theta_t))\dots\eta^e(J(\theta_1)) = \begin{pmatrix} A_tA_{t-1}\dots A_1 & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix}.$$

Следствие доказано. □

Теперь мы готовы доказать наш главный результат. Поскольку $\overline{\delta} \neq \mathsf{id}$, требуется построить ручной автоморфизм $\psi$, такой что $\overline{\delta\psi} = \mathsf{id}$.

**ТЕОРЕМА 3.2.** Автоморфизм типа Аника $\delta$ в (1) является диким.

**Доказательство.** Очевидно, что $\overline{\delta} = (x_1, x_2 + x_1x_3^2, x_3)$. Определим $\psi = (x_1, x_2 - x_1x_3^2, x_3) \in \mathsf{TA}(P_3)$. Тогда $\overline{\delta\psi} = \bar{\delta}\bar{\psi} = \mathsf{id}$. Предположим, что $\delta$ ручной. По следствию 3.1 имеем

$$\eta^e(J_2(\delta\psi)) \in E_2(P\{x_3\}^e).$$

С другой стороны, по лемме 2.3 получаем

$$\eta^e(J(\delta\psi)) = \eta^e\overline{\delta}^e(J(\psi))\eta^e(J(\delta))$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -M_{x_3}^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+M_{x_3}H_{x_3} & -H_{x_3}^2 & 0 \\ M_{x_3}^2 & 1-M_{x_3}H_{x_3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Учитывая лемму 3.1, приходим к противоречию:

$$\eta^e(J_2(\delta\psi)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -M_{x_3}^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+M_{x_3}H_{x_3} & -H_{x_3}^2 \\ M_{x_3}^2 & 1-M_{x_3}H_{x_3} \end{pmatrix} \notin E_2(P\{x_3\}^e).$$

Следовательно, $\delta$ дикий. □

Напомним, что автоморфизм $\varphi = (f_1, \ldots, f_n)$ свободной алгебры $A_n$ называется *стабильно ручным*, если $\varphi$ допускает ручное расширение $\tilde{\varphi} = (f_1, \ldots, f_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) \in TAut(A_{n+k})$.

Мы завершаем статью наблюдением, что, как и в случае 3-порожденной свободной ассоциативной алгебры [16], автоморфизм типа Аника $\delta$ является стабильно ручным.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1.** Автоморфизм $\delta$ является стабильно ручным.

**Доказательство.** Предположим, что $n = 4$ и расширим автоморфизм типа Аника $\delta$ до следующего ручного автоморфизма алгебры $P_4$:

(i) $x_1 \xrightarrow{\varphi_1} x_1 \xrightarrow{\varphi_2} x_1 + [x_3, x_4]$

$\xrightarrow{\varphi_3} x_1 + [x_3, x_4] - [x_3, [x_3, x_2]]$

$\xrightarrow{\varphi_4} x_1 + [x_3, x_4] + x_3[x_3, x_1] - [x_3, [x_3, x_2]]$

$\xrightarrow{\varphi_5} x_1 + [x_3, x_4] + x_3[x_3, x_1] - [x_3, [x_3, x_2]] + x_3[x_3, [x_3, x_4]$

$\xrightarrow{\varphi_6} x_1 + x_3[x_3, x_1] - [x_3, [x_3, x_2]]$

$\xrightarrow{\varphi_8\varphi_7} x_1 + x_3[x_3, x_1] - [x_3, [x_3, x_2]] = \delta(x_1),$

(ii) $x_2 \xrightarrow{\varphi_1} x_2 + x_3x_4 \xrightarrow{\varphi_2} x_2 + x_3x_4 \xrightarrow{\varphi_3} x_2 + x_3x_4 - x_3[x_3, x_2]$

$$\xrightarrow{\varphi_4} x_2 + x_3x_4 + x_1x_3^2 - x_3[x_3, x_2] \xrightarrow{\varphi_5} x_2 + x_1x_3^2 - x_3[x_3, x_2] + x_3^2[x_3, x_4]$$

$$\xrightarrow{\varphi_6} x_2 + x_1x_3^2 - x_3[x_3, x_2] \xrightarrow{\varphi_8\varphi_7} x_2 + x_1x_3^2 - x_3[x_3, x_2] = \delta(x_2);$$

(iii) $x_3 \xrightarrow{\varphi} x_3$;

(iv) $x_4 \xrightarrow{\varphi_2\varphi_1} x_4 \xrightarrow{\varphi_4\varphi_3} x_4 + x_1x_3 - [x_3, x_2] \xrightarrow{\varphi_5} x_4 + x_1x_3 - [x_3, x_2] + x_3[x_3, x_4]$

$$\xrightarrow{\varphi_6} x_4 + x_1x_3 - [x_3, x_2] \xrightarrow{\varphi_7} x_4 + x_1x_3 \xrightarrow{\varphi_8} x_4.$$

Предложение доказано. □

**Благодарности.** Авторы выражают свою благодарность Юй Ли, Яньхуа Ван, Юнцзюнь Сюй, Джеймса Дж. Чжану и Сянгуй Чжао за их ценные обсуждения и предложения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. П. Шестаков, "Квантования супералгебр Пуассона и специальность йордановых супералгебр пуассонова типа", *Алгебра логика* **32**, No. 5, 571–584 (1993).
2. A. J. Czerniakiewicz, "Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, I", *Trans. Am. Math. Soc.* **160**, 393–401 (1971).
3. A. J. Czerniakiewicz, "Automorphisms of a free associative algebra of rank 2, II", *Trans. Am. Math. Soc.* **171**, 309–315 (1972).
4. H. W. E. Jung, "Über ganze birationale Transformationen der Ebene", *J. Reine Angew. Math.* **184**, 161–174 (1942).
5. W. van der Kulk, "On polynomial rings in two variables", *Nieuw Arch. Wiskd., III. Ser.* **1**, 33–41 (1953).
6. Л. Г. Макар-Лиманов, "Об автоморфизмах свободной алгебры с двумя образующими", *Функц. анализ прил.* **4**, No. 3, 107–108 (1970).
7. L. Makar-Limanov, U. Turusbekova, U. Umirbaev, "Automorphisms and derivations of free Poisson algebras in two variables", *J. Algebra* **322**, No. 9, 3318–3330 (2009).

