

Том 1 № 1 (2025)

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

СИРИУС

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТЕРРИТОРИЯ «СИРИУС»
МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР «СИРИУС»



ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

Том 1 № 1 (2025)

СИРИУС

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТЕРРИТОРИЯ «СИРИУС»
МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР «СИРИУС»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Председатель Научного совета Международного
математического центра «Сириус»

академик Шведской королевской академии наук
Европейской академии наук и Academia Europaea
Лаптев Арий Ариевич (ИКЛ & НТУ «Сириус»)

НАУЧНЫЙ СОВЕТ МЕЖДУНАРОДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА «СИРИУС»

д.ф.-м.н. *Ландо Сергей Константинович* (ВШЭ)
чл.-корр. РАН *Миронов Андрей Евгеньевич* (ИМ СО РАН)
академик *Трещев Дмитрий Валерьевич* (МИАН)
д.ф.-м.н. *Цих Август Карлович* (СФУ)
к.ф.-м.н. *Щуплев Алексей Валерьевич* (ММЦ «Сириус»)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

академик *Аптекарев Александр Иванович* (ИПМ РАН)
академик *Безродных Сергей Игоревич* (ФИЦ ИУ РАН)
академик *Беклемишев Лев Дмитриевич* (МИАН)
академик *Гончаров Сергей Савостьянович* (ИМ СО РАН)
академик *Кашин Борис Сергеевич* (МИАН)
академик *Кисляков Сергей Витальевич* (ПОМИ РАН)
академик *Козлов Валерий Васильевич* (МИАН)
академик *Конягин Сергей Владимирович* (МИАН)
академик *Лукоянов Николай Юрьевич* (ИММ УрО РАН)
академик *Матиясевич Юрий Владимирович* (ПОМИ РАН)
академик *Романов Владимир Гаврилович* (ИМ СО РАН)
академик *Семенов Алексей Львович* (МГУ)
академик *Тыртыйшиков Евгений Евгеньевич* (ИВМ РАН)
академик *Черноустько Феликс Леонидович* (ИПМех РАН)
академик *Четверушкин Борис Николаевич* (ИПМ РАН)
академик *Шайдуров Владимир Викторович* (КНЦ СО РАН)
академик *Шананин Александр Алексеевич* (МФТИ)
чл.-корр. РАН *Болотин Сергей Владимирович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Бухштабер Виктор Матвеевич* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Василевский Юрий Викторович* (ИВМ РАН)
чл.-корр. РАН *Васин Владимир Васильевич* (ИММ УрО РАН)
чл.-корр. РАН *Веснин Андрей Юрьевич* (ИМ СО РАН)
чл.-корр. РАН *Гайфуллин Александр Александрович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Гасников Александр Владимирович* (ИУ)
чл.-корр. РАН *Гущин Валентин Анатольевич* (ИАП РАН)
чл.-корр. РАН *Давыдов Алексей Александрович* (МГУ)
чл.-корр. РАН *Кабанихин Сергей Игоревич* (ИМ СО РАН)
чл.-корр. РАН *Лазарева Галина Геннадьевна* (РУДН)
чл.-корр. РАН *Петров Игорь Борисович* (МФТИ)
чл.-корр. РАН *Попов Владимир Леонидович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Протасов Владимир Юрьевич* (МГУ)
чл.-корр. РАН *Прохоров Юрий Геннадьевич* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Разборов Александр Александрович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Садовский Владимир Михайлович* (ИВМ СО РАН)
чл.-корр. РАН *Тишкин Владимир Федорович* (ИПМ РАН)
чл.-корр. РАН *Шкаликов Андрей Андреевич* (МГУ)
чл.-корр. РАН *Якобовский Михаил Владимирович* (ИПМ РАН)

МЕЖДУНАРОДНЫЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
«СИРИУС»

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

СИРИУС
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 1

2025

№ 1

Под редакцией

А. А. Лантева

Имперский колледж Лондона, Англия

Научно-технологический университет «Сириус», Россия

Федеральная территория «Сириус»
Международный математический центр «Сириус»
2025

Журнал учрежден в 2024 г. Образовательным фондом «Талант и успех»
Издается при финансовой поддержке Федеральной территории «Сириус»

УДК 51
ББК 22.1
С402

С402 Сириус. Математический журнал. Том 1, № 1 — Федеральная территория «Сириус» : Международный математический центр «Сириус», 2025 — 112 с.

Первый выпуск нового журнала открывает статья главного редактора А. А. Лаптева о Международном математическом центре «Сириус». Представлены новые научные результаты в области теоретической и прикладной математики. В частности, описана когомологическая структура последовательности нильмногообразий Гейзенберга в терминах биградуированных симплектических структур на торах, соответствующих SL -представлений на когомологиях торов и спектральной последовательности Бухштабера, исследован вопрос о разрешимости идеала Фреше в булевых алгебрах, изучена связь между введенными авторами инвариантами в эквивариантной бирациональной геометрии и модулярными символами, предложены алгоритмы нахождения значений дзета-функции Римана через значения ее производных в одной точке, дан обзор результатов по классификации бесконечных алгебраических структур, конкретная обратная задача для квазилинейного волнового уравнения сведена к известной задаче томографии и новой задаче интегральной геометрии, для решений которой доказана оценка устойчивости.

Для специалистов по теоретической и прикладной математике — научных работников, преподавателей вузов, а также аспирантов и студентов.

УДК 51
ББК 22.1

Редколлегия: А. И. Аптекарев, А. Д. Баранов, В. М. Бухштабер, Ю. В. Василевский, А. Ю. Веснин, С. С. Гончаров, С. И. Кабанихин, В. А. Калягин, А. А. Лаптев (гл. ред.), Т. Е. Панов, Ю. Л. Сачков, Т. М. Садыков, А. П. Солодов, В. Н. Темляков, К. Ю. Федоровский, С. Б. Шлосман.

Журнал публикует новые научные результаты по всем направлениям теоретической и прикладной математики. В качестве авторов приглашаются участники всех мероприятий, проводимых Международным математическим центром «Сириус» с 2020 г., а также номинанты и лауреаты Премии молодым математикам России, учрежденной Образовательным фондом «Талант и успех». Рукописи для публикации в «Сириус. Математическом журнале» принимаются через платформу EditFlow <https://ef.msp.org/submit/sirius>

Все статьи, прошедшие рецензирование через EditFlow и одобренные главным редактором, публикуются на английском языке издательством Springer в журнале-источнике «Sirius Mathematical Journal» отдельными выпусками «Journal of Mathematical Sciences. Series B».

Онлайн версия «Сириус. Математического журнала» на сайте
<https://siriusmathcenter.ru/SiriusMathJ>

Подписано в печать 27.08.2025. Формат 220х290 мм. Усл. печ. л. 14. Тираж 500 экз.

Адрес редакции: 354340, Федеральная территория «Сириус», Дельта Сириус, Триумфальный пер., 1, офис 9-047, тел.: +7 (862) 241-98-44, доб. 5824, email: rozhkovskaya.tn@talantiuspeh.ru.

ООО «Типография «Сочи пресс», 354000, Сочи, Виноградный пер., 15, тел.: 7 (862) 296-08-08.

Заказ № от 10.09.2025.

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

© Международный математический центр «Сириус», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Арий Ариевич Лаптев	7
А. А. Лаптев. Международный математический центр «Сириус»	8
 В. М. Бухштабер, Ф. Ю. Попеленский	
Когомологии последовательности многообразий Гейзенберга	10
1. Введение	10
2. Нильмногообразия	11
2.1. Нильмногообразия Гейзенберга	11
2.2. Расслоения нильмногообразий M_H^{2n+1} над торами T^{2n-k}	12
3. Спектральная последовательность Bss для нильпотентных алгебр Ли	14
4. Когомологии многообразий Гейзенберга	16
4.1. Числа Бетти	16
4.2. Кольца когомологий	18
5. Когомологические характеристики нильмногообразий	21
6. Расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга	21
6.1. Алгебра Гейзенберга — Ли L_H^{2n+1} с соотношениями $[\hat{e}_i, \hat{e}_{2n+1-i}] = \hat{e}_{2n+1}$	22
6.2. Алгебра Гейзенберга — Ли L_H^{2n+1} с соотношениями $[e_{-i}, e_i] = e_0$	23
6.3. Расщепление инволюцией $I : e_k \mapsto -e_{-k}$	24
6.4. Замечания	26
7. Спектральные последовательности расслоений многообразий Гейзенберга	26
7.1. Расслоение $M_H^{2n+1} \rightarrow T^2$ со слоем M_H^{2n-1}	27
7.2. Расслоение $M_H^{2n+1} \rightarrow S^1$ со слоем $M_H^{2n-1} \times S^1$	28
7.3. Коммутативные диаграммы расслоений	29
8. Дифференциалы в Bss для многообразий Гейзенберга	30
8.1. Произведения Масси	30
8.2. Дифференциалы d_1 и d_2 в Bss	32
8.3. Bss -фильтрация Φ^r в когомологиях алгебры Ли L_H^{2n+1}	33
9. Примеры	35
9.1. Алгебра Ли L_H^3 и многообразие M_H^3	35
9.2. Алгебра Ли L_H^5 и многообразие M_H^5	36
9.3. Алгебра Ли L_H^7 и многообразие M_H^7	37
9.4. Алгебра Ли L_H^9 и многообразие M_H^9	39
Заключение	41
Литература	42
 С. С. Гончаров	
Вычислимые булевы алгебры и сложность идеала Фреше	44
1. Введение	44
2. Предварительные сведения	45
3. Множество атомов и идеал Фреше в булевых алгебрах	45
4. Иерархия Фейнера	49
Литература	52
 М. Концевич, В. Пестун, Ю. Чинкель	
Эквивариантная бирациональная геометрия и модулярные символы	54
1. Введение	54
2. Инвариантность относительно раздутий	57
3. Сравнение	59
4. О порождающих и отношениях для $\mathcal{M}_n(G)$	62

5. Умножение и коумножение	64
6. Операторы Гекке	71
7. Варианты	72
8. Численные эксперименты	72
9. Алгебраические варианты автоморфных форм	74
10. Теоретико-решеточный подход к умножению и коумножению	78
11. Случай $n = 2$. Модулярные символы	82
Литература	85

Ю. В. Матиясевич

Вычисление значений дзета-функции Римана через значения ее производных в одной точке ...	86
1. Дзета-функция Римана	86
2. Вопросы	88
3. Алгоритм A1	88
4. Алгоритм A2	90
5. Алгоритм A3	91
6. Алгоритм A4	92
7. Алгоритм A5	93
8. Случай знакопеременной дзета-функции	94
9. Обобщение	95
Литература	95

Дж. Найт

Классы алгебраических структур	97
1. Соглашения	97
2. Логика $L_{\omega_1, \omega}$	97
3. Вычислимые бесконечные формулы	98
4. Иерархия Бореля	98
5. Эффективная иерархия Бореля	99
6. Аксиоматизирующие классы	99
7. Борелевские вложения	100
8. Вычислимые по Тьюрингу вложения	102
9. Инварианты	102
10. Классы TFAb_n и F_n	103
Литература	103

В. Г. Романов

Обратная задача для квазилинейного волнового уравнения	105
1. Введение	105
2. Исследование прямой задачи	106
3. Анализ обратной задачи	108
Литература	111



Арий Ариевич Лаптев

- Главный редактор журналов «Сириус. Математический журнал» и «Sirius Mathematical Journal»
- Председатель Научного совета Международного математического центра «Сириус»
- Член Ученого совета и профессор Научного центра информационных технологий и искусственного интеллекта Научно-технологического университета «Сириус»

Звания и награды: Трижды академик: действительный член Шведской королевской академии наук, Европейской академии наук и академии Европиа [Academia Europaea], почетный профессор Сибирского федерального университета, лауреат премии Королевского общества Вольфсона за заслуги в области науки.

Научная деятельность: Автор более 140 научных статей и одной монографии¹⁾ по спектральной теории уравнений с частными производными.

Преподавательская деятельность: Профессор Королевского технологического университета в Стокгольме (1999–2007), профессор Имперского колледжа Лондона (2007–н.в.), профессор Научно-технологического университета «Сириус» (2022–н.в.), научный руководитель более 27 аспирантов.

Редакционная деятельность: Главный редактор «Acta Mathematica» (2011–2018), организатор и главный редактор «Journal of Spectral Theory», организатор и главный редактор «Сириус. Математического журнала» и его английской версии «Sirius Mathematical Journal» в Springer, зам. главного редактора «Asian-European Journal of Mathematics», член редколлегии англоязычных журналов «Arkiv för Matematik» (1997–2012), «Memoirs of the European Mathematical Society», «Bulletin of Mathematical Sciences», а также русскоязычных журналов «Проблемы математического анализа», «Известия высших учебных заведений. Математика», «Сибирский математический журнал» и их английских версий.

Организационная деятельность: Президент Шведского математического общества (2001–2003), президент Европейского математического общества (2007–2010), директор Института Миттаг-Леффлера²⁾ в Стокгольме (2011–2018), организатор и научный руководитель Международного математического центра «Сириус» (2019–н.в.).

¹⁾ R. Frank, A. Laptev, and T. Weidl, *Schrödinger Operators: Eigenvalues and Lieb–Thirring Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge (2022).

²⁾ Фильм об Институте Миттаг–Леффлера с участием А. А. Лаптева: www.ma.ic.ac.uk/~alaptev/IMLfilm/16MartA.mp4

А. А. Лаптев

МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР «СИРИУС»

В этом году Международный математический центр «Сириус» отмечает пятилетие со дня своего создания.

Основная изначальная цель организации нашего центра заключалась в том, что он будет специализироваться на организации недельных научных конференций, а также школ для аспирантов и молодых исследователей. Подобные центры существуют во многих странах и уже давно. Например, центр Обервольфах в Германии, который ежегодно проводит около 50 конференций, существует с 1944 г. Среди них также центры в Банфе (Канада), Бедлево (Польша) и многие другие. Помимо центров, специализирующихся на организации только конференций, существует много центров, совмещающих длительные программы и конференции. Старейшим институтом такого рода является Институт Миттаг-Леффлера в Стокгольме, основанный в 1916 г. Этот пример вдохновил многих математиков, и были созданы такие центры как Институт Анри Пуанкаре в Париже (1928), Институт перспективных исследований в Принстоне (1930) и т.д. На данный момент в Европейском математическом обществе существует комитет европейских исследовательских центров по математике (ERCOM), в который входят 35 европейских центров.

До недавнего времени в России не было центра, который занимался бы организацией коротких математических мероприятий по всем направлениям чистой и прикладной математики. Наша основная идея заключалась в том, чтобы организовать такую деятельность с минимальным штатом сотрудников.

Международный математический центр «Сириус» создан в ноябре 2019 г. Образовательным фондом «Талант и успех». Уже в феврале 2020 г. мы организовали первые три конференции, но из-за Ковид-19 пришлось прервать нашу деятельность, которая возобновилась в июне 2021 г. В настоящее время центр проводит три типа регулярных мероприятий: конференции, школы для молодых исследователей и встречи рабочих групп. Наша деятельность открыта для всех областей математики.

Целью центра является активизация математических исследований в России, расширение сети личных и профессиональных контактов между математиками, привлечение российских студентов и аспирантов к актуальным научным исследованиям в области математики, поддержка математической составляющей исследований и разработок в Научном центре информационных технологий и искусственного интеллекта Научно-технологического университета «Сириус». Наша цель — стать местом встречи исследователей в области математики, чтобы они могли обмениваться научными идеями, сотрудничать, профессионально растить студентов и молодых ученых.

Научный совет Международного математического центра «Сириус» обеспечивает научную, организационную, аналитическую и экспертную поддержку деятельности центра. Основной задачей Научного совета является экспертная оценка заявок на проведение мероприятий центра, а также координация работы по развитию форматов мероприятий и повышению его узнаваемости в России

А. А. Лаптев: Имперский колледж Лондона, Англия & Научно-технологический университет «Сириус», Федеральная территория «Сириус», Россия, a.laptev@imperial.ac.uk.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 1–3 (2024) [Open Access].

и во всем мире. Ученый совет небольшой и состоит из С. К. Ландо, А. А. Лаптева (председатель), А. Е. Миронова, Д. В. Трещева, А. К. Циха и А. В. Щуплева.

В настоящее время центр «Сириус» принимает заявки на мероприятия в 2025 г. Срок подачи заявок до 20 октября 2024 г., после чего Научный совет центра примет решение о поддержке мероприятий и рекламе нашей деятельности на 2025 г. Предпочтение будет отдано заявкам по темам, которые еще не получали поддержку центра в течение последних 2 лет (2023 и 2024).

В 2021 г. центр «Сириус» организовал первую конференцию математических центров, ставшую одним из главных ежегодных событий математической жизни России. Последующие конференции в Москве и Майкопе прошли очень успешно. Конференция в Санкт-Петербурге в августе 2024 г. также стала очень запоминающимся событием. На первой конференции Образовательный фонд «Талант и успех» выделил средства на девять премий молодым математикам России. В этом году мы возобновили выделение средств на премии, которые были вручены на конференции в Санкт-Петербурге.

После обсуждений с коллегами и учредителями фонда «Талант и успех» мы наконец решили открыть новый математический журнал, который назвали «Сириус. Математический журнал». Это его первый выпуск. Мы планируем публиковать работы тех математиков, которые принимали участие в деятельности математического центра «Сириус». Основная часть статей, которые мы будем публиковать, — это просто исследовательские работы. Но мы также рассматриваем возможность публикации тематических выпусков. Например, мы готовы публиковать лекции школ студентам старших курсов, аспирантам и молодым исследователям, проходящим в нашем центре.

Этот журнал будет в открытом доступе и, кроме того, мы планируем бесплатно распространять 500 экземпляров каждого номера. Начиная с первого номера, «Сириус. Математический журнал» будет также издаваться на английском языке издательством Springer под названием «Sirius Mathematical Journal» как составная часть «Journal of Mathematical Sciences. Series B» с периодичностью 3–4 выпуска в год. Тем самым статьи наших авторов будут доступны за рубежом и автоматически включаться в SCOPUS, Zentralblatt Math, Google Scholar, MathSciNet (AMS) и другие зарубежные реферативные и рейтинговые базы данных.

Для научной экспертизы статей созданы редсовет и редколлегия журнала. В состав редсовета входят члены Научного совета Международного математического центра «Сириус» и, с их согласия, академики и члены-корреспонденты РАН, принимавшие участие в мероприятиях центра. Для рассмотрения и рецензирования статей журнал использует современную издательскую систему EditFlow. Организаторы конференций, отвечающие за проведение рецензирования статей в EditFlow, составляют редколлегию журнала. «Сириус. Математический журнал» издается созданным в 2024 г. Фондом «Талант и успех» издательством, руководить которым Фонд пригласил Т. Н. Рожковскую из Новосибирска.

Я хотел бы воспользоваться этой возможностью, чтобы пригласить всех коллег представить свои статьи в наш новый журнал. Пожалуйста, используйте следующий веб-сайт EditFlow:

<https://ef.msp.org/submit/sirius>

В. М. Бухштабер, Ф. Ю. Попеленский

КОГОМОЛОГИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Получено описание когомологической структуры последовательности нильмногообразий Гейзенберга $M_H^{2n-1} \rightarrow M_H^{2n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, в терминах биградуированных симплектических структур на торах T^{2n} , соответствующих $\mathfrak{sl}_2$ -представлений на коомологиях торов T^{2n} и спектральной последовательности Бухштабера (Bss).

1. Введение

Нильмногообразие Гейзенберга M_H^{2n+1} — замечательный пример контактного многообразия, определенного канонической симплектической структурой на торе T^{2n} . Конструкция этих многообразий использует переход от канонической скобки Пуассона на $\mathbb{R}^{2n}$ к простейшей скобке Ли на $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Задача вычисления коомологий многообразий M_H^{2n+1} широко известна (см. [1]–[7]). Интерес к этой задаче и подходы к ее решению основаны на глубоких связях теории нильмногообразий с фундаментальными результатами теорий симплектических и контактных многообразий, гомологической алгебры, представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, нелинейных дифференциальных уравнений и математической физики. В основе нашего исследования лежит развитие взаимосвязей этих подходов и результатов.

В центре внимания настоящей статьи нильмногообразия Гейзенберга M_H^{2n+1} , их вложения $M_H^{2n-1} \rightarrow M_H^{2n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, и биградуированные симплектические структуры на торах T^{2n} , $n \geq 1$. Наш подход использует спектральную последовательность Бухштабера (Bss) и последовательность расслоений $M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2n-k}$ со слоем M_H^{2l+1} при $k = 2l$ и $M_H^{2l-1} \times S^1$ при $k = 2l - 1$, где $k = 0, \dots, 2n - 1$.

В статье

- теория спектральной последовательности Bss развита на основе результатов алгебраической и гомологической теорий алгебр Хопфа и алгебр Ли;
- описано действие дифференциалов в Bss для многообразий M_H^{2n+1} и преобразования Bss , индуцированные вложениями $M_H^{2n-1} \rightarrow M_H^{2n+1}$;
- введены и вычислены биградуированные кольца коомологий $H^{*,*}(M_H^{2n+1})$ как модули над биградуированной внешней алгеброй $H^{*,*}(T^{2n})$, а также гомоморфизмы

$$H^{*,*}(M_H^{2n+1}) \rightarrow H^{*,*}(M_H^{2n-1});$$

В. М. Бухштабер: Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия, buchstab@mi-ras.ru.

Ф. Ю. Попеленский: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, popelens@mech.math.msu.su.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 17–58 (2024).

- показано, что мультипликативными образующими колец $H^{*,*}(M_H^{2n+1})$ являются образующие групп $H^1(M_H^{2n+1})$ и $H^{n+1}(M_H^{2n+1})$;
- все элементы группы $H^{n+1,*}(M_H^{2n+1})$ реализованы в виде нетривиальных тройных произведений Масси.

Статья содержит демонстрацию наших результатов, в том числе явные формулы полиномов Пуанкаре биградуированных когомологий для многообразий Гейзенберга M_H^{2n+1} , $n = 1, 2, 3, 4$.

В начале статьи приведены необходимые факты и конструкции из теории нильмногообразий и спектральной последовательности Бухштабера. В заключительной части отмечено направление исследований, связанное с реализацией многообразия Гейзенберга M_H^{2n+1} в виде пространства расслоения над n -мерным абелевым многообразием.

Если специально не указано, то речь идет о когомологиях с рациональными коэффициентами.

2. Нильмногообразие

Напомним, что нильмногообразие — это компактное однородное пространство конечномерной односвязной нильпотентной группы Ли (над $\mathbb{R}$). Согласно классическим результатам Мальцева [8] для данной односвязной нильпотентной группы Ли нильмногообразие существует тогда и только тогда, когда ее алгебра Ли обладает базисом с рациональными структурными константами. По теореме Номидзу алгебра когомологий де Рама нильмногообразия изоморфна алгебре когомологий соответствующей нильпотентной алгебры Ли (см. [9]).

В настоящее время известна классификация нильпотентных алгебр Ли в небольших размерностях. В размерностях до 6 включительно таких алгебр Ли конечное число (см. [10]). В размерностях 7 и 8 классификация тоже получена, но в этих размерностях имеются семейства попарно неизоморфных нильпотентных алгебр Ли, зависящих от непрерывного параметра. Литература, посвященная этому вопросу, требует отдельного обзора, что выходит за рамки настоящей статьи. Среди работ, относящихся к классификации нильпотентных алгебр над произвольными полями характеристики, отличной от 2, отметим работу [11].

В настоящее время специалисты склоняются к мнению, что имеющиеся теоретические методы не позволяют получить обозримую классификацию нильпотентных алгебр Ли в произвольных размерностях. В связи с этим естественно конкретизировать задачи классификации и рассмотреть классы нильпотентных алгебр Ли с дополнительными условиями на их структуру.

Определение 2.1. Алгебра Ли $\mathcal{V}^k$ размерности n_k с фиксированным базисом $\{e_\alpha : \alpha \in I_k, |I_k| = n_k\}$ называется *оснащенной*.

Определение 2.2. Последовательностью алгебр Ли называется бесконечная последовательность $\dots \subset \mathcal{V}^k \subset \mathcal{V}^{k+1} \subset \dots$ вложений оснащенных алгебр Ли, соответствующих вложениям $I_k \subset I_{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

2.1. Нильмногообразие Гейзенберга. Рассмотрим группу $\mathcal{H}^{2n+1}$ матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

с вещественными x_j, y_j и z . Обратной к такой матрице является матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -x_1 & -x_2 & \cdots & -x_n & -z + \sum x_i y_i \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & -y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & -y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Пространство группы $\mathcal{H}^{2n+1}$ диффеоморфно $\mathbb{R}^{2n+1}$. Ее алгебра Ли L_H^{2n+1} состоит из матриц

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 0 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с вещественными x_j, y_j и z . Введем в L_H^{2n+1} базис $e_0, e_{\pm 1}, \dots, e_{\pm n}$ такой, что

$$A = x_1 e_{-1} + \dots + x_n e_{-n} + y_1 e_1 + \dots + y_n e_n + z e_0 = \sum_{j=1}^n x_j e_{-j} + \sum_{j=1}^n y_j e_j + z e_0.$$

Прямая проверка показывает, что в L_H^{2n+1} все коммутаторы базисных элементов равны нулю, кроме $[e_{-j}, e_j] = e_0$, $j = 1, \dots, n$. Тем самым алгебра Ли L_H^{2n+1} нильпотентна, и ее структурные константы суть целые числа. Алгебры Ли L_H^{2n+1} образуют последовательность в смысле определения 2.2 при $I_n = \{-n, \dots, 0, \dots, n\}$.

Группа $\mathcal{H}^3$ известна как группа Гейзенберга. Группы $\mathcal{H}^{2n+1}$ при $n \geq 2$ называются *обобщенными группами Гейзенберга*. Соотношения в алгебре Ли L_H^{2n+1} соответствуют замене канонической скобки Пуассона пространства $\mathbb{R}^{2n}$ на коммутатор, а единицы — на элемент e_0 , который играет роль постоянной Планка.

В $\mathcal{H}^{2n+1}$ имеется решетка Γ_H^{2n+1} , состоящая из матриц с целочисленными x_j, y_j и z . Однородное пространство $M_H^{2n+1} = \mathcal{H}^{2n+1} / \Gamma_H^{2n+1}$ называется *нильмногообразием Гейзенберга*.

Нильмногообразия M_H^{2n+1} образуют последовательность

$$S^1 = M_H^1 \xrightarrow{i_0} M_H^3 \xrightarrow{i_1} M_H^5 \xrightarrow{i_2} \dots,$$

индуцированную вложениями групп

$$\mathcal{H}^1 \xrightarrow{i_0} \mathcal{H}^3 \xrightarrow{i_1} \mathcal{H}^5 \rightarrow \dots,$$

где $i_n : \mathcal{H}^{2n+1} \xrightarrow{i_n} \mathcal{H}^{2n+3}$ задается формулой

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & 0 & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & 0 & y_n \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При таком вложении образующие $e_0, e_{\pm 1}, \dots, e_{\pm n}$ алгебры L_H^{2n+1} переходят в $e_0, e_{\pm 1}, \dots, e_{\pm n} \in L_H^{2n+3}$ в соответствии с определением 2.2. Обратим внимание, что в литературе используется и другой выбор индексации образующих, при котором вложения i_n меняют индексы. Пример такой индексации см. в п. 6.1.

Отметим, что в каждой группе $\mathcal{H}^{2n+1}$ имеются другие решетки, не эквивалентные Γ_H^{2n+1} . Тем не менее и при любом другом согласованном выборе решеток $\Gamma^{2n+1} \subset \mathcal{H}^{2n+1}$ получается последовательность нильмногообразий

$$\dots \rightarrow \mathcal{H}^{2n+1} / \Gamma^{2n+1} \xrightarrow{i_n} \mathcal{H}^{2n+3} / \Gamma^{2n+3} \rightarrow \dots,$$

у которых по теореме Номидзу те же вещественные когомологии и те же индуцированные гомоморфизмы $i_n^* : H^*(\mathcal{H}^{2n+3} / \Gamma^{2n+3}, \mathbb{R}) \rightarrow H^*(\mathcal{H}^{2n+1} / \Gamma^{2n+1}, \mathbb{R})$.

2.2. Расслоения нильмногообразий M_H^{2n+1} над торами T^{2n-k} . С нильмногообразиями Гейзенберга связаны несколько замечательных расслоений над торами, многие из них используются в вычислениях групп $H^*(M_H^{2n+1})$ и в исследовании кольцевой структуры когомологий.

2.2.1. $\pi_{n,2k} : M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2(n-k)}$. Начнем с описания расслоения $M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2(n-k)}$ со слоем M_H^{2k+1} .

Сопоставим матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_{k+1} & \cdots & x_n & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & \cdots & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 & & & y_{k+1} \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & 1 & y_n \\ 0 & \cdots & 0 & & \cdots & 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем гомоморфизм групп $\pi_{n,2k} : \mathcal{H}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-k)}$, где $\mathbb{R}^{2(n-k)}$ рассматривается со стандартной структурой абелевой группы. Под действием гомоморфизма $\pi_{n,2k}$ решетка Γ_H^{2n+1} отображается на решетку $\mathbb{Z}^{2(n-k)} \subset \mathbb{R}^{2(n-k)}$. Переходя к факторам, получаем локально тривиальное расслоение

$$\pi_{n,2k} : M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2(n-k)}.$$

Действие фундаментальной группы базы в когомологиях слоя тривиально, т.е. это расслоение, как говорят, гомологически простое.

Действительно, рассмотрим петлю $\gamma : S^1 \rightarrow T^{2(n-k)}$, $\gamma(1) = 0 \in T^{2(n-k)}$, в базе расслоения. Обратный образ $\gamma^*(\pi_{n,2k})$ является расслоением над S^1 со слоем M_H^{2k+1} . Обход по S^1 определяет диффеоморфизм слоя на себя, который задается сопряжением матрицы вида A , у которой $x_{k+1} = \cdots = x_n = y_{k+1} = \cdots = y_n = 0$, матрицей B с целыми коэффициентами. Но легко проверить, что $B^{-1}AB = A$, т.е. расслоение $\gamma^*(\pi_{n,2k})$ над S^1 тривиально.

Таким образом, второй член спектральной последовательности Лере — Серра этого расслоения имеет вид

$$E_2^{p,q} = H^p(T^{2(n-k)}, H^q(M_H^{2k+1})).$$

Особый интерес представляет расслоение $\pi_{n,0} : M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2n}$ со слоем окружность. Дело в том, что в спектральной последовательности этого расслоения по соображениям размерности нетривиальным может быть только дифференциал d_2 , а в силу мультипликативности он определяется значением на образующей $\omega_0 \in E_2^{0,1} = H^1(S^1)$. Легко проверить, что $d_2\omega_0 = \sum_{j=1}^n \omega_{-k} \wedge \omega_k$.

Здесь ω_k — образующие одномерных когомологий, двойственные элементам e_k , подробнее о них будет сказано ниже.

Далее, рассмотренная спектральная последовательность соответствует спектральной последовательности Хохшильда — Серра с коэффициентами в тривиальном модуле $\mathbb{R}$ для подалгебры L_H^{2k+1} в L_H^{2n+1} . Эта подалгебра является идеалом, соответствующая факторалгебра — абелева алгебра Ли $\mathfrak{t}^{2(n-k)}$. В этом случае второй член спектральной последовательности Хохшильда — Серра имеет вид

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathfrak{t}^{2(n-k)}, H^q(L_H^{2k+1})).$$

Вычисление этой спектральной последовательности для $k = 0$ см. в п. 4.2, а для $k = n - 1$ — в п. 7.1.

2.2.2. $\pi_{n,2k+1} : M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2(n-k)-1}$. Опишем расслоение $M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2(n-k)-1}$ со слоем $M_H^{2k+1} \times S^1$.

Сопоставим матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & z \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & & & 1 & 0 & y_{n-1} \\ 0 & & \cdots & 0 & 1 & y_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & x_{k+2} & \cdots & x_n & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & & \cdots & & & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 & & & & y_{k+1} \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & & & & 1 & y_n \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получаем гомоморфизм $\pi_{n,2k+1} : \mathcal{H}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2(n-k)-1}$. Под действием этого гомоморфизма решетка Γ_H^{2n+1} отображается на решетку $\mathbb{Z}^{2(n-k)-1} \subset \mathbb{R}^{2(n-k)-1}$. Переходя к факторам, получаем локально тривиальное расслоение

$$\pi_{n,2k+1} : M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2(n-k)-1}.$$

Его слой, как нетрудно проверить, диффеоморфен $M_H^{2k+1} \times S^1$, где окружность S^1 возникает из факторизации по целым числам направления, заданного координатой x_{k+1} .

В этом случае действие фундаментальной группы базы в когомологиях слоя нетривиально. Действительно, рассмотрим петлю $\gamma : S^1 \rightarrow T^{2(n-k)-1}$, $\gamma(1) = 0 \in T^{2(n-k)-1}$, в базе расслоения и расслоение $\gamma^*(\pi_{n,2k+1})$ над S^1 со слоем $M_H^{2k+1} \times S^1$. Как и ранее, обход по S^1 определяет диффеоморфизм слоя на себя, который задается сопряжением матрицы вида A матрицей B с целыми коэффициентами. Однако в данном случае в базе имеется петля, которая действует на слое нетривиальным образом.

Рассмотрим матрицу вида B , у которой $x_{k+2} = \cdots = x_n = y_{k+2} = \cdots = y_n = 0$, а $y_{k+1} = 1$. Тогда в результате сопряжения матрицы вида A , у которой $x_{k+2} = \cdots = x_n = y_{k+1} = \cdots = y_n = 0$, этой матрицей B изменится только правый верхний угол матрицы A : вместо z там появится $z + x_{k+1}$. На уровне двойственных коцепей (или дифференциальных форм) это означает замену ω_0 на $\omega_0 + \omega_{-k-1}$.

Итак, второй член спектральной последовательности Лере — Серра этого расслоения имеет вид

$$E_2^{p,q} = H^p(T^{2(n-k)-1}, (H^q(M_H^{2k+1} \times S^1))^{tw}).$$

Особый интерес представляет расслоение $\pi_{n,0} : M_H^{2n+1} \rightarrow S^1$ со слоем $M_H^{2n-1} \times S^1$. Дело в том, что во втором члене этой спектральной последовательности

$$E_2^{p,q} = H^p(S^1, (H^q(M_H^{2n-1} \times S^1))^{tw})$$

всего два ненулевых столбца: нулевой и первый, а значит все дифференциалы d_r , $r \geq 2$, нулевые. Мы покажем, что лишь для $q = n$ группы $E_2^{0,n}$ и $E_2^{1,n}$ вычисляются как когомологии базы S^1 с нетривиальной локальной системой коэффициентов, а для остальных q локальная система постоянна (см. п. 7.2).

3. Спектральная последовательность Bss для нильпотентных алгебр Ли

В [12] развита теория спектральной последовательности Бухштабера (Bss) для градуированных алгебр Хопфа. Ее применение в контексте нильпотентных алгебр Ли приводит к понятию

Bss -глубины нильпотентной алгебры Ли. Дадим соответствующие определения из [12], адаптировав их к нашей ситуации.

Напомним, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определен нижний центральный ряд $\mathfrak{g} \supset \gamma_2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \dots \supset \gamma_p(\mathfrak{g}) \supset \dots$, где $\gamma_p(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, \gamma_{p-1}(\mathfrak{g})]$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *нильпотентной*, если найдется число p , для которого $\gamma_p(\mathfrak{g}) = 0$, и называется *остаточно нильпотентной*, если $\bigcap_p \gamma_p(\mathfrak{g}) = 0$.

