

А. В. Подольский

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
avpodolsky@yandex.ru

Т. А. Шапошникова

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
Москва, Россия
shaposh.tan@mail.ru

СТРАННЫЙ ОПЕРАТОР В ЗАДАЧЕ УСРЕДНЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ В ОБЛАСТИ, ПЕРФОРИРОВАННОЙ ВДОЛЬ МНОГООБРАЗИЯ С ДИНАМИЧЕСКИМ УСЛОВИЕМ СИНЬОРИНИ НА ГРАНИЦЕ ПЕРФОРАЦИЙ. КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ

Изучена задача усреднения уравнения Пуассона в области, перфорированной вдоль многообразия с динамическим краевым условием Синьорини на границе перфораций (частиц), содержащим параметр $\varepsilon^{-\gamma}$. Мы рассматриваем случай, когда перфорации (частицы) имеют произвольную форму и все параметры задачи принимают критическое значение. Основным результатом — вывод и обоснование усредненной модели, содержащей новый нелокальный нелинейный оператор, названный странным оператором. Библиография: 14 назв.

1. Введение

Данная работа продолжает исследования, проведенные в [1, 2] на случай области Ω_ε , перфорированной вдоль $(n-1)$ -мерного многообразия γ . На данную область можно смотреть как на внешность частиц, попавших в область и расположенных ε -периодически вдоль многообразия $\gamma \subset \Omega$. Предполагается, что частицы имеют произвольную форму и заданы как множества вида $a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j$, где j — вектор с целочисленными координатами, G_0 — область, принадлежащая единичному кубу $(-1/2, 1/2)^n$. На границе этих множеств задается динамическое краевое условие Синьорини вида $u_\varepsilon \geq 0$, $\varepsilon^{-k} \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon \geq 0$, $u_\varepsilon (\varepsilon^{-k} \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon) = 0$. В цилиндре $Q_\varepsilon^T = \Omega_\varepsilon \times (0, T)$ функция $u_\varepsilon(x, t)$ удовлетворяет уравнению Пуассона $-\Delta_x u_\varepsilon(x, t) = f(x, t)$. На границе $\partial\Omega \times (0, T)$ задается нулевое условие Дирихле. Мы рассматриваем задачу асимптотического поведения решения $u_\varepsilon(x, t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в случае «критического» значения, входящих в задачу параметров, а именно, считаем, что $a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^\alpha$, $\alpha = k = (n-1)/(n-2)$. В работе доказано, что при критических значениях параметров задачи, в усредненной модели возникает, так называемый странный член, представляющий собой нелокальный нелинейный монотонный оператор $\mathbf{H} : L^2(0, T; L^2(\gamma)) \rightarrow L^2(0, T; L^2(\gamma))$. Заметим, что усреднение задач в перфорированных областях с краевыми условиями Синьорини на границе перфораций вида $u_\varepsilon \geq 0$, $\partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-k} \sigma(x, u_\varepsilon) \geq 0$, $u_\varepsilon (\partial_\nu u_\varepsilon + \varepsilon^{-k} \sigma(x, u_\varepsilon)) = 0$, где $\sigma(x, u)$ — функция, вообще говоря, нелинейная по u , достаточно хорошо изучено в [3]–[6]. Построение эффективных моделей в перфорированных областях, на границе которых задано классическое условие Синьорини $u_\varepsilon \geq 0$, $\partial_\nu u_\varepsilon \geq 0$,

$u_\varepsilon \partial_\nu u_\varepsilon = 0$, где ν здесь и выше — единичный вектор внешней нормали к границе, рассмотрено в [7]–[9].

2. Постановка задачи

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n , $n \geq 3$ с гладкой границей $\partial\Omega$; $\gamma = \Omega \cap \{x_1 = 0\} \neq \emptyset$ — часть $(n-1)$ -мерной гиперплоскости $x_1 = 0$, являющейся $(n-1)$ -мерной областью в \mathbb{R}^{n-1} , $Y = (-1/2, 1/2)^n$, G_0 — подобласть с липшицевой границей, лежащая в Y , $\overline{G_0} \subset Y$ и G_0 — звездная относительно некоторого шара T_ρ^0 с центром в начале координат, радиуса ρ , $\overline{T_\rho^0} \subset G_0$. Положим $\delta B = \{x | \delta^{-1}x \in B\}$, $\delta = \text{const} > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Обозначим через \mathbb{Z}' множество векторов в \mathbb{R}^n , $z = (0, z_2, \dots, z_n)$, где $z_j \in \mathbb{Z}$, $j = 2, \dots, n$. Пусть $a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^{(n-1)/(n-2)}$, $C_0 = \text{const} > 0$. Введем множество

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j,$$

где $G_\varepsilon^j = a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j$, $j \in \Upsilon_\varepsilon = \{z \in \mathbb{Z}' : \rho(\partial\Omega, \overline{G_\varepsilon^z}) \geq 2\varepsilon\}$. Легко видеть, что $|\Upsilon_\varepsilon| \cong d\varepsilon^{1-n}$, $d = \text{const} > 0$. Обозначим через T_r^j ($j \in \Upsilon_\varepsilon$) шар с центром в точке $P_\varepsilon^j = \varepsilon j \in \gamma$ радиуса r . Имеем

$$G_\varepsilon^j \subset T_{Ca_\varepsilon}^j \subset T_{\varepsilon/4}^j \subset Y_\varepsilon^j = \varepsilon Y + \varepsilon j,$$

$C = \text{const} > 0$. Положим $\Omega^+ = \Omega \cap \{x_1 > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{x_1 < 0\}$, $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}$, $S_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \partial G_\varepsilon^j$, $\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup S_\varepsilon$, $Q_\varepsilon^T = \Omega_\varepsilon \times (0, T)$, $S_\varepsilon^T = S_\varepsilon \times (0, T)$, $\Gamma^T = \partial\Omega \times (0, T)$.

Введем множества

$$K_\varepsilon = \{v \in H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) : v \geq 0 \text{ п.в. } x \in S_\varepsilon\},$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \{v \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)) : v(\cdot, t) \in K_\varepsilon \text{ п.в. } t \in [0, T]\}.$$

В Q_ε^T рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_\varepsilon &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon &\geq 0, \quad \varepsilon^{-k} \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon \geq 0, \quad (x, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon(\varepsilon^{-k} \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon) &= 0, \quad (x, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon(x, 0) &= 0, \quad x \in S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \Gamma^T, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $f \in H^1(0, T; L^2(\Omega))$, ν — вектор внешней единичной нормали к S_ε^T .

Как обычно, обозначим через $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ замыкание в $H^1(\Omega_\varepsilon)$ множества бесконечно дифференцируемых в $\overline{\Omega_\varepsilon}$ функций, обращающихся в нуль в окрестности $\partial\Omega$.

Сильным решением задачи (2.1) назовем функцию $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$, у которой $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))$, $u_\varepsilon(x, 0) = 0$, удовлетворяющую неравенству

$$\varepsilon^{-k} \int_{S_\varepsilon^T} \partial_t u_\varepsilon (\varphi - u_\varepsilon) ds dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla (\varphi - u_\varepsilon) dx dt \geq \int_{Q_\varepsilon^T} f(\varphi - u_\varepsilon) dx dt, \tag{2.2}$$

где φ — произвольный элемент \mathcal{K}_ε . Неравенство (2.2) является вариационной формулировкой задачи (2.1).

Теорема 2.1. Для произвольного $\varepsilon > 0$ задача (2.1) имеет единственное сильное решение, для которого справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))} + \varepsilon^{-k/2} \|u_\varepsilon\|_{C([0, T]; L^2(S_\varepsilon))} &\leq K \|f\|_{L^2(Q^T)}, \\ \varepsilon^{-k/2} \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))} + \|\nabla u_\varepsilon\|_{C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon))} &\leq K \|f\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где постоянная K здесь и далее не зависит от ε и f .

Доказательство. Воспользуемся методом штрафов [10]. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} -\Delta u_\varepsilon^\delta &= f(x, t), \quad (x, t) \in Q_\varepsilon^T, \\ \varepsilon^{-k} \partial_t u_\varepsilon^\delta + \partial_\nu u_\varepsilon^\delta + \delta^{-1} \varepsilon^{-k} (u_\varepsilon^\delta)^- &= 0, \quad (x, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon^\delta(x, 0) &= 0, \quad x \in S_\varepsilon, \\ u_\varepsilon^\delta(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \Gamma^T, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\delta > 0$ — параметр, $u^+ = \sup(u, 0)$, $u^- = u - u^+$. Заметим, что функция $\sigma(u) = u^-$ является монотонной и удовлетворяет неравенству $|\sigma(u) - \sigma(v)| \leq |u - v|$ для любых $u, v \in \mathbb{R}$.