8. M. Nagata, *On the Automorphism Group of* $k[x, y]$, Kyoto Univ. Press, Tokyo (1972).

9. I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, "Poisson brackets and two-generated subalgebras of rings of polynomials", *J. Am. Math. Soc.* **17**, No. 1, 181–196 (2004).

10. I. P. Shestakov, U. U. Umirbaev, "The tame and the wild automorphisms of polynomial rings in three variables", *J. Am. Math. Soc.* **17**, No. 1, 197–227 (2004).

11. U. U. Umirbaev, "The Anick automorphism of free associative algebras", *J. Reine Angew. Math.* **605**, 165–178 (2007).

12. P. M. Cohn, *Free Rings and Their Relations*, Academic Press, London etc., (1985).

13. R. M. Bryant, V. Drensky, "Obstructions to lifting automorphisms of free algebras", *Commun. Algebra* **21**, No. 12, 4361–4389 (1993).

14. U. U. Umirbaev, "Defining relations of the tame automorphism group of polynomial algebras in three variables", *J. Reine Angew. Math.* **600**, 203–235 (2006).

15. U. Umirbaev, "Universal enveloping algebras and universal derivations of Poisson algebras", *J. Algebra* **354**, No. 1, 77–94 (2012).

16. P. M. Cohn, "On the structure of the $GL_2$ of a ring", *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.* **30**, 365–413 (1966).

17. V. Drensky, J. T. Yu, "Automorphisms fixing a variable of $K\langle x, y, z\rangle$", *J. Algebra* **291**, No. 1, 250–258 (2005).

Статья поступила в редакцию 2 июля 2024 г.
после доработки 2 июля 2024 г.
принята к публикации 18 декабря 2024 г.

Алгебра и логика Том 64, No. 5, 587–603 (2024)

УДК 515.162.8

**В. Э. Шпильрайн**

# УЗЛОВЫЕ ИНВАРИАНТЫ ИЗ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОС АВТОМОРФИЗМАМИ СВОБОДНОЙ ГРУППЫ

Аннотация: Статья посвящена построению новых инвариантов узлов, возникающих из представлений групп кос автоморфизмами свободных групп. Изучаются свойства этих инвариантов, их связь с классическими полиномиальными инвариантами, а также приводятся примеры, демонстрирующие их различительную силу. В частности, показано, что предложенный подход позволяет различать узлы, не различаемые полиномом Александера.

Ключевые слова: *Узлы, группы кос, свободные группы, автоморфизмы, инварианты узлов, представления групп.*

*Светлой памяти Виталия Анатольевича Романькова*

## ВВЕДЕНИЕ

Наша процедура получения изотопных инвариантов зацеплений основана на следующих хорошо известных фактах; см [1].

— Любое зацепление может быть представлено в виде замкнутой косы. Обозначим через $B_n$ группу кос с $n$ нитями.

— Замыкания кос $\beta_1 \in B_n$ и $\beta_2 \in B_m$ задают изотопически эквивалентные зацепления тогда и только тогда, когда слово косы $\beta_1$ можно привести к слову косы $\beta_2$ с помощью последовательности движений Маркова, подробнее см. п. 1.2.

Dep. Math., The City College of New York, New York, NY, USA; shpilrain@yahoo.com.

— Абелианизация (т. е. факторгруппа по коммутанту) любой группы кос $B_n$ представляет собой бесконечную циклическую группу.

— Любая группа кос $B_n$ допускает точные представления через автоморфизмы свободной группы $F_n$ ранга $n$. Обозначим образ такого представления через $C_n$.

— Для каждой группы $C_n$ существует гомоморфизм в группу $n \times n$-матриц над кольцом многочленов Лорана от одной переменной. Этот гомоморфизм не обязательно будет инъективным; обозначим его через $\tau$.

Матрицы, упомянутые в последнем пункте, вычисляются следующим образом. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — порождающие свободной группы $F_n$. Сначала вычислим $n \times n$-матрицу Якоби $J_\varphi$ для данного автоморфизма $\varphi \in \mathrm{Aut}(F_n)$. Это будет матрица частных производных Фокса $d_i(y_j)$, где $y_j = \varphi(x_j)$. Производные Фокса являются элементами группового кольца $\mathbb{Z}F_n$, подробнее см. § 1.1.

Матрица $J_\varphi$ обладает интересными свойствами, схожими с „обычной“ матрицей Якоби многомерной функции; например, , для гомоморфизма $\varphi : F_n \to F_n$, матрица $J_\varphi$ обратима тогда и только тогда, когда $\varphi$ обратим, т. е. является автоморфизмом $F_n$, [2]. Кроме того, строки $J_\varphi$ линейно независимы над групповым кольцом $F_n$ тогда и только тогда, когда $\varphi$ инъективен [3].

Однако отображение $\varphi \to J_\varphi$ не является гомоморфизмом, поскольку согласно правилу цепи для производных Фокса выполняется равенство $J_{\varphi\psi} = J_\varphi^\psi J_\psi$, где $J_\varphi^\psi$ обозначает результат применения гомоморфизма $\psi$ ко всем элементам $J_\varphi$ (любой гомоморфизм $F_n$ может быть линейно продолжен на групповое кольцо $\mathbb{Z}F_n$).