Далее $\mathfrak{g}$ обозначает конечномерную нильпотентную алгебру Ли, определенную над полем $\mathbb{k}$. Пусть $U\mathfrak{g}$ — универсальная обертывающая алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и V — некоторый $\mathfrak{g}$ -модуль. Тогда по определению $H^*(\mathfrak{g}, V) = \text{Ext}_{U\mathfrak{g}}^*(\mathbb{k}, V)$ и равно когомологиям комплекса $\text{Hom}_{U\mathfrak{g}}^*(C_*(\mathfrak{g}), V)$, где $C_*(\mathfrak{g})$ — резольвента Шевалле — Эйленберга. Напомним, что комплекс $C_*(\mathfrak{g})$ с дифференциалом d_{CE} задается формулами

$$C_s(\mathfrak{g}) = U\mathfrak{g} \otimes \Lambda^s \mathfrak{g},$$

$$d_{CE} : C_s(\mathfrak{g}) \rightarrow C_{s-1}(\mathfrak{g}),$$

$$\begin{aligned} d_{CE}(u \otimes g_1 \wedge \dots \wedge g_s) &= \sum_{i=1}^s (-1)^{i-1} u g_i \otimes g_1 \wedge \dots \wedge \widehat{g_i} \wedge \dots \wedge g_s \\ &\quad + \sum_{i,j} (-1)^{i+j} u \otimes [g_i, g_j] \wedge g_1 \wedge \dots \wedge \widehat{g_i} \wedge \dots \wedge \widehat{g_j} \wedge \dots \wedge g_s. \end{aligned}$$

Универсальная обертывающая алгебра $U\mathfrak{g}$ является алгеброй Хопфа, у которой диагональ на образующих $g \in \mathfrak{g}$ задается формулой $\Delta(g) = 1 \otimes g + g \otimes 1$. Тогда на $(U\mathfrak{g})^*$ определена структура $\mathfrak{g}$ -модуля. Легко проверить, что когомологии $H^*(\mathfrak{g}, (U\mathfrak{g})^*)$ тривиальны, точнее $H^0(\mathfrak{g}, (U\mathfrak{g})^*) = \mathbb{k}$, а $H^i(\mathfrak{g}, (U\mathfrak{g})^*) = 0$ для $i \neq 0$.

В алгебре Хопфа $(U\mathfrak{g})^*$ определена возрастающая *фильтрация Бухштабера* (см. [13])

$$\mathbb{k} = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_p \subset \dots \subset (U\mathfrak{g})^*, \quad (3.1)$$

которая задается по индукции следующим образом:

$$N_{p+1} = \{x \in (U\mathfrak{g})^* : g \cdot x \in N_p \quad \forall g \in \mathfrak{g}\}. \quad (3.2)$$

Эта фильтрация в случае нильпотентной алгебры Ли является исчерпывающей. Действительно, условие $\bigcup_p N_p = (U\mathfrak{g})^*$ равносильно условию $\bigcap_p I^p = 0$, где I — идеал аугментации алгебры $U\mathfrak{g}$ (см. [12, п. 3.2]). В свою очередь, условие $\bigcap_p I^p = 0$ равносильно остаточной нильпотентности алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (см. [14, следствие 3.5]). Конечномерная достаточно нильпотентная алгебра Ли нильпотентна.

Фильтрация N_p универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{g}$ индуцирует фильтрацию $\mathcal{N}_p$ в комплексе $\text{Hom}_{U\mathfrak{g}}^*(C_*(\mathfrak{g}), (U\mathfrak{g})^*)$, а значит задает спектральную последовательность — так называемую спектральную последовательность Бухштабера Bss . Фильтрация $\mathcal{N}_p$ является исчерпывающей, поэтому Bss сходится к $H^*(\mathfrak{g}, (U\mathfrak{g})^*)$, т.е. к тривиальному модулю. В случае, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является градуированной, то как и в случае градуированных алгебр Хопфа, Bss триградуирована. Если же алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не градуирована, то Bss биградуирована. Перечислим несколько ее свойств (подробности см. в [12]):

- (1) $E_1^{p,q} = H^{-p-q}(\mathfrak{g}, \mathbb{k}) \otimes (N_p/N_{p-1})$, в частности, $E_1^{p,-p} = N_p/N_{p-1}$,
- (2) дифференциал d_r является гомоморфизмом $d_r : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p-r, q+r-1}$,
- (3) $E_1^{p,q} = 0$ при $p < 0$ или при $p + q > 0$,
- (4) $E_1^{0,q} = H^{-q}(\mathfrak{g}, \mathbb{k})$ (по построению фильтрации).

Теорема 3.1 ([12, п. 3.7]). Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, причем $\gamma_n(\mathfrak{g}) = 0$. Тогда в Bss все дифференциалы d_r при $r \geq n$ нулевые, в частности, $E_n^{*,*} = E_\infty^{*,*}$.

Введем фильтрацию в $H^*(\mathfrak{g})$, используя дифференциалы Bss . В нулевом столбце $E_1^{0,-q}$ расположены группы $H^q(\mathfrak{g})$, при этом по соображениям размерности все дифференциалы на группах

$E_r^{0,-q}$ тривиальны. Поскольку Bss сходится к тривиальному модулю $E_\infty^{0,-q} = 0$, $q \geq 1$, нулевой столбец Bss должен исчерпываться образами дифференциалов d_r , $r \geq 1$, в следующем смысле: на $H^q(\mathfrak{g}) = E_1^{0,-q}$ имеется возрастающая фильтрация $\Phi^r = \Phi^r H^q(\mathfrak{g})$ такая, что

- (i) $\Phi^0 = \mathbb{k} = E_\infty^{0,0}$,
- (ii) $E_r^{0,-q} = H^q(\mathfrak{g})/\Phi^{r-1}$,
- (iii) $\Phi^r/\Phi^{r-1} \subset H^q(\mathfrak{g})/\Phi^{r-1}$ совпадает с образом дифференциала $d_r : E_r^{r,q-r+1} \rightarrow E_r^{0,-q}$,
- (iv) по теореме 3.1 фильтрация Φ^r стабилизируется: $\Phi^n = \Phi^{n+1} = \dots$.

Фильтрация Φ^r функториальна в следующем смысле.

Теорема 3.2. Пусть $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ — гомоморфизм алгебр Ли и определены индуцированные гомоморфизмы $Uf : U\mathfrak{g} \rightarrow U\mathfrak{g}'$ и $(Uf)^* : (U\mathfrak{g}')^* \rightarrow (U\mathfrak{g})^*$ алгебр Хопфа. Тогда $(Uf)^*$ согласован с фильтрациями (3.1) в $(U\mathfrak{g}')^*$ и в $(U\mathfrak{g})^*$, т.е. $(Uf)^*(N_p(\mathfrak{g}')) \subset N_p\mathfrak{g}$, а следовательно, определен гомоморфизм $f^* : E_{*,*}^{*,*}(\mathfrak{g}') \rightarrow E_{*,*}^{*,*}(\mathfrak{g})$ соответствующих спектральных последовательностей. Таким образом, $f^*(\Phi^r H^q(\mathfrak{g}')) \subset \Phi^r H^q(\mathfrak{g})$.

Доказательство для общего случая Bss для алгебр Хопфа можно найти в [12].

Определение 3.1. Bss -глубиной конечномерной нильпотентной алгебры Ли называется наибольшее r , для которого дифференциал d_r в ее Bss нетривиален.

Из теоремы 3.1 следует, что если $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра k -й степени нильпотентности (т.е. $\gamma_k(\mathfrak{g}) \neq 0$ и $\gamma_{k+1}(\mathfrak{g}) = 0$), то Bss -глубина не превосходит k .

4. Когомологии многообразий Гейзенберга

В литературе имеется много работ о когомологиях нильмногообразий Гейзенберга M_H^{2n+1} (см. [1]–[7], [15, 16] и списки цитирований в них). В этом параграфе мы собрали и систематизировали необходимую нам информацию о когомологиях многообразий M_H^{2n+1} .

4.1. Числа Бетти. По теореме Номидзу кольцо вещественных когомологий нильмногообразия M_H^{2n+1} изоморфно алгебре когомологий $H^*(L_H^{2n+1})$ соответствующей алгебры Ли L_H^{2n+1} .

Обозначим через $\omega_k \in (L_H^{2n+1})^*$ элемент, двойственный к $e_k \in L_H^{2n+1}$. Тогда дифференциал в комплексе Шевалле — Эйленберга $C_{SE}^*(L_H^{2n+1}) = \Lambda(\omega_0, \omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n})$ задается формулами

$$d\omega_{\pm 1} = \dots = d\omega_{\pm n} = 0, \quad d\omega_0 = \sum_{k=1}^n \omega_{-k} \wedge \omega_k.$$

Многообразия M_H^{2n+1} компактны и ориентируемы, а значит для них имеет место двойственность Пуанкаре. В когомологиях алгебры L_H^{2n+1} двойственность Пуанкаре задается спариванием

$$\langle [\theta], [\eta] \rangle = B(\theta, \eta), \quad \theta \wedge \eta = B(\theta, \eta) \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_{-n} \wedge \omega_n. \quad (4.1)$$

Многообразия M_H^{2n+1} несут естественную контактную структуру, заданную контактной формой ω_0 : форма $\omega_0 \wedge (d\omega_0)^n$ задает образующую в $H^{2n+1}(M_H^{2n+1})$.

В явном виде числа Бетти $b_p = \dim H^p(L_H^{2n+1})$ были найдены в [1]. Достаточно вычислить числа Бетти $b_p = \dim H^p(L_H^{2n+1})$ для $p = 0, \dots, n$, так как в силу двойственности Пуанкаре $b_p = b_{2n+1-p}$.

Теорема 4.1 (см. [1]). (i) $b_p = \binom{2n}{p} - \binom{2n}{p-2}$ для всех $p \leq n$.

(ii) Пространство точных p -форм порождено формами вида

$$\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_p}, \quad i_1 < \dots < i_p, \quad i_j \neq 0 \quad \forall j.$$

(iii) Пространство замкнутых p -форм порождено формами вида

$$d\omega_0 \wedge \omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_{p-2}}, \quad i_1 < \dots < i_{p-2}, \quad i_j \neq 0 \quad \forall j.$$

Доказательство использует индукцию по n и следующую конструкцию, связывающую группы $H^*(L_H^{2n-1})$ и $H^*(L_H^{2n+1})$. Обозначим временно через L алгебру Ли, полученную из L_H^{2n+1} добавлением соотношения $e_n = 0$. Легко видеть, что $L = L_H^{2n-1} \oplus \mathbb{R}e_{-n}$, где $\mathbb{R}e_{-n}$ — одномерная алгебра Ли с образующей e_{-n} . Когомологии алгебры Ли L выражаются через $H^*(L_H^{2n-1})$ по формуле Кюннета. Связь групп $H^*(L)$ и $H^*(L_H^{2n+1})$ устанавливается с помощью длинной точной последовательности Диксмье (частный случай спектральной последовательности Хохшильда — Серра) для идеала L коразмерности 1 алгебры Ли L_H^{2n+1} :

$$\dots \rightarrow H^{k-1}(L) \rightarrow H^k(L_H^{2n+1}) \rightarrow H^k(L) \rightarrow H^k(L) \rightarrow H^{k+1}(L_H^{2n+1}) \rightarrow \dots$$

(подробности построения этой точной последовательности см. в [17]).

Задолго до [1] была опубликована работа [18], в которой были вычислены когомологии нильрадикалов алгебр Ли. Этот подход был использован в недавней работе [2], где алгебра Ли L_H^{2n+1} была реализована как нильрадикал некоторой параболической подалгебры в $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$.

Когомологии алгебры Ли L_H^{2n+1} , заданной над полем $\mathbb{k}$ конечной характеристики, были вычислены в [3] и [4]. Приведем соответствующие результаты.

Теорема 4.2. (a) Для $\text{char } \mathbb{k} = 2$ полином Пуанкаре когомологий $H^*(L_H^{2n+1})$ равен (см. [3])

$$\sum_{j=0} H^j(L_H^{2n+1}) t^j = \frac{(1+t^3)(1+t)^{2n} + (t+t^2)(2t)^n}{1+t^2}.$$

(b) Для $\text{char } \mathbb{k} \geq 2$ и $j \leq n$ имеет место равенство (см. [4])

$$\dim H^m(L_H^{2n+1}) = \binom{2n}{m} - \binom{2n}{m-2} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m+1}{2p} \rfloor} \binom{2n+1}{m-2jp+1} - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2p} \rfloor} \binom{2n+1}{m-2jp-1}.$$

Замечание 4.1. Пункт (b) включает (a) как частный случай. Кроме того, теорема 4.1 вытекает из теоремы 4.2, (b) — для этого нужно рассмотреть достаточно большое p .

В [15] была разработана оригинальная техника вычисления когомологий расширений групп, которая, как указано в [15], позволяет явным образом выяснить, как именно последовательные факторы фильтрации заданной спектральной последовательностью расширения определяют группы (ко)гомологий. Эта техника позволила в [15] для групп Γ_H^{2n+1} выписать в явном виде коциклы, представляющие классы когомологий и тем самым получить еще одно доказательство теоремы 4.1.

Задача вычисления целочисленных когомологий решетки Γ_H^{2n+1} , т.е. целочисленных когомологий пространства $M_H^{2n+1} = \mathcal{H}^{2n+1}/\Gamma_H^{2n+1}$ была решена в [7]. В этой работе показано, что в целочисленных когомологиях M_H^{2n+1} имеется большая подгруппа элементов конечного порядка. Отметим, что в [7] вычислены только группы $H^*(\Gamma_H^{2n+1}, \mathbb{Z})$, а мультипликативная структура не обсуждается.

Как отмечено выше, группа $\mathcal{H}^{2n+1}$ содержит решетки, не эквивалентные решетке Γ_H^{2n+1} , но тем не менее согласно теореме Номидзу вещественные когомологии соответствующих нильмногообразий изоморфны когомологиям многообразия M_H^{2n+1} . Подчеркнем, что на целочисленные когомологии теорема Номидзу не распространяется.

Теорема 4.3 ([7]). Группа $H^k(\Gamma_H^{2n+1}, \mathbb{Z})$ изоморфна

- $\mathbb{Z}^{\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-2}} \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{\lfloor k/2 \rfloor} (\mathbb{Z}/j)^{\binom{2n}{k-2j} - \binom{2n}{k-2j-2}} \right)$ при $0 \leq k \leq n$,
- $\mathbb{Z}^{\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}} \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (\mathbb{Z}/j)^{\binom{2n}{n+1-2j} - \binom{2n}{n+1-2j-2}} \right)$ при $k = n+1$,
- $\mathbb{Z}^{\binom{2n}{k-1} - \binom{2n}{k+1}} \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{\lfloor (2n-k+2)/2 \rfloor} (\mathbb{Z}/j)^{\binom{2n}{k+2j-2} - \binom{2n}{k+2j}} \right)$ при $n+2 \leq k \leq 2n+1$,
- 0 при $k \geq 2n+2$.

4.2. Кольца когомологий. Мультипликативная структура когомологий $H^*(M_H^{2n+1}, R)$, где R — коммутативное кольцо с единицей, достаточно сложна даже в случае вещественных коэффициентов $R = \mathbb{R}$. Длинная точная последовательность Гизина

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^{k-2}(T^{2n}, R) \xrightarrow{\Omega \wedge^-} H^k(T^{2n}, R) \xrightarrow{\pi^*} H^k(M_H^{2n+1}, R) \\ \xrightarrow{\pi_*} H^{k-1}(T^{2n}, R) \xrightarrow{\Omega \wedge^-} H^{k+1}(T^{2n}, R) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad (4.2)$$

расслоения $S^1 \rightarrow M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2n}$ распадается в короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} \Omega \xrightarrow{\pi^*} H^k(M_H^{2n+1}, R) \xrightarrow{\pi_*} \ker \Omega \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Отметим важное обстоятельство: рассматриваемые группы когомологий несут естественную структуру модулей над алгеброй $H^*(T^{2n}, R)$, причем точные последовательности (4.2) и (4.3) являются точными последовательностями $H^*(T^{2n}, R)$ -модулей — это дает частичную информацию о структуре умножения в кольце $H^*(M_H^{2n+1}, R)$. Имеет место следующий важный факт.

Теорема 4.4 ([16]). Пусть $S^m \rightarrow X \xrightarrow{\pi} T$ — ориентируемое сферическое расслоение над тором, и пусть $\Omega \in H^{m+1}(T, \mathbb{Z})$ — его характеристический класс. Тогда для любого k точная последовательность

$$0 \rightarrow \operatorname{coker} \Omega \xrightarrow{\pi^*} H^k(X, \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_*} \ker \Omega \rightarrow 0$$

расщепляется как последовательность $H^*(T, \mathbb{Z})$ -модулей.

Для целочисленных коэффициентов это утверждение достаточно нетривиально, оно требует анализа когомологического препятствия к расщеплению короткой точной последовательности и доказательства того, что это препятствие равно 0.

С другой стороны, для вещественных коэффициентов это утверждение легко выводится с использованием представления алгебры $\mathfrak{sl}_2$ в когомологиях тора T^{2n} , заданного симплектической структурой $d\omega_0 = \Omega = \sum_{k=1}^n \omega_{-k} \wedge \omega_k$ (подробности см. в п. 4.2.1 ниже).

Сопоставление матрице (2.1) матрицы того же вида, но с $z = 0$ задает отображение $\pi : M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2n}$, которое является локально тривиальным расслоением со слоем S^1 (см. п. 2.2.1). Используя теорему Номидзу, получаем, что это отображение индуцирует морфизм комплексов Шевалле — Эйленберга

$$\pi^* : (\Lambda(\omega_{\pm k} : 1 \leq k \leq n), d_{CE} = 0) \rightarrow (\Lambda(\omega_0, \omega_{\pm k} : 1 \leq k \leq n), d_{CE}),$$

причем значения d_{CE} на всех образующих нулевые, исключая $d_{CE}(\omega_0) = \sum_{k=1}^n \omega_{-k} \wedge \omega_k$.

Второй член когомологической спектральной последовательности расслоения $\pi : M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2n}$ с коэффициентами в кольце R имеет очень простой вид

$$E_2^{pq} = H^p(T^{2n}, H^q(S^1, R)).$$

Для $R = \mathbb{R}$ эта спектральная последовательность совпадает со спектральной последовательностью Хохшильда — Серра одномерного идеала, порожденного элементом e_0 , в алгебре Ли L_H^{2n+1} . Подход к вычислению $H^*(M_H^{2n+1}, R)$, основанный на расслоении $\pi : M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2n}$, удобнее подхода, основанного на теореме Номидзу, тем, что позволяет рассматривать произвольные коэффициенты.

По соображениям размерности и мультипликативности вся структура спектральной последовательности определяется единственным дифференциалом

$$d_2 : H^1(S^1, R) = E_2^{0,1} \rightarrow E_2^{0,2} = H^2(T^{2n}, R),$$

его значение на образующей $\omega_0 \in H^1(S^1, R)$ обозначим Ω . Легко видеть, что

$$\Omega = d_{CE}\omega_0 = \sum_{k=1}^n \omega_{-k} \wedge \omega_k, \quad (4.4)$$

где мы одним и тем же символом обозначаем класс когомологий и представляющую его коцепь в случаях, когда это не вызовет путаницы. Теперь воспользуемся отождествлением

$$\alpha : E_2^{p,0} \rightarrow E_2^{p,1}, \quad \alpha : \theta \mapsto \omega_0 \wedge \theta.$$

Композиция $d_2 \circ \alpha^{-1} : H^p(T^{2n}, R) \rightarrow H^{p+2}(T^{2n}, R)$ задается простой формулой $\theta \mapsto \Omega \wedge \theta$. Значит $E_\infty^{*,0} = E_3^{*,0}$ является фактором $H^*(T^{2n})$ по идеалу, порожденному Ω , а $E_\infty^{*,1} = E_3^{*,1}$ является аннулятором Ω , т.е. состоит из таких классов $\theta \in H^*(T^{2n})$, для которых $\Omega \wedge \theta = 0$. Для простоты будем обозначать операцию умножения на Ω этим же символом. Тогда задача вычисления спектральной последовательности сводится к вычислению $\ker \Omega = \text{Ann } \Omega$ и $\text{coker } \Omega$.

В случае $R = \mathbb{R}$ имеется красивая теория, которая позволяет описать группы $\ker \Omega$ и $\text{coker } \Omega$ с точки зрения теории представлений алгебры $\mathfrak{sl}_2$ на внешней алгебре симплектического пространства. Этот подход был реализован в [5, 6]. Наше изложение геометрии внешней алгебры симплектического векторного пространства следует первому разделу обзора [19] (см. также книгу [20]; там же читатель найдет доказательства, которые мы не приводим). Разумеется, речь идет о классических результатах теории комплексных многообразий (см. [21]). Затем мы вернемся к обсуждению кольца когомологий де Рама $H^*(M_H^{2n+1})$.

4.2.1. Представление $\mathfrak{sl}_2$ на $\Lambda(\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n})$. Пусть V — вещественная $2n$ -мерная коммутативная алгебра Ли. Рассмотрим в V базис вида $e_{\pm 1}, \dots, e_{\pm n}$. Элементы двойственного базиса пространства V^* обозначим через $\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n}$. Дифференциал Шевалле — Эйленберга на внешней алгебре ΛV^* в этом случае нулевой, поэтому алгебра ΛV^* изоморфна алгебре когомологий $H^*(T^{2n})$ тора T^{2n} . Форма $\Omega = \sum_{k=1}^n \omega_{-k} \wedge \omega_k$ задает на V симплектическую структуру.

Определим оператор $E^- : \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^{k+2} V^*$ по формуле $E^-(\theta) = \Omega \wedge \theta$. С помощью бивектора $X_\Omega = \sum_{k=1}^n e_{-k} \wedge e_k \in \Lambda^2 V$ зададим оператор $E^+ : \Lambda^k V^* \rightarrow \Lambda^{k-2} V^*$ по формуле $E^+(\theta) = X_\Omega \lrcorner \theta$, где $X_\Omega \lrcorner \theta$ — внутреннее произведение формы θ с бивектором X_Ω . Наконец, рассмотрим оператор $H = [E^+, E^-]$.

Утверждение 4.1. *Имеют место соотношения*

$$[H, E^+] = 2E^+, \quad [H, E^-] = -2E^-. \quad (4.5)$$

Соотношения (4.5) вместе с определением $H = [E^+, E^-]$ показывают, что выбор симплектической структуры Ω на V задает на внешней алгебре ΛV^* представление алгебры $\mathfrak{sl}_2$. Напомним, что в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2$ имеется стандартный базис H, E^+, E^- с коммутационными соотношениями $[E^+, E^-] = H$, $[H, E^+] = 2E^+$, $[H, E^-] = -2E^-$.

Все конечномерные $\mathfrak{sl}_2$ -представления разлагаются в прямую сумму неприводимых. Каждое конечномерное неприводимое $\mathfrak{sl}_2$ -представление определяется своей размерностью. Таким образом, имеется по одному такому представлению в каждой размерности. Эти представления легко описать явно (см., например, [22], где нормировка базисных векторов отличается от нашей). Пусть W_m — векторное пространство с базисом $v_0, v_1, \dots, v_m$. Положим

$$\begin{aligned} H(v_k) &= (m - 2k)v_k, \\ E^-(v_k) &= v_{k+1}, \quad k < m, \quad E^-(v_m) = 0, \\ E^+(v_k) &= k(m - k + 1)v_{k-1}, \quad k > 0, \quad E^+(v_0) = 0. \end{aligned}$$

Легко проверяется, что такие формулы задают $(m + 1)$ -мерное неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ в пространстве W_m .

Итак, внешняя алгебра ΛV^* разлагается в прямую сумму неприводимых $\mathfrak{sl}_2$ -представлений. Описание пространства ΛV^* как прямой суммы неприводимых $\mathfrak{sl}_2$ -представлений опирается на следующие факты о действии операторов $E^\pm$ и H в ΛV^* .

Утверждение 4.2. *Пусть $\theta \in \Lambda^s V^*$. Тогда $H\theta = (n - s)\theta$.*

Утверждение 4.3. *Отображение $E^+ : \Lambda^s(V^*) \rightarrow \Lambda^{s-2}(V^*)$ является мономорфизмом при $s \geq n + 1$. Отображение $E^- : \Lambda^s(V^*) \rightarrow \Lambda^{s+2}(V^*)$ является мономорфизмом при $s \leq n - 1$.*

Внешняя форма $\theta \in \Lambda^s V^*$, где $s \leq n$, называется *примитивной*, если $E^+(\theta) = 0$. Из этого определения легко выводится следующее утверждение о разложении Ходжа (также его называют разложением Ходжа — Лепажа).

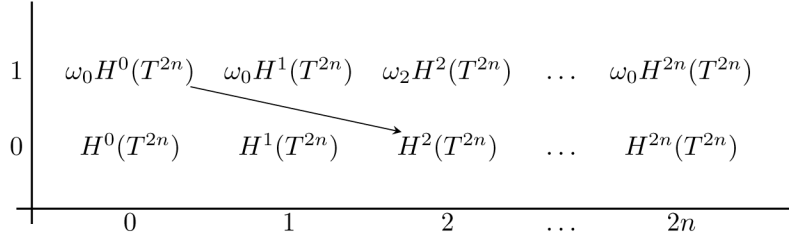
Теорема 4.5. Для любой формы $\theta \in \Lambda^s(V^*)$ имеет место разложение

$$\theta = \theta_0 + E^-(\theta_1) + (E^-)^2(\theta_2) + \dots = \theta_0 + \Omega \wedge \theta_1 + \Omega \wedge \Omega \wedge \theta_2 + \dots,$$

где $\theta_j \in \Lambda^{s-2j}(V^*)$ — однозначно определенные примитивные формы.

Утверждение 4.4. Отображения $(E^+)^s : \Lambda^{n+s}V^* \rightarrow \Lambda^{n-s}V^*$ и $(E^-)^s : \Lambda^{n-s}V^* \rightarrow \Lambda^{n+s}V^*$ являются изоморфизмами, причем для любой примитивной формы $\theta \in \Lambda^{n-s}$ выполнено равенство $(E^+)^s \circ (E^-)^s(\theta) = (s!)^2\theta$.

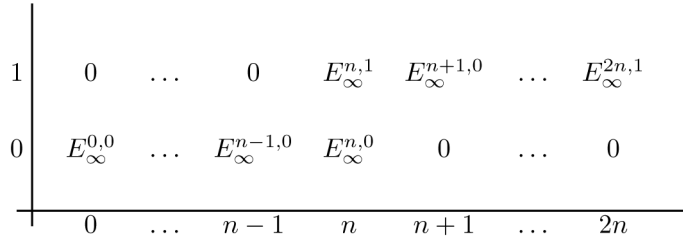
Вернемся к обсуждению спектральной последовательности расслоения $\pi : M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2n}$. Второй член этой спектральной последовательности (с коэффициентами в $\mathbb{R}$) имеет вид



Дифференциал d_2 , показанный на диаграмме стрелкой, действует по формуле

$$d_2(\omega_0) = \sum_{k=0}^n \omega_{-k} \wedge \omega_k.$$

На других группах $E_2^{*,1}$ дифференциал d_2 определен по мультипликативности. По утверждению 4.3 дифференциал $d_2 : E_2^{1,s} \rightarrow E_2^{0,s+2}$ является мономорфизмом при $s \leq n-1$, значит $E_3^{1,s} = 0$ при $s \leq n-1$ и $E_3^{0,s} = (\text{соker } E^-)^s$ при $s \leq n$. По утверждению 4.4 дифференциал $d_2 : E_2^{1,s} \rightarrow E_2^{0,s+2}$ является эпиморфизмом при $s \geq n-1$. Значит $E_3^{0,s} = 0$ при $s \geq n+1$ и $E_3^{1,s} = (\ker E^-)^s$ при $s \geq n$. Таким образом, $E_3^{*,*} = E_\infty^{*,*}$ имеет следующую структуру:



Итак, мы доказали аналог теоремы 4.4 для когомологий с вещественными коэффициентами. Сформулируем этот результат.

Теорема 4.6. (а) $A = \bigoplus_{j=0}^n H^j(M_H^{2n+1})$ является подкольцом в $H^*(M_H^{2n+1})$, изоморфным фактор-кольцу внешней алгебры $\Lambda^*(\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n}) = H^*(T^{2n})$ по идеалу, порожденному Ω . Иными словами, $A = \text{соker } \Omega$ как кольцо со структурой $H^*(T^{2n})$ -модуля.

(б) $B = \bigoplus_{j=n+1}^{2n+1} H^j(M_H^{2n+1})$ состоит в точности из тех классов $\omega_0 \Lambda^*(\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n})$, которые лежат в ядре умножения на Ω . Иными словами, $B = \text{соker } \Omega$ как группа со структурой $H^*(T^{2n})$ -модуля. Произведение любых двух элементов из B равно 0 по соображениям размерности.

(с) Произведение ab , где $a \in A$ и $b \in B$, принадлежит B и задает представление кольца A на модуле B . Таким образом, $H^*(M_H^{2n+1})$ получается расширением кольца A по действию A на B .

(d) Расщепление $H^*(M_H^{2n+1}) = A \oplus B$ является расщеплением в прямую сумму $H^*(T^{2n})$ -модулей.

Следствие 4.1. (i) Как $H^*(T^{2n})$ -модуль когомологии, $H^*(M_H^{2n+1})$ порождены $1 \in H^0(M_H^{2n+1})$ и образующими группы $H^{n+1}(M_H^{2n+1})$.

(ii) Как кольцо когомологии, $H^*(M_H^{2n+1})$ порождены образующими $\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n}$ группы $H^1(M_H^{2n+1})$ и образующими группы $H^{n+1}(M_H^{2n+1})$.

5. Когомологические характеристики нильмногообразий

Хорошо известны следующие характеристики.

Категория Люстерника — Шнирельмана $\text{cat } X$ топологического пространства X — это наименьшее целое n , для которого существует покрытие пространства X открытыми множествами $U_0, \dots, U_n$, стягиваемыми в X .

Когомологическая длина (над $\mathbb{Q}$) пространства X — это наибольшее число k такое, что существуют классы когомологий $x_i \in H^{n_i}(X; \mathbb{Q})$, $n_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, для которых произведение $x_1 x_2 \dots x_k$ отлично от 0; эта характеристика обозначается $\text{сирр}_{\mathbb{Q}} X$.

Известно, что $\text{cat } M \geq \text{сирр}_{\mathbb{Q}} M$ для любого ориентированного многообразия M (см., например, [23]). Отметим, что если M — ориентируемое многообразие размерности n , то $\text{cat } M \leq n$.

В знаменитой короткой работе [24] было сформулировано утверждение, что категория Люстерника — Шнирельмана произвольного нильмногообразия равна его размерности. Полное доказательство было опубликовано в [25].

Утверждение 5.1. Для многообразия M_H^{2n+1}

- (a) Bss -глубина равна 2,
- (b) категория Люстерника — Шнирельмана равна $2n + 1$,
- (c) когомологическая длина равна $n + 1$.

Утверждение (a) следует из того, что $\gamma_2(L_H^{2n+1}) = 0$, и нетривиальности второго дифференциала в Bss для L_H^{2n+1} (см. [12]). Утверждение (b) доказано в [25].

Для доказательства (c) заметим, что ненулевое произведение $n + 1$ класса существует. Можно рассмотреть класс когомологий $\omega_0 \omega_1 \dots \omega_n \in H^{n+1}(M_H^{2n+1})$ и классы когомологий $\omega_{-1}, \dots, \omega_{-n} \in H^1(M_H^{2n+1})$. Произведение этих классов с точностью до знака совпадает с образующей группы $H^{2n+1}(M_H^{2n+1})$. С другой стороны, произведение любых $n + 2$ классов равно 0. По соображениям размерности среди перемножаемых классов имеется самое большее один класс размерности не меньше $n + 1$. Тогда оставшиеся $n + 1$ сомножителей лежат в A и их произведение равно 0, так как A не содержит элементов степени выше n .

6. Расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга

Сделаем небольшое отступление. Предположим, что некоторый коцепной комплекс $(C^\bullet, d)$ расщепляется в прямую сумму подкомплексов $C^\bullet = \bigoplus_{\alpha} C_{\alpha}^\bullet$. Тогда наряду с эйлеровой характеристикой

$$\chi = \sum_i (-1)^i \dim C^i = \sum_i (-1)^i \dim H^i(C^\bullet, d)$$

можно рассматривать набор эйлеровых характеристик

$$\chi_{\alpha} = \sum_i (-1)^i \dim C_{\alpha}^i = \sum_i (-1)^i \dim H^i(C_{\alpha}^\bullet, d).$$

Ясно, что $\chi = \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}$.

Особенно интересна ситуация, когда комплекс $(C^\bullet, d)$ является дифференциальной градуированной алгеброй, снабженной дополнительной градуировкой, инвариантной относительно d :

$$C^i = \bigoplus_j C^{i,j}, \quad d : C^{i,j} \rightarrow C^{i+1,j}, \quad C^{i_1,j_1} \cdot C^{i_2,j_2} \subset C^{i_1+i_2,j_1+j_2}.$$

Удобно ввести производящие функции Пуанкаре

$$P_C(t, q) = \sum_{i,j} t^i q^j \dim C^{i,j}, \quad P_{H(C)}(t, q) = \sum_{i,j} t^i q^j \dim H^{i,j}(C^\bullet). \quad (6.1)$$

Обычные функции Пуанкаре, т.е. не учитывающие вторую градуировку, равны $P_C(t, 1)$ и $P_{H(C)}(t, 1)$ соответственно.

Эйлеровы характеристики подкомплексов вида $C^{*,j}$ являются коэффициентами при q^j в полиноме $P_C(-1, q) = P_{H(C)}(-1, q)$. Этот полином называется *полиномиальной* (см. [26]) или *градуированной* (см. [27], где в таком виде был представлен полином Джонса) *эйлеровой характеристикой* комплекса $(C^\bullet, d)$.

Комплекс Шевалле — Эйленберга алгебры Ли L_H^{2n+1} допускает по меньшей мере три различные биградуировки, каждая из которых несет дополнительную информацию о кольце когомологий.

6.1. Алгебра Гейзенберга — Ли L_H^{2n+1} с соотношениями $[\hat{e}_i, \hat{e}_{2n+1-i}] = \hat{e}_{2n+1}$. Для алгебры Гейзенберга — Ли L_H^{2n+1} известна индексация образующих, отличная от той, которую мы ввели в п. 2.1. Переобозначим элементы $e_1, \dots, e_n$ как $\hat{e}_{2n}, \dots, \hat{e}_{n+1}$, элементы $e_{-n}, \dots, e_{-1}$ — как $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$ и элемент e_0 — как $\hat{e}_{2n+1}$. Тогда коммутационные соотношения $[e_{-n}, e_n] = e_0$ примут вид $[\hat{e}_i, \hat{e}_{2n+1-i}] = \hat{e}_{2n+1}$.

Обратим внимание, что при такой индексации вложения $i_n : \mathcal{H}^{2n+1} \xrightarrow{i_k} \mathcal{H}^{2n+3}$ не удовлетворяют определению 2.2, так как образующие $\hat{e}_k$ алгебры L_H^{2n+1} переходят в образующие алгебры L_H^{2n+3} с другими индексами.

Для элементов $\hat{e}_j, j = 1, \dots, 2n+1$, обозначим двойственные к ним элементы через $\hat{\omega}_j$. Припишем элементу $\hat{\omega}_j$ биградуировку $(1, j)$. В этом случае дифференциал сохраняет вторую градуировку

$$d\hat{\omega}_{2n+1} = \sum_{j=1}^n \hat{\omega}_j \wedge \hat{\omega}_{2n+1-j}.$$

При этой биградуировке образующих алгебры Гейзенберга — Ли L_H^{2n+1} соответствующий полином Пуанкаре алгебры $\Lambda(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{2n+1})$ принимает вид

$$\tilde{P}_n(t, q) = \prod_{j=1}^{2n+1} (1 + tq^j).$$

Коэффициенты полинома Пуанкаре $\tilde{P}_n(t, q)$ имеют интересную комбинаторную интерпретацию. Положим

$$\tilde{P}_n(t, q) = \sum a(i, j, n) t^i q^j.$$

Тогда коэффициент $a(i, j, n)$ равен числу способов разложения числа j в сумму i различных слагаемых, каждое из которых не превосходит $2n+1$.