Функцию $u_\varepsilon^\delta \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$ такую, что $\partial_t u_\varepsilon^\delta \in L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))$ и $u_\varepsilon^\delta(x, 0) = 0$, назовем *сильным решением* задачи (2.4), если выполнено интегральное тождество

$$\varepsilon^{-k} \int_{S_\varepsilon^T} \partial_t u_\varepsilon^\delta v ds dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon^\delta \nabla v dx dt + \delta^{-1} \varepsilon^{-k} \int_{S_\varepsilon^T} (u_\varepsilon^\delta)^- v ds dt = \int_{Q_\varepsilon^T} f v dx dt, \quad (2.5)$$

где v — произвольная функция из $L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$. Заметим, что задача (2.4) является частным случаем задачи (2.2) [11]. Поэтому, применяя [11, теорема 2.1], выводим, что задача (2.4) имеет единственное сильное решение и для него справедливы оценки (2.8) из [11], которые в нашем случае имеют вид

$$\|u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))} + \varepsilon^{-k/2} \max_{[0, T]} \|u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(S_\varepsilon)} \leq K \|f\|_{L^2(Q^T)}, \quad (2.6)$$

$$\varepsilon^{-k/2} \|(u_\varepsilon^\delta)^-\|_{L^2(S_\varepsilon^T)} \leq K \sqrt{\delta} \|f\|_{L^2(Q^T)}, \quad (2.7)$$

$$\varepsilon^{-k/2} \|\partial_t u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(S_\varepsilon^T)} + \max_{[0, T]} \|\nabla u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \|f\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}. \quad (2.8)$$

Из (2.6)–(2.8) следует, что для подпоследовательности (сохраним для нее обозначение исходной последовательности) при $\delta \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^\delta &\rightharpoonup u_\varepsilon \quad \text{слабо в } L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)), \\ (u_\varepsilon^\delta)^- &\rightarrow 0 \quad \text{в } L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon)), \\ \partial_t u_\varepsilon^\delta &\rightharpoonup \partial_t u_\varepsilon \quad \text{слабо в } L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon)), \\ u_\varepsilon^\delta &\rightharpoonup u_\varepsilon \quad \text{слабо в } L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon)), \\ u_\varepsilon^\delta(x, T) &\rightharpoonup u_\varepsilon(x, T) \quad \text{слабо в } L^2(S_\varepsilon). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Следовательно, для u_ε справедливы оценки, аналогичные (2.6)–(2.8)

$$\|u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))} + \varepsilon^{-k/2} \max_{[0, T]} \|u_\varepsilon\|_{L^2(S_\varepsilon)} \leq K \|f\|_{L^2(Q^T)}, \quad (2.10)$$

$$\varepsilon^{-k/2} \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(S_\varepsilon^T)} + \max_{[0, T]} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)} \leq K \|f\|_{H^1(0, T; L^2(\Omega))}. \quad (2.11)$$

Покажем, что u_ε — сильное решение задачи (2.1). Положим $v = \varphi - u_\varepsilon^\delta$ в (2.5), где $\varphi \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Получим

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-k} \int_{S_\varepsilon^T} \partial_t u_\varepsilon^\delta (\varphi - u_\varepsilon^\delta) ds dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon^\delta \nabla (\varphi - u_\varepsilon^\delta) dx dt \\ &+ \varepsilon^{-k} \delta^{-1} \int_{S_\varepsilon^T} (u_\varepsilon^\delta)^- (\varphi - u_\varepsilon^\delta) ds dt = \int_{Q_\varepsilon^T} f (\varphi - u_\varepsilon^\delta) dx dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

В силу (2.9)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} \int_{S_\varepsilon^T} \partial_t u_\varepsilon^\delta \varphi ds dt = \varepsilon^{-k} \int_{S_\varepsilon^T} \partial_t u_\varepsilon \varphi ds dt.$$

Кроме того,

$$\varepsilon^{-k} \int_{S_\varepsilon^T} \partial_t u_\varepsilon u_\varepsilon ds dt = \frac{\varepsilon^{-k}}{2} \|u_\varepsilon(x, T)\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{-k}}{2} \|u_\varepsilon^\delta(x, T)\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} \int_{S_\varepsilon^T} \partial_t u_\varepsilon^\delta u_\varepsilon^\delta ds dt.$$

Итак,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} \int_{S_\varepsilon^T} \partial_t u_\varepsilon^\delta (\varphi - u_\varepsilon^\delta) ds dt \leq \varepsilon^{-k} \int_{S_\varepsilon^T} \partial_t u_\varepsilon (\varphi - u_\varepsilon) ds dt. \quad (2.13)$$

Учитывая, что $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(Q_\varepsilon^T)} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \|\nabla u_\varepsilon^\delta\|_{L^2(Q_\varepsilon^T)}$, получим

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon^\delta \nabla (\varphi - u_\varepsilon^\delta) dx dt \leq \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla (\varphi - u_\varepsilon) dx dt. \quad (2.14)$$

Для $\varphi \in \mathcal{K}_\varepsilon$ имеем

$$\int_{S_\varepsilon^T} (u_\varepsilon^\delta)^- (\varphi - u_\varepsilon^\delta) ds dt \leq 0. \quad (2.15)$$

Из (2.12)–(2.15) вытекает неравенство (2.2) для $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$. \square

Известно [13], что существует линейный оператор $P_\varepsilon : H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega)$ такой, что

$$\|P_\varepsilon u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)}, \quad \|\nabla P_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \quad (2.16)$$

где константа $C > 0$ не зависит от ε . Следовательно, для u_ε имеем оценку

$$\|P_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \leq C. \quad (2.17)$$

Из этой оценки вытекает, что для некоторой подпоследовательности (будем обозначать ее как исходную) при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$P_\varepsilon u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ слабо в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)). \quad (2.18)$$

3. Вспомогательная задача на ячейке

Для $j \in \Upsilon_\varepsilon$ и функции $\varphi(x, t) = \psi(x)\eta(t)$, $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\eta \in C^1[0, T]$ рассмотрим вспомогательную задачу с препятствием

$$\begin{aligned} \Delta_x w_{\varepsilon, \varphi}^j &= 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \quad t \in (0, T), \\ w_{\varepsilon, \varphi}^j &\leq \varphi(P_\varepsilon^j, t), \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \quad t \in (0, T), \\ \partial_\nu w_{\varepsilon, \varphi}^j &\leq \varepsilon^{-k} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j), \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \quad t \in (0, T), \\ (w_{\varepsilon, \varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t))(\partial_\nu w_{\varepsilon, \varphi}^j - \varepsilon^{-k} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j)) &= 0, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \quad t \in (0, T), \\ w_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t) &= 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j, \quad t \in (0, T), \\ w_{\varepsilon, \varphi}^j(x, 0) &= \varphi(P_\varepsilon^j, 0), \quad x \in \partial G_\varepsilon^j. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Введем множества

$$K_\varepsilon^j = \{g \in H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j) : g \leq \varphi(P_\varepsilon^j, t) \text{ п.в. на } \partial G_\varepsilon^j\},$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon^j = \{g \in L^2(0, T; H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j)) : g \in K_\varepsilon^j \text{ для п.в. } t \in [0, T]\}.$$

Будем говорить, что функция $w_{\varepsilon,\varphi}^j \in \mathcal{H}_\varepsilon^j$ является *сильным решением* задачи (3.1), если $\partial_t w_{\varepsilon,\varphi}^j \in L^2(0, T; L^2(\partial G_\varepsilon^j))$, $w_{\varepsilon,\varphi}^j(x, 0) = \varphi(P_\varepsilon^j, 0)$ для почти всех $x \in \partial G_\varepsilon^j$ и выполняется вариационное неравенство

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon,\varphi}^j \nabla (v - w_{\varepsilon,\varphi}^j) dx dt \geq \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) (v - w_{\varepsilon,\varphi}^j) ds dt, \quad (3.2)$$

где v — произвольная функция из $\mathcal{H}_\varepsilon^j$.

Заметим, что выполнение неравенства (3.2) эквивалентно выполнению соотношений

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon,\varphi}^j \nabla (v - \varphi_\varepsilon^j) dx dt \geq \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) (v - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) ds dt, \quad (3.3)$$

где $\varphi_\varepsilon^j(x, t) = \varphi(P_\varepsilon^j, t) \psi_\varepsilon^j(x)$, $\psi_\varepsilon^j \in C_0^\infty(T_{\varepsilon/4}^j)$, $\psi_\varepsilon^j(x) = 1$, $x \in T_{Ca_\varepsilon}^j$, $C > 1$, $\psi_\varepsilon^j = 0$, $x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{2Ca_\varepsilon}^j}$, $|\nabla \psi_\varepsilon^j| \leq K/a_\varepsilon$, $K = \text{const} > 0$, не зависящая от ε , v — произвольный элемент $\mathcal{H}_\varepsilon^j$, и

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon,\varphi}^j \nabla (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi_\varepsilon^j) dx dt = \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) ds dt. \quad (3.4)$$

Действительно, вычитая из (3.3) равенство (3.4), получим (3.2). Обратно, полагая $v = \varphi_\varepsilon^j \in \mathcal{H}_\varepsilon^j$ в (3.2), получим

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon,\varphi}^j \nabla (\varphi_\varepsilon^j - w_{\varepsilon,\varphi}^j) dx dt \geq \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) ds dt. \quad (3.5)$$

Затем, полагая $v = 2w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi_\varepsilon^j \in \mathcal{H}_\varepsilon^j$ в (3.2), получим

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon,\varphi}^j \nabla (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi_\varepsilon^j) dx dt \geq \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) ds dt. \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) следует равенство (3.4). Чтобы получить (3.3), положим $v = h + w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi_\varepsilon^j$, $h \in \mathcal{H}_\varepsilon^j$ в (3.2). Получим

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon,\varphi}^j \nabla (h - \varphi_\varepsilon^j) dx dt \geq \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) (h - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) ds dt,$$

т.е. выполнено (3.3). Заметим, что из (3.5) легко получить оценку

$$\|w_{\varepsilon,\varphi}^j\|_{L^2(0,T;H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))}^2 \leq K \varepsilon^{n-1} \|\varphi\|_{L^2(0,T;C(\overline{\gamma}))}^2. \quad (3.7)$$

Теорема 3.1. Пусть $\varphi(x, t) = \psi(x) \eta(t)$, $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\eta \in C^1[0, T]$. Тогда задача (3.1) имеет единственное сильное решение $w_{\varepsilon,\varphi}^j$ и для него справедливы оценки

$$\|w_{\varepsilon,\varphi}^j\|_{L^2(0,T;H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))}^2 + \varepsilon^{-k} \max_{[0,T]} \|w_{\varepsilon,\varphi}^j\|_{L^2(\partial G_\varepsilon^j)}^2 \leq K \varepsilon^{n-1} \|\varphi\|_{L^2(0,T;C(\overline{\gamma}))}^2, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-k} \|\partial_t w_{\varepsilon,\varphi}^j\|_{L^2(0,T;L^2(\partial G_\varepsilon^j))}^2 + \max_{[0,T]} \|\nabla w_{\varepsilon,\varphi}^j\|_{L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j})}^2 \\ \leq K \varepsilon^{n-1} (\|\varphi\|_{L^2(0,T;C(\overline{\gamma}))}^2 + \|\partial_t \varphi\|_{L^2(0,T;C(\overline{\gamma}))}^2), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\|w_{\varepsilon,\varphi}^j\|_{L^2(0,T;L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))}^2 \leq K \varepsilon^{n+1} \|\varphi\|_{L^2(0,T;C(\overline{\gamma}))}^2, \quad (3.10)$$

где постоянная K здесь и далее не зависит от ε , φ .