Если мы хотим получить представление автоморфизмов из $C_n$ с помощью матриц Якоби, то следует применить гомоморфизм, обозначим его $\alpha$, к произведению $J_\varphi^\psi J_\psi$: $(J_\varphi^\psi J_\psi)^\alpha = J_\varphi^{\psi\alpha} J_\psi^\alpha$. Если $J_\varphi^{\psi\alpha} = J_\varphi^\alpha$ для всех $\varphi, \psi \in C_n$, то мы получаем представление автоморфизмов из $C_n$, сопоставляя $\varphi \in C_n$ с $J_\varphi^\alpha$.

Для некоторых групп $C_n$ гомоморфизм $\alpha$ может быть гомоморфиз-

мом из группы $F_n$ в бесконечную циклическую группу $\langle t \rangle$, при котором каждый порождающий $x_i$ отображается в $t$. Этот гомоморфизм естественным образом продолжается до гомоморфизма из группового кольца $\mathbb{Z}F_n$ в групповое кольцо $\mathbb{Z}[t]$ — кольцо многочленов Лорана над $\mathbb{Z}$ от одной переменной.

Для определенного представления группы $B_n$ подгруппой $\mathrm{Aut}(F_n)$, известного как представление Артина, описанное выше представление через матрицы над многочленами Лорана называется *представлением Бурау*, см. [4] или [1]. В свою очередь, НОД всех миноров одного и того же *коранга*, полученных из матрицы Бурау вычитанием единичной матрицы, инвариантен относительно движений Маркова, а следовательно служит изотопным инвариантом соответствующих зацеплений. Для ненулевых миноров максимального ранга эти инварианты известны как многочлены Александера, хотя изначальный способ определения многочленов Александера для узла был другим. Он базировался на представлении Виртингера фундаментальной группы $G$ узла, см. [5]. Таким образом, многочлены Александера являются инвариантами (класса изоморфизма) группы $G$, и потому не могут различать два узла с изоморфными фундаментальными группами. Однако мы утверждаем в § 3, что движения Маркова составляют относительно небольшое подмножество множества всех преобразований Титце, и наш подход в § 2.1 позволяет провести более тонкий анализ того, как движения Маркова влияют на матрицу Бурау.

Ранее Вада [6] обнаружил несколько других представлений группы кос $B_n$ через автоморфизмы свободной группы $F_n$. Позднее было показано, что эти представления являются точными [7] (хотя это не имеет значения в данной статье). На основе представлений Вады можно получить другие представления кос через $n \times n$-матрицы над многочленами Лорана и построить соответствующие изотопные инварианты узлов и зацеплений. Однако, как мы предполагаем в § 5, этим способом нельзя получить принципиально новые инварианты; скорее всего, полученные инварианты являются специализацией многочленов Александера.

## 1 ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Все факты, изложенные в этом разделе, хорошо известны и могут быть найдены, например, в [1], но для удобства читателя мы даем здесь краткое изложение.

**1.1. Производные Фокса.** Пусть $F_n$ — свободная группа ранга $n$, а $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — фиксированное множество порождающих ее элементов. Предположим также, что $\mathbb{Z}F_n$ — целочисленное групповое кольцо группы $F_n$.

Частные производные Фокса $\partial_i$ можно определить для элементов группы $F_n$, используя правила ниже, ну а затем продолжить их, используя линейность, на все групповое кольцо $\mathbb{Z}F_n$:

(1) $\partial_i(x_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера);

(2) если $u = vx_i \in F_n$, то $\partial_i(u) = v + \partial_i(v)$;

(3) если $u = vx_i^{-1} \in F_n$, то $\partial_i(u) = -vx_i^{-1} + \partial_i(v)$;

(4) если $u = vx_j,\ j \neq i$, то $\partial_i(u) = \partial_i(v)$.

Например, если $u = x_1x_2x_1^{-1}x_2$, то $\partial_1(u) = -x_1x_2x_1^{-1} + 1$.

**1.2. Марковские движения.** Будем обозначать косы и соответствующие им слова кос (т. е. слова в стандартных порождающих $\sigma_i$ группы кос $B_n$) одними и теми же буквами, когда контекст не вызывает путаницы.

Теорема Маркова, см. [1], гласит: две косы $\beta_1 \in B_n$ и $\beta_2 \in B_m$ при их замыкании образуют изотопически эквивалентные зацепления тогда и только тогда, когда соответствующее слово косы $\beta_1$ может быть преобразовано в слово косы $\beta_2$ с помощью последовательности марковских движений, к которым относятся:

(1) *Сопряжение в группе кос*, т.е. $\beta \in B_n$ можно заменить на $\gamma^{-1}\beta\gamma$ для некоторого $\gamma \in B_n$.

(2) *Стабилизация*. $\beta \in B_n$ можно умножить справа на $\sigma_n$ или на $\sigma_n^{-1}$. Отметим, что группа $B_{n+1}$ порождена $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, в то время как группа $B_n$ порождена с помощью $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$.

(3) *Обратное к (2).* Другими словами, если $\beta = \gamma\sigma_n^{\pm 1}$, где $\gamma \in B_n$, то $\beta$ можно заменить на $\gamma$.

**1.3. Матрицы над $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ и их элементарные идеалы.** В теории узлов существует хорошо известная конструкция *матрицы Александера* из представления фундаментальной группы узла по порождающим и определяющим соотношениям, см. [5, гл. 7]. Эта конструкция аналогична нашей конструкции представления Бурау, описанной во Введении, поскольку матрица Александера также является матрицей абелианизированных частных производных Фокса, но эти производные относятся к определяющим соотношениям в представлении Виртингера.

Любые два представления (по порождающим и определяющим соотношениям) одной и той же группы эквивалентны при преобразованиях Титце, поэтому можно изучить влияние преобразований Титце на свойства матрицы Александера и получить инварианты узлов.

Наш подход здесь схож с описанным выше, за исключением того, что мы имеем дело с другими матрицами над $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ (в частности, используемые нами матрицы всегда квадратные), и инвариантность, которую мы хотим получить, должна быть относительно марковских движений, а не относительно преобразований Титце. Однако часть нашего подхода, связанная с линейная алгеброй, очень похожа на [5, гл. 7.4].