Напомним q -биномиальную формулу Коши

$$\prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j t) = \sum_{k=0}^n q^{k(k-1)/2} \binom{n}{k}_q t^k,$$

где $\binom{n}{k}_q$ — q -биномиальный коэффициент

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(1 - q^n) \dots (1 - q^{n-k+1})}{(1 - q) \dots (1 - q^k)}.$$

Тогда

$$\tilde{P}_n(t, q) = \sum_{k=0}^{2n+1} q^{k(k+1)/2} \binom{2n+1}{k}_q t^k. \quad (6.2)$$

Разложим q -биномиальный коэффициент по степеням q :

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{j=0}^{k(n-k)} p_i(n, k) q^i.$$

Последовательность коэффициентов симметрична: $p_i(n, k) = p_{(n-k)k-i}(n, k)$. В классической работе [28] методами теории инвариантов доказана унимодальность последовательности коэффициентов

$$p_0(n, k) \leq p_1(n, k) \leq \dots \leq p_{a-1}(n, k) \leq p_a(n, k) \geq p_{a+1}(n, k) \geq \dots \geq p_{k(n-k)}.$$

Удивительно, что комбинаторное доказательство этого факта было получено относительно недавно [29]. Наконец, в [30] была доказана строгая унимодальность этой последовательности коэффициентов.

Биградуированные числа Бетти когомологий алгебры L_H^{2n+1} легко описать.

Утверждение 6.1. (а) Биградуированная двойственность Пуанкаре имеет вид

$$\dim H^{i,j}(M_H^{2n+1}) = \dim H^{2n+1-i, n(n+1)/2-j}(M_H^{2n+1}). \quad (6.3)$$

(б) Полином Пуанкаре $\tilde{P}_n^H(t, q) = \sum_{i,j} \dim H^{i,j}(M_H^{2n+1}) t^i q^j$ когомологий $H^{i,j}(M_H^{2n+1})$ вплоть до степени t^n совпадает с $\prod_{j=1}^{2n} (1 + tq^j)(1 - t^2 q^{2n+1})$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 4.1.

6.2. Алгебра Гейзенберга — Ли L_H^{2n+1} с соотношениями $[e_{-i}, e_i] = e_0$. Вернемся к алгебре L_H^{2n+1} с образующими $e_{-n}, \dots, e_n$ и соотношениями $[e_{-k}, e_k] = e_0$.

Присвоим элементу e_k биградуировку $(1, k)$, так что биградуировка элемента $\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}$ равна $(k, \sum i_j)$. Легко видеть, что дифференциал d_{CE} сохраняет вторую градуировку (напомним, $\text{хпж } d_{CE}\omega_k = 0$ при $k \neq 0$ и $d_{CE}\omega_0 = \sum_{k=1}^n \omega_{-k} \wedge \omega_k$). Для такой биградуировки полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга $\Lambda(\omega_{-n}, \dots, \omega_n)$ равен полиному Лорана $P_n(t, q) = \prod_{j=-n}^n (1 + tq^j)$.

Связь полиномов Пуанкаре комплекса $\Lambda(L_H^{2n+1})^*$, снабженного двумя разными биградуировками, описывается следующим утверждением. Напомним, что

$$\tilde{P}_n(t, q) = \sum_{k=0}^{2n+1} q^{k(k+1)/2} \binom{2n+1}{k}_q t^k.$$

Утверждение 6.2. Пусть $P_n(t, q) = \sum_{k=0}^{2n+1} q^{k(k+1)/2} t^k h_k(n, q)$. Тогда

$$\binom{2n+1}{k}_q = h_k(n, q) \cdot q^{-(n+1)k}. \quad (6.4)$$

Иными словами, коэффициенты биградуированных полиномов Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга алгебры L_H^{2n+1} совпадают с точностью до сдвига размерности по q , причем для каждой степени t этот сдвиг свой.

Доказательство. Представим произведение

$$\prod_{k=1}^{2n+1} (1 + q^k t) = \sum_{k=0}^{2n+1} q^{k(k+1)/2} t^k \binom{2n+1}{k}_q$$

в виде

$$\prod_{j=1}^n (1 + q^j t) \cdot \prod_{k=1}^{n+1} (1 + q^k (q^n t)).$$

Применив к каждому из этих двух произведений формулу q -бинома (6.2), получим

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j=0}^n q^{j(j+1)/2} t^j \binom{n}{j}_q \right) \left(\sum_{i=0}^{n+1} q^{i(i+1)/2} q^{ni} t^i \binom{n+1}{i}_q \right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} t^k \sum_{i+j=k} q^{j(j+1)/2} q^{i(i+1)/2} q^{ni} \binom{n}{j}_q \binom{n+1}{i}_q. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Представим полином Лорана

$$P_n(t, q) = \prod_{k=-n}^n (1 + q^k t) = \sum_{k=0}^{2n+1} q^{k(k+1)/2} t^k h_k(n, q)$$

в виде

$$\prod_{i=0}^n (1 + q^i t) \cdot \prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j (q^{-n} t)).$$

Применив к каждому из этих двух произведений формулу q -бинома, получим

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^{n+1} q^{i(i-1)/2} t^i \binom{n+1}{i}_q \right) \left(\sum_{j=0}^n q^{j(j-1)/2} q^{-nj} t^j \binom{n}{j}_q \right) \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} t^k \sum_{i+j=k} q^{j(j-1)/2} q^{i(i-1)/2} q^{-nj} \binom{n}{j}_q \binom{n+1}{i}_q. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Легко проверить, что разность показателей, с которыми q входит формулы (6.5) и (6.6), равна $i + j + n(i + j) = (n + 1)k$, откуда следует

$$h_k(n, q) = q^{(n+1)k} \binom{2n+1}{k}_q.$$

Утверждение доказано. $\square$

Биградуированные числа Бетти для L_H^{2n+1} с выбранной в этом параграфе биградуировкой описываются следующим утверждением.

Утверждение 6.3. (а) *Биградуированная двойственность Пуанкаре имеет вид*

$$\dim H^{i,j}(M_H^{2n+1}) = \dim H^{2n+1-i,-j}(M_H^{2n+1}). \quad (6.7)$$

(б) *Полином Пуанкаре $P_n^H = \sum_{i,j} \dim H^{i,j}(M_H^{2n+1}) t^i q^j$ когомологий $H^{i,j}(M_H^{2n+1})$ вплоть до степени t^n совпадает с $\left(\prod_{j=1}^n (1 + tq^j)(1 + tq^{-j}) \right) (1 - t^2)$.*

Доказательство немедленно следует из теоремы 4.1.

6.3. Расщепление инволюцией $I : e_k \mapsto -e_{-k}$. Рассмотрим на L_H^{2n+1} инволюцию $I : e_k \mapsto -e_{-k}$, она согласована с коммутатором: для всех $k > 0$ выполнено равенство $[I(e_{-k}), I(e_k)] = I(e_0)$.

Выберем в L_H^{2n+1} другой базис (заметим, что он неоднороден по отношению к каждой из двух биградуировок, рассмотренных выше):

$$f_k = e_{-k} + e_k, \quad g_k = e_k - e_{-k}, \quad h_0 = 2e_0.$$

Ненулевыми являются только коммутаторы $[f_k, g_k] = h_0$, $k = 1, \dots, n$. Построенный базис расщепляет алгебру L_H^{2n+1} в собственные подпространства инволюции I :

$$I(f_k) = -f_k, \quad I(g_k) = g_k, \quad I(h_0) = -h_0.$$

Двойственные формы обозначим $\varphi_k, \eta_k, \theta_0$ соответственно. В комплексе Шевалле — Эйленберга

$$\Lambda(L_H^{2n+1})^* = \Lambda(\varphi_k, \eta_k, \theta_0 : k = 1, \dots, n)$$

дифференциал определяется соотношениями

$$d_{CE}\varphi_k = d_{CE}\eta_k = 0, \quad d_{CE}\theta_0 = \sum_{k=1}^n \varphi_k \wedge \eta_k.$$

Припишем образующим φ_k и θ_0 биградуировку $(1, 1)$, а образующим η_k — биградуировку $(1, 0)$, причем будем считать, что вторая градуировка принимает значение в группе $\mathbb{Z}/2$. Тогда соответствующий производящий полином для $\Lambda(\varphi_k, \eta_k, \theta_0 : k = 1, \dots, n)$ равен $\hat{P}_n(t, \alpha) = (1+t)^n(1+t\alpha)^{n+1}$. При этом для подсчета размерностей однородных по второй градуировке компонент нужно считать, что $\alpha^2 = 1$. Но для удобства можно поступить иначе: можно считать α полиномиальной переменной, а сумму коэффициентов при четных и нечетных степенях α находить соответственно по формулам

$$\hat{P}_n^{\text{even}}(t) = \frac{1}{2}(\hat{P}_n(t, 1) + \hat{P}_n(t, -1)), \quad \hat{P}_n^{\text{odd}}(t) = \frac{1}{2}(\hat{P}_n(t, 1) - \hat{P}_n(t, -1)).$$

Утверждение 6.4. (а) Биградуированная двойственность Пуанкаре имеет вид

$$\dim H^{i, \text{even}}(M_H^{2n+1}) = \dim H^{2n+1-i, \text{odd}}(M_H^{2n+1}),$$

$$\dim H^{i, \text{odd}}(M_H^{2n+1}) = \dim H^{2n+1-i, \text{even}}(M_H^{2n+1}).$$

(б) Полином Пуанкаре $\hat{P}_n^H(t, \alpha) = \sum_{i,j} \dim H^{i,j}(M_H^{2n+1}) t^i \alpha^j$ когомологий $H^{i,j}(M_H^{2n+1})$ вплоть до степени t^n совпадает с $(1+t)^n(1+t\alpha)^n(1-t^2\alpha)$.

Доказательство немедленно следует из теоремы 4.1.

Числа Бетти $b_k(M_H^{2n+1})$ разлагаются в сумму

$$b_k(M_H^{2n+1}) = b_k^{\text{even}}(M_H^{2n+1}) + b_k^{\text{odd}}(M_H^{2n+1}). \quad (6.8)$$

Производящие полиномы четных и нечетных частей, т.е.

$$P_{H^*(M_H^{2n+1})}^{\text{even}}(t) = \sum_{j=0}^{2n+1} b_k^{\text{even}}(M_H^{2n+1}) t^j,$$

$$P_{H^*(M_H^{2n+1})}^{\text{odd}}(t) = \sum_{j=0}^{2n+1} b_k^{\text{odd}}(M_H^{2n+1}) t^j$$

вплоть до степени n совпадают, соответственно, с

$$A^{\text{even}} = \frac{1}{2}((1+t)^n(1+t)^n(1-t^2) + (1+t)^n(1-t)^n(1+t^2)), \quad (6.9)$$

$$A^{\text{odd}} = \frac{1}{2}((1+t)^n(1+t)^n(1-t^2) - (1+t)^n(1-t)^n(1+t^2)). \quad (6.10)$$

Теорема 6.1. (а) Для $2k+1 \leq n$ имеет место равенство $b_{2k+1}^{\text{even}} = b_{2k+1}^{\text{odd}}$.

(б) Для $2k \geq n+1$ имеет место равенство $b_{2k}^{\text{even}} = b_{2k}^{\text{odd}}$.

Доказательство. Для доказательства (а) достаточно показать, что коэффициенты при нечетных степенях t в полиномах (6.9) и (6.10) равны. Для этого рассмотрим разность этих полиномов и убедимся, что она является четной функцией:

$$A^{\text{even}} - A^{\text{odd}} = (1+t)^n(1-t)^n(1+t^2) = (1-t^2)^n(1+t^2).$$

Пункт (б) следует из (а) по двойственности Пуанкаре из утверждения 6.4. □

6.4. Замечания. Подсказанная соображениями симметрии инволюция I не согласована ни с одной из рассмотренных нами биградуировок. Отметим, что I не является единственно возможной инволюцией, расщепляющей комплекс Шевалле — Эйленберга. Например, интересна любая инволюция J , которая меняет знак e_0 , а также в каждой паре $e_{\pm k}$ меняет знак в точности у одного из элементов. Дадим формальное определение. Зафиксируем набор знаков $\varepsilon = \{\varepsilon_j = \pm 1 : j = 1, \dots, n\}$. Положим $J_\varepsilon(e_0) = -e_0$, $J_\varepsilon(e_k) = \varepsilon_k e_k$ для $k > 0$, $J_\varepsilon(e_k) = -\varepsilon_k e_k$ при $k < 0$.

Инволюция J_ε согласована с коммутатором, $[J_\varepsilon(e_{-k}), J_\varepsilon(e_k)] = J_\varepsilon(e_0)$, и поэтому определяет инволюцию на $\Lambda(\omega_{-n}, \dots, \omega_n)$:

$$J_\varepsilon(\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}) = J_\varepsilon(\omega_{i_1}) \wedge \dots \wedge J_\varepsilon(\omega_{i_k}).$$

Таким образом, мономы $\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}$ помимо второй градуировки $\sum i_j$ получают третью градуировку со значениями в $\mathbb{Z}/2$, которая равна $|\{j = 1, \dots, k \mid \varepsilon_{i_j} \leq 0\}| \bmod 2$.

Тем самым комплекс Шевалле — Эйленберга $\Lambda^*(\omega_{-n}, \dots, \omega_n)$ расщепляется в прямую сумму подкомплексов

$$\Lambda^*(\omega_{-n}, \dots, \omega_n) = \bigoplus_w (\Lambda^{*,w,\text{even}}(L_H^{2n+1}) \oplus \Lambda^{*,w,\text{odd}}(L_H^{2n+1})),$$

а значит имеет место соответствующее расщепление когомологий, в частности, биградуированные числа Бетти $b_k(q)$ расщепляются в сумму $b_k(q) = b_k^{\text{even}}(q) + b_k^{\text{odd}}(q)$, причем при подстановке $q = 1$ получается формула (6.8).

Расщепление комплекса Шевалле — Эйленберга некоторыми из инволюций J_ε по всей видимости должно иметь интересную комбинаторную интерпретацию. Напомним, что полином Пуанкаре биградуированной внешней алгебры $\Lambda(\omega_{-n}, \dots, \omega_n)$ равен

$$\sum_{i,j} t^i q^j \dim \Lambda^{i,j}(\omega_{-n}, \dots, \omega_n) = \sum_{t=0}^{2n+1} t^k q^{k(k+1)/2} q^{-(n+1)k} \binom{n}{k}_q. \quad (6.11)$$

Расщепление внешней алгебры инволюцией J_ε приводит к расщеплению коэффициентов в формуле (6.11)

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{k}_q^{\text{even}} + \binom{n}{k}_q^{\text{odd}},$$

которое зависит от выбора J_ε . Тем самым возникает следующая задача: Найти инволюции J_ε , которые допускают интересные комбинаторные интерпретации слагаемых $\binom{n}{k}_q^{\text{even}}$ и $\binom{n}{k}_q^{\text{odd}}$, а также инволюции, которые имеют интерпретацию с точки зрения топологии.

Заканчивая этот параграф, отметим, что имеется еще одно семейство инволюций, не согласованных, вообще говоря, ни с одной из рассмотренных вторых градуировок на L_H^{2n+1} . Такая инволюция меняет знак у e_0 , а в каждой паре e_{-k}, e_k либо меняет знак у одной из образующих, либо переводит одну в другую и наоборот (меняет знак у индекса образующих: $e_{\pm k} \rightarrow e_{\mp k}$ или $e_{\pm k} \rightarrow -e_{\mp k}$).

7. Спектральные последовательности расслоений многообразий Гейзенберга

В § 4 получены результаты о структуре кольца когомологий многообразий Гейзенберга M_H^{2n+1} как модулей над кольцом $H^*(T^{2n})$. В этом параграфе мы получим геометрическую интерпретацию этих результатов в терминах спектральных последовательностей расслоений (см. п. 2.2) и опишем отображения этих спектральных последовательностей.

В п. 7.1 мы используем тот факт, что вложение $M_H^{2n-1} \subset M_H^{2n+1}$ включается в коммутативную диаграмму расслоений со слоем S^1

$$\begin{array}{ccc} M_H^{2n-1} & \xrightarrow{i} & M_H^{2n+1} \\ \downarrow \pi_{n-1,0} & & \downarrow \pi_{n,0} \\ T^{2n-2} & \xrightarrow{i} & T^{2n} \end{array}$$

В п. 7.2 для описания вложений $M_H^{2n+1} \subset M_H^{2n+1} \subset M_H^{2n+3}$ мы используем коммутативные диаграммы расслоений со слоем M_H^{2n-1}

$$\begin{array}{ccc} M_H^{2n+1} & \xrightarrow{i} & M_H^{2n+3} \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_1 \\ T^2 & \xrightarrow{i} & T^4 \end{array}$$

7.1. Расслоение $M_H^{2n+1} \rightarrow T^2$ со слоем M_H^{2n-1} . Напомним, что это расслоение гомологически простое, поэтому его второй член описывается диаграммой

$$\begin{array}{cccc} 2n-1 & H^{2n-1} & \omega_{-n}H^{2n-1} \oplus \omega_n H^{2n-1} & \omega_{-n} \wedge \omega_n H^{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & H^n & \omega_{-n}H^n \oplus \omega_n H^n & \omega_{-n} \wedge \omega_n H^n \\ n-1 & H^{n-1} & \omega_{-n}H^{n-1} \oplus \omega_n H^{n-1} & \omega_{-n} \wedge \omega_n H^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & H^0 & \omega_{-n}H^0 \oplus \omega_n H^0 & \omega_{-n} \wedge \omega_n H^0 \end{array}$$

0 1 2

Для краткости группа $H^s(M_H^{2n-1})$ обозначена через H^s . Одномерные образующие в когомологиях тора T^2 обозначены через $\omega_{\pm n}$. Как и выше, мы снова обозначаем одним символом как класс когомологий, так и представляющую его форму или коцикл.

Утверждение 7.1. В спектральной последовательности расслоения $M_H^{2n+1} \rightarrow T^2$ все дифференциалы нулевые, исключая $d_2 : E_2^{0,n} \rightarrow E_2^{2,n-1}$ (обозначен на диаграмме стрелкой), который является изоморфизмом.

Следствие 7.1. Полиномы Пуанкаре $P_n(t)$ и $P_{n-1}(t)$ многообразий M_H^{2n+1} и M_H^{2n-1} связаны рекуррентным соотношением

$$P_n(t) = (1+t)^2 P_{n-1}(t) - \left(\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n-3} \right) (1+t) t^n. \quad (7.1)$$

Доказательство. Положим $b_k = \dim H^k(L_H^{2n-1})$ и $\hat{b}_k = \dim H^k(L_H^{2n+1})$. В силу двойственности Пуанкаре достаточно сравнить коэффициенты при t^k в (7.1) при $0 \leq k \leq n$.

Для $k = 0$ или $k = 1$ это совсем просто: $\hat{b}_0 = b_0 = 1$, $\hat{b}_1 = b_1 + 2 = 2n$.

Для $2 \leq k \leq n-1$ нужно проверить равенство $\hat{b}_k = b_k + 2b_{k-1} + b_{k-2}$. Для этого запишем числа Бетти как разность двух биномиальных коэффициентов по теореме 4.1 и несколько раз воспользуемся формулой $\binom{N}{p} + \binom{N}{p-1} = \binom{N+1}{p}$. Следовательно, все дифференциалы d_2 , расположенные ниже показанного на диаграмме, нулевые. По двойственности Пуанкаре нулевыми являются также дифференциалы d_2 , расположенные выше показанного на диаграмме.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что $\hat{b}_n$ не равно $b_n + 2b_{n-1} + b_{n-2} = 3b_{n-1} + b_{n-2}$. Это означает, что в рассматриваемой спектральной последовательности дифференциал $d_2 : E_2^{0,n+1} \rightarrow$

$E_2^{2,n}$ нетривиален. Покажем, что в действительности он является изоморфизмом. Для этого заметим, что $\widehat{b}_n = 2b_{n-1} + b_{n-2}$. Нетрудно проверить, что это равенство равносильно тождеству

$$\binom{2n}{n-2} + \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-2}{n-1} = \binom{2n}{n} + \binom{2n-1}{n-3} + \binom{2n-2}{n-3}.$$

Поэтому группы $E_3^{0,n+2}$ и $E_3^{2,n+1}$ нулевые, т.е. $d_2 : E_2^{0,n+2} \rightarrow E_2^{2,n+1}$ является изоморфизмом.

Полином Пуанкаре $\bigoplus_{p+q=n} E_2^{p,q}$ равен $(1+t)^2 P_{n-1}(t)$. При переходе к E_3 нужно учесть единственный нетривиальный дифференциал, т.е. от полученного выражения нужно отнять $b_{n-1}(1+t)t^n$. Поскольку $E_3 = E_\infty$, на этом доказательство формулы (7.1) закончено. $\square$

7.2. Расслоение $M_H^{2n+1} \rightarrow S^1$ со слоем $M_H^{2n-1} \times S^1$. Рассмотрим расслоение $M_H^{2n+1} \rightarrow S^1$ со слоем $M_H^{2n-1} \times S^1$, построенное в п. 2.2.2. Первый член этой спектральной последовательности имеет вид

$2n$	$C^0(S^1, (\omega_{-n} H^{2n-1})^{tw})$	$C^1(S^1, (\omega_{-n} H^{2n-1})^{tw})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n+1$	$C^0(S^1, (H^{n+1} \oplus \omega_{-n} H^n)^{tw})$	$C^1(S^1, (H^{n+1} \oplus \omega_{-n} H^n)^{tw})$
n	$C^0(S^1, (H^n \oplus \omega_{-n} H^{n-1})^{tw})$	$C^1(S^1, (H^n \oplus \omega_{-n} H^{n-1})^{tw})$
$n-1$	$C^0(S^1, (H^{n-1} \oplus \omega_{-n} H^{n-2})^{tw})$	$C^1(S^1, (H^{n-1} \oplus \omega_{-n} H^{n-2})^{tw})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$C^0(S^1, (H^0)^{tw})$	$C^1(S^1, (H^0)^{tw})$
	0	1

Здесь для краткости через H^s обозначена группа $H^s(M_H^{2n-1})$. Напомним, что ω_{-n} — одномерная образующая в когомологиях S^1 в слое, а ω_n — одномерная образующая в когомологиях базы S^1 . Мы рассматриваем клеточное разбиение окружности, имеющее по одной клетке в размерностях 0 и 1. Через $(H^s \oplus \omega_{-n} H^{s-1})^{tw}$ обозначена локальная система коэффициентов на этом разбиении. На уровне коцепей, т.е. на уровне $\Lambda(M_H^{2n-1} \times S^1)$ она определяется тем, что при обходе по окружности в базе к элементам внешней алгебры от образующих $\omega_0, \omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n}$ применяется автоморфизм T , индуцированный соответствием $\omega_0 \mapsto \omega_0 + \omega_{-n}$. Автоморфизм в когомологиях, индуцированный T , будем обозначать тем же символом.

Из этого описания следует, что при $s \leq n-1$ автоморфизм T в когомологиях $H^s \oplus \omega_{-n} H^{s-1}$ тривиален, так как в этих размерностях представляющая класс когомологий дифференциальная форма не содержит ω_0 , тем самым локальная система коэффициентов $(H^s \oplus \omega_{-n} H^{s-1})^{tw}$ является постоянной, а значит $E_2^{p,q} = H^p(S^1, H^q \oplus \omega_{-n} H^{q-1})$. Следовательно, $\dim E_2^{p,q} = \dim H^q + \dim H^{q-1}$. Это равенство соответствует формуле

$$\binom{2n}{q} - \binom{2n}{q-2} = \dim H^q(M^{2n+1}) = \dim E_2^{0,q} + \dim E_2^{1,q-1}.$$

При $s \geq n+1$ локальная система коэффициентов тоже тривиальна. Действительно, форма, представляющая класс из $H^s \oplus \omega_{-n} H^{s-1}$ при $s \geq n+1$, записывается в виде $\omega_0 A + \omega_{-n} \omega_0 B$. Под

действием T она переходит в форму

$$(\omega_0 + \omega_{-n})A + \omega_{-n}(\omega_0 + \omega_{-n})B = (\omega_0 A + \omega_{-n}\omega_0 B) + \omega_{-n}A,$$

которая представляет тот же класс, так как в размерностях выше $n+1$ формы, не содержащие ω_0 , являются кограницами.

При $s = n$ рассматриваемая локальная система коэффициентов нетривиальна. Действительно, автоморфизм T группы $H^n \oplus \omega_{-n}H^{n-1}$ отображает класс $\omega_0 A + \omega_{-n}B$ в $\omega A + \omega_{-n}(A+B)$. Коцепь из группы $C^0(S^1, (H^n \oplus \omega_{-n}H^{n-1})^{tw})$, принимающая на единственной 0-мерной клетке окружности значение x , под действием дифференциала d_1 переходит в коцепь, принимающую на одномерной клетке значение $x - T(x)$. Для $x = \omega_0 A + \omega_{-n}B$ это значение равно $\omega_{-n}A$. Следовательно, $E_2^{0,n} = \omega_{-n}H^{n-1}$ и $E_2^{1,n} = H^n$.

По соображениям размерности $E_\infty^{p,q} = E_2^{p,q}$, тем самым аддитивно рассматриваемая спектральная последовательность описана полностью.

7.3. Коммутативные диаграммы расслоений.

7.3.1. *Диаграмма для вложений* $M_H^{2n-1} \subset M_H^{2n+1}$. Рассмотрим отображение расслоений со слоем S^1 . В следующей диаграмме горизонтальные отображения являются вложениями:

$$\begin{array}{ccc} M_H^{2n-1} & \xrightarrow{i} & M_H^{2n+1} \\ \downarrow \pi_{n-1,0} & & \downarrow \pi_{n,0} \\ T^{2n-2} & \xrightarrow{i} & T^{2n} \end{array}$$

Имеет место отображение спектральных последовательностей $i^*: E_2^{*,*}(\pi_{n,0}) \rightarrow E_2^{*,*}(\pi_{n-1,0})$. В терминах соответствующих алгебр Ли это отображение можно понимать как отображение спектральных последовательностей одномерного идеала, порожденного элементом e_0 , в алгебрах $L_H^{2n-1} \subset L_H^{2n+1}$. Гомоморфизм определяется соответствием, при котором $\omega_{\pm n} \mapsto 0$, а остальные образующие переходят в одноименные. На уровне членов E_2 оно индуцировано отображением баз

$$i^*: H^p(T^{2n}, H^q(M_H^{2n-1})) \rightarrow H^p(T^{2n-2}, H^q(M_H^{2n-1})).$$

Особенно интересно оно выглядит в третьем члене, который равен $E_\infty^{*,*}$. В третьем члене спектральной последовательности расслоения

$$M_H^{2n+1} \xrightarrow{\pi_{n,0}} T^{2n}$$

отличны от 0 только группы $E_3^{s,0}$ при $0 \leq s \leq n$ и группы $E_3^{s,1}$ при $n \leq s \leq 2n$, а в третьем члене спектральной последовательности расслоения

$$M_H^{2n-1} \xrightarrow{\pi_{n,0}} T^{2n-2}$$

отличны от 0 только группы $E_3^{s,0}$ при $0 \leq s \leq n-1$ и группы $E_3^{s,1}$ при $n-1 \leq s \leq 2n-2$. Отсюда немедленно следует, что гомоморфизм $i^*: H^k(M_H^{2n+2}) \rightarrow H^k(M_H^{2n-1})$ при $k = n$ является нулевым.

Это утверждение можно вывести также из теоремы 4.1 и двойственности Пуанкаре. Для $k = 2n$ и $k = 2n+1$ гомоморфизм i^* нулевой по тривиальным соображениям: в этих размерностях когомологии $H^k(M_H^{2n-1})$ нулевые.

7.3.2. *Диаграмма для вложений* $M_H^{2n-1} \subset M_H^{2n+1} \subset M_H^{2n+3}$. Тройку многообразий Гейзенберга $M_H^{2n-1} \subset M_H^{2n+1} \subset M_H^{2n+3}$ связывает коммутативная диаграмма расслоений

$$\begin{array}{ccc} M_H^{2n+1} & \xrightarrow{i} & M_H^{2n+3} \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_1 \\ T^2 & \xrightarrow{i} & T^4 \end{array}$$

со слоем M_H^{2n-1} . Соответствующее отображение спектральных последовательностей

$$i^* : E_r^{*,*}(\pi_1) \rightarrow E_r^{*,*}(\pi_2)$$

совпадает с отображением спектральных последовательностей Хохшильда — Серра, индуцированным отображением пар алгебра-подалгебра

$$(L_H^{2n+1}, L_H^{2n-1}) \rightarrow (L_H^{2n+3}, L_H^{2n-1}).$$

На уровне комплексов Шевалле — Эйленберга индуцированное отображение определено соответствием, при котором $\omega_{\pm(n+1)} \mapsto 0$, а остальные образующие переходят в одноименные.

Спектральная последовательность расслоения $\pi_2 : M_H^{2n+1} \rightarrow T^2$ показана на диаграмме в п. 7.1. Для расслоения $\pi_1 : M_H^{2n+3} \rightarrow T^4$ второй член спектральной последовательности имеет вид

$2n-1$	H^{2n-1}	$HT^1 \otimes H^{2n-1}$	$HT^2 \otimes H^{2n-1}$	$HT^3 \otimes H^{2n-1}$	$HT^4 \otimes H^{2n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	H^n	$HT^1 \otimes H^n$	$HT^2 \otimes H^n$	$HT^3 \otimes H^n$	$HT^4 \otimes H^n$
$n-1$	H^{n-1}	$HT^1 \otimes H^{n-1}$	$HT^2 \otimes H^{n-1}$	$HT^3 \otimes H^{n-1}$	$HT^4 \otimes H^{n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
0	H^0	$HT^1 \otimes H^0$	$HT^2 \otimes H^0$	$HT^3 \otimes H^0$	$HT^4 \otimes H^0$
	0	1	2	3	4

где $H^s = H^s(M_H^{2n-1})$ и $HT^k = H^k(T^4)$.

Столбцы $E_2^{3,*}$ и $E_2^{4,*}$ лежат в ядре i^* . Учитывая, что в когомологиях $H^k(M_H^{2n+3})$ формы, представляющие классы размерности $k \leq n+1$, не содержат ω_0 , а формы, представляющие классы размерности $k \geq n+2$, делятся на ω_0 , получаем, что в члене $E_\infty^{*,*}$ этой спектральной последовательности группы $E_\infty^{0,n}$, $E_\infty^{0,n+1}$, $E_\infty^{1,n}$, $E_\infty^{3,n-1}$, $E_\infty^{4,n-1}$, $E_\infty^{4,n-2}$ нулевые. Кроме того, подсчет чисел Бетти с помощью теоремы 4.1 показывает, что $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ при $q \leq n-1, p+q \leq n$, а также при $q \geq n, p+q \geq n+3$.

8. Дифференциалы в B_{ss} для многообразий Гейзенберга

8.1. Произведения Масси. Напомним определение матричных произведений Масси. Детали, в том числе связь с формальными связностями и уравнением Маурера — Картана см. в [31, 32]. Знаки в формулах мы выбираем, следуя [33]. Для произвольного элемента x градуировки k положим $\bar{x} = (-1)^k x$.

Пусть C^* — градуированная дифференциальная алгебра над кольцом R , при этом считается, что дифференциал d повышает градуировку на 1. Когомологии комплекса C^* относительно дифференциала d в этом параграфе будем обозначать $H^*(C^*) = H^*(C^*, d)$.

8.1.1. Скалярное трехместное произведение Масси. Пусть для однородных классов когомологий $a_1, a_2, a_3 \in H^*(C^*)$ выполнены равенства $\bar{a}_1 a_2 = 0$ и $\bar{a}_2 a_3 = 0$. Пусть $x_i \in C^*$ — представитель соответствующего класса когомологий $a_i \in H^*(C^*)$. Тогда $\bar{x}_1 x_2$ и $\bar{x}_2 x_3$ являются кограницами, т.е. существуют элементы U и V такие, что $dU = \bar{x}_1 x_2$ и $dV = \bar{x}_2 x_3$. Легко проверить, что коцепь $y = \bar{U} x_3 + \bar{x}_1 V$ является коциклом, класс когомологий которого, вообще

говоря, зависит от выбора представителей x_1, x_2, x_3 и элементов U и V . *Тройным произведением Масси* называется множество классов когомологий

$$\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \{ [\overline{U}x_3 + \overline{x}_1V] \in H^*(C^*) : [x_i] = a_i \in H^*(C^*), dU = \overline{x}_1x_2, dV = \overline{x}_2x_3 \}.$$

Как видно из определения, эта операция является частично определенной и многозначной. Действительно, класс когомологий $[a]$ зависит от выбора элементов U и V и нетрудно показать, что при другом выборе этих элементов определенный ими класс $[a']$ может, вообще говоря, отличаться от $[a]$. Более точно,

$$[a] - [a'] \in H^{\deg a_1 + \deg a_2 - 1}(C^*)a_3 + a_1H^{\deg a_2 + \deg a_3 - 1}(C^*),$$

причем так может быть реализован любой элемент этой группы.

Трехместное произведение Масси называется *нетривиальным*, если оно не содержит нулевой класс когомологий.

Набор элементов x_1, x_2, x_3, U, V называется *определяющей системой* для элемента y . Ее удобно записывать в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} x_1 & U & y \\ & x_2 & V \\ & & x_3 \end{pmatrix}.$$

Замечание 8.1. Введем двухместное произведение Масси по формуле $\langle a, b \rangle = \overline{a}b$. Оно определено для всех классов $a, b \in H^*(C^*)$, однозначно и отличается от обычного произведения в когомологиях знаком.

8.1.2. Матричное произведение Масси. Определено многоместное произведение Масси, компоненты которого являются матрицами из однородных элементов комплекса C^* , принадлежащих идеалу аугментации. Оно является естественным обобщением приведенного выше трехместного произведения Масси

В матричном произведении Масси на градуировки элементов матриц $a_1, a_2, \dots, a_n$ накладываются условия, обеспечивающие однородность элементов произведений $a_k a_{k+1}$. Пусть $A = (a_{ij} \in C^* : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l)$ и $B = (b_{jk} \in C^* : 1 \leq j \leq l', 1 \leq k \leq n)$. Будем использовать произведение матриц A и B таких, что

- (1) $l = l'$,
- (2) для любых $1 \leq i \leq m$ и $1 \leq k \leq n$ величина $\deg a_{ij} + \deg b_{jk}$ не зависит от j .

При выполнении условий (1) и (2) произведение AB определено и его элементы являются однородными элементами комплекса C^* .

С каждой матрицей $A = (a_{ij} \in C^* : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l)$ связана целочисленная матрица степеней $D(A) = (\deg a_{ij} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq l)$. При выполнении условий (1) и (2) имеет место равенство

$$D(AB) = D(A) * D(B) = (\deg a_{ij} + \deg b_{jk} : 1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n).$$

Перейдем непосредственно к определению. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — набор матриц, составленных из однородных элементов когомологий $H^*(C^*)$, причем A_i и A_{i+1} удовлетворяют (1) и (2) для всех $i = 1, \dots, n$. Будем говорить, что набор матриц $X(i, j)$, $1 \leq i \leq j \leq n$, $(i, j) \neq (1, n)$, состоящих из однородных элементов C^* , образует *определяющую систему*, если

1) для всех i матрица $X(i, i)$ состоит из коциклов, представляющих соответствующие элементы матрицы A_i ,

2) градуировки элементов матрицы $X(i, j)$ связаны с градуировками элементов матриц $A_i, A_{i+1}, \dots, A_j$ следующим образом: элементы матрицы $D(X(i, j))$ меньше соответствующих элементов матрицы $D(A_i) * D(A_{i+1}) * \dots * D(A_j)$ в точности на $j - i + 1$,

$$3) dX(i, j) = \sum_{k=i}^{j-1} \overline{X(i, k)} X(k+1, j).$$

Если матрицы $X(i, j)$ образуют определяющую систему, то матрица $C(\{A_i\}, \{X(i, j)\}) = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{X(i, k)} X(k+1, j)$ состоит из коциклов. Множество матриц, составленных из классов когомологий, представленных всевозможными матрицами коциклов $C(\{A_i\}, \{X(i, j)\})$ для фиксированных $A_1, \dots, A_n$ называется n -местным матричным произведением Масси $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$.

Матричное произведение Масси является многозначным и частично определенным [31, 32].

Нас интересует случай, когда $n = 3$, A_1 — строка длины k , A_2 — матрица размеров $k \times m$, A_3 — столбец длины m . В этом случае $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ состоит из матриц размера 1×1 , т.е. из классов когомологий. Такое матричное произведение Масси называется *нетривиальным*, если оно не содержит нулевой класс когомологий.

Отметим, что для любой пары вектор–строк $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ определено двухместное матричное произведение Масси

$$\langle (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)^T \rangle = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k b_k.$$

8.2. Дифференциалы d_1 и d_2 в Bss . Приведем некоторые основные свойства дифференциалов d_1 и d_2 в Bss для алгебр L_H^{2n+1} . Для случая общей нильпотентной алгебры Ли аналогичные утверждения нетрудно получить, следуя общей теории [12].