Доказательство. Докажем единственность. Предполагая наличие двух разных сильных решений $w_{\varepsilon,\varphi}^j, \widetilde{w_{\varepsilon,\varphi}^j}$ задачи (3.1), получим для их разности неравенство

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} |\nabla(w_{\varepsilon,\varphi}^j - \widetilde{w_{\varepsilon,\varphi}^j})|^2 dxdt + \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t(\widetilde{w_{\varepsilon,\varphi}^j} - w_{\varepsilon,\varphi}^j)(\widetilde{w_{\varepsilon,\varphi}^j} - w_{\varepsilon,\varphi}^j) dsdt \leq 0, \quad (3.11)$$

из которого немедленно получаем, что $w_{\varepsilon,\varphi}^j = \widetilde{w_{\varepsilon,\varphi}^j}$.

Для доказательства существования сильного решения задачи (3.1) воспользуемся опять методом штрафов и рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \Delta w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} &= 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \quad t \in (0, T), \\ \varepsilon^{-k} \partial_t w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} + \partial_\nu w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} - \varepsilon^{-k} \partial_t \varphi(P_\varepsilon^j, t) \\ &- \delta^{-1} \varepsilon^{-k} (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta})^- = 0, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \quad t \in (0, T), \\ w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}(x, t) &= 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j, \quad t \in (0, T), \\ w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}(x, 0) &= \varphi(P_\varepsilon^j, 0), \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $\delta = \text{const} > 0$. Функцию $w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} \in L^2(0, T; H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j)) \cap C([0, T], L^2(\partial G_\varepsilon^j))$ такую, что $\partial_t w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} \in L^2(0, T; L^2(\partial G_\varepsilon^j))$, назовем *сильным решением* задачи (3.12), если выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} \psi dsdt + \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} \nabla \psi dxdt \\ - \delta^{-1} \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta})^- \psi dsdt = \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t \varphi(P_\varepsilon^j, t) \psi dsdt, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где ψ — произвольный элемент из $L^2(0, T; H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))$. Заметим, что задача (3.12) является частным случаем задачи (53) [11] и задачи (2.1) [12]. В силу результатов этих работ имеем, что задача (3.12) имеет единственное сильное решение и для него имеют место оценки

$$\|w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}\|_{L^2(0,T;H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))}^2 + \varepsilon^{-k} \max_{[0,T]} \|w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}\|_{L^2(\partial G_\varepsilon^j)}^2 \leq K \varepsilon^{n-1} \|\varphi\|_{L^2(0,T;C(\overline{\gamma}))}^2, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-k} \|\partial_t w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}\|_{L^2(0,T;L^2(\partial G_\varepsilon^j))}^2 + \max_{[0,T]} \|\nabla w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}\|_{L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j})}^2 \\ \leq K \varepsilon^{n-1} (\|\varphi\|_{L^2(0,T;C(\overline{\gamma}))}^2 + \|\partial_t \varphi\|_{L^2(0,T;C(\overline{\gamma}))}^2 + \max_{\overline{\gamma} \times [0,T]} |\varphi(x, t)|^2), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\|w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}\|_{L^2(0,T;L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}))}^2 \leq K \varepsilon^{n+1} \|\varphi\|_{L^2(0,T;C(\overline{\gamma}))}^2, \quad (3.16)$$

$$\varepsilon^{-k} \|(\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta})^-\|_{L^2(0,T;L^2(\partial G_\varepsilon^j))}^2 \leq K \delta \varepsilon^{n-1} \|\varphi\|_{L^2(0,T;C(\overline{\gamma}))}^2. \quad (3.17)$$

Из этих оценок выводим, что по подпоследовательности имеем при $\delta \rightarrow 0$

$$w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} \rightharpoonup w_{\varepsilon,\varphi}^j \text{ слабо в } L^2(0, T; H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j)), \quad (3.18)$$

$$\partial_t w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} \rightharpoonup \partial_t w_{\varepsilon,\varphi}^j \text{ слабо в } L^2(0, T; L^2(\partial G_\varepsilon^j)), \quad (3.19)$$

$$(\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta})^- \rightarrow 0 \text{ в } L^2(0, T; L^2(\partial G_\varepsilon^j)), \quad (3.20)$$

$$w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} \rightharpoonup w_{\varepsilon,\varphi}^j \text{ слабо в } L^2(0, T; L^2(\partial G_\varepsilon^j)), \quad (3.21)$$

$$w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} \rightharpoonup w_{\varepsilon,\varphi}^j \text{ слабо в } L^2(0, T; L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j})). \quad (3.22)$$

Отсюда выводим, что для $w_{\varepsilon,\varphi}^j$ имеют место оценки, аналогичные (3.14)–(3.17). Покажем, что $w_{\varepsilon,\varphi}^j$ — сильное решение задачи (3.1). Положим $\psi = v - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}$, $v \in \mathcal{K}_\varepsilon^j$ в (3.13). В силу (3.18)–(3.22)

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) ds dt \\ &= \frac{\varepsilon^{-k}}{2} \|\varphi(P_\varepsilon^j, T) - w_{\varepsilon,\varphi}^j(x, T)\|_{L^2(\partial G_\varepsilon^j)}^2 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^{-k}}{2} \|\varphi(P_\varepsilon^j, T) - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}(x, T)\|_{L^2(\partial G_\varepsilon^j)}^2 \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}) (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}(x, t)) ds dt. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}(x, t) - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}(x, t)) ds dt \\ & \leq \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) ds dt. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) (v(x, t) - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) ds dt \\ &= \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) (v(x, t) - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) ds dt, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) (v(x, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}) ds dt \\ & \leq \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) (v(x, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) ds dt. \end{aligned}$$

Кроме этого,

$$\begin{aligned} & -\varepsilon^{-k}\delta^{-1} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^-(v - w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}) ds dt \\ & = -\varepsilon^{-k}\delta^{-1} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^-(v - \varphi(P_\varepsilon^j, t) + \varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}) ds dt \leq 0, \end{aligned}$$

и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} \nabla (v - w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}) dx dt \leq \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon, \varphi}^j \nabla (v - w_{\varepsilon, \varphi}^j) dx dt.$$

Из полученных соотношений следует, что $w_{\varepsilon, \varphi}^j$ — сильное решение задачи (3.1). \square

Замечание 3.1. Покажем, что $\|w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} - w_{\varepsilon, \varphi}^j\|_{L^2(0, T; H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$. Действительно, из неравенства

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} \nabla (v - w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}) dx dt + \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) (v - w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}) ds dt \geq 0,$$

где v — произвольная функция, принадлежащая $\mathcal{K}_\varepsilon^j$, следует

$$\begin{aligned} & \|\nabla w_{\varepsilon, \varphi}^j\|_{L^2(0, T; L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}))}^2 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \|\nabla w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}\|_{L^2(0, T; L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}))}^2 \\ & \leq \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon, \varphi}^j \nabla v dx dt + \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t (w_{\varepsilon, \varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) (v - w_{\varepsilon, \varphi}^j) ds dt. \end{aligned}$$

Полагая $v = w_{\varepsilon, \varphi}^j$, получим

$$\|\nabla w_{\varepsilon, \varphi}^j\|_{L^2(0, T; L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}))}^2 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \|\nabla w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}\|_{L^2(0, T; L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}))}^2 \leq \|\nabla w_{\varepsilon, \varphi}^j\|_{L^2(0, T; L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}))}^2.$$

Вместе со слабой в $L^2(0, T, H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))$ сходимостью $w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}$ к $w_{\varepsilon, \varphi}^j$ при $\delta \rightarrow 0$, из последних неравенств следует сходимость при $\delta \rightarrow 0$, $w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}$ к $w_{\varepsilon, \varphi}^j$ в $L^2(0, T, H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))$.

Теорема 3.2. Для решения задачи (3.1) имеет место оценка

$$\sup_{(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}) \times (0, T)} |w_{\varepsilon, \varphi}^j| \leq 2 \max_{\overline{\gamma} \times [0, T]} |\varphi(x, t)|.$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную задачу (3.12). Положим

$$h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}(x, t) = \varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}.$$

Для $h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}$ имеем задачу

$$\begin{aligned} & \Delta h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} = 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \quad t \in (0, T), \\ & \varepsilon^{-k} \partial_t h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} + \partial_\nu h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} + \delta^{-1} \varepsilon^{-k} (h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^- = 0, \quad (x, t) \in \partial G_\varepsilon^j \times (0, T), \\ & h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} = \varphi(P_\varepsilon^j, t), \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j, \quad t \in (0, T), \\ & h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}(x, 0) = 0, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{K} = \max_{\bar{\gamma} \times [0, T]} |\varphi(x, t)|$. Возьмем $(\tilde{K} - h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^- \in L^2(0, T; H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))$ в качестве тестовой функции в интегральном тождестве для $h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}$. Получим

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} |\nabla(\tilde{K} - h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^-|^2 dx dt - \frac{\varepsilon^{-k}}{2} \|(\tilde{K} - h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^-(\cdot, T)\|_{L^2(\partial G_\varepsilon^j)}^2 \\ & + \delta^{-1} \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} (h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^- (\tilde{K} - h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^- ds dt = 0. \end{aligned}$$

Заметим что там, где $h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} \leq 0$, имеем $\tilde{K} - h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} \geq 0$. Поэтому, на ∂G_ε^j выполнено $(h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^- (\tilde{K} - h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^- = 0$. Таким образом, $(\tilde{K} - h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^- = 0$. Следовательно, $\tilde{K} - h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} \geq 0$. Отсюда выводим $w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} \geq \varphi(P_\varepsilon^j, t) - \tilde{K} \geq -2\tilde{K}$. Аналогично, если возьмем функцию $(\tilde{K} + h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^- \in L^2(0, T; H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))$ в качестве тестовой в интегральном тождестве для $h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}$, получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} |\nabla(\tilde{K} + h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^-|^2 dx dt + \frac{\varepsilon^{-k}}{2} \|(\tilde{K} + h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^-(\cdot, T)\|_{L^2(\partial G_\varepsilon^j)}^2 \\ & + \delta^{-1} \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} (h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^- (\tilde{K} + h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta})^- ds dt = 0. \end{aligned}$$