Более точно, пусть $M$ — матрица $n \times n$ над $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, а для $0 < n - k < n$ положим $E_k = E_k(M)$ — идеал кольца $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, порожденный всеми минорами размера $(n-k)$ матрицы $M$. Кроме того, $E_k(M) = \{0\}$, если $k < 0$, и $E_k(M) = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, если $k \geq n$. Тогда цепочка идеалов $E_0 \subseteq E_1 \subseteq \ldots \subseteq E_n = E_{n+1} = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ инвариантна относительно обычных элементарных операций над строками и/или столбцами матрицы $M$, а также относительно увеличения размера матрицы $M$ за счет одновременного добавления дополнительных строки $(0 \ldots 01)$ (внизу) и столбца $(0 \ldots 01)$ (справа).

## 2 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АРТИНА ГРУППЫ КОС И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Существует хорошо известное представление группы кос $B_n$ в группе автоморфизмов свободной группы $F_n$, см. [1, с. 25], предложенное Артином.

Пусть $F_n$ порождается $x_1, \ldots, x_n$. Тогда автоморфизм $\hat{\sigma}_i$, соответствующий порождающему косы $\sigma_i$, отображает $x_i$ в $x_i x_{i+1} x_i^{-1}$, $x_{i+1}$ в $x_i$ и фиксирует все остальные порождающие $x_k$. Обозначим это представление группы кос как $\varphi$.

Соответствующая матрица Якоби $J_\varphi$ в основном является единичной матрицей, за исключением клетки размера $2 \times 2$, главная диагональ которой является частью главной диагонали $J_\varphi$, и эта ячейка выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 - x_i x_{i+1} x_i^{-1} & x_i \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если теперь определить гомоморфизм $\alpha$, заменив каждый $x_i$ на $t$, то будет выполнено условие $J_\varphi^{\psi\alpha} = J_\varphi^\alpha$ для всех $\varphi, \psi$ в образе представления Артина, и, следовательно, отображение $\varphi \to J_\varphi^\alpha$ будет гомоморфизмом. Соответствующая $2 \times 2$ клетка в $J_\varphi^\alpha$ будет выглядеть так: $\begin{pmatrix} 1-t & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Отметим, что обратная матрица этой клетки будет иметь вид $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^{-1} & 1-t^{-1} \end{pmatrix}$.

Это конкретное представление кос с помощью матриц $J_\varphi^\alpha$ известно как *представление Бурау*, см. [1] или [4].

**2.1. Инвариантность относительно движений Маркова.** Теперь мы покажем, что идеалы кольца $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, порожденные всеми минорами размера $k \times k$ матрицы $J_\varphi^\alpha - I$, инвариантны относительно движений Маркова, применяемых к косе, которая соответствует автоморфизму $\varphi$. Обозначим через $I$ единичную матрицу соответствующего размера.

Инвариантность относительно сопряжений очевидна, поэтому мы вычислим результат (на матрице $J_\varphi^\alpha - I$) умножения косы $\beta$ из $B_n$ на $\sigma_n$ или

$\sigma_n^{-1}$ справа (обозначим матрицу $J_\varphi^\alpha$ через $J_\beta$ для краткости):

$$J_{\beta\sigma_n} - I = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y & 0 \\ & \dots & x & 0 \\ & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & 0 \\ & \dots & 1-t & t \\ & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} - I$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y-yt & yt \\ & \dots & x-xt-1 & xt \\ 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

После добавления последнего столбца ко второму столбцу справа, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11}-1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y & yt \\ & \dots & x-1 & xt \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\det(J_{\beta\sigma_n} - I) = -\det(J_\beta - I)$, поэтому $\det(J_\beta - I)$ и $\det(J_{\beta\sigma_n} - I)$ порождают один и тот же идеал кольца $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$.

Кроме того, цепочки элементарных идеалов матриц $(J_\beta - I)$ и $(J_{\beta\sigma_n} - I)$ одинаковы, так как последняя матрица может быть получена из первой последовательностью элементарных операций, см. § 1.4.

Теперь сравним матрицы $J_\beta - I$ и $J_{\beta\sigma_n^{-1}} - I$.

$$J_{\beta\sigma_n^{-1}} - I = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y & 0 \\ & \dots & x & 0 \\ & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & 0 \\ & \dots & 0 & 1 \\ & \dots & t^{-1} & 1-t^{-1} \end{pmatrix} - I$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & y \\ & \dots & 0 & x \\ 0 & \dots & t^{-1} & 1-t^{-1} \end{pmatrix} - I$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & y \\ & \dots & -1 & x \\ 0 & \dots & t^{-1} & -t^{-1} \end{pmatrix}.$$

После добавления второго столбца справа к правому столбцу и последующей перестановки последних двух столбцов получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11}-1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y & 0 \\ & \dots & x-1 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $\det(J_{\beta\sigma_n^{-1}} - I) = t^{-1}\det(J_\beta - I)$. Цепочки элементарных идеалов матриц $(J_\beta - I)$ и $(J_{\beta\sigma_n^{-1}} - I)$ одинаковы, т. к. последняя матрица может быть получена из первой последовательностью элементарных операций, см. § 1.4.

## 3 МОЖНО ЛИ ИСПОЛЬЗОВАТЬ МАТРИЦЫ БУРАУ ДЛЯ ДЕМОНСТРАЦИИ ТОГО, ЧТО ПРАВЫЕ И ЛЕВЫЕ ТРИЛИСТНИКИ НЕ ИЗОТОПНЫ?

Существует распростран енное мнение, что матрицы Александера, полученные из представлений фундаментальной группы узла, не могут быть использованы для различия двух узлов с изоморфными фундаментальными группами. Однако „инвариантность относительно изоморфизмов“ обычно устанавливается, см., например, [5, гл. 7.4], как инвариантность относительно преобразований Титце.