По соображениям размерности верен следующий факт.

Утверждение 8.1. Дифференциал $N_1/N_0 = E_1^{1,-1} \xrightarrow{d_1} E_1^{0,-1} = H^1(L_H^{2n+1})$ является изоморфизмом.

Действительно, абелева группа N_1/N_0 порождается элементами $(e_{\pm 1})^*, \dots, (e_{\pm n})^*$. Дифференциал Шевалле — Эйленберга в комплексе $U(L_H^{2n+1})^* \otimes \Lambda(L_H^{2n+1})^*$ на таких элементах действует по формуле

$$(e_{\pm k})^* \otimes 1 \mapsto 1 \otimes \omega_{\pm k}.$$

Для $q > 1$ дифференциал $d_1 : N_1/N_0 \otimes H^{q-1}(L_H^{2n+1}) = E_1^{1,-q} \rightarrow E_1^{0,-q} = H^q(L_H^{2n+1})$ действует следующим образом. Пусть

$$x = \sum_{k=1}^n (e_k^* \otimes a_k + e_{-k}^* \otimes a_{-k}),$$

где $a_{\pm i} \in H^{q-1}(L_H^{2n+1})$. Тогда

$$d_1(x) = d_{CE}(x) = 1 \otimes \sum_{k=1}^n (\omega_k \wedge a_k + \omega_{-k} \wedge a_{-k}).$$

Заметим, что любой класс, представимый в виде

$$\sum_{k=1}^n (\omega_k \wedge a_k + \omega_{-k} \wedge a_{-k}),$$

лежит в образе дифференциала d_1 , так как равен $d_1(x)$. Таким образом, член фильтрации Φ^1 , т.е. образ дифференциала d_1 в когомологиях $H^*(L_H^{2n+1})$, состоит из элементов, представимых в виде двухместных матричных произведений Масси. В [12] показано, что эти произведения нетривиальны.

Рассмотрим элемент x группы $E_1^{2,-q} = N_2/N_1 \otimes H^{q-2}(L_H^{2n+1})$. Если $d^1(x) = 0$ в группе $E_1^{1,-q} = N_1/N_0 \otimes H^{q-1}(L_H^{2n+1})$, то определен элемент $d_2 x \in E_2^{0,-q+1}$. По лемме 8.1 (см. ниже) абелева группа N_2/N_1 порождена элементами e_0^* и $(e_i e_j)^*$, где $i \leq j$, $i, j \in \{\pm 1, \dots, \pm n\}$. Следовательно, элемент x имеет вид

$$\alpha e_0^* \otimes a_0 + \sum \beta_{ij} (e_i e_j)^* \otimes a_{ij}.$$

Детальный анализ выражения

$$d_{CE}(x) = d_{CE}(\alpha e_0^* \otimes a_0 + \sum \beta_{ij} (e_i e_j)^* \otimes a_{ij})$$

и условия $d_1(x) = 0$ показывает, что элемент $d_2(x)$ является представителем трехместного матричного произведения Масси $\langle A, B, C \rangle$, где A и B составлены из элементов $H^1(L_H^{2n+1})$ (см. [12]).

8.3. Bss -фильтрация Φ^r в когомологиях алгебры Ли L_H^{2n+1} . Приведем необходимые факты о Bss для алгебр Ли L_H^{2n+1} (детали см. в [12]).

Зафиксируем в универсальной обертывающей алгебре UL_H^{2n+1} базис

$$\{e_-^a e_+^b e_0^c = e_{-1}^{a_1} \dots e_{-n}^{a_n} e_1^{b_1} \dots e_n^{b_n} e_0^c\},$$

где $a = (a_1, \dots, a_n)$ и $b = (b_1, \dots, b_n)$, и канонический двойственный базис

$$\{(e_-^a e_+^b e_0^c)^*\}$$

в $(UL_H^{2n+1})^*$. Рассмотрим фильтрацию (3.1) в $(UL_H^{2n+1})^*$.

Лемма 8.1. Положим

$$p(a, b, c) = p(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c) = 2c + \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{j=1}^n b_j.$$

- (i) Элемент $(e_-^a e_+^b e_0^c)^*$ принадлежит N_p и не принадлежит N_{p-1} , где $p = p(a, b, c)$.
- (ii) Более того, $N_p = N_{p-1} \oplus \mathbb{R}\langle (e_-^a e_+^b e_0^c)^* : p(a, b, c) = p \rangle$.

Доказательство см. в [12].

Следствие 8.1. Производящий ряд последовательности $\{k_0 = 1, k_p = \dim N_p/N_{p-1} : p = 1, 2, \dots\}$ равен

$$\sum_{p \geq 0} k_p x^p = \frac{1}{(1-x)^{2n}(1-x^2)}.$$

Напомним, что в § 3 мы с помощью дифференциалов Bss определили возрастающую фильтрацию Φ^p на когомологиях $H^k(L_H^{2n+1})$. В силу тривиальности дифференциалов d_k при $k \geq 3$ (см. теорему 3.1) фильтрация стабилизируется на Φ^2 , а именно, $\Phi^2 = \Phi^k$ для всех $k \geq 2$.

- Теорема 8.1.** (i) Элементы групп когомологий $H^k(L_H^{2n+1})$ для $1 \leq k \leq n$ принадлежат Φ^1 .
- (ii) Элементы группы когомологий $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ принадлежат Φ^2 , но не принадлежат Φ^1 .
- (iii) Элементы групп когомологий $H^k(L_H^{2n+1})$ для $n+2 \leq k \leq 2n+1$ принадлежат Φ^1 .

Доказательство. (i) Из утверждения 8.1 следует, что $H^1(L_H^{2n+1}) \subset \Phi^1$.

Из теоремы 4.1 следует, что любой класс когомологий в размерностях $2 \leq p \leq n$ имеет представителя в виде суммы $\omega_{-n} \wedge \theta_{-n} + \dots \omega_{-1} \wedge \theta_{-1} + \omega_1 \wedge \theta_1 + \dots + \omega_{n-p} \wedge \theta_{n-p}$, где разложение $(p-1)$ -формы θ_k по стандартному базису внешней алгебры не содержит ни ω_0 , ни ω_j для всех $j \leq k$. Легко проверить, что формы θ_k замкнуты. Тогда из описанного выше действия дифференциала d_1 следует, что соответствующий класс когомологий равен

$$d_1((e_{-n})^* \otimes \theta_{-n} + \dots + (e_{-1})^* \otimes \theta_{-1} + (e_1)^* \otimes \theta_1 + \dots + (e_{n-p})^* \otimes \theta_{n-p}), \quad (8.1)$$

т.е. принадлежит Φ_1 .

(ii) С другой стороны, образ $d_1 : N_1/N_0 \otimes H^n(L_H^{2n+1}) \rightarrow H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ нулевой, поскольку любая коцепь, представляющая элемент размерности $n+1$, должна содержать в своей записи ω_0 — это следует из невырожденности спаривания (4.1). Следовательно, в группе $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ нет нетривиальных элементов фильтрации Φ^1 .

Случай (iii) чуть более сложен. Проведем индукцию по n . В п. 7.1 была вычислена спектральная последовательность расслоения $\pi : M^{2n+1} \rightarrow T^2$ со слоем M_H^{2n-1} . Ее член $E_\infty^{p,q}$ имеет вид

$2n-1$	H^{2n-1}	$\omega_{-n}H^{2n-1} \oplus \omega_n H^{2n-1}$	$\omega_{-n} \wedge \omega_n H^{2n-1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	0	$\omega_{-n}H^n \oplus \omega_n H^n$	$\omega_{-n} \wedge \omega_n H^n$
$n-1$	H^{n-1}	$\omega_{-n}H^{n-1} \oplus \omega_n H^{n-1}$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	H^0	$\omega_{-n}H^0 \oplus \omega_n H^0$	$\omega_{-n} \wedge \omega_n H^0$
	0	1	2

При $k \geq n+2$ в группе $H^k(M_H^{2n+1})$ определена трехчленная фильтрация, для которой присоединенная группа имеет вид

$$H^k(M_H^{2n-1}) \oplus \omega_{-n}H^{k-1}(M_H^{2n-1}) \oplus \omega_n H^{k-1}(M_H^{2n-1}) \oplus \omega_{-n} \wedge \omega_n H^{k-2}(M_H^{2n-1}),$$

применяя индукцию, получаем требуемое утверждение. Отметим, что это рассуждение верно также при $k \leq n$. $\square$

В [33] указаны элементы в группе $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$, представимые в виде матричных произведений Масси.

Утверждение 8.2 ([33, п. 2.5]). *Коцепи $\omega_0 \wedge \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \dots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n}$, где $\varepsilon_j = \pm 1$, представляют собой линейно независимые классы когомологий в $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$, они не разлагаются в линейные комбинации нетривиальных произведений классов меньшей размерности, но представимы в виде нетривиальных трехместных матричных произведений Масси: класс коцикла $\omega_0 \wedge \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \dots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n}$ принадлежит*

$$\left\langle (\varepsilon_1 \omega_{-\varepsilon_1 \cdot 1}, \varepsilon_2 \omega_{-\varepsilon_2 \cdot 2}, \dots, \varepsilon_n \omega_{-\varepsilon_n \cdot n}), \begin{pmatrix} \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \\ \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \\ \vdots \\ \omega_{\varepsilon_n \cdot n} \end{pmatrix}, \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \dots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n} \right\rangle.$$

Для доказательства этого утверждения в обозначениях п. 8.1 достаточно положить $U = -\omega_0$ и $V = 0$.

Легко указать, образами каких элементов под действием дифференциала d_2 накрываются элементы, описанные в утверждении 8.2.

Утверждение 8.3. *Класс когомологий из группы $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$, представленный коциклом $\omega_0 \wedge \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \dots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n}$, равен*

$$d_2 \left(\left(e_0^* + \sum_k \delta_{\varepsilon_k}^1 (e_{-k} e_k)^* \right) \otimes \omega_{\varepsilon_1 \cdot 1} \wedge \omega_{\varepsilon_2 \cdot 2} \wedge \dots \wedge \omega_{\varepsilon_n \cdot n} \right),$$

где δ_i^j — символ Кронекера.

Достаточно заметить, что в комплексе $(UL_H^{2n+1})^* \otimes \wedge(\omega_{\pm 1}, \dots, \omega_{\pm n}, \omega_0)$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} d((e_0)^* \otimes \omega) &= 1 \otimes \omega_0 \wedge \omega - \sum_{k=1}^n (e_k)^* \otimes \omega_{-k} \wedge \omega, \\ d((e_{-k} e_k)^* \otimes \omega) &= (e_k)^* \otimes \omega_{-k} \wedge \omega + (e_{-k})^* \otimes \omega_k \wedge \omega. \end{aligned}$$

Обратим внимание, что количество классов, о которых идет речь в утверждениях 8.2 и 8.3, равно 2^n , а это меньше, чем соответствующее число Бетти b_{n+1} , которое в силу двойственности Пуанкаре и теоремы 4.1 равно $b_{n+1} = b_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-2}$. Иными словами, в группе $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ имеются элементы, не описанные в утверждениях 8.2 и 8.3. Согласно теореме 8.1 все ненулевые элементы $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ принадлежат Φ^2 , но не принадлежат Φ^1 . В [12] доказано, что такие элементы представимы в виде нетривиальных тройных матричных произведений Масси специального вида (см. также п. 8.2). В § 9 мы найдем явный вид этих представлений для остальных элементов группы $H^{n+1}(L_H^{2n+1})$ при $n = 2$ и $n = 3$.

9. Примеры

В этом параграфе для $n = 1, 2, 3, 4$ мы приводим полиномы Пуанкаре $\tilde{P}_n(t, q)$ и $P_n(t, q)$ комплексов Шевалле — Эйленберга, соответствующих многообразиям M_H^{2n+1} , а также полиномы Пуанкаре когомологий $H^*(M_H^{2n+1})$, учитывающих расщепления биградуировками, описанными в § 6. Напомним, что коэффициенты при степенях t многочленов $\tilde{P}_n(t, q)$ и $P_n(t, q)$ с точностью до умножения на подходящие степени q равны q -биномиальным коэффициентам Гаусса (см. пп. 6.1 и 6.2).

9.1. Алгебра Ли L_H^3 и многообразие M_H^3 . Группы когомологий $H^k(L_H^3)$ имеют следующие наборы базисных элементов:

$$\begin{aligned} k = 0 & \quad 1; \\ k = 1 & \quad \omega_{-1}, \omega_1; \\ k = 2 & \quad \omega_{-1} \wedge \omega_0, \omega_1 \wedge \omega_0; \\ k = 3 & \quad \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_1. \end{aligned}$$

Теорема 8.1 показывает, что классы когомологий размерностей 1 и 3 принадлежат фильтрации Φ^1 , а классы когомологий размерности 2 принадлежат фильтрации Φ^2 . Явное представление классов размерности 2 в виде нетривиальных тройных произведений Масси и в виде дифференциалов d_2 в Bss получено в утверждениях 8.2 и 8.3.

9.1.1. *Базис $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$.* Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\tilde{P}_1(t, q) = q^6 t^3 + (q^5 + q^4 + q^3)t^2 + (q^3 + q^2 + q)t + 1.$$

Полином Пуанкаре $\tilde{P}_1^H(t, q) = \sum_{i,j} \dim H^{i,j}(M_H^3) t^i q^j$:

$$q^6 t^3 + (q^5 + q^4)t^2 + (q^2 + q)t + 1.$$

9.1.2. *Базис $\{e_{\pm 1}, e_0\}$.* Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга $\Lambda(\omega_{-1}, \omega_1, \omega_0)$:

$$P_1(t, q) = t^3 + \left(q + 1 + \frac{1}{q}\right)t^2 + \left(q + 1 + \frac{1}{q}\right)t + 1.$$

Полином Пуанкаре когомологий M_H^3 :

$$t^3 + \left(q + \frac{1}{q}\right)t^2 + \left(q + \frac{1}{q}\right)t + 1.$$

9.1.3. *Расщепление когомологий комплекса Шевалле — Эйленберга инволюцией I .* Полиномы Пуанкаре расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\hat{P}^{\text{even}}(t) = t^3 + t^2 + t + 1,$$

$$\hat{P}^{\text{odd}}(t) = 2t^2 + 2t.$$

Когомологии многообразия Гейзенберга $H(M_H^3)$, расщепленные инволюцией I :

$$P_{H(M_H^3)}^{\text{even}} = t^2 + t + 1,$$

$$P_{H(M_H^3)}^{\text{odd}} = t^3 + t^2 + t.$$

9.2. Алгебра Ли L_H^5 и многообразие M_H^5 . Группы когомологий $H^k(L_H^5)$ имеют следующие наборы базисных элементов:

$$\begin{aligned} k=0 & 1; \\ k=1 & \omega_{-1}, \omega_{-2}, \omega_2, \omega_1; \\ k=2 & \omega_{-1} \wedge \omega_{-2}, \omega_{-1} \wedge \omega_2, \omega_{-1} \wedge \omega_1 = -\omega_{-2} \wedge \omega_2, \omega_{-2} \wedge \omega_1, \omega_1 \wedge \omega_2; \\ k=3 & \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2}, \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_2, \omega_0 \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_1, \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2, \omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2); \\ k=4 & \omega_0 \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2, \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2, \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_1, \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_2; \\ k=5 & \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2. \end{aligned}$$

Теорема 8.1 показывает, что классы когомологий размерностей 1, 2, 4 и 5 принадлежат фильтрации Φ^1 , а классы когомологий размерности 3 принадлежат фильтрации Φ^2 .

Элементы группы $H^3(L_H^5)$, представленные коциклами

$$\omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2}, \quad \omega_0 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_2, \quad \omega_0 \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_1, \quad \omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2,$$

как показано в утверждениях 8.2 и 8.3, представимы в виде нетривиальных тройных произведений Масси, а также лежат в образе дифференциала d_2 спектральной последовательности Бухштабера.

Получим этот результат для класса, представленного коциклом $\omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2)$.

Утверждение 9.1. (i) Коцикл $\omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2)$ является представителем нетривиального тройного матричного произведения Масси

$$\left\langle (\omega_{-1} \ \omega_{-2}), \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_1 \\ \frac{1}{2}\omega_2 \end{pmatrix}, \omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2 \right\rangle.$$

(ii) Класс, представленный формой $\omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2)$, равен

$$d_2((e_0)^* \otimes (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2) - (e_2 e_1)^* \otimes \omega_{-1} \wedge \omega_{-2}).$$

Доказательство. Для (i) используется следующая определяющая система:

$$\begin{aligned} A = (\omega_{-1} \ \omega_{-2}) \quad U = -\frac{1}{2}\omega_0 \quad \omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2) \\ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_1 \\ \frac{1}{2}\omega_2 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\omega_1 \wedge \omega_0 \\ \frac{1}{2}\omega_2 \wedge \omega_0 \end{pmatrix} \\ C = \omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2 \end{aligned}$$

Для (ii) используем прямое вычисление

$$\begin{aligned} d_{CE}((e_0)^* \otimes (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2)) &= \omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 - \omega_{-2} \wedge \omega_2) \\ &+ (e_1)^* \otimes \omega_{-1} \wedge \omega_{-2} \wedge \omega_2 - (e_2)^* \otimes \omega_{-2} \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_1, \\ d_{CE}((e_2 e_1)^* \otimes \omega_{-1} \wedge \omega_{-2}) &= (e_2)^* \otimes \omega_1 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2} + (e_1)^* \otimes \omega_2 \wedge \omega_{-1} \wedge \omega_{-2}. \end{aligned}$$

Вычтем из первого соотношения второе и получим нужное равенство. $\square$

9.2.1. Базис $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4, \tilde{e}_5\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(t, q) &= q^{15}t^5 + (q^{14} + q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10})t^4 + (q^{12} + q^{11} + 2q^{10} + 2q^9 + 2q^8 + q^7 + q^6)t^3 \\ &+ (q^9 + q^8 + 2q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 + q^3)t^2 + (q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)t + 1. \end{aligned}$$

Полином Пуанкаре когомологий:

$$\begin{aligned} q^{15}t^5 + (q^{14} + q^{13} + q^{12} + q^{11})t^4 + (q^{12} + q^{11} + q^{10} + q^9 + q^8)t^3 \\ + (q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3)t^2 + (q^4 + q^3 + q^2 + q)t + 1. \end{aligned}$$

9.2.2. Базис $\{e_{\pm 2}, e_{\pm 1}, e_0\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$P_2(t, q) = t^5 + \left(q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right)t^4 + \left(q^3 + q^2 + 2q + 2 + \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\right)t^3 + \left(q^3 + q^2 + 2q + 2 + \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\right)t^2 + \left(q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right)t + 1.$$

Полином Пуанкаре когомологий M_H^5 :

$$t^5 + \left(q^2 + q + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right)t^4 + \left(q^3 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^3}\right)t^3 + \left(q^3 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^3}\right)t^2 + \left(q^2 + q + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2}\right)t + 1.$$

9.2.3. Расщепление когомологий комплекса Шевалле — Эйленберга инволюцией I . Полиномы Пуанкаре расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\begin{aligned}\widehat{P}_2^{\text{even}}(t) &= 3t^4 + 6t^3 + 4t^2 + 2t + 1, \\ \widehat{P}_2^{\text{odd}}(t) &= t^5 + 2t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 3t.\end{aligned}$$

Полиномы Пуанкаре когомологии:

$$\begin{aligned}P_{H(M_H^5)}^{\text{even}} &= 2t^4 + 3t^3 + 2t^2 + 2t + 1, \\ P_{H(M_H^5)}^{\text{odd}} &= t^5 + 2t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t.\end{aligned}$$

9.3. Алгебра Ли L_H^7 и многообразие M_H^7 . Для $H^*(M_H^7)$ мы не будем приводить базис в группах когомологий, вместо этого напомним, что по теореме 8.1 классы когомологий всех положительных размерностей, кроме 4, принадлежат фильтрации Φ^1 , а классы когомологий размерности 4 принадлежат фильтрации Φ^2 .

Утверждения 8.2 и 8.3 показывают, что классы когомологий, представленные коциклами вида $e_0 \wedge \omega_{\pm 1} \wedge \omega_{\pm 2} \wedge \omega_{\pm 3}$, представимы в виде тройных матричных произведений Масси, а также лежат в образе дифференциала d_2 в Bss .

С другой стороны, $b_4(M_H^7) = b_3(M_H^7) = \binom{6}{3} - \binom{6}{1} = 14$, поэтому в размерности 4 имеются еще 6 независимых классов когомологий. Их легко указать явно (для краткости вместо $\omega_{i_1} \wedge \omega_{i_2} \wedge \dots$ здесь мы пишем $(i_1, i_2, \dots)$):

$$\begin{aligned}(0, -1, 1, 2) - (0, -3, 3, 2), \\ (0, -2, 1, 2) - (0, -3, 1, 3), \\ (0, -2, 2, 3) - (0, -1, 1, 3), \\ (0, -2, -3, 3) - (0, -1, 1, -2), \\ (0, -1, -3, 3) - (0, -1, -2, 2), \\ (0, -1, -3, 1) - (0, -2, -3, 2).\end{aligned}\tag{9.1}$$

Каждый из них лежит в образе дифференциала d_2 , а также представим нетривиальным тройным произведением Масси. Продемонстрируем это для элемента $(0, -1, 1, 2) - (0, -3, 3, 2)$, остальные пять случаев рассматриваются аналогично.

Сначала выпишем соответствующую определяющую систему

$$\begin{aligned}A &= (\omega_{-1} \ \omega_{-2} \ \omega_{-3}) & U &= -\frac{1}{2}\omega_0 & \omega_0 \wedge (\omega_{-1} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 - \omega_{-3} \wedge \omega_2 \wedge \omega_3) \\ B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_1 \\ \frac{1}{2}\omega_2 \\ \frac{1}{2}\omega_3 \end{pmatrix} & V &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\omega_0 \wedge \omega_3 \wedge \omega_2 \end{pmatrix} \\ C &= \omega_{-1} \wedge \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_{-3} \wedge \omega_2 \wedge \omega_3\end{aligned}$$

Покажем, что коцикл $(0, -1, 1, 2) - (0, -3, 3, 2)$ представим в виде

$$d_2((e_0)^* \otimes ((-1, 1, 2) + (-3, 2, 3)) + (e_1 e_3)^* \otimes (-3, -1, 2) + (e_{-2} e_2)^* \otimes ((-3, 2, 3) + (-1, 1, 2))).$$

Для этого достаточно вычислить дифференциал Шевалле — Эйленберга от каждого из этих трех слагаемых:

$$\begin{aligned} d_{CE}((e_0)^* \otimes ((-1, 1, 2) + (-3, 2, 3))) &= (0, -1, 1, 2) + (0, -3, 2, 3) \\ &\quad - (e_2)^* \otimes (-2, -1, 1, 2) - (e_3)^* \otimes (-3, -1, 1, 2) - (e_1)^* \otimes (-1, -3, 2, 3) - (e_2)^* \otimes (-2, -3, 2, 3), \\ d_{CE}((e_1 e_3)^* \otimes (-3, -1, 2)) &= (e_1)^* \otimes (3, -3, -1, 2) + (e_3)^* \otimes (1, -3, -1, 2), \\ d_{CE}((e_{-2} e_2)^* \otimes ((-3, 2, 3) + (-1, 1, 2))) &= (e_{-2})^* \otimes ((-2, -3, 2, 3) + (-2, -1, 1, 2)). \end{aligned}$$

Осталось сложить эти три равенства.

9.3.1. Базис $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_7\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_3(t, q) &= q^{28}t^7 + (q^{27} + q^{26} + q^{25} + q^{24} + q^{23} + q^{22} + q^{21})t^6 \\ &\quad + (q^{25} + q^{24} + 2q^{23} + 2q^{22} + 3q^{21} + 3q^{20} + 3q^{19} + 2q^{18} + 2q^{17} + q^{16} + q^{15})t^5 \\ &\quad + (q^{22} + q^{21} + 2q^{20} + 3q^{19} + 4q^{18} + 4q^{17} + 5q^{16} + 4q^{15} + 4q^{14} + 3q^{13} + 2q^{12} + q^{11} + q^{10})t^4 \\ &\quad + (q^{18} + q^{17} + 2q^{16} + 3q^{15} + 4q^{14} + 4q^{13} + 5q^{12} + 4q^{11} + 4q^{10} + 3q^9 + 2q^8 + q^7 + q^6)t^3 \\ &\quad + (q^{13} + q^{12} + 2q^{11} + 2q^{10} + 3q^9 + 3q^8 + 3q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 + q^3)t^2 \\ &\quad + (q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)t + 1. \end{aligned}$$

Полином Пуанкаре $\tilde{P}_3^H(t, q) = \sum_{i,j} \dim H^{i,j}(M_H^7) t^i q^j$ когомологий:

$$\begin{aligned} &q^{28}t^7 + (q^{27} + q^{26} + q^{25} + q^{24} + q^{23} + q^{22})t^6 \\ &\quad + (q^{25} + q^{24} + 2q^{23} + 2q^{22} + 2q^{21} + 2q^{20} + 2q^{19} + q^{18} + q^{17})t^5 \\ &\quad + (q^{22} + q^{21} + q^{20} + 2q^{19} + 2q^{18} + 2q^{17} + 2q^{16} + q^{15} + q^{14} + q^{13})t^4 \\ &\quad + (q^{15} + q^{14} + q^{13} + 2q^{12} + 2q^{11} + 2q^{10} + 2q^9 + q^8 + q^7 + q^6)t^3 \\ &\quad + (q^{11} + q^{10} + 2q^9 + 2q^8 + 2q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 + q^3)t^2 \\ &\quad + (q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)t + 1. \end{aligned}$$

9.3.2. Базис $\{e_{\pm 1}, e_{\pm 2}, e_{\pm 3}, e_0\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\begin{aligned} P_3(t, q) &= t^7 + \left(q^3 + q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\right)t^6 \\ &\quad + \left(q^5 + q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 3q + 3 + \frac{3}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{2}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5}\right)t^5 \\ &\quad + \left(q^6 + q^5 + 2q^4 + 3q^3 + 4q^2 + 4q + 5 + \frac{4}{q} + \frac{4}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{2}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{q^6}\right)t^4 \\ &\quad + \left(q^6 + q^5 + 2q^4 + 3q^3 + 4q^2 + 4q + 5 + \frac{4}{q} + \frac{4}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{2}{q^4} + \frac{1}{q^5} + \frac{1}{q^6}\right)t^3 \\ &\quad + \left(q^5 + q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 3q + 3 + \frac{3}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{2}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5}\right)t^2 \\ &\quad + \left(q^3 + q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\right)t + 1. \end{aligned}$$

Полином Пуанкаре когомологий M_H^7 :

$$\begin{aligned} & t^7 + \left(q^3 + q^2 + q + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\right)t^6 \\ & + \left(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 2 + \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5}\right)t^5 \\ & + \left(q^6 + q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 2 + \frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^6}\right)t^4 \\ & + \left(q^6 + q^4 + q^3 + 2q^2 + q + 2 + \frac{1}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^6}\right)t^3 \\ & + \left(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 2 + \frac{2}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{1}{q^5}\right)t^2 \\ & + \left(q^3 + q^2 + q + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3}\right)t + 1. \end{aligned}$$

9.3.3. *Расщепление когомологий комплекса Шевалле — Эйленберга инволюцией I .* Полиномы Пуанкаре расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\hat{P}_7^{\text{even}}(t) = t^7 + 3t^6 + 9t^5 + 19t^4 + 19t^3 + 9t^2 + 3t + 1,$$

$$\hat{P}_7^{\text{odd}}(t) = 4t^6 + 12t^5 + 16t^4 + 16t^3 + 12t^2 + 4t.$$

Полиномы Пуанкаре когомологий многообразия Гейзенберга $H(M_H^7)$, расщепленных инволюцией I :

$$P_{H(M_H^7)}^{\text{even}} = 3t^6 + 8t^5 + 7t^4 + 7t^3 + 6t^2 + 3t + 1,$$

$$P_{H(M_H^7)}^{\text{odd}} = t^7 + 3t^6 + 6t^5 + 7t^4 + 7t^3 + 8t^2 + 3t.$$

9.4. Алгебра Ли L_H^9 и многообразие M_H^9 . В случае M_H^9 мы приведем только биградуированные ряды Пуанкаре.

9.4.1. *Базис $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_3\}$.* Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_4(t, q) = & q^{45}t^9 + (q^{44} + q^{43} + q^{42} + q^{41} + q^{40} + q^{39} + q^{38} + q^{37} + q^{36})t^8 \\ & + (q^{42} + q^{41} + 2q^{40} + 2q^{39} + 3q^{38} + 3q^{37} + 4q^{36} + 4q^{35} \\ & + 4q^{34} + 3q^{33} + 3q^{32} + 2q^{31} + 2q^{30} + q^{29} + q^{28})t^7 \\ & + (q^{39} + q^{38} + 2q^{37} + 3q^{36} + 4q^{35} + 5q^{34} + 7q^{33} + 7q^{32} + 8q^{31} + 8q^{30} \\ & + 8q^{29} + 7q^{28} + 7q^{27} + 5q^{26} + 4q^{25} + 3q^{24} + 2q^{23} + q^{22} + q^{21})t^6 \\ & + (q^{35} + q^{34} + 2q^{33} + 3q^{32} + 5q^{31} + 6q^{30} + 8q^{29} + 9q^{28} + 11q^{27} + 11q^{26} + 12q^{25} \\ & + 11q^{24} + 11q^{23} + 9q^{22} + 8q^{21} + 6q^{20} + 5q^{19} + 3q^{18} + 2q^{17} + q^{16} + q^{15})t^5 \\ & + (q^{30} + q^{29} + 2q^{28} + 3q^{27} + 5q^{26} + 6q^{25} + 8q^{24} + 9q^{23} + 11q^{22} + 11q^{21} + 12q^{20} \\ & + 11q^{19} + 11q^{18} + 9q^{17} + 8q^{16} + 6q^{15} + 5q^{14} + 3q^{13} + 2q^{12} + q^{11} + q^{10})t^4 \\ & + (q^{24} + q^{23} + 2q^{22} + 3q^{21} + 4q^{20} + 5q^{19} + 7q^{18} + 7q^{17} + 8q^{16} \\ & + 8q^{15} + 8q^{14} + 7q^{13} + 7q^{12} + 5q^{11} + 4q^{10} + 3q^9 + 2q^8 + q^7 + q^6)t^3 \\ & + (q^{17} + q^{16} + 2q^{15} + 2q^{14} + 3q^{13} + 3q^{12} + 4q^{11} \end{aligned}$$

$$+ 4q^{10} + 4q^9 + 3q^8 + 3q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 + q^3)t^2 \\ + (q^9 + q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)t + 1.$$

Полином Пуанкаре $\tilde{P}_4^H(t, q) = \sum_{i,j} \dim H^{i,j}(M_H^{2n+1}) t^i q^j$:

$$t^9 + (q^{44} + q^{43} + q^{42} + q^{41} + q^{40} + q^{39} + q^{38} + q^{37})t^8 \\ + (q^{42} + q^{41} + 2q^{40} + 2q^{39} + 3q^{38} + 3q^{37} + 3q^{36} + 3q^{35} + 3q^{34} + 2q^{33} + 2q^{32} + q^{31} + q^{30})t^7 \\ + (q^{39} + q^{38} + 2q^{37} + 3q^{36} + 3q^{35} + 4q^{34} + 5q^{33} + 5q^{32} \\ + 5q^{31} + 5q^{30} + 4q^{29} + 3q^{28} + 3q^{27} + 2q^{26} + q^{25} + q^{24})t^6 \\ + (q^{35} + q^{34} + q^{33} + 2q^{32} + 3q^{31} + 3q^{30} + 4q^{29} + 4q^{28} + 4q^{27} \\ + 4q^{26} + 4q^{25} + 3q^{24} + 3q^{23} + 2q^{22} + q^{21} + q^{20} + q^{19})t^5 \\ + (q^{26} + q^{25} + q^{24} + 2q^{23} + 3q^{22} + 3q^{21} + 4q^{20} + 4q^{19} + 4q^{18} \\ + 4q^{17} + 4q^{16} + 3q^{15} + 3q^{14} + 2q^{13} + q^{12} + q^{11} + q^{10})t^4 \\ + (q^{21} + q^{20} + 2q^{19} + 3q^{18} + 3q^{17} + 4q^{16} + 5q^{15} + 5q^{14} \\ + 5q^{13} + 5q^{12} + 4q^{11} + 3q^{10} + 3q^9 + 2q^8 + q^7 + q^6)t^3 \\ + (q^{15} + q^{14} + 2q^{13} + 2q^{12} + 3q^{11} + 3q^{10} + 3q^9 + 3q^8 + 3q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 + q^3)t^2 \\ + (q^8 + q^7 + q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q)t + 1.$$

9.4.2. Базис $\{e_{\pm 4}, e_{\pm 3}, e_{\pm 2}, e_{\pm 1}, e_0\}$. Полином Пуанкаре комплекса Шевалле — Эйленберга $\Lambda(e_{\pm 4}, e_{\pm 3}, e_{\pm 2}, e_{\pm 1}, e_0)$:

$$P_4(t, q) = t^9 + \left(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4}\right)t^8 \\ + \left(q^7 + q^6 + 2q^5 + 2q^4 + 3q^3 + 3q^2 + 4q + 4 + \frac{4}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{2}{q^4} + \frac{2}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7}\right)t^7 \\ + \left(q^9 + q^8 + 2q^7 + 3q^6 + 4q^5 + 5q^4 + 7q^3 + 7q^2 + 8q + 8 \right. \\ \left. + \frac{8}{q} + \frac{7}{q^2} + \frac{7}{q^3} + \frac{5}{q^4} + \frac{4}{q^5} + \frac{3}{q^6} + \frac{2}{q^7} + \frac{1}{q^8} + \frac{1}{q^9}\right)t^6 \\ + \left(q^{10} + q^9 + 2q^8 + 3q^7 + 5q^6 + 6q^5 + 8q^4 + 9q^3 + 11q^2 + 11q + 12 \right. \\ \left. + \frac{11}{q} + \frac{11}{q^2} + \frac{9}{q^3} + \frac{8}{q^4} + \frac{6}{q^5} + \frac{5}{q^6} + \frac{3}{q^7} + \frac{2}{q^8} + \frac{1}{q^9} + \frac{1}{q^{10}}\right)t^5 \\ + \left(q^{10} + q^9 + 2q^8 + 3q^7 + 5q^6 + 6q^5 + 8q^4 + 9q^3 + 11q^2 + 11q + 12 \right. \\ \left. + \frac{11}{q} + \frac{11}{q^2} + \frac{9}{q^3} + \frac{8}{q^4} + \frac{6}{q^5} + \frac{5}{q^6} + \frac{3}{q^7} + \frac{2}{q^8} + \frac{1}{q^9} + \frac{1}{q^{10}}\right)t^4 \\ + \left(q^9 + q^8 + 2q^7 + 3q^6 + 4q^5 + 5q^4 + 7q^3 + 7q^2 + 8q + 8 \right. \\ \left. + \frac{8}{q} + \frac{7}{q^2} + \frac{7}{q^3} + \frac{5}{q^4} + \frac{4}{q^5} + \frac{3}{q^6} + \frac{2}{q^7} + \frac{1}{q^8} + \frac{1}{q^9}\right)t^3$$

$$+ \left(q^7 + q^6 + 2q^5 + 2q^4 + 3q^3 + 3q^2 + 4q + 4 + \frac{4}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{3}{q^3} + \frac{2}{q^4} + \frac{2}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7} \right) t^2 \\ + \left(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} \right) t + 1.$$

Полином Пуанкаре когомологий M_H^9 :

$$t^9 + \left(q^4 + q^3 + q^2 + q + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} \right) t^8 \\ + \left(q^7 + q^6 + 2q^5 + q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 3q + 3 + \frac{3}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{2}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{2}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7} \right) t^7 \\ + \left(q^9 + q^8 + q^7 + 2q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 4q^3 + 4q^2 + 4q + 4 \right. \\ \left. + \frac{4}{q} + \frac{4}{q^2} + \frac{4}{q^3} + \frac{3}{q^4} + \frac{2}{q^5} + \frac{2}{q^6} + \frac{1}{q^7} + \frac{1}{q^8} + \frac{1}{q^9} \right) t^6 \\ + \left(q^{10} + q^8 + q^7 + 2q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 2q^3 + 4q^2 + 3q + 4 \right. \\ \left. + \frac{3}{q} + \frac{4}{q^2} + \frac{2}{q^3} + \frac{3}{q^4} + \frac{2}{q^5} + \frac{2}{q^6} + \frac{1}{q^7} + \frac{1}{q^8} + \frac{1}{q^{10}} \right) t^5 \\ + \left(q^{10} + q^8 + q^7 + 2q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 2q^3 + 4q^2 + 3q + 4 \right. \\ \left. + \frac{3}{q} + \frac{4}{q^2} + \frac{2}{q^3} + \frac{3}{q^4} + \frac{2}{q^5} + \frac{2}{q^6} + \frac{1}{q^7} + \frac{1}{q^8} + \frac{1}{q^{10}} \right) t^4 \\ + \left(q^9 + q^8 + q^7 + 2q^6 + 2q^5 + 3q^4 + 4q^3 + 4q^2 + 4q + 4 \right. \\ \left. + \frac{4}{q} + \frac{4}{q^2} + \frac{4}{q^3} + \frac{3}{q^4} + \frac{2}{q^5} + \frac{2}{q^6} + \frac{1}{q^7} + \frac{1}{q^8} + \frac{1}{q^9} \right) t^3 \\ + \left(q^7 + q^6 + 2q^5 + q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 3q + 3 + \frac{3}{q} + \frac{2}{q^2} + \frac{2}{q^3} + \frac{1}{q^4} + \frac{2}{q^5} + \frac{1}{q^6} + \frac{1}{q^7} \right) t^2 \\ + \left(q^4 + q^3 + q^2 + q + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^3} + \frac{1}{q^4} \right) t + 1.$$

9.4.3. *Расщепление когомологий комплекса Шевалле — Эйленберга инволюцией I .* Полиномы Пуанкаре расщепления комплекса Шевалле — Эйленберга:

$$\widehat{P}_4^{\text{even}}(t) = 5t^8 + 20t^7 + 40t^6 + 60t^5 + 66t^4 + 44t^3 + 16t^2 + 4t + 1,$$

$$\widehat{P}_4^{\text{odd}}(t) = t^9 + 4t^8 + 16t^7 + 44t^6 + 66t^5 + 60t^4 + 40t^3 + 20t^2 + 5t.$$

Полиномы Пуанкаре когомологий многообразия Гейзенберга $H(M_H^9)$, расщепленных инволюцией I :

$$P_{H(M_H^9)}^{\text{even}} = 4t^8 + 15t^7 + 24t^6 + 20t^5 + 22t^4 + 24t^3 + 12t^2 + 4t + 1,$$

$$P_{H(M_H^9)}^{\text{odd}} = t^9 + 4t^8 + 12t^7 + 24t^6 + 22t^5 + 20t^4 + 24t^3 + 15t^2 + 4t.$$

Заключение

Многообразие Гейзенберга M_H^{2n+1} имеет замечательную реализацию. Рассмотрим n -мерное абелево многообразие V с одномерным комплексным расслоением, соответствующим кэлеровой форме на V . Ассоциированное расслоение над V со слоем S^1 можно отождествить с расслоением $M_H^{2n+1} \rightarrow T^{2n}$ (см. пп. 2.2.1 и 4.2).