Учитывая, что все слагаемые в левой части последнего равенства неотрицательны, получим, что $\tilde{K} + h_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} \geq 0$ и, следовательно, $w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} \leq \varphi(P_\varepsilon^j, t) + K \leq 2K$. Применяя сходимость при $\delta \rightarrow 0$ функции $w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}$ к $w_{\varepsilon, \varphi}^j$ в пространстве $L^2(0, T; H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j))$, выводим оценку (3.2). Доказать оценку (3.2) можно, не используя замечания 3.1. Действительно, для $w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta}$ имеем

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} (w_{\varepsilon, \varphi}^{j, \delta} - 2\tilde{K}) g dx dt \leq 0,$$

где g — произвольная неотрицательная функция из $L^2(0, T; L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}))$. Перейдем к пределу в этом неравенстве при $\delta \rightarrow 0$. Выводим

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} (w_{\varepsilon, \varphi}^j - 2\tilde{K}) g dx dt \leq 0.$$

Положим здесь $g = (w_{\varepsilon, \varphi}^j - 2K)^+$. Получим

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} |(w_{\varepsilon, \varphi}^j - 2\tilde{K})^+|^2 dx dt \leq 0.$$

Следовательно, $w_{\varepsilon, \varphi}^j - 2\tilde{K} \leq 0$ для почти всех $(x, t) \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j} \times (0, T)$. \square

4. Внешняя вспомогательная задача

Обозначим через \mathfrak{M} множество функций $w \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0})$, для каждой из которых существует шар T_R^0 такой, что $\overline{G_0} \subset T_R^0$ и $w = 0$ для $y \in \mathbb{R}^n \setminus T_R^0$. Обозначим через \mathcal{M} замыкание множества \mathfrak{M} по норме $\|w\|_{\mathcal{M}} = \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0})}$.

Пусть $\varphi(x, t) \in H^1(0, T; L^2(\gamma))$. Рассмотрим внешнюю задачу с препятствием

$$\begin{aligned} \Delta_y w_\varphi(x, y, t) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}, \quad t \in (0, T), \\ w_\varphi &\leq \varphi(x, t), \quad y \in \partial G_0, \quad t \in (0, T), \\ \partial_\nu w_\varphi &\leq C_0(\partial_t \varphi - \partial_t w_\varphi), \quad y \in \partial G_0, \quad t \in (0, T), \\ (w_\varphi - \varphi)(\partial_\nu w_\varphi - C_0(\partial_t \varphi - \partial_t w_\varphi)) &= 0, \quad y \in \partial G_0, \quad t \in (0, T), \\ w_\varphi(x, y, 0) &= \varphi(x, 0), \quad y \in \partial G_0, \\ w_\varphi(x, y, t) &\rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{4.1}$$

где $x \in \gamma$ — параметр. Введем множества, полагая для $x \in \gamma$

$$K_\varphi(x) = \{v(x, \cdot) \in \mathcal{M} : v \leq \varphi \text{ для п.в. } y \in \partial G_0\},$$

$$\mathcal{K}_\varphi(x) = \{v \in L^2(0, T; \mathcal{M}) : v(x, \cdot, t) \in K_\varphi(x) \text{ для п.в. } t \in [0, T]\}.$$

Функцию $w_\varphi(x, \cdot, \cdot) \in \mathcal{K}_\varphi(x)$ такую, что $w_\varphi(x, \cdot, \cdot) \in C([0, T]; L^2(\partial G_0))$, $\partial_t w_\varphi \in L^2(0, T; L^2(\partial G_0))$ для почти всех $x \in \gamma$ и $w_\varphi(x, y, 0) = \varphi(x, 0)$, для $y \in \partial G_0$, назовем *сильным решением* задачи (3.19), если выполняется интегральное неравенство

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla w_\varphi \nabla (v - w_\varphi) dy dt \geq C_0 \int_0^T \int_{\partial G_0} \partial_t (\varphi - w_\varphi) (v - w_\varphi) ds dt, \tag{4.2}$$

где v — произвольная функция из $\mathcal{K}_\varphi(x)$ для почти всех $x \in \gamma$. Пусть $k(y)$ — решение внешней задачи

$$\begin{aligned} \Delta_y k &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}, \\ k(y) &= 1, \quad y \in \partial G_0, \\ k &\rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Представим $w_\varphi = \varphi(x, t)k(y) - \hat{w}_\varphi(x, y, t)$. Тогда функция \hat{w}_φ — сильное решение задачи

$$\begin{aligned} \Delta_y \hat{w}_\varphi(x, y, t) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}, \quad t \in (0, T), \\ \hat{w}_\varphi &\geq 0, \quad y \in \partial G_0, \quad t \in (0, T), \\ \partial_\nu \hat{w}_\varphi + C_0 \partial_t \hat{w}_\varphi &\geq \varphi(x, t) \partial_\nu k(y), \quad y \in \partial G_0, \quad t \in (0, T), \\ \hat{w}_\varphi (\partial_\nu \hat{w}_\varphi + C_0 \partial_t \hat{w}_\varphi - \varphi(x, t) \partial_\nu k(y)) &= 0, \quad y \in \partial G_0, \quad t \in (0, T), \\ \hat{w}_\varphi(x, y, 0) &= 0, \quad y \in \partial G_0, \\ \hat{w}_\varphi &\rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где $x \in \gamma$ — параметр.

Теорема 4.1. Пусть $\varphi \in L^2(0, T; L^2(\gamma))$. Тогда задача (4.4) имеет единственное сильное решение и для него справедливы оценки

$$\|\hat{w}_\varphi\|_{C([0, T]; L^2(\partial G_0))} + \|\hat{w}_\varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} \leq K \|\varphi(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)}, \tag{4.5}$$

$$\|\partial_t \hat{w}_\varphi\|_{L^2(0, T; L^2(\partial G_0))} + \max_{[0, T]} \|\nabla_y \hat{w}_\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0})} \leq K \|\varphi(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)} \tag{4.6}$$

для почти всех $x \in \gamma$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную внешнюю задачу

$$\begin{aligned}\Delta_y \widehat{w}_\varphi^\delta(x, y, t) &= 0, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}, \quad t \in (0, T), \\ \partial_\nu \widehat{w}_\varphi^\delta + C_0 \partial_t \widehat{w}_\varphi^\delta + \delta^{-1} (\widehat{w}_\varphi^\delta)^- &= \varphi \partial_\nu k, \quad y \in \partial G_0, \quad t \in (0, T), \\ \widehat{w}_\varphi^\delta(x, y, 0) &= 0, \quad y \in \partial G_0, \\ \widehat{w}_\varphi^\delta(x, y, t) &\rightarrow 0, \quad |y| \rightarrow \infty,\end{aligned}\tag{4.7}$$

для любых $x \in \gamma$ и $\delta > 0$.

Хорошо известно (см. [11]), что задача (4.7) имеет единственное сильное решение для почти всех $x \in \gamma$ и для произвольной функции $\varphi \in L^2(0, T; L^2(\gamma))$ справедливы оценки

$$\|\widehat{w}_\varphi^\delta\|_{C([0, T]; L^2(\partial G_0))} + \|\widehat{w}_\varphi^\delta\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} \leq K \|\varphi(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)},\tag{4.8}$$

$$\|\partial_t \widehat{w}_\varphi^\delta\|_{L^2(0, T; L^2(\partial G_0))} + \max_{[0, T]} \|\widehat{w}_\varphi^\delta\|_{\mathcal{M}} \leq K \|\varphi(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)},\tag{4.9}$$

$$\|(\widehat{w}_\varphi^\delta)^-\|_{L^2(0, T; L^2(\partial G_0))} \leq K \sqrt{\delta} \|\varphi(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)}.\tag{4.10}$$

Из оценок (4.8)–(4.10) следует, что по некоторой подпоследовательности (мы сохраняем за ней обозначение исходной) имеем при $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\widehat{w}_\varphi^\delta &\rightharpoonup \widehat{w}_\varphi \quad \text{слабо в } L^2(0, T; \mathcal{M}), \\ \partial_t \widehat{w}_\varphi^\delta &\rightharpoonup \partial_t \widehat{w}_\varphi \quad \text{слабо в } L^2(0, T; L^2(\partial G_0)), \\ \widehat{w}_\varphi^\delta &\rightharpoonup \widehat{w}_\varphi \quad \text{слабо в } L^2(0, T; L^2(\partial G_0)), \\ (\widehat{w}_\varphi^\delta)^- &\rightarrow 0 \quad \text{в } L^2(0, T; L^2(\partial G_0)).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Из интегрального тождества для задачи (4.7) имеем

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla \widehat{w}_\varphi^\delta \nabla (v - \widehat{w}_\varphi^\delta) dy dt + C_0 \int_0^T \int_{\partial G_0} \partial_t \widehat{w}_\varphi^\delta (v - \widehat{w}_\varphi^\delta) ds dt \\ &+ \delta^{-1} \int_0^T \int_{\partial G_0} (\widehat{w}_\varphi^\delta)^- (v - \widehat{w}_\varphi^\delta) ds dt = \int_0^T \varphi(x, t) \int_{\partial G_0} \partial_\nu k (v - \widehat{w}_\varphi^\delta) ds dt,\end{aligned}\tag{4.12}$$

где $v \in L^2(0, T; \mathcal{M})$, $v \geq 0$ на ∂G_0 для почти всех $t \in (0, T)$, $x \in \gamma$ — параметр. Заметим, что

$$\int_0^T \int_{\partial G_0} (\widehat{w}_\varphi^\delta)^- (v - \widehat{w}_\varphi^\delta) ds dt \leq 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla \widehat{w}_\varphi^\delta \nabla (v - \widehat{w}_\varphi^\delta) dy dt + C_0 \int_0^T \int_{\partial G_0} \partial_t \widehat{w}_\varphi^\delta (v - \widehat{w}_\varphi^\delta) ds dt \\ &\geq \int_0^T \varphi(x, t) \int_{\partial G_0} \partial_\nu k(y) (v - \widehat{w}_\varphi^\delta) ds dt.\end{aligned}\tag{4.13}$$

Учитывая, что

$$\|\widehat{w}_\varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \|\widehat{w}_\varphi^\delta\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})},$$