С другой стороны, движения Маркова, неформально говоря, составля-

ют относительно малую часть от множества всех преобразований Титце, и именно поэтому наш подход в § 1.1 позволяет провести более тонкий анализ.

Проиллюстрируем наш подход на примере правого и левого трилистников. Коса, соответствующая правому трилистнику, это $\beta = \sigma_1^3$, и соответствующая матрица $J_\beta - I$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -t^3+t^2-t & t^3-t^2+t \\ t^2-t+1 & -t^2+t-1 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, коса, соответствующая левому трилистнику, это $\beta' = \sigma_1^{-3}$, и соответствующая матрица $J_{\beta'} - I$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} -t^{-2}+t^{-1}-1 & t^{-2}-t^{-1}+1 \\ t^{-3}-t^{-2}+t^{-1} & -t^{-3}+t^{-2}-t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Кажется правдоподобным, что никакая последовательность движений Маркова, применяемая к косе $\beta'$, не может полностью устранить мономы $t^k$ с $k<0$ из матрицы $J_{\beta'}-I$. Это очевидно для движений Маркова типов 2 и 3, так называемая стабилизация и обратное к ней движение, из § 2.1. Но эффект сопряжения не так очевиден. Обращаем внимание, что сопряжение можно делать не просто любой матрицей над $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, а только матрицами Бурау, соответствующим косам.

Тем не менее известно, что косы $\sigma_1$ и $\sigma_1^{-1}$ порождают один и тот же узел, а именно тривиальный, а косы $\sigma_1^2$ и $\sigma_1^{-2}$ порождают одно и то же зацепление, а именно зацепление Хопфа. Все элементы матрицы Бурау для $\sigma_1^{-2}$ имеют мономы вида $t^k$ с $k<0$, и все же существует последовательность движений Маркова, которая приводит $\sigma_1^{-2}$ к $\sigma_1^2$, несмотря на то, что матрица Бурау для $\sigma_1^2$ не содержит мономов $t^k$ с $k<0$. Следовательно, полезно найти явную последовательность движений Маркова, которая приводит $\sigma_1^{-2}$ к $\sigma_1^2$, чтобы попытаться найти алгебраическое объяснение, почему нет такой последовательности, которая приводит $\sigma_1^{-3}$ к $\sigma_1^3$.

**3.1. Группа ассоциированная с эндоморфизмом $F_n$.** Мы упомина-

ли выше, что движения Маркова образуют подмножество множества всех преобразований Тицце, но преобразования Тицце применяются к представлению группы с помощью порождающих и определяющих соотношений, в то время как движения Маркова применяются к элементам группы кос $B_n$. Поэтому необходимы пояснения.

Пусть $F_n$ — свободная группа ранга $n$ с набором порождающих $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть $\varphi : F_n \to F_n$ — эндоморфизм группы $F_n$. Положим $\varphi(x_i) = y_i$. Тогда можно ассоциировать следующую группу, заданную порождающими и определяющими соотношениями, с эндоморфизмом $\varphi$:

$$G_\varphi = \langle x_1, \ldots, x_n \mid y_1 = x_1, \ldots, y_n = x_n \rangle.$$

Эквивалентно, $G_\varphi = \langle x_1, \ldots, x_n \mid x_1^{-1} y_1, \ldots, x_n^{-1} y_n \rangle$. Эта группа, насколько известно, не имеет специального имени. Ее не следует путать с *отображениями тора* $\varphi$, см. [8].

Матрица Александера $A$ [5, гл. 7.3] для данного представления получается из матрицы $J_\varphi$ путем умножения каждого элемента в строке $i$ на $x_i^{-1}$ (слева), а затем вычитания диагональной матрицы с $x_i^{-1}$ на диагонали. Таким образом, после применения отображения абелинизиции $\alpha : x_i \to t$ получаем $A^\alpha = t^{-1}(J_\varphi^\alpha - I)$. Следовательно, цепочка элементарных идеалов матрицы $A^\alpha$ совпадает с цепочкой элементарных идеалов матрицы $(J_\varphi^\alpha - I)$.

Преобразования Тицце, применяемые к представлению группы $G_\varphi$, приводят к элементарным операциям над строками и столбцами матрицы $A^\alpha$, точно так же, как движения Маркова приводят к элементарным операциям над строками и столбцами матрицы $(J_\varphi^\alpha - I)$. Поскольку движения Маркова типа (1) — это просто сопряжения, а не произвольные изоморфизмы, их действие на матрицу $(J_\varphi^\alpha - I)$ можно контролировать лучше, по крайней мере теоретически.

## 4 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВАДЫ ГРУППЫ КОС И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИНВАРИАНТЫ УЗЛОВ

Вада [6] нашел несколько других представлений группы кос $B_n$ в группе $\mathrm{Aut}(F_n)$; позже было показано, что они являются точными [7].

В этой работе нас будет интересовать представление Вады, в котором автоморфизм $\hat{\sigma}_i$, соответствующий порождающему группы кос $\sigma_i$, отображает $x_i$ в $x_i^2 x_{i+1}$, $x_{i+1}$ в $x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} x_{i+1}$ и оставляет все другие порождающие $x_k$ на месте.