Описанная конструкция естественно приводит к вопросам о приложениях дифференциальной геометрии и алгебраической топологии многообразий Гейзенберга в задачах о неабелевых тэта-функциях, квантовых торах и комбинаторике коэффициентов q -полиномов Гаусса, которые обсуждаются в литературе в связи с проблемами математической и теоретической физики (см., например, [34]–[37]).

Развитию наших результатов в этом круге вопросов мы планируем посвятить следующие публикации.

Благодарности

Авторы выражают благодарность В. Рубцову за полезное обсуждение результатов этой работы.

Литература

1. L. J. Santharoubane, “Cohomology of Heisenberg Lie algebras”, *Proc. Am. Math. Soc.* **87**, No. 1, 23–28 (1983).
2. M. A. Alvarez, “The Betti numbers for Heisenberg Lie algebras”, *J. Algebr. Comb.* **52**, No. 4, 461–467 (2020).
3. E. Sköldberg, “The homology of Heisenberg Lie algebras over fields of characteristic two”, *Math. Proc. R. Ir. Acad.* **105**, No. 2, 47–49 (2005).
4. G. Cairns, S. Jambor, “The cohomology of the Heisenberg Lie algebras over fields of finite characteristic”, *Proc. Am. Math. Soc.* **136**, No. 411, 3803–3807 (2008).
5. R. Howe, “Perspectives on invariant theory: Schur duality, multiplicity-free actions and beyond”, In: *The Schur Lectures (1992)*, pp. 1–182, Bar-Ilan Univ., Ramat-Gan (1995).
6. В. В. Жаринов, “О когомологиях алгебры Гейзенберга”, *Тр. МИАН* **228**, 61–75 (2000).
7. S. T. Lee, J. A. Packer, “The cohomology of the integer Heisenberg groups”, *J. Algebra* **184**, No. 1, 230–250 (1996).
8. А. И. Мальцев, “Об одном классе однородных пространств”, *Изв. АН СССР, Сер. мат.* **13**, No. 1, 9–32 (1949).
9. K. Nomizu, “On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups”, *Ann. Math. (2)* **59**, No. 3, 531–538 (1954).
10. В. В. Морозов, “Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка”, *Изв. ВУЗов, Мат.* No. 4, 161–171 (1958).
11. W. A. De Graaf, “Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2”, *J. Algebra* **309**, No. 2, 640–653 (2007).
12. В. М. Бухштабер, Ф. Ю. Попеленский, “Когомологии алгебр Хопфа и произведения Масси”, *Успехи мат. наук.* **79**, No. 4, 5–94 (2024).
13. В. М. Бухштабер, “Характер Чженя–Дольда в кобордизмах. I”, *Мат. сб.* **83**, No. 4, 575–595 (1970).
14. D. Riley, H. Usefi, “The isomorphism problem for universal enveloping algebras of Lie algebras”, *Algebr. Represent. Theory* **10**, No. 6, 517–532 (2007).
15. A. M. DuPré, “Combinatorial extension cohomology. I: Groups”, *Adv. Math.* **106**, No. 1, 96–117 (1994).
16. A. J. Berrick, A. A. Davydov, “Splitting of Gysin extensions”, *Algebr. Geom. Topol.* **1**, No. 2, 743–762 (2001).
17. J. Dixmier, “Cohomologie des algèbres des Lie nilpotentes”, *Acta Sci. Math.* **16**, 246–250 (1955).
18. B. Kostant, “Lie algebra cohomology and the generalized Borel–Weil theorem”, *Ann. Math. (2)* **74**, No. 2, 329–387 (1961).
19. В. В. Лычагин, “Контактная геометрия и нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка”, *Успехи мат. наук* **34**, No. 1, 137–165 (1979).

20. A. Kushner, V. Lychagin, V. Rubtsov, *Contact Geometry and Nonlinear Differential Equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2007).
21. Ш.-Ш. Чжэнь, *Комплексные многообразия*, ИЛ, М. (1961).
22. Дж. Хамфрис, *Введение в теорию алгебр Ли и их представлений*, МЦНМО, М. (2003).
23. G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*, Springer, Berlin etc. (1978).
24. S. Eilenberg, T. Ganea, "On the Lusternik–Schnirelmann category of abstract groups", *Ann. Math. (2)* **65**, No. 3, 517–518 (1957).
25. J. Oprea, "The category of nilmanifolds", *Enseign. Math., II. Sér.* **38**, No. 1–2, 27–40 (1992).
26. В. М. Бухштабер, "Полиномиальная эйлерова характеристика нильмногообразий", *Функц. анал. прилож.* **58**, No. 1, 22–41 (2024).
27. M. Khovanov, "A categorification of the Jones polynomial", *Duke Math. J.* **101**, No. 3, 359–426 (2000).
28. J. J. Sylvester, "Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants", *Phil. Mag. (5)*, **5**, No. 30, 178–188 (1878).
29. K. M. O'Hara, "Unimodality of Gaussian coefficients: A constructive proof", *J. Comb. Theory* **53**, No. 1, 29–52 (1990).
30. I. Pak, G. Panova, "Strict unimodality of q -binomial coefficients", *C. R., Math., Acad. Sci. Paris* **351**, No. 11–12, 415–418 (2013).
31. D. Kraines, "Massey higher products", *Trans. Am. Math. Soc.* **124**, No. 3, 431–449 (1966).
32. J. P. May, "Matric Massey products", *J. Algebra*. **12**, No. 4, 533–568 (1969).
33. И. К. Бабенко, И. А. Тайманов, "Произведения Масси в симплектических многообразиях", *Мат. сб.* **191**, No. 8, 3–44 (2000);
34. К. Кассель, *Квантовые группы*, Фазис, М. (1999).
35. F. Luef, Yu. I. Manin, "Quantum theta functions and Gabor frames for modulation spaces", *Lett. Math. Phys.* **88**, No. 1–3, 131–161 (2009).
36. Yu. I. Manin, "Theta functions, quantum tori and Heisenberg groups", *Lett. Math. Phys.* **56**, No. 3, 295–320 (2001).
37. A. S. Schwarz, "Theta functions on noncommutative tori", *Lett. Math. Phys.* **58**, No. 1, 81–90 (2001).

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2024 г.

С. С. Гончаров

ВЫЧИСЛИМЫЕ БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ И СЛОЖНОСТЬ ИДЕАЛА ФРЕШЕ

Вопросы вычислимости булевых алгебр лежат в русле многих исследований в теории конструктивных и вычислимых моделей, которая была инициирована А. И. Мальцевым и активно развивается в настоящее время. Мы исследуем один из давно обсуждаемых вопросов о разрешимости идеала Фреше и связи с разрешимостью множества атомов.

*Посвящается 115-летнему юбилею основателя
Сибирской школы алгебры и логики академика
А. И. Мальцева*

1. Введение

В статье [1] Мальцева было положено начало систематического изучения конструктивных моделей. Мальцев ввел [2] понятие рекурсивной модели. В современной литературе чаще используется термин *вычислимость* вместо *рекурсивности*. Соответственно, рекурсивные модели также часто называют вычислимыми. Мальцев отметил, что понятия конструктивной модели и вычислимой модели эквивалентны. В настоящее время общепринятым становится термин *вычисляемая алгебраическая структура*.

Отметим два перспективных направления в исследованиях вычислимости алгебраических структур. Одно направление связано с проблемой существования вычислимых представлений алгебраических систем. Второе относится к исследованиям автоустойчивости алгебраических структур и их алгоритмических размерностей [3]. Эта проблематика активно изучалась для булевых алгебр [4] и присутствовала во многих работах, посвященных изучению ограниченной n -разрешимости, а также различных алгоритмических свойств и их взаимосвязей в вычислимых булевых алгебрах и их обогащениях. В частности, Фейнер [5] инициировал изучение вопроса о существовании вычислимых представлений позитивных булевых алгебр. Для отрицательного решения этой проблемы Фейнер построил новую иерархию подмножеств множества натуральных чисел, вычислимых над теорией стандартной модели арифметики. Эта иерархия, которую стали называть *фейнеровской иерархией*, показала свою эффективность также при исследовании вопроса о существовании разрешимых представлений вычислимых булевых алгебр.

В данной статье мы исследуем вопрос о разрешимости идеала Фреше в булевых алгебрах. Мы используем стандартные определения и обозначения из монографии [4], в которой рассматриваются счетные, а также вычислимые и разрешимые булевы алгебры и изучаются их связи с общей проблематикой теории конструктивных моделей [3]. Определения и результаты теории вычислимости можно найти в [6], а теории моделей — в [7].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №23-11-00170, <https://rscf.ru/project/23-11-00170/>.

С. С. Гончаров: Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия, s.s.goncharov@math.nsc.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 72–82 (2024).

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathfrak{B}$ — булева алгебра или алгебраическая система некоторой сигнатуры σ . Заметим, что булевы алгебры в разных применениях могут рассматриваться в разных сигнатурах [4]. Мы используем стандартное определение булевой алгебры как алгебры подмножеств некоторого множества, замкнутой относительно объединений, пересечений и взятия дополнений, что эквивалентно обычному алгебраическому определению через выполнимость тождеств.

Обозначим через $\text{Th}(\mathfrak{B})$ элементарную теорию рассматриваемой алгебраической системы. Если ν — нумерация основного множества алгебраической системы $\mathfrak{B}$, то назовем пару $(\mathfrak{B}, \nu)$ *нумерованной алгебраической системой*. Для нумерованной алгебраической системы $(\mathfrak{B}, \nu)$ рассмотрим обогащение $\mathfrak{B}_\nu$ структуры $\mathfrak{B}$ до сигнатуры σ_N , положив в качестве значения константы a_i элемент $\nu(i)$ для любого $i \in N$.

Определение 2.1. Нумерованная алгебраическая система $(\mathfrak{B}, \nu)$ называется *конструктивной*, если множество истинных бескванторных формул в структуре $D(\mathfrak{B}, \nu) \Leftarrow \{\varphi(c_{m_1}, \dots, c_{m_k} \mid \varphi(x_1, \dots, x_{m_k})\}$ является бескванторной формулой и выполнено условие $\mathfrak{B} \models \varphi(\nu m_1, \dots, \nu m_k)\}$ вычислимо, где формулы наряду с сигнатурными символами содержат также константные символы для элементов структуры.

Напомним эквивалентные понятия разрешимой [8] и вычислимой (рекурсивной) алгебраической системы [2]. Последние были определены без нумераций, но на вычислимых основных множествах, которые являются подмножествами множества натуральных чисел или совпадают с множеством натуральных чисел.

Замечание 2.1. Вопросы изучения разрешимости различных фрагментов теорий также играют важную роль в теории вычислимых алгебраических систем. При рассмотрении фрагмента позитивных бескванторных формул возникает класс позитивных структур, исследование которых играет существенную роль не только в математической теории, но и для приложений в программировании.

Определение 2.2 (Мальцев [2]). Алгебраическая система $\mathfrak{A}$ называется *вычислимой (рекурсивной)*, если множество A рекурсивно и операции и отношения на ней вычислимы.

Выбрав для каждого элемента в конструктивной системе наименьший номер и индуцируя на эту систему структуру нашей модели, получим вычислимую алгебраическую систему. Причем, если первоначальная алгебраическая система была сильно конструктивной, то полученная система будет разрешимой. Обратно, по вычислимой алгебраической системе легко построить ее конструктивизацию, взяв в качестве нумерации любое рекурсивное перечисление основного множества A , причем конструктивизация будет сильной, если исходная алгебраическая система разрешима.

В данной статье мы продолжаем изучение алгоритмических свойств вычислимых булевых алгебр, которые исследовались, в частности, в [5, 4, 9]. Отметим, что много вопросов об алгоритмических свойствах все еще остаются открытыми.

3. Множество атомов и идеал Фреше в булевых алгебрах

Один из давно поставленных, но нерешенных вопросов — выяснение взаимосвязей между сложностью множества атомов и идеала Фреше, состоящего из всех элементов булевой алгебры, которые равны объединениям конечных множеств атомов и нуля булевой алгебры.

Заметим, что для вычислимых суператомных булевых алгебр не только идеал Фреше, но и итерированные идеалы Фреше можно сделать вычислимыми. Однако это не так для произвольных вычислимых булевых алгебр.

Отметим, что имеются открытые вопросы о вычислимости булевых алгебр с выделенными идеалами как определяемыми в булевой алгебре, так и произвольными, а также некоторые вопросы из теории вычислимых алгебраических структур в таких обогащениях булевых алгебр. Остаются пока открытыми и некоторые интересные вопросы, связанные с обогащениями подалгебр и автоморфизмами.

В данной статье нас будут интересовать свойства фильтров Фреше для булевых алгебр. Покажем следующие простые свойства, связанные с атомами. Сначала напомним определения и

понятия, применяемые в технике порождающих деревьев для булевых алгебр [4]. Заметим, что эта техника применялась при изучении счетных булевых алгебр.

В [4] для построения порождающих множеств счетных булевых алгебр использовались подмножества множества натуральных чисел с частичным порядком $\preceq$. В этом случае в качестве наибольшего элемента принимался 0 и для каждого элемента n из N ниже определялись два меньших элемента $L(n) = 2n + 1$ и $R(n) = 2n + 2$. Тем самым на N задавался частичный порядок, определяющий 2-ветвящееся дерево.

Определение 3.1. Подмножество $D \subseteq N$ называется *деревом*, если для любого $n \in D$ все бóльшие элементы лежат в D , а для любого ненулевого элемента $n \in D$ его сосед $S(n)$ также лежит в D , где

$$S(2m + 1) = 2m + 2, \quad S(2m + 2) = 2m + 1.$$

В [4] показано, что для любой счетной булевой алгебры B существуют дерево D и вложение g из D в B такие, что $g(0) = 1_B$, для любого $n \in D$ значение $g(n)$ отлично от нуля булевой алгебры B , если $L(n) \in D$, то по условию $R(n) \in D$ выполнены равенства

$$g(2n + 1) \cup g(2n + 2) = g(n),$$

$$g(2n + 1) \cap g(2n + 2) = 0_B$$

и для любого ненулевого элемента булевой алгебры существуют элемент $b \in B$ и конечное подмножество K в дереве D такие, что

$$b = \bigcup_{n \in K} g(n).$$

Таким образом, каждый ненулевой элемент равен конечному объединению элементов дерева $g(D)$, порождающего булеву алгебру B .

Заметим, что концевые элементы дерева D , под которыми уже нет элементов дерева D , в точности определяют атомы булевой алгебры B . В [4] по любому вычислимо перечислимому дереву D построены вычисляемая булева алгебра B_D и вычисляемая функция g , которая отображает D в B_D и определяет порождающее дерево $g(D)$ в B_D . Заметим также, что по любой вычислимой булевой алгебре можно определить эффективно вычислимо перечислимое дерево и вычисляемую функцию g , определяющую для этой булевой алгебры это порождающее дерево.

Лемма 3.1. Если B — вычисляемая булева алгебра с вычислимо перечислимым множеством атомов, то множество атомов вычислимо, а множество элементов идеала Фреше вычислимо перечислимо.

Доказательство. Из вычислимой перечислимости множества атомов и определимости множества неатомов $\exists$ -формулой по теореме Поста получаем вычислимость множества атомов и вычислимость порождающего дерева. Из перечислимости множества атомов непосредственно следует перечислимость множества элементов идеала Фреше. Если мы будем перечислять конечные объединения подмножеств всех перечисленных к этому шагу атомов, то вычисляемая перечислимость очевидна для этого вычислимого представления с вычислимо перечислимым множеством атомов. Лемма доказана. $\square$

Воспользуемся техникой порождающих деревьев из [4] для доказательства следующего свойства алгоритмической сложности множества атомов в различных представлениях булевой алгебры с бесконечным вычислимым множеством атомов.

Лемма 3.2. Если B — вычисляемая булева алгебра с бесконечным вычислимым множеством атомов, то для этой булевой алгебры существует другое вычислимое представление B' , в котором множество атомов не вычислимо, но идеал Фреше вычислимо перечислим.

Доказательство. Пусть задана вычисляемая булева алгебра B . Ввиду отмеченных выше свойств порождающих деревьев мы можем рассмотреть вычислимо перечислимое порождающее дерево D для нашей булевой алгебры и вычисляемую функцию g , определяющую это порождающее дерево в булевой алгебре B . Из вычислимости множества атомов в булевой алгебре B получаем перечислимость концевых элементов в дереве D . Отсюда очевидно, что это дерево вычислимо. Рассмотрим

все концевые точки A в дереве D и вычислимо перечислимое не вычислимое подмножество $X \subseteq N$ [6]. Так как множество A вычислимо, можно взять вычислимую функцию f , отображающую N на A в порядке возрастания элементов A . Определим дерево

$$D' = D \cup \{L(n), R(n) | n \in f(X)\},$$

т.е. под концевые элементы дерева D добавим по два лежащих ниже элемента. Тем самым мы определяем дерево $D' \supseteq D$.

Определим булеву алгебру $B_{D'}$ по порождающему дереву D' и в ней — подалгебру B_D с порождающим деревом D . Очевидно, что булевы алгебры B изоморфны, так как порождаются одним и тем же деревом D , а булева алгебра $B_{D'}$ согласно [4, предложение 1.7.2] изоморфна булевой алгебре B_D и, следовательно, B . Однако в булевой алгебре $B_{D'}$ множество атомов не вычислимо, так как множество концевых элементов дерева D' не вычислимо из-за того, что подмножество элементов множества $A \setminus f(X)$ не вычислимо перечислимо по построению. Таким образом, мы построили для B другое вычислимое представление, в котором множество атомов не вычислимо. Однако множество элементов фильтра Фреше в дереве D' состоит из элементов в идеале Фреше дерева D и добавленных элементов $\{L(n), R(n) | n \in f(X)\}$, так как мы расщепили элементы из образа вычислимо перечислимого не вычислимого множества X на пары концевых элементов; элементы из фильтра Фреше в дереве там и остались, а эти пары атомов добавились. Теперь объединения конечных элементов из идеала Фреше в дереве определяют идеал Фреше, который будет вычислимо перечислимым также в булевой алгебре $B_{D'}$. Итак, мы построили вычислимую булеву алгебру, изоморфную B , с вычислимо перечислимым идеалом Фреше, но при этом атомы уже не образуют вычислимо перечислимое множество. Лемма доказана. $\square$

Таким образом, из вычислимой перечислимости идеала Фреше вывести вычислимую перечислимость множества атомов в той же алгебре не получится. Для вычислимой булевой алгебры с вычислимым бесконечным множеством атомов можно показать, что существуют также другие вычислимые представления. Заметим, что если в булевой алгебре число атомов конечно, то идеал Фреше и множество атомов всегда конечны и вычислимы, так что вопросы о вычислимости не возникают. Представляет интерес лишь случай с бесконечным числом атомов.

Лемма 3.3. *Если B — вычислимая булева алгебра с бесконечным множеством атомов и идеал Фреше вычислимо перечислим, то для этой булевой алгебры существует другое вычислимое представление B' , в котором множество атомов вычислимо.*

Доказательство. Вновь воспользуемся конструкцией порождающих деревьев для булевых алгебр. Рассмотрим для булевой алгебры вычислимо перечислимое дерево D , которое задает в B порождающее дерево. Пусть g задает отображение D в B и $g(D)$ — порождающее дерево в B .

Построим новое дерево, которое будет определять ту же булеву алгебру, но множество атомов у нее будет вычислимо. Для этого достаточно построить дерево, в котором множество концевых вершин будет вычислимо.

Мы будем строить новое дерево так, чтобы деревья различались лишь на элементах из идеалов Фреше для строящихся по ним булевых алгебр. По условию идеал Фреше у нашей булевой алгебры вычислимо перечислим. Поэтому множество элементов дерева, которые определяют в булевой алгебре элементы идеала Фреше, также будет вычислимо перечислимо. Рассмотрим подмножество F из D , образы элементов которого попадают в идеал Фреше. Так как в булевой алгебре бесконечное число атомов, все они являются элементами идеала Фреше и им соответствуют концевые элементы дерева, подмножество F в дереве D бесконечно и существует вычислимое перечисление элементов F без повторений $a_0, a_1, a_n, \dots$.

По построению порождающее дерево D , построенное по вычислимой булевой алгебре B , вычислимо перечислимо, и мы можем для него построить вычислимую последовательность конечных деревьев

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \subseteq \dots, D_n, \dots$$

и последовательность подмножеств

$$\emptyset = F_0 \subseteq F_1 \subseteq F_2 \subseteq \dots, F_n, \dots,$$

которые состоят из элементов идеала Фреше булевой алгебры B , перечисленных к шагу n , а именно

$$F_n = \{x \in D_n \mid (\exists i < n) x \preceq a_i\}.$$

Определим D_{n+1} так, что $\{a_0, a_1, \dots, a_n\} \subseteq D_{n+1}$.

В процессе построения искомого дерева будем строить по шагам вычислимую последовательность конечных деревьев

$$D_0^* \subseteq D_1^* \subseteq D_2^* \subseteq \dots, D_n^*, \dots$$

и последовательность конечных точек

$$A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots, A_n, \dots$$

строящегося дерева

$$D^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n^*.$$

Шаг 0. Определим $D_0 = \{0\}$ и $A_0 = \emptyset$.

Шаг $n + 1$. Пусть D_n^* и конечные точки A_n в D_n^* уже построены и $D_n^*, A_n \subseteq D_n$.

Согласно нашему предположению к шагу $n + 1$ в D_n^* уже перечислены элементы $a_0, \dots, a_n$. Определим дерево

$$D'_{n+1} = D_n^* \cup \{x \in D_{n+1} \mid (\exists y)((x \preceq y \& y \text{ — конечной элемент в } D_n^*) \& \neg(y \in A_n))\}.$$

Теперь расширим множество D'_{n+1} до множества D_{n+1}^* : для каждого конечного элемента a в D'_{n+1} , который не лежит в множестве A_n , найдется элемент z из $\{a_0, \dots, a_n\}$ такой, что $a \preceq z$; этот элемент добавляем в D_{n+1}^* . Добавим оба элемента $L(a)$ и $R(a)$ в множество A_{n+1} , т.е. эти элементы становятся конечными элементами дерева, и элементы под ними уже не добавляются в дерево.

Таким образом, мы добавляем в D_{n+1}^* элементы, которые, возможно, не лежат в D и предшествующий элемент n , лежащий в идеале Фреше в D , остается в идеале Фреше в строящемся дереве D^* . Возможно, что эти элементы попадут в D позже, но они уже объявлены атомами в D^* и элементы ниже этих элементов уже в дальнейшем не добавятся в D^* . Заметим также, что если элемент дерева D не лежит в идеале Фреше этого дерева, то он попадет в дерево D^* . Случай, когда элемент не лежит в D и попадает в D^* , возможен лишь тогда, когда он построен для конечного элемента дерева D и сразу же при добавлении объявляется конечным в дереве D^* .

Из построения следует, что множество $D^{**} = D \cap D^*$ является деревом и в нем под любым его конечным элементом лежит конечное число элементов из D и D^* . По теореме Реммеля (см. [4]) все три булевы алгебры $B_{D^{**}}$, B_{D^*} и B_D изоморфны, а множество конечных элементов в D^* перечислимо и, следовательно, множество атомов также вычислимо перечислимо в B_{D^*} , откуда по теореме Поста следует его вычислимость. Лемма доказана. $\square$

Из доказанных лемм мы сразу получаем следующую теорему.

Теорема 3.1. *Булева алгебра имеет вычислимое представление с вычислимо перечислимым множеством атомов тогда и только тогда, когда для нее существует вычислимое представление с вычислимо перечислимым идеалом Фреше.*

Рассмотрим следующий вопрос: Будет ли из разрешимости атомов в некотором представлении следовать разрешимость в некотором вычислимом представлении идеала Фреше? Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к важной классификации функций, вычисляемых с оракулом множества $\emptyset^\omega$, что совпадает со сложностью теории стандартной модели арифметики. Эта классификация предложена Фейнером [5] и уже эффективно применялась для исследования многих важных вопросов в теории булевых алгебр [4] и других вопросов теории вычислимости.

4. Иерархия Фейнера

Напомним кратко эту важную конструкцию — иерархию Фейнера [5]. Фейнер ввел тонкую классификацию множеств, вычислимых относительно $\varnothing^\omega$, но не по уровням арифметических формул, определяющих сложность фрагмента арифметической сложности для определения вычислимости, а так, чтобы при необходимости можно было бы использовать сложности, равномерно растущие в зависимости от уровня вычислимости функции на начальном отрезке.

Следуя [6], для любого множества A определим скачок A' как $\{n \mid \varphi_n^A(n) \text{ определена}\}$, где $\{\varphi_n^A(x), n \in N\}$ — универсальная вычислимая нумерация всех частично вычислимых функций с оракулом A . Начиная с пустого множества, определим $\varnothing^0 = \varnothing$ и $\varnothing^{n+1} = (\varnothing^n)'$, а для ординала ω положим $\varnothing^\omega = \{(n, m) \mid m \in \varnothing^n\}$.

Пусть $e \in N$ и $(a, b) \in N^2$. Введем класс функций $\Phi(a, b)$, вычислимых с оракулом $\varnothing^\omega$, считая, что функция $\varphi_e^{\varnothing^\omega}$ имеет тип $\Phi(a, b)$, если она определена для всех натуральных чисел $x \in N$ и при вычислении значения $\varphi_e^{\varnothing^\omega}(x)$ на элементе x не задает оракулу $\varnothing^\omega$ вопрос “ $(m, n) \in \varnothing^\omega$ ” для любых m, n таких, что $m > a + xb$. В этом случае запись $\varphi_e^{\varnothing^\omega} \in \Phi(a, b)$ означает, что для $\varnothing^\omega$ -номера вычислимой с оракулом $\varnothing^\omega$ функции выполнено условие принадлежности этой функции классу $e \in \Phi(a, b)$.

Подмножество $X \subseteq N$ принадлежит классу Фейнера $\Phi(a, b)$ подмножеств N , если для характеристической функции χ_X этого множества есть $\varnothing^\omega$ -номер вычислимой с оракулом $\varnothing^\omega$ функции, для которого выполнено условие принадлежности этой функции классу $e \in \Phi(a, b)$.

Фейнер установил существование вычислимых функций, определяющих сложность уровня арифметической иерархии по аргументу, нужному для проверки условия принадлежности соответствующему классу иерархии, а также построил близкие по сложности определения множества, которые не входят в заданный уровень иерархии. Приведем эти три результата, которые потребуются для нашей конструкции булевой алгебры.

Фейнер [5] дал ясное и элегантное описание классов иерархии.

Предложение 4.1 ([5]). Если f — вычислимая функция, отображающая N на N , то $X = \{n \mid (\exists z_1)(\forall z_2) \dots f(\langle z_1, z_2, \dots, z_{a+nb} \rangle) = 1\}$ тогда и только тогда, когда $X \in \Phi(a, b)$.

Для множеств, которые не лежат в фиксированном классе, но близки по вычислительным характеристикам, на основе этого подхода получен метод построения таких множеств. Для этого была рассмотрена равномерно вычислимая аппроксимация оракула $\varnothing^\omega$ множествами

$$\varnothing^{\omega n} = \{\langle x, m \rangle \mid x \in \varnothing^m \text{ и } m \leq n\}.$$

Определим искомое множество

$$X(a, b) = \{n \mid n \text{ четно и } n/2^{\varnothing^{\omega a + nb}}(n) = 0\}.$$

Конструкция Фейнера дает возможность рассматривать вычислимую последовательность некоторых аргументов, на которых определяется оценка, тогда как на остальных она не важна, но такие множества уже не лежат в данном уровне иерархии Фейнера. В этом случае в качестве такой последовательности берется последовательность четных чисел. Это множество обладает следующими свойствами.

Предложение 4.2 ([5]). 1. Существует вычислимая функция f , отображающая N на N и такая, что $2m \in X(2, 2)$ тогда и только тогда, когда

$$\{(\exists i)(\exists^\omega z_1) \dots (\exists^\omega z_{2m}) \dots f(\langle i, z_1, z_2, \dots, z_{2m} \rangle) = 1\}.$$

2. Если $Y \subseteq N$ и симметрическая разность $X(2, 2) \Delta Y$ содержит только нечетные числа, то $Y \notin \Phi(2, 2)$.

Теорема 4.1. Существует позитивная атомная булева алгебра, у которой нет вычислимого представления.

Доказательство. Будем следовать конструкции Фейнера с небольшими изменениями. Для этого вначале оценим в иерархии Фейнера характеристику вычислимой атомной булевой алгебры с вычислимым представлением относительно модифицированного свойства Фейнера с заменой

условия слагаемого в булевой алгебре безатомных элементов на элементы, рассмотренные в $1 + \omega \times \eta$ вместо элементов типа $1 + \eta$.

Определим свойства булевой алгебры $\mathcal{B}$ и последовательности идеалов Фреше $F_n(\mathcal{B})$, $n \in N$, где $F_0(\mathcal{B}) = \{0_{\mathcal{B}}\}$ и $F_1(\mathcal{B})$ — идеал Фреше, состоящий из объединения конечного числа атомов булевой алгебры $\mathcal{B}$, а $F_{n+1}(\mathcal{B})$ состоит из элементов b из $\mathcal{B}$ таких, что $b/F_n(\mathcal{B})$ лежит в идеале Фреше фактор-алгебры $\mathcal{B}/F_n(\mathcal{B})$:

$$(1) \alpha_n(x) \Leftrightarrow x \in F_{n+1}(\mathcal{B}),$$

$$(2) \lambda_n \Leftrightarrow \neg \alpha_n(x),$$

$$(3) \text{Atomistic}_n(x) \Leftrightarrow x/F_n(\mathcal{B}) \text{ — атомный элемент в } \mathcal{B}/F_{n+1}(\mathcal{B}),$$

(4) $\gamma_n(x) \Leftrightarrow x(\mathcal{B}) \notin F_{n+1}(\mathcal{B}) \& (\forall y)(y \leq_{\mathcal{B}} x \Rightarrow (y \in F_n(\mathcal{B}), \text{ если } y/F_1 \text{ — атомный элемент в } \mathcal{B}/F_1(\mathcal{B}) \& \text{ существует бесконечно много элементов под } x, \text{ принадлежащих } \mathcal{B}/F_n(\mathcal{B}), \text{ но не принадлежащих } \mathcal{B}/F_{n-1}(\mathcal{B})))$,

$$(5) \Psi_n \Leftrightarrow (\exists x)\gamma_n(x).$$

Рассмотрим несколько модифицированную конструкцию построения по линейно упорядоченному множеству L булевой алгебры $\mathcal{B}_L$. Рассмотрим вначале булеву алгебру $(P(L), \cup, \cap, C, 0, 1)$ всех подмножеств $P(L)$ основного множества L с операциями объединения, пересечения, взятия дополнения и выделенными элементами для пустого множества и всего основного множества L . Для любых элементов a, b из L определим полуоткрытые интервалы вида

$$]a, b] \Leftrightarrow \{x \in L \mid a \leq x \& x < b\},$$

$$]-\infty, b] \Leftrightarrow \{x \in L \mid x < b\},$$

$$[a, +\infty[\Leftrightarrow \{x \in L \mid a \leq x\}.$$

Рассмотрим подалгебру булевой алгебры $(P(L), \cup, \cap, C, 0, 1)$, порожденную всеми такими полуоткрытыми интервалами, и обозначим ее $\mathcal{B}_L$. Очевидно, что $\mathcal{B}_L$ — булева алгебра и она порождается множеством элементов $\{[a, +\infty[\mid a \in L\}$, которые упорядочены в ней по типу L . Кроме того, булева алгебра $\mathcal{B}_L$ счетна, если L — счетный линейный порядок.

В силу [4, лемма 3.5.1] для построенных изоморфизмов в булевой алгебре $\mathcal{B}_{\omega^{n+1} + \omega \times \eta}$ выполнена определенная нами формула Ψ_n , которая равна формуле Ψ_n^1 из [4].

Лемма 4.1. *Если атомная булева алгебра $\mathcal{B}$ вычислима, то справедливы следующие утверждения.*

0. Формула $\alpha_0(x) \Leftrightarrow x \in F_1(\mathcal{B})$ выделяет вычислимое множество.
1. Формула $\alpha_{n+1}(x) \Leftrightarrow x \in F_{n+1}(\mathcal{B})$ выделяет Σ_{2n+2}^0 множество в булевой алгебре $\mathcal{B}$.
2. Формула $\lambda_n \Leftrightarrow \neg \alpha_n(x)$ выделяет Π_{2n}^0 множество в булевой алгебре $\mathcal{B}$.
3. Формула $\text{Atomistic}_k(x) \Leftrightarrow x/F_k(\mathcal{B})$ — атомный элемент в $\mathcal{B}/F_k(\mathcal{B})$ выделяет Π_{2k+3}^0 множество в булевой алгебре $\mathcal{B}$.
4. Формула $\gamma_n(x) \Leftrightarrow x \notin F_{n+1}(\mathcal{B}) \& (\forall y)(y \leq_{\mathcal{B}} x \Rightarrow (y \in F_n(\mathcal{B}), \text{ если } y/F_1(\mathcal{B}) \text{ — не атомный элемент } \& \text{ существует бесконечно много элементов, находящихся под } x, \text{ принадлежащих } F_n(\mathcal{B}), \text{ но не принадлежащих } F_{n-1}(\mathcal{B})))$ выделяет Π_{2n+1}^0 множество в булевой алгебре $\mathcal{B}$.
5. Выполнимость последовательности формул $\Psi_n \Leftrightarrow (\exists x)\gamma_n(x), n \in N \& n \geq 4$ в булевой алгебре с вычислимым идеалом Фреше определяется последовательностью Σ_{2n+2}^0 формул, проверкой выполнимости в булевой алгебре $\mathcal{B}$.
6. Множество $N(\mathcal{B}) = \{m \mid \mathcal{B} \models \Psi_m\}$ лежит в уровне $\Phi(2, 2)$ иерархии Фейнера.