ВЫВОДИМ

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla \hat{w}_\varphi^\delta (\nabla v - \nabla \hat{w}_\varphi^\delta) dy dt \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla \hat{w}_\varphi (\nabla v - \nabla \hat{w}_\varphi) dy dt. \quad (4.14)$$

Кроме этого, имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial G_0} \partial_t \hat{w}_\varphi^\delta (v - \hat{w}_\varphi^\delta) ds dt \leq \int_0^T \int_{\partial G_0} \partial_t \hat{w}_\varphi (v - \hat{w}_\varphi) ds dt. \quad (4.15)$$

Из (4.4)–(4.15) выводим неравенство для \hat{w}_φ

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla \hat{w}_\varphi \nabla (v - \hat{w}_\varphi) ds dt + C_0 \int_0^T \int_{\partial G_0} \partial_t \hat{w}_\varphi (v - \hat{w}_\varphi) ds dt \\ & \geq \int_0^T \varphi(x, t) \int_{\partial G_0} \partial_\nu k(y) (v - \hat{w}_\varphi) ds dt, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где v — произвольная функция из $L^2(0, T; \mathcal{M})$, $v \geq 0$ для почти всех $(y, t) \in \partial G_0 \times (0, T)$. Следовательно, \hat{w}_φ — сильное решение задачи (4.4). \square

Замечание 4.1. Покажем, что $\|\hat{w}_\varphi^\delta - \hat{w}_\varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} \rightarrow 0$, если $\delta \rightarrow 0$. Из неравенства (4.13) имеем

$$\begin{aligned} & \|\hat{w}_\varphi^\delta\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})}^2 + \frac{C_0}{2} \|\hat{w}_\varphi^\delta(x, \cdot, T)\|_{L^2(\partial G_0)}^2 \\ & \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla \hat{w}_\varphi^\delta \nabla \psi dy dt + C_0 \int_0^T \int_{\partial G_0} \partial_t \hat{w}_\varphi^\delta \psi ds dt - \int_0^T \varphi(x, t) \int_{\partial G_0} \partial_\nu k(y) (\psi - \hat{w}_\varphi^\delta) ds dt, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где ψ — произвольная функция из $L^2(0, T; \mathcal{M})$, $\psi \geq 0$ на $\partial G_0 \times (0, T)$. Устремим δ к нулю в этом неравенстве. Получим

$$\begin{aligned} & \|\hat{w}_\varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})}^2 + \frac{C_0}{2} \|\hat{w}_\varphi(x, \cdot, T)\|_{L^2(\partial G_0)}^2 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\|\hat{w}_\varphi^\delta\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})}^2 + \frac{C_0}{2} \|\hat{w}_\varphi^\delta(x, \cdot, T)\|_{L^2(\partial G_0)}^2 \right) \\ & \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla \hat{w}_\varphi \nabla \psi dx dt + C_0 \int_0^T \int_{\partial G_0} \partial_t \hat{w}_\varphi \psi ds dt - \int_0^T \varphi(x, t) \int_{\partial G_0} \partial_\nu k(y) (\psi - \hat{w}_\varphi) ds dt. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Полагая $\psi = \hat{w}_\varphi \in L^2(0, T; \mathcal{M})$, $\hat{w}_\varphi \geq 0$ на ∂G_0 , получим

$$\begin{aligned} & \|\hat{w}_\varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})}^2 + \frac{C_0}{2} \|\hat{w}_\varphi(x, \cdot, T)\|_{L^2(\partial G_0)}^2 \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\|\hat{w}_\varphi^\delta\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})}^2 + \frac{C_0}{2} \|\hat{w}_\varphi^\delta(x, \cdot, T)\|_{L^2(\partial G_0)}^2 \right) \\ & \leq \|\hat{w}_\varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})}^2 + \frac{C_0}{2} \|\hat{w}_\varphi(x, \cdot, T)\|_{L^2(\partial G_0)}^2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Так как $\lim_{\delta \rightarrow 0} \|\hat{w}_\varphi^\delta(x, \cdot, T)\|_{L^2(\partial G_0)} = \|\hat{w}_\varphi(x, \cdot, T)\|_{L^2(\partial G_0)}$, имеем $\|\hat{w}_\varphi^\delta\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} \rightarrow \|\hat{w}_\varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})}$ при $\delta \rightarrow 0$. Вместе со слабой в $L^2(0, T; \mathcal{M})$ сходимостью отсюда следует, что $\|\hat{w}_\varphi^\delta - \hat{w}_\varphi\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Теорема 4.2. Пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(0, T; L^2(\gamma))$. Тогда

$$\|\hat{w}_{\varphi_1} - \hat{w}_{\varphi_2}\|_{C([0, T]; L^2(\partial G_0))} + \|\hat{w}_{\varphi_1} - \hat{w}_{\varphi_2}\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} \leq K \|\varphi_1(x, \cdot) - \varphi_2(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)}, \quad (4.20)$$

$$\|\partial_t \hat{w}_{\varphi_1} - \partial_t \hat{w}_{\varphi_2}\|_{L^2(0, T; L^2(\partial G_0))} \leq K \|\varphi_1(x, \cdot) - \varphi_2(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)} \quad (4.21)$$

для почти всех $x \in \gamma$, $K = \text{const} > 0$ и не зависит от $x \in \gamma$.

Доказательство. Пусть $\widehat{w}_{\varphi_1}^\delta$ и $\widehat{w}_{\varphi_2}^\delta$ — решения задачи (4.7) для $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ соответственно. Тогда для $\widehat{v}^\delta = \widehat{w}_{\varphi_1}^\delta - \widehat{w}_{\varphi_2}^\delta$ имеем при $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\widehat{v}^\delta &\rightharpoonup \widehat{v} = \widehat{w}_{\varphi_1} - \widehat{w}_{\varphi_2} \text{ слабо в } L^2(0, T; \mathcal{M}), \\ \partial_t \widehat{v}^\delta &\rightharpoonup \partial_t \widehat{v} \text{ слабо в } L^2(0, T; L^2(\partial G_0)), \\ \widehat{v}^\delta &\rightharpoonup \widehat{v} \text{ слабо в } L^2(0, T; L^2(\partial G_0)).\end{aligned}\tag{4.22}$$

Для \widehat{v}^δ имеем оценки [11, 12]

$$\begin{aligned}\|\widehat{v}^\delta\|_{C([0, T]; L^2(\partial G_0))} + \|\widehat{v}^\delta\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} &\leq K \|\varphi_1(x, \cdot) - \varphi_2(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)}, \\ \|\partial_t \widehat{v}^\delta\|_{L^2(0, T; L^2(\partial G_0))} &\leq K \|\varphi_1(x, \cdot) - \varphi_2(x, \cdot)\|_{L^2(0, T)},\end{aligned}$$

где K не зависит от δ , φ_1 и φ_2 . Отсюда и из (4.22) следуют оценки (4.20), (4.21). \square

Теорема 4.3. Пусть $\varphi(x, t) = \psi(x)\eta(t)$, $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\eta \in C^1[0, T]$, $C_\varphi = \max_{\overline{\gamma} \times [0, T]} |\varphi(x, t)|$. Тогда для любого $t \in (0, T)$ и произвольного $x \in \gamma$ имеем

$$|\widehat{w}_\varphi(x, y, t)| \leq \frac{KC_\varphi}{|y|^{n-2}}, \quad |\nabla_y \widehat{w}_\varphi(x, y, t)| \leq \frac{KC_\varphi}{|y|^{n-1}}, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0},\tag{4.23}$$

где $K = \text{const} > 0$ не зависит от φ , $x \in \gamma$ и $t \in [0, T]$.

Доказательство. Пусть $\widehat{w}_\varphi^\delta$ — сильное решение задачи (4.2). Согласно работам [11, 12]

$$|\widehat{w}_\varphi^\delta(x, y, t)| \leq \frac{KC_\varphi}{|y|^{n-2}}, \quad |\nabla_y \widehat{w}_\varphi^\delta(x, y, t)| \leq \frac{KC_\varphi}{|y|^{n-1}}, \quad y \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0},\tag{4.24}$$

где $K = \text{const} > 0$ не зависит от φ , $x \in \gamma$, $y, t \in (0, T)$ и δ . Учитывая, что $\widehat{w}_\varphi^\delta \rightarrow \widehat{w}_\varphi$ в $L^2(0, T; \mathcal{M})$ при $\delta \rightarrow 0$, получим оценки (4.23). \square

Теорема 4.4. Пусть \widehat{w}_φ — сильное решение задачи (4.9). Тогда для почти всех $x_1, x_2 \in \gamma$

$$\begin{aligned}\|\widehat{w}_\varphi(x_1, \cdot, \cdot) - \widehat{w}_\varphi(x_2, \cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} + \|\widehat{w}_\varphi(x_1, \cdot, \cdot) - \widehat{w}_\varphi(x_2, \cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; L^2(\partial G_0))} \\ + \|\partial_t \widehat{w}_\varphi(x_1, \cdot, \cdot) - \partial_t \widehat{w}_\varphi(x_2, \cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; L^2(\partial G_0))} \leq K \|\varphi(x_1, \cdot) - \varphi(x_2, \cdot)\|_{L^2(0, T)}.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Доказательство. Для $\widehat{w}_\varphi^\delta$ имеем оценку [11, 12]

$$\begin{aligned}\|\widehat{w}_\varphi^\delta(x_1, \cdot, \cdot) - \widehat{w}_\varphi^\delta(x_2, \cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} + \|\widehat{w}_\varphi^\delta(x_1, \cdot, \cdot) - \widehat{w}_\varphi^\delta(x_2, \cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; L^2(\partial G_0))} \\ + \|\partial_t \widehat{w}_\varphi^\delta(x_1, \cdot, \cdot) - \partial_t \widehat{w}_\varphi^\delta(x_2, \cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; L^2(\partial G_0))} \leq K \|\varphi(x_1, \cdot) - \varphi(x_2, \cdot)\|_{L^2(0, T)}.\end{aligned}$$

Отсюда в силу (4.11) получим

$$\begin{aligned}\|\widehat{w}_\varphi(x_1, \cdot, \cdot) - \widehat{w}_\varphi(x_2, \cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} &\leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \|\widehat{w}_\varphi^\delta(x_1, \cdot, \cdot) - \widehat{w}_\varphi^\delta(x_2, \cdot, \cdot)\|_{L^2(0, T; \mathcal{M})} \\ &\leq \|\varphi(x_1, \cdot) - \varphi(x_2, \cdot)\|_{L^2(0, T)}.\end{aligned}$$

Остальные неравенства из (4.25) получаются аналогично. \square

5. Асимптотическая близость функций $w_{\varepsilon, \varphi}^j$ и $w_\varphi(P_\varepsilon^j, \frac{x-P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon}, t)$

Положим $\widetilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t) = w_\varphi(P_\varepsilon^j, \frac{x-P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon}, t)$, $v_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t) = \widetilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t)$.