Матрица Якоби $J_{\hat{\sigma}_i}$ является в основном $n \times n$ единичной матрицей, за исключением клетки размера $2 \times 2$, чья главная диагональ является частью главной диагонали матрицы $J_\varphi$, и эта ячейка выглядит так:

$$\begin{pmatrix} 1 + x_i & x_i^2 \\ -x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} & -x_{i+1}^{-1} + x_{i+1}^{-1} x_i^{-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь определение отображения абелинизиции $\alpha$, чтобы оно удовлетворяло условию $J_\varphi^{\psi\alpha} = J_\varphi^\alpha$ для всех $\varphi, \psi$ в образе представления Вады, несколько сложнее. Оно может быть определено следующим образом. Если $i \geq 1$ нечетное, то $\alpha(x_i) = t$; в противном случае, $\alpha(x_i) = t^{-1}$. Если $i$ нечетное, то соответствующая $2 \times 2$ ячейка в $J_\varphi^\alpha$ будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} 1 + t & t^2 \\ -1 & 1 - t \end{pmatrix}.$$

Обратной матрицей этой ячейки будет

$$\begin{pmatrix} 1 - t & -t^2 \\ 1 & 1 + t \end{pmatrix}.$$

Если $i$ четное, то клетка будет выглядеть так:

$$\begin{pmatrix} 1 + t^{-1} & t^{-2} \\ -1 & 1 - t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Обратной матрицей этой клетки будет

$$\begin{pmatrix} 1-t^{-1} & -t^{-2} \\ 1 & 1+t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим матрицу $J^{\alpha}_{\varphi}$, соответствующую косе $\beta$, как $J_{\beta}$. Вычислим результат движения Маркова, применяемого к косе $\beta$, на матрице $(J_{\beta}-I)$. Сначала предположим, что $\beta$ умножена на $\sigma_n$ при нечетном $n$.

$$\begin{aligned} J_{\beta\sigma_n}-I &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y & 0 \\ & \dots & x & 0 \\ & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & 0 \\ & \dots & 1+t & t^2 \\ & \dots & -1 & 1-t \end{pmatrix} - I \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y(1+t) & yt^2 \\ & \dots & x(1+t) & xt^2 \\ 0 & \dots & -1 & 1-t \end{pmatrix} - I \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}-1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y(1+t) & yt^2 \\ & \dots & x(1+t)-1 & xt^2 \\ 0 & \dots & -1 & -t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь добавляем последнюю строку, умноженную на $xt$, ко второй строке снизу, а затем добавляем последнюю строку, умноженную на $yt$, к третьей строке снизу. Это дает

$$\begin{pmatrix} a_{11}-1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y & 0 \\ & \dots & x-1 & 0 \\ 0 & \dots & -1 & -t \end{pmatrix}.$$

Наконец, умножаем крайний правый столбец на $-t^{-1}$ и добавляем его ко

второму столбцу справа, получая

$$\begin{pmatrix} a_{11}-1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y & 0 \\ & \dots & x-1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -t \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\det(J_{\beta\sigma_n} - I) = -t\det(J_\beta - I)$. Цепочки элементарных идеалов матриц $(J_\beta - I)$ и $(J_{\beta\sigma_n} - I)$ совпадают, т. к. последняя матрица может быть получена из первой путем последовательности элементарных операций, см. п. 1.4.

Сравним матрицы $J_\beta - I$ и $J_{\beta\sigma_n^{-1}} - I$:

$$\begin{aligned} J_{\beta\sigma_n^{-1}} - I &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y & 0 \\ & \dots & x & 0 \\ & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & 0 \\ & \dots & 1-t & -t^2 \\ & \dots & 1 & 1+t \end{pmatrix} - I \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y(1-t) & -yt^2 \\ & \dots & x(1-t) & -xt^2 \\ 0 & \dots & 1 & 1+t \end{pmatrix} - I \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}-1 & \dots & & \vdots \\ & \ddots & y(1-t) & -yt^2 \\ & \dots & x(1-t)-1 & -xt^2 \\ 0 & \dots & 1 & t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что $\det(J_{\beta\sigma_n^{-1}} - I) = t\det(J_\beta - I)$. Также цепочки элементарных идеалов матриц $(J_\beta - I)$ и $(J_{\beta\sigma_n^{-1}} - I)$ совпадают, т. к. последняя матрица может быть получена из первой путем последовательности элементарных операций, см. п. 1.4.

Это завершает случай, когда $n$ нечетное. Случай, когда $n$ четное, рассматривается аналогично, т. к. он сводится к замене $t$ на $t^{-1}$ в приведенных

выше вычислениях.

**4.1. Полиномы Вады.** Инварианты, полученные из представления Вады — это идеалы $E_k$ кольца рядов Лорана $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, порожденные всеми минорами размера $(n-k)\times(n-k)$ соответствующей $n\times n$ матрицы $J_\varphi^\alpha - I$. Если минор размера $n\times n$ (т. е. определитель) матрицы $J_\varphi^\alpha - I$ равен 0, то рассматриваются миноры размера $(n-1)\times(n-1)$ и т. д.

Полином, порождающий ненулевой $E_k$ с наименьшим $k \geq 0$, называется полиномом Вады соответствующего узла или зацепления. Чтобы избежать неоднозначности, полиномы Вады нормализуются следующим образом: (1) полином не должен содержать отрицательных показателей $t$; (2) свободный член не должен быть равен 0; (3) коэффициент старшего монома должен быть положительным. Например, нормализуя полином $t^{-2} - 1 - t$, мы умножаем его на $t^2$, меняем знак и получаем $t^3 + t^2 - 1$.

## 5 ПРИМЕРЫ

Здесь мы приводим примеры полиномов Вады для некоторых простых узлов и зацеплений, а также сравниваем их с полиномами Александера.

**5.1. Тривиальный узел.** Коса, соответствующая тривиальному узлу, имеет вид $\beta = \sigma_1$, и матрица $J_\beta - I$ равна

$$\begin{pmatrix} t & t^2 \\ -1 & -t \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен 0, поэтому мы рассматриваем НОД минора размера $1\times 1$, который равен 1. Это совпадает с полиномом Александера для тривиального узла.