Лемма доказывается простой проверкой истинности соответствующих формул и оценки их сложности, как в [5, предложение 3.5.3] и [4].

Следуя [5, лемма 4.5], можно доказать следующее предложение.

Предложение 4.3 ([5]). Если δ — функция трех переменных из N такая, что для любых m, i, h задано подмножество $\delta(m, i, h) \leq (\omega \times \omega^{2m} 0$ и $\omega^{2m-1} \leq \delta(m, i, h)$, то $\mathcal{B} \models \Psi_{2m}$ тогда и только тогда, когда $(\exists i) \neg (\exists^\omega h)(\delta(m, i, h) = \omega^{2m})$, где

$$\mathcal{B} = \sum_{m \in \omega} \sum_{i \in \omega} \sum_{h \in \omega} (\delta(m, i, h) + 1 + \omega \times \eta).$$

Аналогично [5, § 5] определим вычислимый линейный порядок упорядоченного типа $\sum_{m \in \omega} (\omega^{2m} + 1 + \omega \times \eta) \times \omega^2$, а затем для этой вычислимой атомной булевой алгебры определим вычислимый перечислимый идеал ∇ , который и даст нам искомую позитивную атомную булеву алгебру, не допускающую вычислимых представлений.

Теперь модифицируем конструкцию Фейнера с заменой порядка $N, \subseteq$ упорядоченного типа $1 + \eta$, где η — плотный счетный порядок без концов η , к которому добавлен первый элемент, на вычислимый порядок $N, \subseteq_1$ упорядоченного типа $1 + \omega \times \eta$.

Как и в конструкции Фейнера, определяем вычислимый перечислимый идеал ∇ на булевой алгебре $(\mathcal{B})_{\sum_{m \in \omega} (\omega^{2m} + 1 + \omega \times \eta) \times \omega^2}$, как и в [5] позитивную, но уже атомную булеву алгебру такую, что в ней выполнена формула Φ_{2m} тогда и только тогда, когда $2m \in X(2, 2)$. Отсюда следует требуемый результат: эта позитивная атомная булева алгебра не имеет вычислимого представления. Теорема доказана. $\square$

Докажем основную теорему о существовании вычислимой атомной булевой алгебры с вычислимым множеством атомов и вычислимо перечислимым идеалом Фреше такой, что в любом ее вычислимом представлении идеал Фреше не вычислим.

Теорема 4.2. *Существует вычислимая атомная булева алгебра с вычислимым множеством атомов и вычислимо перечислимым идеалом Фреше такая, что ее фактор-алгебра по идеалу Фреше не имеет вычислимого представления и эта алгебра атомная.*

Доказательство. Для позитивной булевой алгебры $\mathcal{B}$ из построения атомной булевой алгебры в теореме Фейнера построим порождающее дерево. Пусть задана вычислимая последовательность всех номеров элементов $\mathcal{B}$. Очевидно, что элементы этой последовательности могут встречаться многократно с одним и тем же элементом из $\mathcal{B}$. Без ограничения общности будем считать, что каждый элемент имеет бесконечно много номеров и существует рекурсивно перечислимое множество $\text{Zero} = \{z_0 < z_1, \dots, z_n, \dots\}$ всех номеров нулевого элемента булевой алгебры. Зафиксируем для нашей позитивной булевой алгебры вычислимые функции $f_\cup, f_\cap, f_c$ для определения значений операций объединения, пересечения и взятия дополнения соответственно.

Будем строить по шагам порождающее дерево, которое будет вычислимо перечислимым, и его вложение g^t из D^t в $\mathcal{B}$. По построению $D^t \subseteq D^{t+1}$ и $g^{t+1}(x) = g^t(x)$ для всех $x \in D^t$. Заметим, что множество Zero есть в точности перечисление идеала, по которому построена наша фактор-алгебра $\mathcal{B}$ из рекурсивной булевой алгебры $\mathcal{B}_{\sum_{m \in \omega} (\omega^{2m} + 1 + \omega \times \eta) \times \omega^2}$.

Идея состоит в построении порождающего дерева для булевой алгебры $\mathcal{B}_{\sum_{m \in \omega} (\omega^{2m} + 1 + \omega \times \eta) \times \omega^2}$ и элементов идеала для этого дерева. Однако в случае перечислимого идеала распознать элементы, попавшие в идеал, мы сможем не сразу, а лишь через конечное число шагов. Тогда мы будем перестраивать порождающее дерево таким образом, чтобы через конечное число шагов ниже элементов идеала было бы только конечное число элементов из дерева, а если в дереве встречается атом, то под ним была бы лишь одна бесконечная ветвь дерева. Мы также можем добиться, чтобы множество концевых точек в перестроенном дереве было вычислимым.

Мы построим дерево D_B , определяя на шаге t поддереву D_B^t и подмножество элементов F^t , g^t -образы которых попадают под элементы фильтра ∇^t , перечисленные к этому шагу в $\{z_0, \dots, z_t\}$, или они сами лежат в этом множестве из идеала ∇ , определяющего нашу фактор-алгебру $\mathcal{B}$. Эти элементы будут определять элементы фильтра Фреше для булевой алгебры, строящейся по дереву булевой алгебры B_D ; причем они будут построены так, что для любого элемента, отмеченного в дереве D_B^t как g^t -прообраз элемента фильтра ∇^t , в дерево D_B будет добавлено после этого только конечное число вершин. При этом все конечные вершины в D_B , лежащие под таким элементом,

будут отмечены меткой Atom в D_F на некотором шаге t и под ними больше элементы не появятся, т.е. они будут в построенной булевой алгебре по этому дереву определять атомы, а их конечные объединения — элементы фильтра Фреше в строящейся булевой алгебре по этому дереву. Эти атомы лежат также в идеале нашей булевой алгебры.

Пусть b_0 — номер единицы булевой алгебры $\mathcal{B}$.

Шаг 0. Определим дерево $D_B^0 \Leftarrow \{0\}$ и $g^0(0) = b_0$, а $D_F^0 \Leftarrow \{0\}$.

На нулевом шаге определяем $g_B^0(0) \Leftarrow 0$ и $g_F^0(0) \Leftarrow 0$.

Шаг $t + 1$. Заметим, что на каждом шаге t дерево D_B^t является поддеревом в D_F^t . Определим концевые элементы дерева, g^t -образы которых еще не попали под какой-либо элемент из ∇^t и не лежат в I^t , по индукционному предположению. Пусть это будут элементы $x_0, \dots, x_k$. Рассмотрим элемент a_t из перечисления всех элементов этой позитивной булевой алгебры $\mathcal{B}$. Положим

$$D_B^{t+1} \Leftarrow D_B^t \cup \{L(x_i), R(x_i) | 0 \leq i \leq k\}.$$

Теперь доопределим g^t до g^{t+1} на добавленных элементах, полагая

$$g^{t+1}(L(x_i)) \Leftarrow f_{\cap}(g^t(x_i), a_t),$$

$$g^{t+1}(R(x_i)) \Leftarrow f_{\cap}(g^t(x_i), f_C(a_t))$$

для каждого $i \in \{0 \leq i \leq k\}$. Рассмотрим множество $\nabla^{t+1} \Leftarrow \nabla^t \cup \{z_t\}$. Для каждого элемента i из D_B^{t+1} проверяем, нет ли в D_B^{t+1} элемента j над i в D_B^{t+1} такого, что $g^{t+1}(j) \in \nabla^{t+1} \nabla^{t+1}$. Каждый такой i добавляем в F^{t+1} , а если это концевой элемент в D_B^{t+1} , то ставим на него метку Atom. На следующих шагах под этот элемент элементы из D_B уже не смогут попасть. g -образ этого элемента равен нулю в булевой алгебре $\mathcal{B}$, так как он лежит в идеале и только элементы, которым сопоставлен ненулевой элемент в $\mathcal{B}$ в нашем строящемся дереве, имеют бесконечно много элементов ниже в строящемся дереве. Как только мы узнаем, что какой-то из сопоставленных элементов попал в идеал, т.е. равен нулю в $\mathcal{B}$, все концевые элементы под ним объявляются атомами, если они не были объявлены атомами ранее.

Заметив, что в силу атомности булевой алгебры $\mathcal{B}$ под любым не равным нулю элементом на некотором шаге появится атом булевой алгебры $\mathcal{B}$, мы расщепляем каждый элемент в дереве, не равный нулю в алгебре, на две части, одна из которых попадет в идеал. Но, начиная с этого шага, под этим элементом построится поддерево лишь с одной бесконечной веткой, и этот элемент определит атом в фактор-алгебре по идеалу Фреше, оставаясь при этом атомом в алгебре $\mathcal{B}$. Любой ненулевой не атом дерева на некотором шаге расщепится на два ненулевых элемента, при этом до расщепления конечное число раз может отцепиться лишь элемент из идеала, который превратится в элемент из идеала Фреше.

По построению позитивная булева алгебра $\mathcal{B}$ изоморфна построенной булевой фактор-алгебре B_D/F по идеалу Фреше, а также изоморфна B_D/∇ . Булева алгебра B_D является атомной булевой алгеброй с вычислимым множеством атомов, так как в дереве D при перечислении атомы отмечены меткой Atom в нашей конструкции, а идеал Фреше порожден этими атомами и, следовательно, вычислимо перечислим. Однако фактор-алгебра нашей алгебры изоморфна позитивной булевой алгебре, которая не имеет вычислимого представления. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Литература

1. А. И. Мальцев, “Конструктивные алгебры. I”, *Успехи мат. наук* **16**, No. 3, 3–60 (1961).
2. А. И. Мальцев, “О рекурсивных абелевых группах”, *Докл. АН СССР* **146**, No. 5, 1009–1012 (1962).
3. Ю. Л. Ершов, С. С. Гончаров, *Конструктивные модели*, Научная книга, Новосибирск (1999).
4. С. С. Гончаров, *Счетные булевы алгебры и разрешимость*, Научная книга, Новосибирск (1996).
5. L. Feiner, “Hierarchies of Boolean algebras”, *J. Symb. Log.* **35**, No. 3, 365–374 (1971).

6. H. J. Rogers, *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*, McGraw–Hill, Maidenhead, Berksh (1967).
7. C. C. Chang, H. J. Keisler, *Model Theory*, North–Holland, Amsterdam etc. (1990).
8. M. Morley, “Decidable models”, *Isr. J. Math.* **25**, No. 3–4, 233–240 (1976).
9. С. С. Гончаров, *Счетные булевы алгебры*, Наука, Новосибирск (1988).

Статья поступила в редакцию 13 мая 2024 г.

М. Концевич, В. Пестун, Ю. Чинкель

ЭКВИВАРИАНТНАЯ БИРАЦИОНАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И МОДУЛЯРНЫЕ СИМВОЛЫ

Вводятся новые инварианты в эквивариантной бирациональной геометрии и изучается их связь с модулярными символами и когомологиями арифметических групп.

1. Введение

Пусть G — конечная абелева группа и $A = G^\vee = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ — группа характеров группы G . Фиксируем целое число $n \geq 2$ и рассмотрим $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathcal{B}_n(G)$, порожденный символами $[a_1, \dots, a_n]$, $a_i \in A$, такими, что $a_1, \dots, a_n$ порождают A , т.е. $\sum_i \mathbb{Z}a_i = A$, и удовлетворяют следующим соотношениям:

(S) для всех перестановок $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ и $a_1, \dots, a_n \in A$

$$[a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}] = [a_1, \dots, a_n],$$

(B) для всех $2 \leq k \leq n$, $a_1, \dots, a_k \in A$, и $b_1, \dots, b_{n-k} \in A$ таких, что $\sum_i \mathbb{Z}a_i + \sum_j \mathbb{Z}b_j = A$,

$$\begin{aligned} & [a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k}] \\ &= \sum_{1 \leq i \leq k, a_i \neq a_{i'}, \forall i' < i} [a_1 - a_i, \dots, a_i (\text{на } i\text{-й позиции}), \dots, a_k - a_i, b_1, \dots, b_{n-k}]. \end{aligned}$$

Имеем

$$\mathcal{B}_1(G) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\varphi(N)}, & G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \quad N \geq 1, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Например, при $n = 4$, $k = 3$, $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = a' \neq a$, $b_1 = b$ соотношение (B) принимает вид

$$[a, a, a', b] = [a, 0, a' - a, b] + [a - a', a - a', a', b]. \quad (1.1)$$

В случае $n = 2$ имеется лишь одна возможность для k , а именно: $k = 2$.

Пример 1.1. Группа $\mathcal{B}_2(G)$ порождается символами $[a_1, a_2]$ такими, что $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $\text{НОД}(a_1, a_2, N) = 1$, и выполнены следующие соотношения:

$$[a_1, a_2] = [a_2, a_1],$$

$$[a_1, a_2] = [a_1, a_2 - a_1] + [a_1 - a_2, a_2], \quad a_1 \neq a_2,$$

$$[a, a] = [a, 0] \quad \text{для всех } a \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \quad \text{НОД}(a, N) = 1.$$

Третий автор частично поддержан грантом NSF No. 1601912. Данное исследование финансово поддержано Европейским исследовательским советом [European Research Council (ERC)] по программе the European Union's Horizon 2020 research and innovation program (QUASIFT grant agreement 677368).

М. Концевич: Институт высших научных исследований, Бюр-сюр-Иветт, Франция, maxim@ihes.fr.

В. Пестун: Институт высших научных исследований, Бюр-сюр-Иветт, Франция, vasily.pestun@ihes.fr.

Ю. Чинкель: Институт математических наук имени Куранта, Нью-Йорк, США, tschinkel@cims.nyu.edu.

Перевод с англ.: *J. Eur. Math. Soc.* **25**, 153–202 (2023).

Для простого числа $p \geq 5$ $\mathbb{Q}$ -ранг группы $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ равен

$$\frac{p^2 + 23}{24}. \quad (1.2)$$

Для нас это первый звонок о роли автоморфных форм в этой теории. Связь с модулярными символами мы обсудим в § 11.

Замечание 1.1. Группа $\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ может иметь кручение. Например, при $p = 37$ существует ℓ -кручение для $\ell = 3$ и $\ell = 19$.

В случае $n \geq 3$ система соотношений в $\mathcal{B}_n(G)$ сильно переопределена. Тем не менее компьютерные вычисления показывают, что нетривиальные решения существуют. Например, при $G = \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ или $G = \mathbb{Z}/43\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ -ранг группы $\mathcal{B}_4(G)$ равен 1.

Пусть X — гладкое неприводимое проективное алгебраическое многообразие размерности $n \geq 2$ над фиксированным алгебраически замкнутым полем характеристики 0 (например, $\mathbb{C}$), снабженное бирациональным свободным в общей точке действием группы G . После G -эквивариантного разрешения особенностей можно считать, что действие группы G регулярно. Многообразию X мы сопоставим элемент группы $\mathcal{B}_n(G)$ по следующему правилу. Пусть

$$X^G = \coprod_{\alpha \in A} F_\alpha \quad (1.3)$$

является множеством G -неподвижных точек; это объединение непересекающихся замкнутых гладких неприводимых подмногообразий многообразия X . Положим $\dim(F_\alpha) = n_\alpha \leq n - 1$. На каждой неприводимой компоненте F_α зафиксируем точку $x_\alpha \in F_\alpha$ и рассмотрим действие группы G в ее касательном пространстве $\mathcal{T}_{x_\alpha} X$ в X ; оно разбивается на собственные пространства характеров $a_{1,\alpha}, \dots, a_{n,\alpha}$, определенных с точностью до перестановки индексов (здесь мы отождествляем алгебраические характеры группы G с $\mathbb{C}^\times$ -значными характерами). Поскольку действие группы G свободное в общей точке, справедливо разложение

$$\sum_i \mathbb{Z}a_{i,\alpha} = A,$$

которое не зависит от выбора $x_\alpha \in F_\alpha$. Размерность (F_α) равна количеству нулей в последовательности $a_{i,\alpha}$. Таким образом, для каждого α имеем символ $[a_{1,\alpha}, \dots, a_{n,\alpha}] \in \mathcal{B}_n(G)$. Положим

$$\beta(X) := \sum_{\alpha} [a_{1,\alpha}, \dots, a_{n,\alpha}]. \quad (1.4)$$

Один из главных результатов данной статьи состоит в том, что выражение (1.4), рассматриваемое как элемент группы $\mathcal{B}_n(G)$, является инвариантом относительно G -эквивариантных раздутий.

Теорема 1.1. Класс $\beta(X) \in \mathcal{B}_n(G)$ является G -эквивариантным бирациональным инвариантом.

Теперь введем другой $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathcal{M}_n(G)$, порожденный символами $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ такими, что $a_1, \dots, a_n$ порождают A и удовлетворяют соотношениям, почти идентичным соотношениям для $\mathcal{B}_n(G)$:

(S) для всех $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ и $a_1, \dots, a_n \in A$

$$\langle a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)} \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle,$$

(M) для всех $2 \leq k \leq n$, $a_1, \dots, a_k \in A$ и $b_1, \dots, b_{n-k} \in A$ таких, что $\sum_i \mathbb{Z}a_i + \sum_j \mathbb{Z}b_j = A$,

$$\langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k} \rangle$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq k} \langle a_1 - a_i, \dots, a_i (\text{на } i\text{-й позиции}), \dots, a_k - a_i, b_1, \dots, b_{n-k} \rangle.$$

Отметим, что мы исключили ограничение $a_i \neq a_{i'}$ для $i' < i$ из суммирования. Ясно, что

$$\mathcal{M}_1(G) = \begin{cases} \mathbb{Z}^{\varphi(N)}, & G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \quad N \geq 1, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Для $n = 4$, $k = 3$, $a_1 = a_2 = a$, $a_3 = a' \neq a$, $b_1 = b$ соотношение (М) принимает вид

$$\langle a, a, a', b \rangle = \langle a, 0, a' - a, b \rangle + \langle 0, a, a' - a, b \rangle + \langle a - a', a - a', a', b \rangle, \quad (1.5)$$

где правая часть равна $2\langle a, 0, a' - a, b \rangle + \langle a - a', a - a', a', b \rangle$ ввиду отношений симметрии. Подчеркнем, что имеются различия между (1.5) и (1.1).

В § 6 мы покажем, что соотношение (М) вытекает из случая $k = 2$.

Введенные группы допускают естественно определенные коммутирующие линейные операторы $T_{\ell,r} : \mathcal{M}_n(G) \rightarrow \mathcal{M}_n(G)$ для всех простых чисел ℓ , взаимно простых с порядком группы G и всех $1 \leq r \leq n$. Эти операторы называются *операторами Гекке*. Можно рассмотреть спектр для $\mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{Q}$ или $\mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{F}_p$, где p — произвольное простое число, не делящее порядок $\#G$ группы G . Мы ожидаем, что совместный спектр $T_{\ell,r}$ связан с автоморфными формами и дадим обоснование нашего предположения в § 9 и 11.

Рассмотрим отображение $\mu : \mathcal{B}_n(G) \rightarrow \mathcal{M}_n(G)$, которое определяется на символах

- (μ_1) $[a_1, \dots, a_n] \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, если все $a_1, \dots, a_n \neq 0$,
- (μ_2) $[0, a_2, \dots, a_n] \mapsto 2\langle 0, a_2, \dots, a_n \rangle$, если все $a_2, \dots, a_n \neq 0$,
- (μ_3) $[0, 0, a_3, \dots, a_n] \mapsto 0$ для всех $a_3, \dots, a_n$

и продолжается по $\mathbb{Z}$ -линейности.

Теорема 1.2. *Отображение μ является корректно определенным гомоморфизмом, сюръективным по модулю 2-кручения.*

Имеем $\langle 0, 0, a_3, \dots, a_n \rangle = 0 \in \mathcal{M}_n(G)$, что следует из соотношений при $k = 2$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_i = a_{i+2}$ для всех $i = 1, \dots, n - 2$.

Мы ожидаем, что μ является изоморфизмом по модулю кручения (см. гипотезы 3.1 и 3.2).¹⁾

Обозначения $\mathcal{B}_n(G)$ и $\mathcal{M}_n(G)$ имеют смысл **бirationальный** vs **мотивный/модулярный**.

Данная статья состоит из двух частей. В части I мы приводим доказательства теорем 1.1 и 1.2. Мы переопределим группы $\mathcal{M}_n(G)$ в терминах соотношений типа ножиц на решетках с конусами, введем фактор-группы $\mathcal{M}_n^-(G)$ групп $\mathcal{M}_n(G)$, а также умножение и коумножение на этих фактор-группах и сформулируем ряд гипотез о сведении структуры $\mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{Q}$ к ее примитивным частям. Кроме того, мы введем операторы Гекке на $\mathcal{M}_n(G)$, совместные с гипотетическим разложением, и опишем результаты компьютерных вычислений с уравнениями для новых инвариантов.

В части II мы приводим различные обобщения групп $\mathcal{B}_n(G)$ и $\mathcal{M}_n(G)$, не обязательно связанные друг с другом, что отражает имеющееся расхождение бирациональной и автоморфной точек зрения. Наши конструкции приводят к новому вопросу (см. вопрос 9.1) и потенциально новой точке зрения на программу Ленглендса, основанной на обобщении модулярных символов для больших размерностей. Мы отождествляем $\mathcal{M}_n^-(G)$ с когомологией арифметической группы с коэффициентами в одномерном представлении. В случае $n = 2$ мы также воспользуемся связями между нашими группами символов и классическими символами Манина для модулярных форм веса 2.

При подготовке данной статьи к печати мы узнали о работе [2] Борисова и Ганнелса, которые изучали конструкции, связанные с модулярностью при $n = 2$, и поставили вопрос об обобщениях на случай $n \geq 3$ [3, замечание 7.15].

Мы благодарны Алексу Барнетту [Alex Barnett] и Нику Каррьеро [Nick Carrigero] из института Флэтайрона фонда Саймонса за их помощь с компьютерными вычислениями, а также Авнеру Эшу [Avner Ash] и Александру Гончарову за их интерес и полезные комментарии.

¹⁾ Этот факт установлен в теореме 1.2 из [1].

Часть I

2. Инвариантность относительно раздутий

Будем использовать обозначения и соглашения из введения. Пусть X — гладкое неприводимое проективное n -мерное многообразие, снабженное свободным в общей точке регулярным действием конечной абелевой группы G и $W \subset X$ — замкнутое гладкое неприводимое G -устойчивое подмногообразие, $0 \leq \dim(W) \leq n-2$. Пусть $\pi: \tilde{X} = \text{Bl}_W(X) \rightarrow X$ — раздутие X в W . Согласно теореме о G -эквивариантной слабой факторизации гладкие проективные G -бirationальные модели X связаны итерированными раздутиями такого типа.

Для доказательства теоремы 1.1 достаточно показать, что $\beta(\tilde{X}) = \beta(X) \in \mathcal{B}_n(G)$. Выберем неприводимую компоненту $Z \subseteq W^G$. Достаточно рассмотреть структуру множеств неподвижных точек исключительных дивизоров в окрестности Z . Пусть $F = F(Z) \subseteq X^G$ — единственная неприводимая компонента, содержащая Z ; она равна одной из компонент F_α в (1.3). Пусть $z \in Z$ — точка и $\mathcal{T}_z X = T_1 \oplus T_2 \oplus R_1 \oplus R_2$ — разложение касательного расслоения в точке z , где T_i — тривиальное представление, а R_1 и R_2 имеют лишь нетривиальные характеры,

$$\mathcal{T}_z X^G = \mathcal{T}_z F = T_1 \oplus T_2, \quad \mathcal{T}_z W = T_2 \oplus R_1.$$

Пусть $d_1 := \dim(T_1)$, $d_2 = \dim(T_2)$, $d_3 = \dim(R_1)$, $d_4 = \dim(R_2)$. Спектр действия группы G в $\mathcal{T}_z$ принимает вид

$$\underbrace{0, \dots, 0}_{d_1} \mid \underbrace{0, \dots, 0}_{d_2} \mid b_1, \dots, b_{d_3} \mid \underbrace{a^1, \dots, a^1}_{\varkappa_1}, \dots, \underbrace{a^m, \dots, a^m}_{\varkappa_m},$$

где $b_j \in A \setminus 0$, $a^1, \dots, a^m \in A \setminus 0$ попарно различны и $\varkappa_1 + \dots + \varkappa_m = d_4$, $\varkappa_i \geq 1$, $m \geq 0$. Имеем

- $d_2 = \dim(Z)$,
- $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = n$,
- $1 \leq d_3 + d_4$, так как $\text{codim}(X^G) \geq 1$,
- $2 \leq d_1 + d_4$, так как $\text{codim}(W) \geq 2$.

Мы рассмотрим несколько случаев с соответствующими геометрическими конфигурациями.

- (I) $d_1 = 0$, $d_4 \geq 2$. Геометрически это означает, что W содержит компоненту Z многообразия X^G . С помощью раздутия W получим новые вклады в формулу (1.4). Новое множество неподвижных точек с m неприводимыми компонентами состоит из подмногообразий исключительного дивизора, проективного расслоения над W . Эти подмногообразия, в свою очередь, суть тотальные пространства проективных расслоений над Z со слоями $\mathbb{P}^{\varkappa_i-1}$, $i = 1, \dots, m$. Соответствующий вклад в $\beta(\tilde{X})$ задается формулой

$$\sum_{i=1}^m [0, \dots, \underbrace{b_1, \dots, b_{d_3}}_{d_2}, \underbrace{a^1 - a^i, \dots, a^i}_{\varkappa_1}, \dots, a_i, \underbrace{0, \dots, 0}_{\varkappa_i-1}, \dots, \underbrace{a^m - a^i, \dots, a^i}_{\varkappa_m}].$$

Полагая

$$a_1, \dots, a_k = \underbrace{a^1, \dots, a^1}_{\varkappa_1}, \dots, \underbrace{a^m, \dots, a^m}_{\varkappa_m}, \quad b_1, \dots, b_{n-k} = b_1, \dots, b_{d_3}, \underbrace{0, \dots, 0}_{d_2},$$

находим, что эта формула согласована с соотношением (B), если последовательность $\bar{a} = a_1, \dots, a_k$ не содержит нулей.

- (II) $d_1, d_4 \geq 1$. Геометрически это означает, что касательные пространства множества неподвижных точек и W не порождают все касательное пространство, а вблизи Z компонента F не содержится в W . В раздутии мы будем иметь компоненту множества неподвижных точек, бирациональную F , а также новые компоненты, которые будут проективными расслоениями $\mathbb{P}^{\varkappa_1-1}, \dots, \mathbb{P}^{\varkappa_m-1}$ над Z . Надо показать, что вклад этих m членов нулевой в $\mathcal{B}_n(G)$. Пусть

$$\bar{b} = b_1, \dots, b_{n-k} = b_1, \dots, b_{d_3}, \underbrace{0, \dots, 0}_{d_2}.$$

Новые компоненты дают вклад

$$\sum_{i=1}^m [\underbrace{-a^i, \dots, a^1 - a^i}_{d_1}, \dots, \underbrace{a_i, 0, \dots, 0}_{\varkappa_i - 1}, \dots, \underbrace{a^m - a^i, \dots, \bar{b}}_{\varkappa_m}].$$

Покажем, что эта сумма равна нулю в $\mathcal{B}_n(G)$. Действительно, рассмотрим соотношение (В) для последовательностей

$$\bar{a} = a_1, \dots, a_k = \underbrace{0, \dots, 0}_{d_1}, \underbrace{a^1, \dots, 0}_{\varkappa_1}, \dots, \underbrace{a^m, \dots, 0}_{\varkappa_m},$$

и $\bar{b}$. Левая часть (В) равна

$$[\bar{a}, \bar{b}] = [a_1, \dots, a_k, \bar{b}] = [\underbrace{0, \dots, 0}_{d_1}, \underbrace{a^1, \dots, 0}_{\varkappa_1}, \dots, \underbrace{a^m, \dots, 0}_{\varkappa_m}, \bar{b}],$$

а правая часть есть сумма $(m+1)$ слагаемых. Первое слагаемое, соответствующее $a_i = a_1 = 0$, совпадает с левой частью. Остальные слагаемые такие же, как выше.

(III) $d_1 \geq 2$, $d_3 \geq 1$, $d_4 = 0$. В этом случае никаких новых членов в формуле (1.4) не появляется.

Теорема 1.1 доказана.

Замечание 2.1. Имеется уточнение группы $\mathcal{B}_n(G)$, связывающее ее с группой Бернсайда многообразий, изученной в [4]. Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Пусть $\text{Bir}_{n-1,m}(K)$, $0 \leq m \leq n-1$, — множество классов эквивалентности $(n-1)$ -мерных неприводимых многообразий над K по модулю K -бирациональной эквивалентности, которые K -бирациональны относительно произведений $W \times \mathbb{A}^m$, но не являются таковыми относительно $W' \times \mathbb{A}^{m+1}$ для любого W' . Пусть

$$\mathcal{B}_n(G, K) := \bigoplus_{m=0}^{n-1} \bigoplus_{[Y] \in \text{Bir}_{n-1,m}(K)} \mathcal{B}_{m+1}(G),$$

$$\mathcal{B}_1(G) = \begin{cases} \bigoplus_{a \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \mathbb{Z}, & G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \quad N \geq 2, \\ 0, & G \text{ нециклическая.} \end{cases}$$

Пусть X — неприводимое K -многообразие, снабженное свободным в общей точке действием группы G . Как и в § 1, можно считать, что действие группы G регулярно. Пусть $X^G = \bigsqcup_{\alpha} F_{\alpha}$ — разложение множества неподвижных точек на неприводимые непересекающиеся компоненты. Спектр G -действия в касательном пространстве к X в любой точке $x_{\alpha} \in F_{\alpha}$ задается формулой

$$a_1, \dots, a_{n-\dim(F_{\alpha})}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\dim(F_{\alpha})}, \quad a_i \neq 0.$$

Принимая во внимание бирациональные типы множества неподвижных точек, определим $\beta_K(X) \in \mathcal{B}_n(G, K)$ для G следующим образом. Положим $Y_{\alpha} := F_{\alpha} \times \mathbb{A}^{n-1-\dim(F_{\alpha})}$. Пусть $m_{\alpha} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ — максимальное целое число такое, что $Y_{\alpha} \sim Z_{\alpha} \times \mathbb{A}^{m_{\alpha}}$. Очевидно, что $m_{\alpha} \geq n-1-\dim(F_{\alpha})$. Тогда

$$\beta_K(X) = \sum_{\alpha} \beta_{\alpha}(X),$$

где

$$\beta_{\alpha}(X) = \left[a_1, \dots, a_{n-\dim(F_{\alpha})}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m_{\alpha}+1-n+\dim(F_{\alpha})} \right] \in \text{копии } \mathcal{B}_{m_{\alpha}+1}(G),$$

помеченное бирациональным типом Y_{α} .

Инвариантность относительно раздутий следует из того, что все $(n-1)$ -мерные бирациональные типы, возникающие как метки в каждом частном случае при доказательстве теоремы 1.1, совпадают друг с другом.

Замечание 2.2. Подобным образом можно было бы ввести бирациональные инварианты для действий, но это направление в данной статье не рассматривается.

3. Сравнение

В этом параграфе мы рассмотрим отображение

$$\mu : \mathcal{B}_n(G) \rightarrow \mathcal{M}_n(G), \quad (3.1)$$

определенное в § 1. Доказательство того, что это отображение есть корректно определенный гомоморфизм, представляет собой длинную цепь по существу тривиальных шагов.

Сначала мы выпишем несколько следствий, вытекающих из определяющих соотношений для группы $\mathcal{M}_n(G)$:

- (1) $\langle 0, 0, \dots \rangle = 0$,
- (2) $\langle a, a, \dots \rangle = 2\langle a, 0, \dots \rangle$,
- (3) $\langle a, a, 0, \dots \rangle = 0$,
- (4) $\langle a, a, a', a', \dots \rangle = 0$,
- (5) $\langle a, a, a, \dots \rangle = 0$,
- (6) $\langle a, -a, \dots \rangle = 0$;

здесь $\dots$ означает произвольные последовательности элементов A такие, что множество всех элементов символа порождает все A . В доказательствах ниже мы часто используем отношение симметрии (S).

- (1) Используем (M) при $k = 2$ и $a_1 = a_2 = 0$: $\langle 0, 0, \dots \rangle = \langle 0, 0, \dots \rangle + \langle 0, 0, \dots \rangle$.
- (2) Используем (M) при $k = 2, a_1 = a_2 = a$.
- (3) Используем (2) и (1): $\langle a, a, 0, \dots \rangle \stackrel{(2)}{=} 2\langle a, 0, 0, \dots \rangle + \langle 0, 0, \dots \rangle \stackrel{(1)}{=} 0$.
- (4) Опять используем (2) и (1): $\langle a, a, a', a', \dots \rangle \stackrel{(2)}{=} 4\langle a, 0, a', 0, \dots \rangle \stackrel{(1)}{=} 0$.
- (5) Используем (M) для $k = 3$ и $a_1 = a_2 = a_3 = a$, а затем (1): $\langle a, a, a, \dots \rangle = 3\langle a, 0, 0, \dots \rangle \stackrel{(1)}{=} 0$.
- (6) Используем (M) для $k = 2, a_1 = a, a_2 = 0$: $\langle a, 0, \dots \rangle = \langle a, -a, \dots \rangle + \langle a, 0, \dots \rangle$.

Далее перейдем к доказательству теоремы 1.2. Основной момент доказательства — это проверка уравнения совместности

$$\mu([a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k}]) = \sum_{i, a_i \neq a_{i'}, \text{ при } i < i'} \mu([a_1 - a_i, \dots, a_i, \dots, a_k - a_i, b_1, \dots, b_{n-k}])). \quad (3.2)$$

Для удобства мы иногда пишем

$$[a_1, \dots, a_k \mid b_1, \dots, b_{n-k}] = [a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k}] \in \mathcal{B}_n(G)$$

и аналогично для символа из $\mathcal{M}_n(G)$, указывая позицию раздела переменных a и b в последующих соотношениях.

Выделим три случая в зависимости от числа нулей в последовательности $\bar{b} := b_1, \dots, b_{n-k}$.

- (C0) $\bar{b}$ не содержит нулей.
- (C1) $\bar{b}$ содержит в точности один нуль.
- (C2) $\bar{b}$ содержит не менее двух нулей.

Случай (C2) очевиден в силу (1), так как все члены равны нулю по определению (μ_2) в § 1.

Случай (C1) распадается на два случая:

- (C10) последовательность $\bar{a} := a_1, \dots, a_k$ не содержит нулей,
- (C11) последовательность $\bar{a}$ содержит хотя бы один нуль.

В случае (C11) левая часть отображается в нуль при отображении (μ_2) : $\mu([0, \dots \mid 0, \dots]) = 0$. Члены в правой части (B) делятся на два типа соответственно $a_i = 0$ или $a_i = a \neq 0$. Если $a_i = 0$, то член вида $[0, \dots \mid 0, \dots]$ переходит в нуль при отображении (μ_2) . Подчеркнутый нуль означает, что a_i остается на своем месте в соотношении (B). Если $a_i = a \neq 0$, то соответствующий член в правой части (B) имеет вид $[-a, \dots, \underline{a}, \dots \mid 0, \dots]$ и отображается в $c \cdot \langle -a, \dots, a, \dots, 0, \dots \rangle$, где $c = 0$ или $c = 2$ и символ в $\mathcal{M}_n(G)$ равен нулю в силу (6).

Случай (C10) распадается на два случая:

- (C10 $\neq$) все члены в $\bar{a}$ попарно различны,
 (C10 $=$) существуют по крайней мере два равных члена в $\bar{a}$.