Теорема 5.1. Имеет место оценка

$$\sup_{(T_{\varepsilon/4}^j \setminus G_\varepsilon^j) \times (0, T)} |v_{\varepsilon, \varphi}^j| \leq \sup_{\partial T_{\varepsilon/4}^j \times (0, T)} |\widetilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j|,\tag{5.1}$$

где $\varphi(x, t) = \psi(x)\eta(t)$, $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\eta \in C^1[0, T]$.

Доказательство. [Доказательство] Положим

$$\tilde{w}_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}(x,t) = w_{\varphi}^{\delta}\left(P_{\varepsilon}^j, \frac{x - P_{\varepsilon}^j}{a_{\varepsilon}}, t\right), \quad v_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} = \tilde{w}_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta} - w_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta},$$

где $w_{\varphi}^{\delta} = \varphi(x,t)k(y) - \hat{w}_{\varphi}^{\delta}(x,y,t)$. Из [11, 12] вытекает

$$\sup_{(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_{\varepsilon}^j}) \times (0,T)} |v_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}| \leq \sup_{\partial T_{\varepsilon/4}^j \times (0,T)} |\tilde{w}_{\varepsilon,\varphi}^{j,\delta}(x,t)|.$$

Учитывая замечания 3.1 и 4.1, выводим оценку (5.1). \square

Теорема 5.2. Пусть $\varphi(x,t) = \psi(x)\eta(t)$, $\psi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$, $\eta \in C^1[0,T]$. Имеют место следующие неравенства:

$$\varepsilon^{-k} \sum_{j \in \Upsilon_{\varepsilon}} \max_{[0,T]} \|v_{\varepsilon,\varphi}^j\|_{L^2(\partial G_{\varepsilon}^j)}^2 + \sum_{j \in \Upsilon_{\varepsilon}} \|\nabla v_{\varepsilon,\varphi}^j\|_{L^2(0,T;L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_{\varepsilon}^j}))}^2 \leq K\varepsilon \max_{\overline{\gamma} \times [0,T]} |\varphi|^2, \quad (5.2)$$

$$\sum_{j \in \Upsilon_{\varepsilon}} \|v_{\varepsilon,\varphi}^j\|_{L^2(0,T;L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_{\varepsilon}^j}))}^2 \leq K\varepsilon^3 \max_{\overline{\gamma} \times [0,T]} |\varphi|^2. \quad (5.3)$$

Доказательство. [Доказательство] В силу формулы Грина и $w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi_{\varepsilon}^j \in H^1(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_{\varepsilon}^j}, \partial T_{\varepsilon/4}^j)$ получим

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_{\varepsilon}^j}} \nabla \tilde{w}_{\varepsilon,\varphi}^j \nabla (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi_{\varepsilon}^j) dx dt &= - \int_0^T \int_{\partial G_{\varepsilon}^j} \partial_{\nu} \tilde{w}_{\varepsilon,\varphi}^j (\varphi(P_{\varepsilon}^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) ds dt \\ &\geq -\varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_{\varepsilon}^j} \partial_t (\varphi(P_{\varepsilon}^j, t) - \tilde{w}_{\varepsilon,\varphi}^j) (\varphi(P_{\varepsilon}^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) ds dt. \end{aligned}$$

Кроме этого,

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_{\varepsilon}^j}} \nabla w_{\varepsilon,\varphi}^j \nabla (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi_{\varepsilon}^j) dx dt = \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_{\varepsilon}^j} \partial_t (\varphi(P_{\varepsilon}^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi(P_{\varepsilon}^j, t)) ds dt.$$

Вычитая одно выражение из другого, получим

$$\int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_{\varepsilon}^j}} \nabla v_{\varepsilon,\varphi}^j \nabla (w_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi_{\varepsilon}^j) dx dt \geq \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_{\varepsilon}^j} \partial_t v_{\varepsilon,\varphi}^j (\varphi(P_{\varepsilon}^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) ds dt. \quad (5.4)$$

Из (5.4) выводим

$$\begin{aligned} &- \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_{\varepsilon}^j}} |\nabla v_{\varepsilon,\varphi}^j|^2 dx dt + \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_{\varepsilon}^j}} \nabla v_{\varepsilon,\varphi}^j \nabla (\tilde{w}_{\varepsilon,\varphi}^j - \varphi_{\varepsilon}^j) dx dt \\ &\geq \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_{\varepsilon}^j} \partial_t v_{\varepsilon,\varphi}^j (\varphi(P_{\varepsilon}^j, t) - w_{\varepsilon,\varphi}^j) ds dt. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства следует

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{T_{\varepsilon, \varphi}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} |\nabla v_{\varepsilon, \varphi}^j|^2 dx dt + \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t v_{\varepsilon, \varphi}^j v_{\varepsilon, \varphi}^j ds dt \\ & \leq \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla v_{\varepsilon, \varphi}^j \nabla (\tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j - \varphi_\varepsilon^j) dx dt + \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_t v_{\varepsilon, \varphi}^j (\tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) ds dt. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Обозначим правую часть (5.5) через \mathcal{J}_ε . Получим оценку \mathcal{J}_ε . Заметим, что в тех точках $\partial G_\varepsilon^j \times (0, T)$, в которых $\tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j < \varphi(P_\varepsilon^j, t)$, выполнено равенство

$$\varepsilon^{-k} \partial_t \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j + \partial_\nu \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j - \varepsilon^{-k} \partial_t \varphi(P_\varepsilon^j, t) = 0. \quad (5.6)$$

Кроме этого, на множестве $\partial G_\varepsilon^j \times (0, T)$ имеем неравенство

$$\varepsilon^{-k} \partial_t w_{\varepsilon, \varphi}^j + \partial_\nu w_{\varepsilon, \varphi}^j - \varepsilon^{-k} \partial_t \varphi(P_\varepsilon^j, t) \leq 0. \quad (5.7)$$

Вычитая из равенства (5.6) неравенство (5.7), получим, что на $\partial G_\varepsilon^j \times (0, T)$ для $v_{\varepsilon, \varphi}^j$ выполнено неравенство

$$\varepsilon^{-k} \partial_t v_{\varepsilon, \varphi}^j + \partial_\nu v_{\varepsilon, \varphi}^j \geq 0. \quad (5.8)$$

Применяя формулы Грина, выводим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\varepsilon &= \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} \partial_\nu v_{\varepsilon, \varphi}^j \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j ds dt + \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_\nu v_{\varepsilon, \varphi}^j (\tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) ds dt \\ &+ \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_\nu v_{\varepsilon, \varphi}^j (\tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) ds dt \\ &= \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} (\partial_\nu v_{\varepsilon, \varphi}^j + \varepsilon^{-k} \partial_t v_{\varepsilon, \varphi}^j) (\tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) ds dt + \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} \partial_\nu v_{\varepsilon, \varphi}^j \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j ds dt. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Применяя (5.8), из (5.9) получим для \mathcal{J}_ε неравенство

$$\mathcal{J}_\varepsilon \leq \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} \partial_\nu v_{\varepsilon, \varphi}^j \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j ds dt. \quad (5.10)$$

Из (5.5) и (5.10) следует

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} |\nabla v_{\varepsilon, \varphi}^j|^2 dx dt + \frac{\varepsilon^{-k}}{2} \|v_{\varepsilon, \varphi}^j(\cdot, T)\|_{L^2(\partial G_\varepsilon^j)}^2 \leq \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} \partial_\nu v_{\varepsilon, \varphi}^j \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j ds dt \\ &= \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{\varepsilon/8}^j}} \nabla v_{\varepsilon, \varphi}^j \nabla \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j dx dt - \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/8}^j} \partial_\nu v_{\varepsilon, \varphi}^j \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j ds dt. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В силу теорем 4.3 и 5.1

$$|v_{\varepsilon, \varphi}^j| \leq K \varepsilon \max_{\bar{\gamma} \times [0, T]} |\varphi(x, t)|. \quad (5.12)$$

Из оценки (5.12) для $x_0 \in \partial T_{\varepsilon/8}^j$, $t \in (0, T)$, вытекает оценка

$$|\partial_{x_i} v_{\varepsilon, \varphi}^j(x_0, t)| = |T_{\varepsilon/16}^{x_0}|^{-1} \left| \int_{T_{\varepsilon/16}^{x_0}} \partial_{x_i} v_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t) dx \right| = |T_{\varepsilon/16}^{x_0}|^{-1} \left| \int_{\partial T_{\varepsilon/16}^{x_0}} v_{\varepsilon, \varphi}^j \nu_i ds \right| \leq K \max_{\bar{\gamma} \times [0, T]} |\varphi(x, t)|.$$

Отсюда получим

$$\left| \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/8}^j} \partial_\nu v_{\varepsilon, \varphi}^j \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j ds dt \right| \leq K \varepsilon^n \max_{\bar{\gamma} \times [0, T]} |\varphi|^2.$$

Из теоремы 4.3 выводим

$$|\nabla_x \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t)| \leq K \max_{\bar{\gamma} \times [0, T]} |\varphi(x, t)|,$$

если $x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{\varepsilon/8}^j}$, $t \in [0, T]$. Из полученных оценок имеем

$$\left| \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{T_{\varepsilon/8}^j}} \nabla v_{\varepsilon, \varphi}^j \nabla \tilde{w}_{\varepsilon, \varphi}^j dx dt \right| \leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} |\nabla v_{\varepsilon, \varphi}^j|^2 dx dt + K \varepsilon^n \max_{\bar{\gamma} \times [0, T]} |\varphi|^2. \quad (5.13)$$

Из неравенства (5.11) и оценки (5.13) получим

$$\varepsilon^{-k} \max_{[0, T]} \|v_{\varepsilon, \varphi}^j\|_{L^2(\partial G_\varepsilon^j)}^2 + \|\nabla v_{\varepsilon, \varphi}^j\|_{L^2(0, T; L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}))}^2 \leq K \varepsilon^n \max_{\bar{\gamma} \times [0, T]} |\varphi|^2.$$

Отсюда следует (5.2). Неравенство (5.3) является следствием оценки (5.2) и неравенства Фридрихса. \square

6. Свойства оператора \mathbf{H}

Введем оператор $\mathbf{H} : L^2(0, T; L^2(\gamma)) \rightarrow L^2(0, T; L^2(\gamma))$, полагая

$$\mathbf{H}(\varphi) = H[\varphi](x, t) = \varphi(x, t) \lambda_{G_0} - \int_{\partial G_0} \partial_\nu \hat{w}_\varphi(x, y, t) ds_y, \quad (6.1)$$

где

$$\lambda_{G_0} = \int_{\partial G_0} \partial_\nu k(y) ds_y = \text{Cap}(G_0),$$

\hat{w}_φ — решение задачи (4.4).