**5.2. Зацепление Хопфа.** Коса, соответствующая зацеплению Хопфа, имеет вид $\beta = \sigma_1^2$, и соответствующая матрица $J_\beta - I$ равна

$$\begin{pmatrix} 2t & 2t^2 \\ -2 & -2t \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен 0, поэтому мы рассматриваем НОД минора размера $1\times 1$, который равен 2. Это является полиномом Вады для зацепления Хопфа. Заметим, что полином Александера для зацепления Хопфа равен $1-t$.

**5.3. Трилистник.** Коса, соответствующая (правому) трилистнику, имеет вид $\beta=\sigma_1^3$, и соответствующая матрица $J_\beta - I$ равна

$$\begin{pmatrix} 3t & 3t^2 \\ -3 & -3t \end{pmatrix}.$$

Опять же, вычисляем НОД минора размера $1\times 1$, который равен 3. Это является полиномом Вады для трилистника. Обращаем внимание, что полином Александера для трилистника равен $1-t+t^2$.

**5.4.** $(2,k)$ **торические узлы.** Вычисление матрицы $J_\beta$ легко обобщается по индукции для узлов (или зацеплений), соответствующих косам $\sigma_1^k$. Если $k\geq 3$ нечетно, это дает $(2,k)$ торические узлы. Если $k\geq 2$ четно, то это $(2,k)$ торические зацепления. В обоих случаях полином Вады равен $k$. Полином Александера равен $\frac{1+t^k}{1+t}=1-t+t^2-\ldots+(-1)^{k-1}t^{k-1}$.

**5.5. Узел восьмерка.** Коса, соответствующая узлу восьмерке, имеет вид $\beta=(\sigma_1\sigma_2^{-1})^2$, и соответствующая матрица $J_\beta - I$ равна

$$\begin{pmatrix} 3t & 3t^2-4t & -4 \\ -3+t^{-1} & 5-3t-3t^{-1} & -3t^{-2}+4t^{-1} \\ -1 & 3-t & 3t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен 0, а НОД всех миноров размера $2\times 2$ равен 5, тем самым это полином Вады для узла восьмерка. Полином Александера для этого узла равен $t^2-3t+1$.

**5.6. Прямой узел.** Прямой узел является композицией двух правых трилистников. Соответствующая коса имеет вид $\beta=\sigma_1^3\sigma_2^3$, а соответству-

ющая матрица $J_\beta - I$ равна

$$\begin{pmatrix} 3t & 9t+3t^2 & 9 \\ -3 & 3t^{-1}-3t-9 & 3t^{-2}-9t^{-1} \\ 0 & -3 & -3t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен 0, а НОД всех миноров размера $2\times 2$ равен 9, что является полиномом Вады для квадратного узла. Полином Александера для квадратного узла равен $(1-t+t^2)^2$.

**5.7. Бабий узел.** Бабий узел является композицией правого и левого трилистников. Соответствующая коса имеет вид $\beta = \sigma_1^3\sigma_2^{-3}$, а соответствующая матрица $J_\beta - I$ равна

$$\begin{pmatrix} 3t & -9t+3t^2 & -9 \\ -3 & -3t^{-1}-3t+9 & -3t^{-2}+9t^{-1} \\ 0 & 3 & 3t^{-1} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен 0, а НОД всех миноров размера $2\times 2$ равен 9, что является полиномом Вады для бабьего узла, таким же, как для прямого. Полином Александера для бабьего узла равен $(1-t+t^2)^2$, как и для прямого.

Эти примеры позволяют предположить, что справедливо следующее утверждение.

**Гипотеза.** Полином Вады является специализацией полинома Александера при $t=-1$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. S. Birman, *Braids, Links, and Mapping Class Groups. Based on Lecture Notes by James Cannon*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1974).
2. J. S. Birman, "An inverse function theorem for free groups," *Proc. Am. Math. Soc.* **41**, 634–638 (1973).
3. V. Shpilrain, "On monomorphisms of free groups," *Arch. Math.* **64**, No. 6, 465–470 (1995).

4. W. Burau, "Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen," *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.* **11**, 179–186 (1935).

5. R. H. Crowell and R. H. Fox, *Introduction to Knot Theory*, Springer, New York etc. (1977).

6. M. Wada, "Group invariants of links," *Topology* **31**, No. 2, 399–406 (1992).

7. V. Shpilrain, "Representing braids by automorphisms," *Int. J. Algebra Comput.* **11**, No. 6, 773–777 (2001).

8. J. P. Mutanguha, "Irreducibility of a free group endomorphism is a mapping torus invariant," *Comment. Math. Helv.* **96**, No. 1, 47–63 (2021).

Статья поступила в редакцию 12 августа 2024 г.
после доработки 12 августа 2024 г.
принята к публикации 19 марта 2025 г.

Алгебра и логика, Том 63, №4, 604–605 (2024)

# ЗАСЕДАНИЯ
# семинара «Алгебра и логика»

### 2252-е заседание. 19 декабря 2023 г.

П. Е. Алаев. Алгоритмические операции в коммутативных кольцах.

М. Н. Гаськова. Об 1-разрешимости булевых алгебр с одним выделенным идеалом.

### 2253-е заседание. 26 декабря 2023 г.

А. В. Васильев. Полиномиальные алгоритмы для вычисления замыканий конечных групп подстановок.

К. Ж. Кудайбергенов (Алма-Ата, Казахстан). Об абсолютной неразличимости.

### 2254-е заседание. 13 февраля 2024 г.

А. Ю. Никитин (Омск). Алгебраическая геометрия и алгоритмы в классе частично упорядоченных множеств (кандидатская диссертация).

А. А. Тараненко. Трансверсали в латинских квадратах и гиперкубах.

### 2255-е заседание. 20 февраля 2024 г.

А. С. Васильев (Тюмень). Надгруппы примарных подгрупп в группах, близких к простым (кандидатская диссертация).

С. В. Скресанов. Об одном обобщении теоремы Брауэра–Фаулера.