В случае (C10 $\neq$) все символы в левой и правой частях соотношения (B) имеют в точности по одному нулю. Таким образом, при отображении (μ_1) они переходят в аналогичные символы в $\mathcal{M}_n(G)$, умноженные на 2. Так как каждый элемент $\bar{a}$ входит единожды, выражения в правых частях соотношений (B) и (M) состоят из согласованных членов.

В случае (C10 $=$) левая часть (B) равна $[a, a, \dots | 0, \dots] \in \mathcal{B}_n(G)$ и образ ее при отображении μ равен $2\langle a, a, \dots, 0, \dots \rangle \in \mathcal{M}_n(G)$, который обращается в нуль в силу (3). Мы покажем, что все члены в правой части соотношения (B) отображаются в нуль. Действительно каждый член имеет вид либо $[\underline{a}, 0, \dots | 0, \dots]$, либо $[a - a', a - a', \dots, \underline{a}', \dots | 0, \dots]$, $a' \neq a$. Образ этого символа пропорционален $\langle a, 0, \dots, 0, \dots \rangle$ либо $\langle a - a', a - a', \dots, a', \dots, 0, \dots \rangle$, которые равны нулю в силу (1) либо (3) соответственно.

Случай (C0) распадается на три случая:

- (C00) $\bar{a}$ не содержит нулей,
 (C01) $\bar{a}$ содержит в точности один нуль,
 (C02) $\bar{a}$ содержит по меньшей мере два нуля.

Напомним, что $\bar{b}$ не содержит нулей в случае (C0).

Сначала рассмотрим (C02). Левая часть (B) принимает вид $[0, 0, \dots | \dots]$ и, следовательно, отображается в нуль при отображении (μ_2) . Проверим, что все члены в правой части (B) также отображаются в нуль. Эти символы имеют вид $[0, 0, \dots | \dots]$ либо $[-a, -a, \dots, \underline{a}, \dots | \dots]$, $a \neq 0$, которые отображаются в элементы $\mathcal{M}_n(G)$, пропорциональные $\langle 0, 0, \dots \rangle$ либо $\langle -a, -a, \dots, a, \dots \rangle$ и равные нулю в силу (1) либо (6) соответственно.

Случай (C01) распадается на два случая:

- (C01 $\neq$) все члены в $\bar{a}$ попарно различны,
 (C01 $=$) существуют по меньшей мере два равных члена в $\bar{a}$.

В случае (C01 $=$) левая часть (B) принимает вид $[0, a, a, \dots | \dots]$, $a \neq 0$, и отображается в нуль в силу (3). Правая часть содержит члены вида $[0, a, a, \dots | \dots]$, либо $[-a, \underline{a}, 0, \dots | \dots]$, либо $[-a', a - a', a - a', \dots, \underline{a}', \dots | \dots]$, $a' \neq a, 0$. Их образы при отображении μ пропорциональны $\langle 0, a, a, \dots \rangle$, либо $\langle -a, -a, 0, \dots \rangle$, либо $\langle -a', a - a', a - a', \dots, a', \dots \rangle$, которые равны нулю в силу (3), (6), (6) соответственно.

В случае (C01 $\neq$) левая часть (B) принимает вид $[0, a_2, \dots, a_k | \dots]$ для попарно различных $a_i \neq 0, i \geq 2, b_j \neq 0$. Согласно (μ_1) ее образ при отображении μ равен $2\langle 0, a_2, \dots, a_k, \dots \rangle$. Правая часть (B) равна сумме

$$[0, a_2, \dots, a_k | \dots] + [-a_2, \underline{a_2}, \dots, a_k - a_2 | \dots] + [-a_3, a_2 - a_3, \underline{a_3}, \dots | \dots] + \dots,$$

где первое слагаемое в силу (μ_1) переходит в $2\langle 0, a_2, \dots, a_k, \dots \rangle$, а все другие члены отображаются в нуль в силу (6), что доказывает (C01 $\neq$).

Осталось рассмотреть случай (C00), когда все элементы последовательностей $\bar{a}$ и $\bar{b}$ отличны от нуля. Возможны два случая:

- (C00 $\neq$) все члены $\bar{a}$ попарно различны,
 (C00 $=$) по меньшей мере два члена $\bar{a}$ равны.

В случае (C00 $\neq$) левая и правая части (B) не содержат символов с нулями. Поэтому можно использовать (μ_0) , и соотношение (B) переходит в точности в соответствующее соотношение (M).

Случай (C00 $=$) распадается на три случая:

- (C00= 2) $\bar{a}$ имеет только одну пару равных членов, т.е. $\bar{a} = a, a, a_3, \dots, a_k$, где $a_3, \dots, a_k$ попарно различны и не равны a ,
- (C00= 2, 2) $\bar{a}$ имеет вид $\bar{a} = a, a, a', a', a_5, \dots, a_k$, где $a \neq a'$ и $a_5, \dots, a_k$ попарно различны и отличны от a и a' ,
- (C00= 3) $\bar{a}$ имеет вид $\bar{a} = a, a, a, \dots$.

Сначала рассмотрим случай (C00= 3). Левая часть (B) отображается в нуль в силу (5), а правая часть имеет члены вида $[\underline{a}, 0, 0, \dots | \dots]$ или $[a - a', a - a', a - a', \dots, \underline{a}, \dots | \dots]$, $a \neq a'$. Они переходят в члены, пропорциональные $\langle a, 0, 0, \dots \rangle$ либо $\langle a - a', a - a', a - a', \dots \rangle$, которые равны нулю в силу (1) или (5) соответственно.

В случае (C00= 2, 2) левая часть (B) отображается в элемент $\langle a, a, a', a', \dots \rangle$, равный нулю в силу (4), а правая часть содержит члены трех видов:

$$[a, 0, a' - a, a' - a, \dots | \dots],$$

$$[a - a', a - a', \underline{a}, 0, \dots | \dots], \quad a \neq a',$$

$$[a - a'', a - a'', a' - a'', a' - a'', \dots, \underline{a}'', \dots | \dots], \quad \text{где } a, a', a'' \text{ попарно различны.}$$

Их образы пропорциональны

$$\langle a, 0, a' - a, a' - a, \dots \rangle,$$

$$\langle a - a', a - a', \underline{a}, 0, \dots \rangle, \quad a \neq a',$$

$$\langle a - a'', a - a'', a' - a'', a' - a'', \dots, \underline{a}'', \dots \rangle, \quad \text{где } a, a', a'' \text{ попарно различны,}$$

которые равны нулю в силу (3), (3), (4) соответственно.

В последнем случае (C00= 2) соотношение (B) принимает вид

$$\begin{aligned} [a, a, a_3, \dots, a_k | \dots] &= [\underline{a}, 0, a_3 - a, \dots, a_k - a | \dots] + [a - a_3, a - a_3, \underline{a}_3, \dots, a_k - a_3 | \dots] \\ &\quad + [a - a_4, a - a_4, a_3 - a_4, \underline{a}_4, \dots | \dots] + \dots \end{aligned}$$

Левая часть отображается в $\langle a, a, a_3, \dots \rangle$, а правая — в $2\langle \underline{a}, 0, a_3 - a, \dots, a_k - a | \dots \rangle + \langle a - a_3, a - a_3, \underline{a}_3, \dots, a_k - a_3 | \dots \rangle + \dots$, где первое слагаемое получается из (μ_1) , а остальные — из (μ_0) . Мы видим, что по модулю соотношения (S) образ правой части (B) совпадает с правой частью (M) в $\mathcal{M}_n(G)$, что завершает доказательство теоремы 1.2.

Предложение 3.1. Гомоморфизм

$$\mu : \mathcal{B}_2(G) \rightarrow \mathcal{M}_2(G) \tag{3.3}$$

является инъекцией с коядром, которое аннулируется фактором $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\varphi(N)}$, если $G \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ — циклическая группа; в ином случае μ — изоморфизм.

Доказательство. Введем порождающие и соотношения для $\mathcal{B}_2(G)$ и $\mathcal{M}_2(G)$.

• *Порождающие:*

- (“невыврожденные”) символы $[a_1, a_2]$ (соответственно, $\langle a_1, a_2 \rangle$), где $a_1, a_2 \in A \setminus 0$ такие, что $\mathbb{Z}a_1 + \mathbb{Z}a_2 = A$,
- (“вырожденные”) символы $[a, 0]$ (соответственно, $\langle a, 0 \rangle$), где $a \in A \setminus 0$ такое, что $\mathbb{Z}a = A$.

• *Соотношения:*

- (1) $[a_1, a_2] = [a_2, a_1]$ (соответственно, $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_2, a_1 \rangle$) для $a_1, a_2 \in A \setminus 0$,
- (2) $[a_1, a_2] = [a_1, a_2 - a_1] + [a_1 - a_2, a_2]$ (соответственно, $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, a_2 - a_1 \rangle + \langle a_1 - a_2, a_2 \rangle$) для $a_1, a_2 \in A \setminus 0$, $a_1 \neq a_2$,
- (3) $[a, a] = [a, 0]$ (соответственно, $\langle a, a \rangle = 2\langle a, 0 \rangle$), $a \neq 0$.

Первые два соотношения идентичны и включают только невырожденные символы $[a_1, a_2]$ (соответственно, $\langle a_1, a_2 \rangle$), когда оба элемента a_1 и a_2 не равны нулю. В случае $\mathcal{B}_2(G)$ соотношение (3) лишь отождествляет вырожденный символ $[a, 0]$ с невырожденным символом $[a, a]$, где, как и в случае $\mathcal{M}_2(G)$, добавляется половина невырожденного символа $\langle a, a \rangle$. Очевидно, что если мы добавим к любой абелевой группе дополнительную порождающую, равную половине любого заданного элемента этой группы, то новая группа будет содержать исходную и фактор аннулируется

фактор-группой $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Утверждение предложения немедленно следует, так как функция Эйлера $\varphi(N)$ есть число вырожденных элементов $[a, 0]$, когда $G \simeq A \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. $\square$

Гипотеза 3.1. При $n \geq 3$ гомоморфизм

$$\mu : \mathcal{B}_n(G) \rightarrow \mathcal{M}_n(G) \quad (3.4)$$

является изоморфизмом по модулю кручения.

Эта гипотеза означает следующее. Для любого целого числа $N \geq 2$ элемент $[0, 0, 1] \in \mathcal{B}_3(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ является элементом кручения. Действительно, если бы эта гипотеза подтвердилась, то любой символ $[0, 0, \dots]$ должен обращаться в нуль по модулю кручения и, повторив все шаги доказательства теоремы 1.2, мы могли бы построить обратный морфизм из $\mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{Q}$ в $\mathcal{B}_n(G) \otimes \mathbb{Q}$.

При $N \leq 23$ компьютерные вычисления дают основание выдвинуть следующую гипотезу.

Гипотеза 3.2. Для $N \geq 2$ элемент $[0, 0, 1] \in \mathcal{B}_3(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ имеет порядок 1, т.е. $[0, 0, 1] = 0 \in \mathcal{B}_3(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, если N — составное число или $N = 2, 3, 5$, и аннулируется величиной $\frac{p^2 - 1}{24}$, если $N = p \geq 7$ — простое число.²⁾

4. О порождающих и соотношениях для $\mathcal{M}_n(G)$

В этом параграфе G — конечная абелева группа с группой характеров $A = \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ и $n \geq 2$ — целое число. Дадим геометрическое определение порождающих и соотношений для $\mathcal{M}_n(G)$. Начнем со следующих данных:

- решетка (без кручения) $\mathbf{L} \simeq \mathbb{Z}^n$ ранга n ,
- элемент $\chi \in \mathbf{L} \otimes A$ такой, что индуцированный гомоморфизм $\mathbf{L}^\vee \rightarrow A$ сюръективен,
- базисный симплицальный конус, т.е. строго выпуклый конус $\Lambda \in \mathbf{L}_{\mathbb{R}}$, порожденный базисом в $\mathbf{L}$; он изоморфен стандартному октанту $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$ для $\mathbf{L} = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Для каждого класса эквивалентности тройки $(\mathbf{L}, \chi, \Lambda)$ определим с точностью до изоморфизма символ $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda) \in \mathcal{M}_n(G)$ следующим образом. Выберем базис $e_1, \dots, e_n$ в $\mathbf{L}$, порождающий Λ , и запишем

$$\chi = \sum_{i=1}^n e_i \otimes a_i. \quad (4.1)$$

Положим $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathcal{M}_n(G)$. Неоднозначность выбора отражается в действии симметрической группы $\mathfrak{S}_n$ на базисных элементах и, следовательно, объясняется условием (S). Соотношение (M) имеет следующий геометрический смысл. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — упорядоченный базис в $\mathbf{L}$, порождающий Λ :

$$\Lambda := \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_n. \quad (4.2)$$

Зафиксируем целое число $2 \leq k \leq n$. Тогда

$$\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k, \quad (4.3)$$

где

$$\Lambda_i := \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \dots + \underbrace{\mathbb{R}_{\geq 0}(e_1 + \dots + e_k)}_{i\text{-я позиция}} + \dots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_n,$$

т.е. мы заменяем i -ю порождающую e_i на $(e_1 + \dots + e_k)$; это множество максимальных конусов в звездных подразбиениях грани, порожденное элементами $e_1, \dots, e_k$. Конусы Λ_i также являются базисными симплицальными конусами, и их внутренности не пересекаются. Запишем

$$\chi = e_1 \otimes a_1 + \dots + e_k \otimes a_k + e_{k+1} \otimes b_1 + \dots + e_n \otimes b_{n-k},$$

как в (4.1), т.е. $a_{k+i} = b_i$ для всех $i = 1, \dots, n - k$. Тогда χ можно записать в базисе из Λ_i как

$$e_1 \otimes (a_1 - a_i) + \dots + (e_1 + \dots + e_k) \otimes a_i + \dots + e_k \otimes (a_k - a_i) + \sum_{j=1}^{n-k} e_{k+j} \otimes b_j.$$

²⁾ Этот факт установлен в [1].

Мы видим, что соотношение (M) можно выразить как тождество

$$\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda) = \sum_{i=1}^k \psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda_i), \quad (4.4)$$

которое можно считать аналогом соотношений ножниц. Наш следующий результат утверждает, что это соотношение получается из частного случая $k = 2$. Этот факт вытекает из общего результата о симплициальных подразбиениях базисных симплициальных конусов. Именно, рассмотрим $\mathbb{Z}$ -модуль $\mathcal{F}_{\mathbf{L}, \mathbb{Z}}$, порожденный символами $[\Lambda]$, где Λ — базисный симплициальный конус, по модулю соотношений (R_k) , $k \geq 2$:

$$(R_k) \quad [\Lambda] = [\Lambda_1] + \cdots + [\Lambda_k],$$

где Λ и Λ_i такие же, как выше, $e_1, \dots, e_n$ — произвольный базис в Λ .

Лемма 4.1. *Отношения (R_k) при $k \geq 3$ следуют из отношений (R_2) .*

Доказательство. Применим индукцию. Предположив, что утверждение верно для $k - 1$, докажем его для $k \geq 3$, т.е. $[\Lambda_1] + \cdots + [\Lambda_k] = [\Lambda]$. По индукции $[\Lambda_k] = [\Lambda'_1] + \cdots + [\Lambda'_{k-1}]$, где Λ'_i — конусы

$$\mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \underbrace{\mathbb{R}_{\geq 0}(e_1 + \cdots + e_{k-1})}_{i\text{-я позиция}} + \cdots + \underbrace{\mathbb{R}_{\geq 0}(e_1 + \cdots + e_k)}_{k\text{-я позиция}} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_n.$$

Действительно, это соотношение (R_{k-1}) , записанное в базисе $e_1, \dots, e_{k-1}, (e_1 + \cdots + e_k), e_{k+1}, \dots, e_n$. Поэтому

$$[\Lambda_1] + \cdots + [\Lambda_k] = ([\Lambda_1] + [\Lambda'_1]) + \cdots + ([\Lambda_{k-1}] + [\Lambda'_{k-1}]).$$

Для каждого $i = 1, \dots, k - 1$ имеем соотношение (R_2) : $[\Lambda_i] + [\Lambda'_i] = [\Lambda''_i]$ в подходящем базисе, где

$$\Lambda''_i := \mathbb{R}_{\geq 0}e_1 + \cdots + \underbrace{\mathbb{R}_{\geq 0}(e_1 + \cdots + e_{k-1})}_{i\text{-я позиция}} + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}e_n.$$

Наконец, (R_{k-1}) в базисе $e_1, \dots, e_n$ приобретает вид $[\Lambda'_1] + \cdots + [\Lambda'_{k-1}] = [\Lambda]$, откуда следует требуемое утверждение. $\square$

Теперь мы можем рассмотреть заведомо другую группу, порожденную символами $[\Lambda]$, где Λ — любой строго выпуклый рациональный многогранный конус полной размерности, удовлетворяющий соотношениям $[\Lambda] = [\Lambda]_1 + \cdots + [\Lambda_k]$, где Λ — объединение конусов Λ_i с непересекающимися внутренностями (здесь k может быть любым целым числом, не меньше целого числа ≥ 2). Согласно торическому аналогу слабой факторизации естественный гомоморфизм, действующий из $\mathcal{F}_{\mathbf{L}, \mathbb{Z}}$ в эту группу, является изоморфизмом. В этой терминологии лемма 4.1 утверждает, что достаточно рассмотреть раздутия с центрами в коразмерности 2.

В результате заключаем, что $\mathcal{M}_n(G)$ допускает альтернативное описание как группа, порожденная символами $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda)$, зависящими только от классов изоморфизма троек $(\mathbf{L}, \chi, \Lambda)$, где $\mathbf{L}$ и χ такие же, как выше, а Λ — конечно порожденный выпуклый рациональный конус полной размерности, удовлетворяющий соотношениям (4.4), если имеет место разложение $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_k$, как выше. Очевидно, что вышесказанное распространяется на невыпуклые конусы.

Рассмотрим иной вариант приведенных выше конструкций. Вместо $\chi \in \mathbf{L} \otimes A = \text{Hom}(\mathbf{L}^\vee, A)$ рассмотрим $\chi^* \in \text{Hom}(\mathbf{L}, A)$, опять же предполагая сюръективность χ^* . По аналогии можно ввести группу $\mathcal{M}_n^*(G)$, которую будем называть *ковекторным* вариантом (*векторного* варианта) $\mathcal{M}_n(G)$. Эта группа порождается символами $\langle a_1, \dots, a_n \rangle^*$, которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(S^*) \quad \text{для всех } \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ и } a_1, \dots, a_n \in A$$

$$\langle a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)} \rangle^* = \langle a_1, \dots, a_n \rangle^*,$$

$$(M^*) \quad \text{для всех } 2 \leq k \leq n, a_1, \dots, a_k \in A \text{ и } b_1, \dots, b_{n-k} \in A \text{ таких, что } \sum_i \mathbb{Z}a_i + \sum_j \mathbb{Z}b_j = A,$$

$$\langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k} \rangle^* = \sum_{1 \leq i \leq k} \langle a_1, \dots, \sum_{j=1}^k a_j (\text{на } i\text{-й позиции}), \dots, a_k, b_1, \dots, b_{n-k} \rangle^*.$$

Как и выше, соотношения для $k = 2$ влекут все остальные.

Нетрудно показать, что $\mathbb{Q}$ -ранги $\mathcal{M}_n(G)$ и $\mathcal{M}_n^*(G)$ одинаковы. Действительно, в силу формулы обращения типа Мёбиуса можно свести вопрос к расширениям групп $\mathcal{M}_n(G)$ и $\mathcal{M}_n^*(G)$, исключив условие сюръективности отображения $\chi : \mathbf{L}^\vee \rightarrow A$ (соответственно, $\chi^* : \mathbf{L} \rightarrow A$). Тогда конечное преобразование Фурье (после выбора идентификации $G \simeq A$) отождествляет два комплексных векторных пространства, образованных гомоморфизмами из двух расширенных групп в $\mathbb{C}$.

5. Умножение и коумножение

В этом параграфе мы рассматриваем только векторный случай. Ковекторный случай рассматривается аналогично. Рассмотрим $\mathcal{M}_n(G)$ с двумя переменными $n \geq 1$ и G . Определим отображения умножения и коумножения и изучим их свойства. Важную роль будет играть группа $\mathcal{M}_n^-(G)$, которая определяется *только для нетривиальных групп G* как фактор-группа $\mathcal{M}_n(G)$ по отношению

$$\langle -a_1, \dots, a_n \rangle = -\langle a_1, \dots, a_n \rangle. \quad (5.1)$$

Обозначим через $\langle a_1, \dots, a_n \rangle^- \in \mathcal{M}_n^-(G)$ образ $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ при естественной проекции

$$\mu^- : \mathcal{M}_n(G) \rightarrow \mathcal{M}_n^-(G). \quad (5.2)$$

Рассмотрим короткие точные последовательности конечных абелевых групп

$$0 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 0$$

и соответствующие короткие точные последовательности групп характеров

$$0 \rightarrow A'' \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow 0.$$

Пусть $n = n' + n''$ и $n', n'' \geq 1$. Определим $\mathbb{Z}$ -билинейное отображение “умножения”

$$\nabla : \mathcal{M}_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}(G'') \rightarrow \mathcal{M}_{n'+n''}(G),$$

заданное на порождающих формулой

$$\langle a'_1, \dots, a'_{n'} \rangle \otimes \langle a''_1, \dots, a''_{n''} \rangle \mapsto \sum \langle a_1, \dots, a_{n'}, a''_1, \dots, a''_{n''} \rangle, \quad (5.3)$$

где сумма берется по всем подъемам $a_i \in A$ элемента $a'_i \in A'$ и a''_i понимаются как элементы A с учетом вложения $A'' \hookrightarrow A$.

Совместность с определяющими соотношениями (S) и (M) очевидна. Тот факт, что элементы в каждом слагаемом в правой части порождают A , следует из соответствующего условия в левой части для групп A' и A'' . Заметим, что ∇ спускается до $\mathbb{Z}$ -билинейного отображения соответствующих фактор-групп $\nabla^- : \mathcal{M}_{n'}^-(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}^-(G'') \rightarrow \mathcal{M}_{n'+n''}^-(G)$, где G' и G'' нетривиальны.

Далее, определим отображение “коумножения”

$$\Delta : \mathcal{M}_{n'+n''}(G) \rightarrow \mathcal{M}_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}^-(G''),$$

где группа G'' нетривиальна, заданное на порождающих формулой

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \mapsto \sum \langle a_{I'} \bmod A'' \rangle \otimes \langle a_{I''} \rangle^-. \quad (5.4)$$

Здесь полагаем

$$\langle a_{I'} \bmod A'' \rangle = \langle a_{i_1} \bmod A'', \dots, a_{i_{n'}} \bmod A'' \rangle, \quad I' := \{i_1, \dots, i_{n'}\},$$

и аналогично для $\langle a_{I''} \rangle$, используя отношение симметрии (S). Сумма берется по всем подразбиениям $\{1, \dots, n\} = I' \sqcup I''$, $\#I' = n'$, $\#I'' = n''$, таким, что

- для всех $j \in I''$ имеем $a_j \in A'' \subset A$, и в первом члене в правой части элементы a_i , $i \in I'$, заменяются их образами в $A' = A/A''$,
- (условие порождения) элементы a_j , $j \in I''$, порождают A'' .

Заметим, что при данном условии порождения в каждом члене из правой части формулы выражение $\langle a_{I'} \bmod A'' \rangle^-$ является символом, так как $\sum_{i \in I'} \mathbb{Z}a_i = A$ влечет $\sum_{i \in I'} \langle a_i \bmod A'' \rangle = A'$.

Поэтому условие порождения для первого члена выполняется автоматически.

Предложение 5.1. *Отображение Δ продолжается до корректно определенного $\mathbb{Z}$ -линейного гомоморфизма.*

Доказательство. По лемме 4.1 достаточно проверить 2-членные отношения (R_2) . Надо показать, что образ отношения

$$\langle a_1, a_2, \dots \rangle = \langle a_1 - a_2, a_2, \dots \rangle + \langle a_1, a_2 - a_1, \dots \rangle$$

в левой части является соотношением в правой части и члены в правой части удовлетворяют условию порождения (линейные комбинации элементов порождают соответствующую группу). Представляет интерес лишь тот случай, когда первые два аргумента распределяются над различными множителями в (5.4), так что

$$\langle a_1, a_2, \dots \rangle' \rightarrow \delta_{a_1 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle a_2 \bmod A'', \dots \rangle \otimes \langle a_1, \dots \rangle^- + \delta_{a_2 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle a_2 \bmod A'', \dots \rangle \otimes \langle a_2, \dots \rangle^-, \quad (5.5)$$

где для $a \in A$

$$\delta_{a \in A''}^{\text{gen}} := \begin{cases} 1, & a \in A'', \quad \mathbb{Z}a + \sum_{j \in J''} \mathbb{Z}a_j = A'', \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Возможны четыре случая:

- (1) $a_1 \in A'', a_2 \in A''$,
- (2) $a_1 \in A'', a_2 \notin A''$,
- (3) $a_1 \notin A'', a_2 \in A''$,
- (4) $a_1 \notin A'', a_2 \notin A''$.

Зафиксируем непересекающиеся подмножества $J' := I' \cap \{3, \dots, n\}$ и $J'' := I'' \cap \{3, \dots, n\}$ мощности $n' - 1$ и $n'' - 1$ соответственно. Для каждого символа в левой части (5.4) существует не более двух ненулевых членов в правой части (в зависимости от условия порождения) соответственно случаю $a_1 \in I', a_2 \in I''$ или $a_1 \in I'', a_2 \in I'$.

В случае (1)

$$\langle a_1, a_2, \dots \rangle \mapsto \delta_{a_1 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle 0, \dots \rangle \otimes \langle a_1, \dots \rangle^- + \delta_{a_2 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle 0, \dots \rangle \otimes \langle a_2, \dots \rangle^-$$

и

$$\begin{aligned} \langle a_1 - a_2, a_2, \dots \rangle + \langle a_1, a_2 - a_1, \dots \rangle \\ \mapsto \delta_{a_1 - a_2 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle 0, \dots \rangle \otimes \langle a_1 - a_2, \dots \rangle^- + \delta_{a_2 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle 0, \dots \rangle \otimes \langle a_2, \dots \rangle^- \\ + \delta_{a_1 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle 0, \dots \rangle \otimes \langle a_1, \dots \rangle^- + \delta_{a_2 - a_1 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle 0, \dots \rangle \otimes \langle a_2 - a_1, \dots \rangle^-. \end{aligned}$$

Первый и последний члены в правой части сокращаются в силу (5.1), а второй и третий члены являются образами $\langle a_1, a_2, \dots \rangle$.

В случае (2)

$$\langle a_1, a_2, \dots \rangle \mapsto \delta_{a_1 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle a_2 \bmod A'', \dots \rangle \otimes \langle a_1, \dots \rangle^-$$

и

$$\langle a_1 - a_2, a_2, \dots \rangle + \langle a_1, a_2 - a_1, \dots \rangle \mapsto \delta_{a_1 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle a_2 - a_1 \bmod A'', \dots \rangle \otimes \langle a_1 - a_2, \dots \rangle^-.$$

Правые части обоих выражений совпадают, так как $a_2 = a_2 - a_1 \bmod A''$.

Случай (3) аналогичен случаю (2).

В случае (4) имеем $\langle a_1, a_2, \dots \rangle \mapsto 0$ и

$$\begin{aligned} \langle a_1 - a_2, a_2, \dots \rangle + \langle a_1, a_2 - a_1, \dots \rangle \mapsto \delta_{a_1 - a_2 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle a_2 \bmod A'', \dots \rangle \otimes \langle a_1 - a_2, \dots \rangle^- \\ + \delta_{a_2 - a_1 \in A''}^{\text{gen}} \cdot \langle a_1 \bmod A'', \dots \rangle \otimes \langle a_2 - a_1, \dots \rangle^-; \end{aligned}$$

члены в правой части сокращаются в силу (5.1). □

Легко проверить, что Δ спускается до $\mathbb{Z}$ -линейного гомоморфизма

$$\Delta^- : \mathcal{M}_{n'+n''}^-(G) \rightarrow \mathcal{M}_{n'}^-(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}^-(G''). \quad (5.6)$$

Построения выше приводят к естественному комплексу. Обозначим через $\mathcal{G}_\bullet$ флаг подгрупп

$$0 = G_{\leq 0} \subsetneq G_{\leq 1} \subsetneq \dots \subsetneq G_{\leq r} = G$$

и через r — его длину. Рассмотрим диаграмму гомоморфизмов

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^-(G) &\rightleftharpoons \bigoplus_{\substack{n_1+n_2=n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } 2}} \mathcal{M}_{n_1}^-(\text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}_{n_2}^-(\text{gr}_2(\mathcal{G}_\bullet)) \\ &\rightleftharpoons \bigoplus_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } 3}} \mathcal{M}_{n_1}^-(\text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}_{n_2}^-(\text{gr}_2(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}_{n_3}^-(\text{gr}_3(\mathcal{G}_\bullet)) \rightleftharpoons \dots, \end{aligned}$$

где правые стрелки означают естественные симплициальные расширения коумножения Δ^- (заданные знакопеременными суммами), а левые стрелки — соответствующие расширения отображений умножения. Получаем два комплекса $\mathcal{C}^{\bullet,-}(G, n)$ и $\mathcal{C}_\bullet^-(G, n)$ с дифференциалами d_{Δ^-} и d_{∇^-} степени $(+1)$ и (-1) соответственно.

Теорема 5.1. Пусть G — конечная циклическая группа. Тогда когомологии обоих комплексов $\mathcal{C}^{\bullet,-}(G, n)$ и $\mathcal{C}_\bullet^-(G, n)$ (после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$) сконцентрированы в степени 0.

Доказательство. Условие цикличности группы G будет использоваться только на последнем шаге доказательства. Пусть $\mathcal{M}_n^{\sim}(G)$ — $\mathbb{Q}$ -векторное пространство, порожденное символами $\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{\sim}$, удовлетворяющими условию симметрии (S) и такими, что $a_1, \dots, a_n$ порождают A и $a_j \neq 0$ для всех j . Существует естественное отображение $\mathbb{Q}$ -векторных пространств $\mathcal{M}_n^{\sim}(G) \rightarrow \mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q}$, заданное формулой

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{\sim} \mapsto \langle a_1, \dots, a_n \rangle^-. \quad (5.7)$$

Рассмотрим коумножение

$$\Delta^{\sim} : \mathcal{M}_{n'+n''}^{\sim}(G) \rightarrow \mathcal{M}_{n'}^{\sim}(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}^{\sim}(G''),$$

определенное формулой

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle^{\sim} \mapsto \sum \langle a_{I'} \bmod A'' \rangle^{\sim} \otimes \langle a_{I''} \rangle^{\sim}, \quad (5.8)$$

где $I', I'' \subsetneq I$ — непустые подмножества такие, что

- $I' \sqcup I'' = \{1, \dots, n\}$,
- $I'' = \left\{ i \mid a_i \in A'', \sum_{i \in I''} \mathbb{Z}a_i = A'' \right\}$.

Отображение умножения $\nabla^{\sim} : \mathcal{M}_{n'}^{\sim}(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}^{\sim}(G'') \rightarrow \mathcal{M}_{n'+n''}^{\sim}(G')$ определяем аналогами формул (5.3). Как и выше, получим два комплекса $\mathcal{C}^{\bullet,\sim}(G, n)$ и $\mathcal{C}_\bullet^{\sim}(G, n)$ с соответствующими дифференциалами $d_{\nabla^{\sim}}$ и $d_{\Delta^{\sim}}$. Получаем естественные сюръективные гомоморфизмы комплексов $\mathcal{C}^{\bullet,\sim}(G, n) \twoheadrightarrow \mathcal{C}^{\bullet,-}(G, n) \otimes \mathbb{Q}$ и $\mathcal{C}_\bullet^{\sim}(G, n) \twoheadrightarrow \mathcal{C}_\bullet^-(G, n) \otimes \mathbb{Q}$, индуцированные отображениями $\langle a_1, \dots, a_{n_i} \rangle^{\sim} \mapsto \langle a_1, \dots, a_{n_i} \rangle^-$. Ясно, что эти отображения согласованы с соответствующими дифференциалами; здесь мы использовали тот факт, что символы $\langle a_1, \dots, a_{n_i} \rangle^-$ обращаются в нуль по модулю кручения, если $a_j = 0$ по крайней мере для одного j .

Рассмотрим следующие утверждения:

- (1) $H^{>0}(\mathcal{C}^{\bullet,\sim}(G, n)) = 0$,
- (2) оператор $\Delta^{\sim} = d_{\Delta^{\sim}} \circ d_{\nabla^{\sim}} + d_{\nabla^{\sim}} \circ d_{\Delta^{\sim}}$ обратим в степенях > 0 ,
- (3) оператор $\Delta^- = d_{\Delta^-} \circ d_{\nabla^-} + d_{\nabla^-} \circ d_{\Delta^-}$ обратим в степенях > 0 ,
- (4) $H^{>0}(\mathcal{C}^{\bullet,-}(G, n)) = 0$ и $H_{>0}(\mathcal{C}_\bullet^-(G, n)) = 0$.

Имеет место последовательность импликаций

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4).$$

Действительно, утверждения (1) и (2) эквивалентны, так как дифференциалы $d_{\nabla\sim}$ и $d_{\Delta\sim}$ сопряжены относительно положительно определенной квадратичной формы, заданной единичной матрицей в естественном базисе.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) верна, так как мы имеем сюръективный гомоморфизм комплексов.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) верна, так как лапласиан Δ^- является эндоморфизмом обоих комплексов $\mathcal{C}^{\bullet,-}(G, n) \otimes \mathbb{Q}$ и $\mathcal{C}_{\bullet}^-(G, n) \otimes \mathbb{Q}$, который гомотопен нулю для обоих комплексов. Обратимость этого эндоморфизма в степенях > 0 влечет обратимость в когомологиях в степенях > 0 и, следовательно, когомологии равны нулю в этих степенях.

Осталось доказать утверждение (1). Для этого построим гомотопию $h : C_j^{\sim}(G, n) \rightarrow C_{j-1}^{\sim}(G, n)$, $j = 1, \dots$, такую, что

$$\Delta_h^{\sim} := h \circ d_{\Delta\sim} + d_{\Delta\sim} \circ h \quad (5.9)$$

обратим в степенях > 0 .

Напомним, что $C_j^{\sim}(G, n)$, $j \geq 0$, является прямой суммой членов, отмеченных флагами подгрупп $0 = G_{\leq 0} \subsetneq G_{\leq 1} \subsetneq \dots \subsetneq G_r = G$, $r = j + 1$. Перейдя к характеристам, получим цепочку сюръективных гомоморфизмов

$$0 = A_{\leq 0} \xleftarrow{\neq} A_{\leq 1} \xleftarrow{\neq} \dots \xleftarrow{\neq} A_{\leq r} = A.$$

Определим h формулой

$$\mathcal{M}_{n_1}^{\sim}(A_{\leq 1}) \otimes \mathcal{M}_{n_2}^{\sim}(\text{Ker}(A_{\leq 2} \twoheadrightarrow A_{\leq 1})) \otimes \dots \rightarrow \mathcal{M}_{n_1+n_2}^{\sim}(A_{\leq 2}) \otimes \dots,$$

который действует как тождественный оператор на пропущенных множителях и как

$$\langle a_1, \dots, a_{n_1} \rangle^{\sim} \otimes \langle b_1, \dots, b_{n_2} \rangle^{\sim} \mapsto \langle \psi(a_1), \dots, \psi(a_{n_1}), b_1, \dots, b_{n_2} \rangle^{\sim}$$

на первых двух членах, где $\psi : A_{\leq 1} \rightarrow A_{\leq 2}$ — сечение естественной сюръекции, определенной ниже.