Заметим, что

$$\int_{\partial G_0} \partial_\nu \hat{w}_\varphi(x, y, t) ds_y = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla_y \hat{w}_\varphi(x, y, t) \nabla_y k(y) dy.$$

Следовательно,

$$\mathbf{H}(\varphi) = \varphi(x, t) \lambda_{G_0} - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla_y \hat{w}_\varphi(x, y, t) \nabla_y k(y) dy,$$

$$\mathbf{H}(\varphi_1) - \mathbf{H}(\varphi_2) = \lambda_{G_0}(\varphi_1 - \varphi_2) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla_y (\hat{w}_{\varphi_1} - \hat{w}_{\varphi_2}) \nabla_y k(y) dy.$$

Кроме этого, заметим, что для $\varphi(x, t) = \psi(x) \eta(t)$, где $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta \in C^1([0, T])$,

$$\mathbf{H}(\varphi) = \int_{\partial G_0} \partial_\nu w_\varphi(x, y, t) ds_y,$$

где $w_\varphi(x, y, t)$ — решение задачи (4.1). Отсюда и из теорем 4.1, 4.2 выводим оценки

$$\begin{aligned}\|\mathbf{H}(\varphi)\|_{L^2(0,T;L^2(\gamma))} &\leq K\|\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\gamma))}, \\ \|\mathbf{H}(\varphi_1) - \mathbf{H}(\varphi_2)\|_{L^2(0,T;L^2(\gamma))} &\leq K\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^2(0,T;L^2(\gamma))}.\end{aligned}$$

Покажем, что \mathbf{H} монотонный оператор. Положим

$$\mathbf{H}_\delta(\varphi) = \lambda_{G_0}\varphi(x, t) - \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} \nabla_y \widehat{w}_\varphi^\delta \nabla_y k dy, \quad (6.2)$$

где w_φ^δ — решение задачи (4.7).

Для \mathbf{H}_δ имеем неравенство [11]

$$\int_0^T \int_\gamma (\mathbf{H}_\delta(\varphi_1) - \mathbf{H}_\delta(\varphi_2))(\varphi_1 - \varphi_2) d\widehat{x} dt \geq 0, \quad (6.3)$$

где $\widehat{x} = (x_2, \dots, x_n)$.

Учитывая (4.11), имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^T \int_\gamma \mathbf{H}_\delta(\varphi)(x, t) v(x, t) d\widehat{x} dt = \int_0^T \int_\gamma \mathbf{H}(\varphi)(x, t) v(x, t) d\widehat{x} dt, \quad (6.4)$$

где v произвольная функция из $L^2(0, T, L^2(\gamma))$. Действительно, последовательность измеримых функций

$$g_\delta(x) \equiv \int_0^T \mathbf{H}_\delta(\varphi)(x, t) v(x, t) dt = \lambda_{G_0} \int_0^T \varphi(x, t) v(x, t) dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} v(x, t) \nabla_y \widehat{w}_\varphi^\delta \nabla_y k dy dt,$$

в силу (4.11) сходится при $\delta \rightarrow 0$ для почти всех $x \in \gamma$ к измеримой функции

$$g(x) = \int_0^T \mathbf{H}(\varphi)(x, t) v(x, t) dt = \lambda_{G_0} \int_0^T \varphi(x, t) v(x, t) dt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{G_0}} v(x, t) \nabla_y \widehat{w}_\varphi \nabla_y k dy dt.$$

Кроме этого, из теоремы 4.1 имеем оценку

$$|g_\delta(x)| \leq K\|\varphi(x, \cdot)\|_{L^2(0,T)}\|v(x, \cdot)\|_{L^2(0,T)}.$$

Следовательно, применяя теорему Лебега, выводим (6.4).

Из (6.2)–(6.4) следует монотонность оператора $\mathbf{H}(\varphi)$.

Из теоремы 4.4 выводим неравенство

$$\|\mathbf{H}(\varphi)(x_1, \cdot) - \mathbf{H}(\varphi)(x_2, \cdot)\|_{L^2(0,T)} \leq K\|\varphi(x_1, \cdot) - \varphi(x_2, \cdot)\|_{L^2(0,T)}, \quad (6.5)$$

Замечание 6.1. Напомним случай, изученный в [1]. Пусть $G_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. При малых $\varepsilon > 0$ имеем $\overline{G_\varepsilon^j} \subset T_{\varepsilon/4}^j \subset Y_\varepsilon^j$, поэтому мы находимся в ситуации, рассматриваемой в настоящей работе. Для $\varphi \in L^2(0, T)$, введем функцию H_φ как решение задачи с препятствием

$$\begin{aligned}H'_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi &\geq \mathcal{B}_n \varphi, \quad H_\varphi \geq 0, \quad t \in (0, T), \\ H'_\varphi(H'_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi - \mathcal{B}_n \varphi) &= 0, \quad t \in (0, T), \\ H_\varphi(0) &= 0,\end{aligned}$$

где $\mathcal{B}_n = (n-2)C_0^{-1}$. Под *решением* этой задачи будем понимать функцию $H_\varphi \in H^1(0, T)$ такую, что $H_\varphi \geq 0$ на $(0, T)$ и удовлетворяющую интегральному неравенству

$$\int_0^T (H'_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi - \mathcal{B}_n \varphi)(v - H_\varphi) dt \geq 0,$$

где v — произвольная функция из $L^2(0, T)$ такая, что $v \geq 0$ для почти всех $t \in (0, T)$. Известно, что эта задача имеет единственное решение [1, 2] и для него имеют место оценки

$$\|H_\varphi\|_{L^2(0, T)} \leq \|\varphi\|_{L^2(0, T)}, \quad \|H_\varphi - H_\psi\|_{L^2(0, T)} \leq \|\varphi - \psi\|_{L^2(0, T)},$$

и

$$\int_0^T (H_\varphi - H_\psi)(\varphi - \psi) dt \geq 0.$$

Если теперь $\varphi \in L^2(0, T; L^2(\gamma))$, то в задаче на H_φ мы рассматриваем $x \in \gamma$ как параметр, и, следовательно, $H_\varphi(x, t)$ для почти всех $x \in \gamma$ является единственным решением задачи

$$\begin{aligned} \partial_t H_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi &\geq \mathcal{B}_n \varphi(x, t), \quad H_\varphi \geq 0, \\ H_\varphi(\partial_t H_\varphi + \mathcal{B}_n(H_\varphi - \varphi)) &= 0, \quad H_\varphi(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Легко проверить, что функция $\hat{w}_\varphi(x, y, t)$, являющаяся решением задачи (4.4), имеет вид

$$\hat{w}_\varphi(x, y, t) = |y|^{2-n} H_\varphi(x, t).$$

Поэтому

$$\mathbf{H}(\varphi) = H[\varphi](x, t) = (n-2)|\partial G_0|(\varphi(x, t) - H_\varphi(x, t)),$$

где $\lambda_{G_0} = (n-2)|\partial G_0|$.

7. Формулировка и доказательство основной теоремы

Теорема 7.1. Пусть $n \geq 3$, $a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^k$, $k = (n-1)/(n-2)$, u_ε — решение задачи (2.1). Тогда функция u_0 , определенная в (2.18), есть обобщенное решение задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u_0 &= f, \quad (x, t) \in (\Omega^+ \cup \Omega^-) \times (0, T), \\ [u_0] &= 0, \quad (x, t) \in \gamma \times (0, T), \\ [\partial_{x_1} u_0] &= \mathbf{H}(u_0), \quad (x, t) \in \gamma \times (0, T), \\ u_0 &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \end{aligned} \tag{7.1}$$

где оператор \mathbf{H} определен равенством (6.1).

Замечание 7.1. Пусть G_0 — единичный шар, как в замечании [6.1]. Тогда усредненная задача имеет вид

$$\begin{aligned} -\Delta_x u_0 &= f(x, t), \quad x \in \Omega^- \cup \Omega^+, \quad t \in (0, T), \\ [u_0] &= 0, \quad x \in \gamma, \quad t \in (0, T), \\ [\partial_{x_1} u_0] &= \mathcal{A}_n(u_0 - H_{u_0}), \quad (x, t) \in \gamma \times (0, T), \\ H_{u_0} &\geq 0, \quad \partial_t H_{u_0} + \mathcal{B}_n H_{u_0} \geq \mathcal{B}_n u_0, \quad (x, t) \in \gamma \times (0, T), \\ H_{u_0}(\partial_t H_{u_0} + \mathcal{B}_n(H_{u_0} - u_0)) &= 0, \quad (x, t) \in \gamma \times (0, T), \\ H_{u_0}(x, 0) &= 0, \quad x \in \gamma, \\ u_0(x, t) &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \end{aligned}$$

где $\mathcal{A}_n = (n-2)C_0^{n-2}\omega_n$ и $\mathcal{B}_n = (n-2)/C_0$.