### 2256-е заседание. 27 февраля 2024 г.

Джиган Ван (Хайкоу, Китай), Венбин Го (Хайкоу, Китай), Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров. О периодических группах, насыщенных конечными простыми симплектическими группами.

Н. С. Романовский. Алгебраические замыкания в делимых жестких группах.

**2257-е заседание. 9 апреля 2024 г.**

Н. С. Романовский. Об элементарной теории пополнения разрешимой группы Баумслага–Солитера.

**2258-е заседание. 23 апреля 2024 г.**

Ф. А. Дудкин. Обобщенные группы Баумслага — Солитера, универсально эквивалентные древесным.

А. С. Морозов. Об отображениях с коперечислимыми графиками.

**2259-е заседание. 7 мая 2024 г.**

К. Ж. Кудайбергенов (Алма-Ата, Казахстан). О числе счетных моделей полной теории и её несущественного расширения.

**2260-е заседание. 11 июня 2024 г.**

H. L. Mariano, J. F. Schwarz (Santo Andre, Brasil). Gelfand–Kirillov conjecture as a first-order formula.

М. И. Кудряшова. H-собранные пространства.

**2261-е заседание. 18 июня 2024 г.**

А. А. Гальт. Свойство расщепляемости подгрупп в группах лиева типа (докторская диссертация).

А. А. Шлепкин (Красноярск). О локально конечных группах, содержащих конечные прямые произведения конечных групп диэдра.

*Алгебра и логика*, Том 64, No. 5, 606–608 (2024)

# Р Е Ф Е Р А Т Ы

УДК 512.544.33

М. Г. Амаглобели, Т. З. Бокелавадзе, А. Г. Мясников, Соответствие Мальцева и биинтерпретируемость, *Алгебра и логика*, **64**, No. 5, 471–497 (2024).

Статья посвящена изучению известного соответствия Мальцева между нильпотентными $k$-группами $G$ и нильпотентными алгебрами Ли $L$ над полем $k$ характеристики нуль с теоретико-модельной, алгебро-геометрической и алгоритмической точек зрения. Доказывается, что в этом случае группа $G$ и соответствующая алгебра Ли $L(G)$ биинтерпретируемы уравнениями друг в друге. Это дает существенно более точное описание соответствия, из которого следует, что в дополнение к классическим категорийным свойствам группа $G$ и алгебра $L(G)$ обладают многими другими алгебраическими, алгоритмическими и теоретико-модельными свойствами.

Ключевые слова: *нильпотентные группы, нильпотентные алгебры Ли, соответствие Мальцева, биинтерпретируемость, диофантова проблема, геометрическая эквивалентность, логическая эквивалентность.*

УДК 510.6:512.54:514.146.01

Б. А. Бергер, А. Г. Мясников, Теория моделей проективных пространств, *Алгебра и логика*, **64**, No. 5, 498–537 (2024).

Доказывается, что для любого векторного пространства $V$ над полем $F$ конечной размерности не менее 3 проективное пространство $P(V)$ (множество всех подпространств $V$ с бинарным предикатом включения) регулярно инъективно би-интерпретируемо с полем $F$.

Ключевые слова: *векторное пространство, поле, проективная геометрия, би-интерпретация.*

УДК 512.543.72:512.542.7:512.543.22:512.543.27

О. К. Каримова, А. А. Клячко, Конечные симметрические группы сильно вербально замкнуты, *Алгебра и логика*, **63**, No. 5, 538–546 (2024).

Отвечая на вопрос А. В. Васильева, показываем, что каждая конечная симметрическая (или знакопеременная) группа $H$ является ретрактом всякой группы, содержащей $H$ в качестве вербально замкнутой подгруппы.

Ключевые слова: *Симметрическая группа, ретракт, вербально замкнутая подгруппа.*

УДК 512.5:510.6

Н. С. Романовский, Пополнение разрешимой группы Баумслага — Солитера: элементарная теория, *Алгебра и логика*, **63**, No. 5, 547–563 (2024).

Для разрешимой группы Баумслага — Солитера $\mathrm{BS}(1, n)$ $(n > 1)$ определяется делимое пополнение $\mathrm{BSd}(1, n)$. Описываются группы, элементарно эквивалентные группе $\mathrm{BSd}(1, n)$, находится аксиоматика теории группы $\mathrm{BSd}(1, n)$, доказывается разрешимость этой теории.

Ключевые слова: *разрешимая группа Баумслага — Солитера, делимое пополнение, разрешимая теория.*

УДК 512.579:512.714.5:512.554.342:512.628.2:512.54.05

И. П. Шестаков, З. Жанг, Автоморфизм типа Аника свободной алгебры Пуассона, *Алгебра и логика*, **64**, No. 5, 564–586 (2024).

Изучаются автоморфизмы типа Аника свободной алгебры Пуассона. Устанавливаются новые свойства таких автоморфизмов и их связь с автоморфизмами свободной ассоциативной алгебры. В частности, доказывается, что группа автоморфизмов типа Аника свободной алгебры Пуассона изоморфна группе автоморфизмов типа Аника свободной ассоциативной алгебры.

Ключевые слова: *автоморфизм типа Аника, алгебра Пуассона, автоморфизм, свободная алгебра.*

УДК 515.162.8

В. Э. Шпильрайн, Узловые инварианты из представлений кос автоморфизмами свободной группы, *Алгебра и логика*, **64**, No. 5, 587–603 (2024).

Статья посвящена построению новых инвариантов узлов, возникающих из представлений групп кос автоморфизмами свободных групп. Изучаются свойства этих инвариантов, их связь с классическими полиномиальными инвариантами, а также приводятся примеры, демонстрирующие их различительную силу. В частности, показано, что предложенный подход позволяет различать узлы, не различаемые полиномом Александера.

Ключевые слова: *узлы, группы кос, свободные группы, автоморфизмы, инварианты узлов, представления групп.*