Доказательство. Пусть $\varphi(x, t) = \psi(x)\eta(t)$, где $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta \in C^1[0, T]$. Из вариационного неравенства (2.2) следует, что u_ε удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-k} \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \partial_t \varphi(\varphi - u_\varepsilon) ds dt + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi \nabla (\varphi - u_\varepsilon) dx dt \\ & \leq \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - u_\varepsilon) dx dt - \frac{\varepsilon^{-k}}{2} \|\varphi(x, 0)\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Введем функцию

$$W_{\varepsilon, \varphi}(x, t) = \begin{cases} w_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t) - (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - \varphi(x, t)) \kappa_\varepsilon^j(x), & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \quad t \in (0, T), \quad j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\cup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j}, \quad t \in (0, T), \end{cases} \quad (7.3)$$

где $\kappa_\varepsilon^j(x)$ — решение задачи

$$\Delta \kappa_\varepsilon^j = 0, \quad x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \quad \kappa_\varepsilon^j = 1, \quad x \in \partial G_\varepsilon^j, \quad \kappa_\varepsilon^j = 0, \quad x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j. \quad (7.4)$$

Заметим, что $v(x, t) = \varphi(x, t) - W_{\varepsilon, \varphi}(x, t) \in \mathcal{K}_\varepsilon$. Действительно, если $x \in \partial G_\varepsilon^j$, то

$$v(x, t) = \varphi(x, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t) + \varphi(P_\varepsilon^j, t) - \varphi(x, t) = \varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t) \geq 0.$$

Следовательно, мы можем взять функцию v в качестве тестовой функции в интегральном неравенстве (7.2). Получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-k} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} (\partial_t \varphi(P_\varepsilon^j, t) - \partial_t w_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t)) (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j(x, t) - u_\varepsilon) ds dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi \nabla (\varphi(x, t) - W_{\varepsilon, \varphi}(x, t) - u_\varepsilon) dx dt \\ & - \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon, \varphi}^j \nabla (\varphi(x, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j + \kappa_\varepsilon^j (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - \varphi(x, t)) - u_\varepsilon) dx dt \\ & + \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla (\kappa_\varepsilon^j(x) (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - \varphi(x, t))) \\ & \times \nabla (\varphi(x, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j + \kappa_\varepsilon^j (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - \varphi(x, t)) - u_\varepsilon) dx dt \\ & \geq \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi(x, t) - W_{\varepsilon, \varphi} - u_\varepsilon) dx dt. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $v(x, 0) = 0$, $x \in S_\varepsilon$. Кроме этого, имеем

$$\begin{aligned} & - \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_{\varepsilon, \varphi}^j \nabla (\psi(x, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j + \kappa_\varepsilon^j(x)(\varphi(P_\varepsilon^j, t) - \varphi(x, t)) - u_\varepsilon) dx dt \\ & = - \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \partial_\nu w_{\varepsilon, \varphi}^j (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j - u_\varepsilon) ds dt - \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} \partial_\nu w_{\varepsilon, \varphi}^j (\varphi(x, t) - u_\varepsilon) ds dt. \end{aligned} \quad (7.6)$$

В силу (7.5) и (7.6) сумма всех интегралов по S_ε имеет вид

$$J_\varepsilon = \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} \left(\varepsilon^{-k} (\partial_t \varphi(P_\varepsilon^j, t) - \partial_t w_{\varepsilon, \varphi}^j) - \partial_\nu w_{\varepsilon, \varphi}^j \right) ((\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j) - u_\varepsilon) ds dt. \quad (7.7)$$

Учитывая, что $w_{\varepsilon, \varphi}^j$ — решение задачи (3.1), получим

$$J_\varepsilon = - \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial G_\varepsilon^j} (\varepsilon^{-k} \partial_t (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j) - \partial_\nu w_{\varepsilon, \varphi}^j) u_\varepsilon ds dt \leq 0. \quad (7.8)$$

Из (7.5) и (7.8) выводим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} \nabla \varphi \nabla (\varphi - W_{\varepsilon, \varphi} - u_\varepsilon) dx dt - \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} \partial_\nu w_{\varepsilon, \varphi}^j (\varphi - u_\varepsilon) ds dt \\ & + \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla (\kappa_\varepsilon^j(x)(\varphi(P_\varepsilon^j, t) - \varphi(x, t))) \nabla (\varphi(x, t) - w_{\varepsilon, \varphi}^j) \\ & + \kappa_\varepsilon^j (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - \varphi(x, t)) - u_\varepsilon) dx dt \geq \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} f(\varphi - W_{\varepsilon, \varphi} - u_\varepsilon) dx dt. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Введем функцию

$$\kappa_\varepsilon(x) = \begin{cases} \kappa_\varepsilon^j(x), & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \quad j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 1, & x \in G_\varepsilon^j, \quad j \in \Upsilon_\varepsilon, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \overline{G_\varepsilon^j}. \end{cases} \quad (7.10)$$

Легко видеть, что $\kappa_\varepsilon \rightharpoonup 0$ слабо в $H_0^1(\Omega)$ и $\kappa_\varepsilon \rightarrow 0$ в $L^2(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отсюда и из оценки $|\varphi(P_\varepsilon^j, t) - \varphi(x, t)| \leq K\varepsilon$, $x \in T_{\varepsilon/4}^j$, следует, что сумма интегралов по $T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}$ в (7.9) стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 7.1 ([12, 14]). Пусть $\{h_\varepsilon\}$ — последовательность функций из $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ и $h_\varepsilon \rightharpoonup h$ слабо в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $\varphi(x, t) = \psi(x)\eta(t)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta \in C^1([0, T])$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} \partial_\nu w_\varphi(P_\varepsilon^j, \frac{x - P_\varepsilon^j}{a_\varepsilon}, t) h_\varepsilon ds dt = -C_0^{n-2} \int_0^T \int_\gamma H[\varphi](x, t) h d\hat{x} dt,$$

где $H[\varphi](x, t)$ задано равенством (6.1), $x = (0, \hat{x})$, $\hat{x} = (x_2, \dots, x_n)$.

Применяя лемму 7.1 и переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ в неравенстве (7.11) получим, что u_0 удовлетворяет интегральному неравенству

$$\int_{Q^T} \nabla \varphi \nabla (\varphi - u_0) dx dt + C_0^{n-2} \int_0^T \int_{\gamma} H[\varphi](0, \hat{x}, t) (\varphi - u_0) d\hat{x} dt \geq \int_{Q^T} f(\varphi - u_0) dx dt, \quad (7.11)$$

где $\varphi(x, t) = \psi(x)\eta(t)$, $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta \in C^1([0, T])$. Так как множество $\{\psi(x)\eta(t) : \psi \in C_0^\infty(\Omega), \eta \in C^1([0, T])\}$, всюду плотно в $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, получим, что неравенство (7.11) выполняется для произвольной функции $\varphi \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$. Отсюда следует, что u_0 — решение задачи (7.1). \square

Литература

1. J. I. Díaz, A. V. Podolskiy, T. A. Shaposhnikova, “Unexpected regionally negative solutions of the homogenization of Poisson equation with dynamic unilateral boundary conditions: critical symmetric particles”, *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Nat., Ser. A Mat., RACSAM* **118**, No. 1, Paper 9 (2024).
2. А. В. Подольский и Т. А. Шапошникова, “Усреднение параболического уравнения в перфорированной области с односторонними динамическими граничными условиями: критический случай”, *Соврем. мат., Фундам. направления* **68**, No. 4, 671–685 (2022).
3. W. Jager, M. Neuss-Radu, T. A. Shaposhnikova, “Homogenization of a variational inequality for the Laplace operator with nonlinear restriction for the flux on the interior boundary of a perforated domain”, *Nonlinear Anal., Real World Appl.* **15**, 367–380 (2014).
4. D. Gómez, M. Lobo, M. E. Pérez, A. V. Podolskiy, T. A. Shaposhnikova, “Unilateral problems for the p -Laplace operator in perforated media involving large parameters”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.* **24**, No. 3, 921–964 (2018).
5. J. I. Díaz, D. Gómez-Castro, T. A. Shaposhnikova, *Nonlinear Reaction-Diffusion Processes for Nanocomposites. Anomalous Improved Homogenization*, De Gruyter, Berlin (2021).
6. J. I. Díaz, D. Gómez-Castro, A. V. Podolskiy, T. A. Shaposhnikova, “Homogenization of a net of periodic critically scaled boundary obstacles related to reverse osmosis ‘nano-composite’ membranes”, *Adv. Nonlinear Anal.* **9**, 193–227 (2020).
7. C. Conca, F. Murat, C. Timofte, “A generalized strange term Signorini’s type problems”, *M2AN, Math. Model. Numer. Anal.* **57**, No. 3, 773–805 (2003).
8. А. Ю. Воробьев, Т. А. Шапошникова, “Об усреднении неоднородной задачи Синьорини для уравнения Пуассона в периодически перфорированной области” *Диффер. уравн.* **39**, No. 3, 359–366 (2003).
9. С. Е. Пастухова, “Усреднение смешанной задачи с условием Синьорини для эллиптического оператора в перфорированной области”, *Мат. сб.* **192**, No. 2, 87–102 (2001).
10. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М. (1972).
11. J. I. Díaz, T. A. Shaposhnikova, M. N. Zubova, “A strange non-local monotone operator arising in the homogenization of a diffusion equation with dynamic nonlinear boundary conditions on particles of critical size and arbitrary shape”, *Electron. J. Differ. Equ* **2022**, Paper No. 52 (2022).
12. М. Н. Зубова, Т. А. Шапошникова, “Возникновение нелокального монотонного оператора в условиях сопряжения при усреднении уравнения Пуассона в области, перфорированной вдоль $(n - 1)$ -мерного многообразия с динамическими краевыми условиями на границе перфораций критического размера и произвольной формы”, *Пробл. мат. анализ.* **108**, 65–82 (2021).
13. О. А. Oleinik, T. A. Shaposhnikova, “On homogenization problem for the Laplace operator in partially perforated domains with Neumann’s condition on the boundary of cavities”, *Rend. Lincei, Mat. Appl.* **6**, No. 3, 133–142 (1995).
14. А. В. Подольский, Т. А. Шапошникова, “Усреднение краевой задачи для оператора Лапласа в области, перфорированной вдоль $(n - 1)$ -многообразия, с нелинейным граничным условием

типа Робина на границе отверстий произвольной формы. Критический случай”, *Докл. РАН* **473**, No. 4, 395–400 (2017).

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2023 г.