Теперь воспользуемся предположением цикличности группы G (следовательно, всех $A_{\leq j}$). Запишем

$$G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} = \prod_i \mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z}$$

и отождествим $\mathbb{Z}/p_i^{k_i}\mathbb{Z} = \{0, \dots, p_i - 1\}^{k_i}$, рассматривая последовательность цифр по базе p_i . В такой постановке имеется естественный подъем $\psi : A_{\leq 1} \rightarrow A_{\leq 2}$, полученный *добавлением* нулей к соответствующим последовательностям цифр для всех p_i . Заметим, что дифференциал $d_{\Delta\sim}$ задается *удалением* цифр из этого представления. Оператор $\Delta_h^{\sim} - \text{Id}$ (см. уравнение (5.9)), действующий на $C_j^{\sim}(G, n)$, $j \geq 1$, *нильпотентный*, так как он строго увеличивает число нулей в нашем множестве цифровых последовательностей. Поэтому $\Delta_h^{\sim}$ обратим в степенях ≥ 1 . $\square$

Замечание 5.1. Для нециклической группы G структура когомологий $\mathcal{C}^{\bullet,-}$ более сложная. Пусть $G = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. В этом случае комплекс имеет вид

$$\mathcal{M}_2^-(G) \rightarrow \bigoplus_{p+1 \text{ копий}} \mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Покажем, что это отображение не будет сюръективным при $p \geq 3$. Действительно, достаточно построить нетривиальный функционал в правой части, обращающийся в нуль на образе дифференциала $d_{\Delta-}$. Мы можем описать $\text{Coker}(d_{\Delta-}) \otimes \mathbb{Q}$ как пространство $\mathbb{Q}$ -значных функций f на парах линейно независимых векторов $a_1, a_2 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$ таких, что

- $f(a_1, a_2) = -f(-a_1, a_2) = -f(a_1, -a_2) = f(a_1, a_2 + \lambda a_1)$ для всех $\lambda \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$,
- $f(a_1, a_2) + f(a_2, a_1) = 0$.

Первое свойство описывает функционалы на $C^{1,-}(G, 2)$, а второе означает, что f принадлежит $\text{Ker}(d_{\Delta-})$. Здесь определяющее соотношение (M) для $\mathcal{M}_2(G)$ не используется. Решения этой системы функциональных уравнений задаются отображениями $f(a_1, a_2) = g(a_1 \wedge a_2)$, где g — любое отображение вида $g := (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^{\times} = \wedge^2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{Q}$, которое нечетно, т.е. $g(-\lambda) = -g(\lambda)$ для всех λ . Следовательно,

$$H^1(\mathcal{C}^{\bullet,-}(G, 2)) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{(p-1)/2}.$$

Определим

$$\mathcal{M}_{n,\text{prim}}^-(G) := \text{Ker} \left(\mathcal{M}_n^-(G) \rightarrow \bigoplus_{\substack{n'+n''=n, \ n',n'' \geq 1 \\ 0 \subsetneq G' \subsetneq G}} \mathcal{M}_{n'}^-(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}^-(G/G') \right). \quad (5.10)$$

Это когомологии комплекса $\mathcal{C}^{\bullet,-}(G, n)$ в нулевой степени с дифференциалом d_Δ .

Определим

$$\mathcal{M}_{n,\text{coprim}}^-(G) := \text{Coker} \left(\mathcal{M}_n^-(G) \leftarrow \bigoplus_{\substack{n'+n''=n, \ n',n'' \geq 1 \\ 0 \subsetneq G' \subsetneq G}} \mathcal{M}_{n'}^-(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}^-(G/G') \right). \quad (5.11)$$

Это когомологии комплекса $\mathcal{C}_\bullet^-(G, n)$ в нулевой степени с дифференциалом d_∇ . В силу теоремы 5.1 для циклической группы G

$$\dim(\mathcal{M}_{n,\text{prim}}^-(G) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\mathcal{M}_{n,\text{coprim}}^-(G) \otimes \mathbb{Q}), \quad (5.12)$$

$$\dim(\mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q}) = \sum_r \sum_{\substack{n_1+\dots+n_r=n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } r}} \prod_{i=1}^r \dim(\mathcal{M}_{n_i,\text{prim}}^-(\text{gr}_i(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathbb{Q}). \quad (5.13)$$

Используя ∇^- , можно получить гомоморфизм векторных пространств

$$\mathcal{M}_{n_1,\text{prim}}^-(\text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_{n_r,\text{prim}}^-(\text{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q}.$$

Аналогично, используя Δ^- , получим гомоморфизм $\mathbb{Q}$ -векторных пространств

$$\mathcal{M}_{n_1,\text{coprim}}^-(\text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_{n_r,\text{coprim}}^-(\text{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathbb{Q} \leftarrow \mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q}.$$

Ввиду (5.12) и (5.13) заманчиво предположить, что эти отображения являются изоморфизмами $\mathbb{Q}$ -векторных пространств.

Теперь рассмотрим диаграмму гомоморфизмов

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n(G) &\rightarrow \bigoplus_{\substack{n_1+n_2=n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } 2}} \mathcal{M}_{n_1}(\text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}_{n_2}^-(\text{gr}_2(\mathcal{G}_\bullet)) \\ &\rightarrow \bigoplus_{\substack{n_1+n_2+n_3=n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } 3}} \mathcal{M}_{n_1}(\text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}_{n_2}^-(\text{gr}_2(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathcal{M}_{n_3}^-(\text{gr}_3(\mathcal{G}_\bullet)) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

где

- $\mathcal{G}_\bullet$ — флаг подгрупп типа $0 = G_{\leq 0} \subseteq G_{\leq 1} \subsetneq \dots \subsetneq G_{\leq r} = G$, $r \geq 1$, со строгими вложениями, за исключением первого шага,
- крайний левый множитель в каждом члене является полной группой, а не фактор-группой по отношению (5.1).

Здесь дифференциал использует *оба* отображения Δ и Δ^- . Мы опять получим комплекс, который обозначим $\mathcal{C}^\bullet(G, n)$. Отметим, что здесь нет двойственного дифференциала в другом направлении.

Теорема 5.2. Пусть G — конечная циклическая группа. Тогда когомологии комплекса $\mathcal{C}^\bullet(G, n)$ (после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$) сконцентрированы в степени 0.

Доказательство. Рассуждаем так же, как в доказательстве теоремы 5.1. Ключевой момент состоит в том, что для конечных циклических групп проекция μ^- , определенная в (5.2), допускает сечение

$$\nu : \mathcal{M}_n^-(G) \rightarrow \mathcal{M}_n(G), \quad (5.14)$$

которое на символах задается формулой

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle^- \mapsto \sum_{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n} (-1)^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n} \langle \varepsilon_1 a_1, \dots, \varepsilon_n a_n \rangle, \quad (5.15)$$

где $\varepsilon_i \in \{+1, -1\}$ и сумма берется по всем возможным вариантам.

При $n = 1$ этот факт очевидно совместен. Чтобы проверить определяющие соотношения в общем случае, достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Для $a, b \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $\text{НОД}(a, b, N) = 1$, уравнение (5.15) принимает вид

$$\langle a, b \rangle^- \mapsto \langle a, b \rangle + \langle -a, -b \rangle - \langle -a, b \rangle - \langle a, -b \rangle. \quad (5.16)$$

Надо проверить, что соотношение $\langle a, b \rangle^- = \langle a, b - a \rangle^- + \langle a - b, b \rangle^-$ отображается в соотношение в $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Для каждого члена в (5.16) выпишем соотношение

$$\begin{aligned} & \langle a, b \rangle + \langle -a, -b \rangle - \langle -a, b \rangle - \langle a, -b \rangle \\ & \stackrel{?}{=} \langle a, b - a \rangle + \langle -a, a - b \rangle - \langle -a, b - a \rangle - \langle a, a - b \rangle \\ & + \langle a - b, b \rangle + \langle b - a, -b \rangle - \langle b - a, b \rangle - \langle a - b, -b \rangle. \end{aligned}$$

Первые члены на каждой строке (а также вторые, которые рассматриваются по отдельности) дают соотношение в $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Достаточно проверить, что

$$-\langle -a, b \rangle - \langle a, -b \rangle \stackrel{?}{=} -\langle -a, b - a \rangle - \langle a, a - b \rangle - \langle b - a, b \rangle - \langle a - b, -b \rangle.$$

Заменим $a \mapsto -a$. Надо показать, что

$$\langle a, b \rangle + \langle -a, -b \rangle \stackrel{?}{=} \langle a, b + a \rangle + \langle -a, -a - b \rangle + \langle b + a, b \rangle + \langle -a - b, -b \rangle.$$

Так как $\langle a, b + a \rangle = \langle a, b \rangle + \langle -b, b + a \rangle$ и $\langle -a, -b - a \rangle = \langle -a, -b \rangle + \langle b, -b - a \rangle$, достаточно показать, что

$$\delta(a + b, b) := \langle a + b, b \rangle + \langle -(a + b), b \rangle + \langle a + b, -b \rangle + \langle -(a + b), -b \rangle \stackrel{?}{=} 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}),$$

т.е. $\delta(a, b) \stackrel{?}{=} 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Заметим, что $\delta(a + b, b) = \delta(a + b, a)$ и $\delta(a, b) = \delta(-a, b) = \delta(b, a)$. Следовательно, δ инвариантно относительно матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которые порождают группу $\text{SL}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, откуда следует, что $\delta(a, b)$ — константа. Рассматривая среднее и применяя определяющее соотношение к каждому члену, получим

$$S := \sum_{a, b} \delta(a, b) = 2S,$$

откуда следует $S = 0$.

Для доказательства теоремы 5.2 надо установить сюръективность отображения

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \rightarrow \bigoplus_{N=N'N''} \mathcal{M}_{n'}(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{M}_{n''}^-(\mathbb{Z}/N''\mathbb{Z}), \quad n = n' + n'';$$

здесь сумма берется по всем точным последовательностям

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/N''\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/N'\mathbb{Z} \rightarrow 0, \quad N = N'N'', \quad N \geq 2,$$

конечных циклических групп. Теперь применим *обратный* оператор (после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$). Как уже отмечалось выше,

$$\tilde{\nabla} : \mathcal{M}_{n'}(\mathbb{Z}/N'\mathbb{Z}) \otimes \mathcal{M}_{n''}^-(\mathbb{Z}/N''\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}), \quad n = n' + n'',$$

задается на порождающих формулой

$$\langle a'_1, \dots, a'_{n'} \rangle \otimes \langle b_1, \dots, b_{n''} \rangle^- \mapsto \sum_{\substack{\text{все подъемы} \\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n''}}} (-1)^{\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n''}} \langle a_1, \dots, a_{n'}, \varepsilon_1 b_1, \dots, \varepsilon_{n''} b_{n''} \rangle,$$

где сумма берется по всем подъемам a_i в $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ элементов $a'_i \in \mathbb{Z}/N'\mathbb{Z}$ и всем возможным вариантам для $\varepsilon_j \in \{+1, -1\}$ (см. определение ν в (5.14)). Это согласуется с определяющими уравнениями. Теорема доказана. $\square$

Теперь определим

$$\mathcal{M}_{n,\text{prim}}(G) = \text{Ker} \left(\mathcal{M}_n(G) \rightarrow \bigoplus_{\substack{n'+n''=n, \ n',n'' \geq 1 \\ 0 \subseteq G' \subsetneq G}} \mathcal{M}_{n'}(G') \otimes \mathcal{M}_{n''}^-(G/G') \right). \quad (5.17)$$

Это когомологии комплекса в степени 0. Заметим, что вложение G' может быть тривиальным. Имеем $\mathcal{M}_1(G) = \mathcal{M}_{1,\text{prim}}(G)$ для всех G . При $G = 1 = \mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$ имеем $\mathcal{M}_1(1) = \mathbb{Z}$ и $\mathcal{M}_n(1) = \mathcal{M}_{n,\text{prim}}(1) = 0$, $n \geq 2$. Из теоремы 5.2 следует существование *неканонического* изоморфизма

$$\mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{Q} \simeq \bigoplus_r \bigoplus_{\substack{n_1+\dots+n_r=n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } r}} \mathcal{M}_{n_1,\text{prim}}(\text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_{n_r,\text{prim}}^-(\text{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)) \otimes \mathbb{Q}.$$

Компьютерные вычисления (см. § 8) дают основание считать, что для всех $N \geq 1$

- $\mathcal{M}_{2,\text{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{M}_{2,\text{prim}}^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ и равно размерности пространства параболических форм веса 2 для $\Gamma_1(N)$ (мы обсудим это в § 11),
- $\mathcal{M}_{3,\text{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{M}_{3,\text{prim}}^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ и равно числу некоторых параболических автоморфных представлений относительно конгруэнц-подгруппы группы $\text{GL}_3(\mathbb{Z})$, порожденных вектором, инвариантным относительно конгруэнц-подгруппы,
- $\mathcal{M}_{n,\text{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{M}_{n,\text{prim}}^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} = 0$, $n \geq 4$.

В силу теорем 5.1 и 5.2 мы можем вычислить $\mathbb{Q}$ -ранги групп $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, используя

- функцию Эйлера

$$\dim(\mathcal{M}_{1,\text{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \varphi(N), \quad N \geq 1,$$

$$\dim(\mathcal{M}_{1,\text{prim}}^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \begin{cases} 0, & N = 2, \\ \varphi(N)/2, & N \geq 3, \end{cases}$$

- хорошо известные размерности пространств параболических форм для группы $\Gamma_1(N)$, которые заданы замкнутыми формулами в N , например,

N	...	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	...	180	181
	0	1	0	2	1	1	2	5	2	7	3	...	705	1276

- несколько мистические размерности в случае $n = 3$, например,

N	43	51	52	59	63	67	68	72	73	75	...	239	240
	1	1	1	1	2	2	1	1	8	4	...	3	22

Пример 5.1. Ввиду теоремы 5.2 получаем $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3^{n-1}\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = 1$, $n \geq 1$, из

$$\mathcal{M}_{1,\text{prim}}(\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}) \otimes \underbrace{\mathcal{M}_{1,\text{prim}}^-(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_{1,\text{prim}}^-(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})}_{(n-1) \text{ раз}}.$$

Очевидно, что коумножения Δ и Δ^- дают гомоморфизмы

$$\text{Hom}(\mathcal{M}_{n_1}^{(-)}(G), \mathbb{Q}) \otimes \text{Hom}(\mathcal{M}_{n_2}^{(-)}(G), \mathbb{Q}) \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{M}_n^{(-)}(G), \mathbb{Q}).$$

Используя явные ненулевые элементы

$$(\langle 0 \rangle \mapsto 1) \in \text{Hom}(\mathcal{M}_1(\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}), \mathbb{Q}), \quad (\langle \pm 1 \bmod 3 \rangle^- \mapsto \pm 1) \in \text{Hom}(\mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}), \mathbb{Q}),$$

получим в явном виде функционал на $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3^{n-1}\mathbb{Z})$ такой, что

$$\langle 1 \bmod 3^{n-1}, 3 \bmod 3^{n-1}, \dots, 3^{n-1} \bmod 3^{n-1} \rangle \mapsto 1$$

и, следовательно, ненулевой. В частности, $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/3^{n-1}\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) \geq 1$. Аналогично

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2) \geq 1.$$

Таким образом, мы получаем в явном виде нетривиальные инварианты эквивариантных бирациональных действий группы $G = \mathbb{Z}/3^{n-1}\mathbb{Z}$ на n -мерных многообразиях. Удивительно, но численные эксперименты показывают, что нетривиальный инвариант в $\text{Hom}(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z}), \mathbb{F}_2)$ поднимается до тривиального элемента в $\text{Hom}(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/2^{n-1}\mathbb{Z}), \mathbb{F}_2)$ при $n = 2, 3, 4, 5$.

На основании численных экспериментов можно предположить, что

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = 0 \text{ для всех } N < 3^{n-1},$$

$$\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2) = 0 \text{ для всех } N < 2^{n-1}.$$

Более того,

$$\dim(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2) = 0 \text{ для всех } N < \begin{cases} 2^n - 1, & n = 2, 3, \\ 2^{n-1}, & n \geq 4. \end{cases}$$

6. Операторы Гекке

В этом параграфе мы рассмотрим аналоги операторов Гекке на $\mathcal{M}_n(G)$. Зафиксируем простое число ℓ , не делящее $\#G$, и целое число $1 \leq r \leq n-1$. Положим

$$T_{\ell,r}(\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda)) := \sum_{\mathbf{L} \subset \mathbf{L}' \subset \mathbf{L} \otimes \mathbb{R}, \mathbf{L}'/\mathbf{L} \simeq (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^r} \psi(\mathbf{L}', \chi, \Lambda), \quad (6.1)$$

где χ теперь понимается как элемент $\mathbf{L}' \otimes A$. В силу вложения $\mathbf{L} \otimes A \subset \mathbf{L}' \otimes A$ сюръективность $\chi \in \mathbf{L}' \otimes A$ следует из сюръективности $\chi \in \mathbf{L} \otimes A$ и условия взаимной простоты ℓ и порядка группы G .

Предложение 6.1. Операторы Гекке $T_{\ell,r}$ корректно определены на $\mathcal{M}_n(G)$ и коммутируют друг с другом.

Предложение 6.1 следует из аддитивности уравнения (4.4) и определения (6.1).

Пример 6.1. Рассмотрим случай $n = 2$ и $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \simeq A$. Тогда $\mathcal{M}_n(G)$ порождается элементами $\langle a_1, a_2 \rangle$, $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $\text{НОД}(a_1, a_2, N) = 1$, такими, что

- $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_2, a_1 \rangle$,
- $\langle a_1, a_2 \rangle = \langle a_1, a_2 - a_1 \rangle + \langle a_1 - a_2, a_2 \rangle$ для всех a_1, a_2 .

Приведем пример оператора Гекке на $\mathcal{M}_2(G)$. Для каждого ℓ , взаимно простого с N , имеется только один оператор Гекке $T_\ell = T_{\ell,1}$. Предположим, что N нечетно и $\ell = 2$. Рассмотрим стандартный октант $\mathbf{L} = \mathbb{Z}^2$, $\chi = (1, 0) \otimes a_1 + (0, 1) \otimes a_2$, $\Lambda = \mathbb{R}_{\geq 0}^2$. Имеются три надрешетки $\mathbf{L}$ индекса 2, соответствующие трем элементам $P^1(\mathbb{F}_2)$:

- $\mathbf{L}'_0 := \mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{2}, 0) + \mathbb{Z} \cdot (0, 1)$,
- $\mathbf{L}'_1 := \mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z} \cdot (0, 1) = \mathbb{Z} \cdot (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z} \cdot (1, 0)$,
- $\mathbf{L}'_\infty := \mathbb{Z} \cdot (0, \frac{1}{2}) + \mathbb{Z} \cdot (1, 0)$.

Соответствующие конусы в первом и третьем случаях будут базисными симплицальными, а во втором случае конус не базисный и может быть представлен как объединение двух базисных симплицальных конусов относительно $\mathbf{L}'_1$: $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$, где $\Lambda_1 = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (1, 0) + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (1, 1)$ и $\Lambda_2 = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (1, 1) + \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot (0, 1)$. Поэтому

$$T_2(\langle a_1, a_2 \rangle) = \langle 2a_1, a_2 \rangle + (\langle a_1 - a_2, 2a_2 \rangle + \langle 2a_1, a_2 - a_1 \rangle) + \langle a_1, 2a_2 \rangle.$$

Средний член получается из равенств

$$e_1 \otimes a_1 + e_2 \otimes a_2 = e_1 \otimes (a_1 - a_2) + \frac{e_1 + e_2}{2} \otimes 2a_2 = \frac{e_1 + e_2}{2} \otimes 2a_1 + e_2 \otimes (a_2 - a_1).$$

Вывод аналогичных формул для действий T_3 на $\mathcal{M}_2(G)$ и T_2 на $\mathcal{M}_3(G)$ оставляем читателю в качестве упражнения.

Для определения операторов Гекке $T_{\ell,r}^*$ в ковекторном варианте рассмотрим подрешетки $\mathbf{L}' \subset \mathbf{L}$ индекса ℓ^r такие, что фактор изоморфен $(\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^r$. В частности, $T_2^* = T_{2,1}^*$ задается на $\mathcal{M}_2^*(G)$ формулой

$$T_2^*([a_1, a_2]^*) = [2a_1, a_2]^* + [2a_1, a_1 + a_2]^* + [a_1 + a_2, 2a_2]^* + [a_1, 2a_2]^*,$$

а $T_{2,1}^*$ на $\mathcal{M}_3(G)$ — формулой

$$\begin{aligned} T_{2,1}^*([a_1, a_2, a_3]^*) &= [2a_1, a_2, a_3]^* + [a_1, 2a_2, a_3]^* + [a_1, a_2, 2a_3]^* + [2a_1, a_1 + a_2, a_3]^* \\ &\quad + [a_1 + a_2, 2a_2, a_3]^* + [a_1, 2a_2, a_2 + a_3]^* + [a_1, a_2 + a_3, 2a_3]^* \\ &\quad + [2a_1, a_2, a_1 + a_3]^* + [a_1 + a_3, a_2, a_3]^* + [2a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_3]^* \\ &\quad + [a_1 + a_2, 2a_2, a_2 + a_3]^* + [a_1 + a_3, a_2 + a_3, 2a_3]^* + [a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_1 + a_3]^*. \end{aligned}$$

Замечание 6.1. Гомоморфизмы Δ и ∇ совместны с действием операторов Гекке, в частности, группы $\mathcal{M}_{n,\text{prim}}^-(G)$, определенные формулой (5.11), сохраняются под действием операторов Гекке.

7. Варианты

Рассмотрим неприводимое алгебраическое представление $\rho_\lambda : \text{GL}_n(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(V_\lambda)$ со старшим весом $\lambda = (\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n)$, $\lambda_i \in \mathbb{Z}$. Представление ρ_λ определяет функтор из группоид n -мерных $\mathbb{Q}$ -векторных пространств в категорию $\text{Vect}_{\mathbb{Q}}$ всех $\mathbb{Q}$ -векторных пространств, который будем обозначать той же буквой. В частности, для любой решетки $\mathbf{L}$ ранга n мы можем говорить о $\rho_\lambda(\mathbf{L} \otimes \mathbb{Q}) \in \text{Vect}_{\mathbb{Q}}$. Например, если ρ_λ — m -я симметрическая степень $\text{Sym}^m(V)$ стандартного представления, т.е. $\lambda = (0, \dots, 0, m)$, то $\rho_\lambda(\mathbf{L} \otimes \mathbb{Q}) = \text{Sym}^m(\mathbf{L} \otimes \mathbb{Q})$.

Рассмотрим $\mathbb{Q}$ -векторное пространство $\mathcal{M}_n(G, \rho_\lambda)$, порожденное символами $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda, v)$ на классах изоморфизма четверок, где $\mathbf{L}, \chi, \Lambda$ такие же, как в § 6, а $v \in \rho_\lambda(\mathbf{L} \otimes \mathbb{Q})$, удовлетворяет следующим условиям:

- $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda, v_1 + v_2) = \psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda, v_1) + \psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda, v_2)$,
- $\psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda, v) = \sum_{i=1}^k \psi(\mathbf{L}, \chi, \Lambda_i, v)$ для любого разложения $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$.

Здесь можно считать, что подконусы Λ_i базисные и симплицальные, а разложение стандартно, как в § 6, или просто Λ_i — конечно порожденные рациональные подконусы полной размерности с непересекающимися внутренностями. Действие операторов Гекке на $\mathcal{M}_n(G, \rho_\lambda)$ определяется так же, как в (6.1).

Ковекторный вариант этой конструкции очевиден.

Замечание 7.1. Мы ожидаем, что для $n = 2$, $G = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ и ρ_λ , заданного m -й симметрической степенью, $\mathbb{Q}$ -векторные пространства $\mathcal{M}_n(G, \rho_\lambda)$, снабженные действием операторов Гекке $T_{\ell,r}$, связаны с модулярными формами веса $(m+2)$ для конгруэнц-подгруппы $\Gamma_1(N)$.

8. Численные эксперименты

В этом параграфе мы приведем результаты численных экспериментов, выполненных с помощью программы Fast Linear Algebra Solver [5]. Мы вычислили размерности $\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ и $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ над $\mathbb{Q}$ и другими различными конечными полями. Размеры (сильно разреженных) матриц растут как $\sim N^n$. Например, при $n = 5$ и $N = 81$ часть условий, соответствующих $k = 2$ в (В) или (М), приводит к $\sim 3 \cdot 10^8$ уравнениям с $\sim 3 \cdot 10^7$ переменными и $\sim 10^9$ ненулевыми коэффициентами. Эта переопределенная система имеет единственное (с точностью до скаляра) нетривиальное решение в $\mathbb{Q}$. Вычисление длилось около четырех часов. Мы получили следующие численные результаты.

- Для простого p

$$\dim(\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \frac{p^2 - 1}{24} + 1 = \frac{p^2 + 23}{24},$$

тогда как разность

$$\Delta_{2,\ell}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) := \dim(\mathcal{B}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_\ell) - \frac{p^2 + 23}{24}$$

меняется существенно: имеют место частые скачки при $\ell \mid (p \pm 1)$, например,

$$\Delta_{2,31}(\mathbb{Z}/61\mathbb{Z}) = 1.$$

- В случае простого p

$$\Delta_{3,\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) := \dim(\mathcal{B}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) - \frac{(p-5)(p-7)}{24} = 0$$

для всех простых чисел вплоть до 41, однако

$$\Delta_{3,\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = 1, \quad p = 43, 59, \dots$$

- Разность

$$\Delta_{3,\ell}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) := \dim(\mathcal{B}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_\ell) - \frac{(p-5)(p-7)}{24}$$

также претерпевает скачки для многих $\ell \mid (p \pm 1)$.

- Для всех простых p , вплоть до числа 41, $\dim(\mathcal{B}_4(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = 0$, тогда как $\dim(\mathcal{B}_4(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = 1$ для $p = 43, 59, \dots$

Ниже мы систематизируем полученные результаты в виде таблиц размерностей. Все размерности для $\mathbb{Q}$ -коэффициентов согласуются с гипотезами из § 5. Полужирным выделено наименьшее N , при котором ранг положителен.

- $\dim(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q})$ для $n = 2, 3$:

N	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$n=2$	0	1	1	2	2	3	3	5	4	6	7	8	7	13	10	13	12
$n=3$	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	2	2	1	5	3	5	5

N	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	...	180	181
$n=2$	16	17	23	16	23	23	30	22	34	31	36	...	989	1366
$n=3$	7	7	11	7	12	13	16	12	21	17	22	...	1740	1276

- $\dim(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q})$ для $n = 4$:

N	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	...	105	106	107
$n=4$	1	0	0	0	0	0	2	0	0	3	...	114	0	3

- $\dim(\mathcal{M}_{4,\text{prim}}^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = 0$ для $N \leq 242$.

- $\dim(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q})$ для $n = 5$:

N	...	≤ 80	81	82
$n=5$		0	1	0

- $\dim(\mathcal{B}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2)$ и $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2)$ для $n = 2, 3, 4, 5$:

N	2	3	4	5	6	7	8	...	16	...	32
$\mathcal{B}_2$	0	1	1	2	3	4	4	...	13	...	44
$\mathcal{M}_2$	1	2	3	5	5	8	8	...	21	...	60
$\mathcal{B}_3$	0	0	0	0	0	1	1	...	8	...	43
$\mathcal{M}_3$	0	0	1	1	3	2	5	...	21	...	87
$\mathcal{B}_4$	0	0	0	0	0	0	0	...	1	...	12
$\mathcal{M}_4$	0	0	0	0	0	0	1	...	9	...	55
$\mathcal{B}_5$	0	0	0	0	0	0	0	...	0	...	1
$\mathcal{M}_5$	0	0	0	0	0	0	0	...	1	...	13

Уравнения (В) из § 1 помечены парами положительных целых чисел n, k , где n — размерность и $2 \leq k \leq n$. Компьютерные вычисления продемонстрировали замечательное свойство наших уравнений: при заданных n и k сильно переопределенная подсистема линейных уравнений (В) или (М) (неявно предполагается выполненным свойство симметрии (S)) имеет очень большое пространство решений, обычно намного больше, чем для всей системы при заданном n , которая представляет собой конъюнкцию подсистем при $k = 2, \dots, n$ (либо подсистему при $k = 2$; см. лемму 4.1). У нас нет объяснений этому поразительному факту. Нет никаких очевидных действий операторов Гекке на пространствах решений для индивидуальных n, k при $k > 2$, и весьма удивительно, что сильно переопределенные системы вообще допускают какое-либо нетривиальное решение.

- $\mathbb{Q}$ -ранги частичных систем $\mathcal{B}_{n,k}$ и $\mathcal{M}_{n,k}$ для $k \geq 3$ и некоторых простых и составных чисел N :

N	2	3	5	7	11	13	17	19	23	9	12	27	36
$\mathcal{B}_{3,3}$	1	2	4	6	12	15	22	27	35	11	36	87	468
$\mathcal{M}_{3,3}$	0	1	3	3	7	10	15	18	24	9	40	78	480
$\mathcal{B}_{4,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	5	63
$\mathcal{M}_{4,3}$	0	0	0	0	1	2	5	7	12	1	5	24	121
$\mathcal{B}_{4,4}$	0	3	6	9	17	20	29	35	45	42	101	620	2515
$\mathcal{M}_{4,4}$	0	3	2	3	7	8	13	17	23	45	123	649	2716
$\mathcal{B}_{5,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$\mathcal{M}_{5,3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7
$\mathcal{B}_{5,4}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	4	55	267
$\mathcal{M}_{5,4}$	0	0	0	0	1	2	5	7	12	5	12	122	?
$\mathcal{B}_{5,5}$	1	3	9	12	22	26	37	44	56	30	161	572	?
$\mathcal{M}_{5,5}$	0	1	3	3	7	8	13	17	23	17	212	?	?

Часть II

9. Алгебраические варианты автоморфных форм

Конструкции из § 7 можно обобщить в следующем контексте. Пусть G — связная редуктивная группа над $\mathbb{Q}$. Напомним понятие допустимых модулей Хариш-Чандры $\mathcal{E}$ для $G(\mathbb{R})$: это $\mathbb{C}$ -векторные пространства счетной размерности, снабженные действием максимальной компактной подгруппы $K \subset G(\mathbb{R})$ и совместным действием комплексифицированной алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \text{Lie}(G) \otimes \mathbb{C}$. Группа K действует на пространстве $\mathcal{E}$, разбивая его в счетную сумму конечномерных представлений K , каждое из которых входит в сумму с конечной кратностью. Предположим, что центр $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$, называемый центральным характером модуля $\mathcal{E}$, действует скалярно. Группа $G(\mathbb{R})$ действует на пополнении Шварца $\mathcal{S}(\mathcal{E})$. Пусть $\mathcal{S}(\mathcal{E})'$ — непрерывное двойственное пространство, которое является подпространством алгебраического двойственного пространства $\mathcal{E}^{\vee}$. Конгруэнц-подгруппы группы $G(\mathbb{Q})$ имеют конечномерные инварианты в $\mathcal{S}(\mathcal{E})'$. Теорию автоморфных форм можно понимать как исследование таких конечномерных пространств инвариантов, снабженных действием алгебры Гекке. Заметим, что на последнем шаге мы рассматриваем $\mathcal{S}(\mathcal{E})'$ как $G(\mathbb{Q})$ -модуль, но не как $G(\mathbb{R})$ -модуль.

Почти все автоморфные формы не имеют отношения ни к мотивам, ни к представлениям Галуа. Те формы, которые фигурируют в теории чисел (алгебраические автоморфные формы), задаются определенным условием целочисленности на центральном характере.

Возвращаясь к нашим рассуждениям, мы видим, что можно симитировать теорию автоморфных форм с представлениями группы $G(\mathbb{Q})$ в $\mathcal{S}(\mathcal{E})'$, рассмотрев другой класс представлений группы $G(\mathbb{Q})$ над $\mathbb{Q}$. Предположим, что $G = \text{GL}_n$ над $\mathbb{Q}$. Пусть

$$\mathcal{F}_n = \langle \chi_{\Lambda} \rangle \otimes \mathbb{Q} = \mathcal{F}_{\mathbf{L}, \mathbb{Z}} \otimes \mathbb{Q}, \quad \mathbf{L} = \mathbb{Z}^n, \quad (9.1)$$

является $\mathbb{Q}$ -векторным пространством, порожденным характеристическими функциями $\mathcal{X}_\Lambda$ выпуклых конечно порожденных рациональных многогранных конусов $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ по модулю функций с носителем размерности $\leq (n-1)$. Заметим, что $\mathcal{F}_n \subset L_\infty(\mathbb{R}^n)$ — пространство ограниченных измеримых функций. Ясно, что $G(\mathbb{Q}) = GL_n(\mathbb{Q})$ действует на $\mathcal{F}_n$. Пусть $\rho = \rho_\lambda : GL_n(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(V_\lambda)$ — конечномерное неприводимое представление, как выше, и $\Gamma \subset GL_n(\mathbb{Q})$ — арифметическая подгруппа. Пространства инвариантов и, соответственно, коинвариантов

$$\begin{aligned} H^0(\Gamma, \mathcal{F}_n^\vee \otimes V_\lambda^\vee) &= (\mathcal{F}_n^\vee \otimes V_\lambda^\vee)^\Gamma, \\ H_0(\Gamma, \mathcal{F}_n \otimes V_\lambda) &= (\mathcal{F}_n \otimes V_\lambda)_\Gamma \end{aligned} \quad (9.2)$$

суть двойственные друг другу конечномерные пространства, так как модуль характеристических функций конечно порожден над групповым кольцом арифметической подгруппы Γ .

Например, при $n \geq 2$, если ρ — тривиальное представление и $\Gamma \subset GL_n(\mathbb{Z}) = \text{Aut}(\mathbf{L})$ — стабилизатор вектора $\chi = (1, 0, 0, \dots) \in \mathbf{L} \otimes \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, то группа коинвариантов — это (с точностью до кручения) наша группа $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. Аналогично, рассматривая стабилизатор координатного ковектора по модулю N , получим ковекторный вариант $\mathcal{M}_n^*(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

В более общем случае для любой конечной абелевой группы G с группой характеров A такой, что G порождается не менее, чем n элементами, выберем элемент $\chi \in \mathbf{L} \otimes A$, $\mathbf{L} = \mathbb{Z}^n$, так, чтобы индуцированный гомоморфизм $\mathbf{L}^\vee \rightarrow A$ был сюръективен. Определим $\Gamma(G, n) \subset GL_n(\mathbb{Z})$ как стабилизатор χ . Заметим, что класс сопряженности стабилизатора не зависит от выбора χ . Тогда при $n \geq 2$ для группы G , порожденной не более, чем n элементами, имеем

$$\mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{Q} = H_0(\Gamma(G, n), \mathcal{F}_n). \quad (9.3)$$

Ключевое наблюдение заключается в том, что $\mathcal{F}_n$ — это $GL_n(\mathbb{Q})$ -модуль, конечно порожденный как $GL_n(\mathbb{Z})$ -модуль. Более того,

$$\text{Res}_{GL_n(\mathbb{Z})}^{GL_n(\mathbb{Q})}(\mathcal{F}_n) \in \text{Perf}(\mathbb{Q}[GL_n(\mathbb{Z})] - \text{mod}), \quad (9.4)$$

т.е. $\mathcal{F}_n$, рассматриваемый как $GL_n(\mathbb{Z})$ -модуль, допускает резольвенту конечной длины конечно порожденными проективными модулями над групповым кольцом группы $GL_n(\mathbb{Z})$ (см. предложение 9.1 ниже).

Вопрос 9.1. *Существуют ли другие интересные $GL_n(\mathbb{Q})$ -модули, конечно порожденные как $GL_n(\mathbb{Z})$ -модули, или более того, принадлежащие $\text{Perf}(\mathbb{Q}[GL_n(\mathbb{Z})] - \text{mod})$?*

Можно поставить более общий вопрос: Можно ли найти ограниченный сверху комплекс представлений группы $G(\mathbb{Q})$, который после сужения на $G(\mathbb{Z})$ будет квазиизоморфным комплексу конечно порожденных проективных модулей над групповым кольцом?

Оба $\mathbb{Q}$ -векторных пространства несут действия операторов Гекке, которые имеют алгебраические собственные значения в этих пространствах. В силу (9.4) имеем $\dim(H_i(\Gamma, \mathcal{F}_n \otimes V_\lambda)) < \infty$ для всех $i \geq 0$, и пространства при $i \geq 1$ также несут действия операторов Гекке с алгебраическими собственными значениями.

Ниже мы увидим, что представление $\mathcal{F}_n$ распадается на хорошо изученные подклассы *когомологических* автоморфных форм, т.е. таких форм, которые реализуются в когомологиях арифметических групп с коэффициентами в конечномерных представлениях ρ .

Напомним определение модулей Стейнберга. Пусть $V/\mathbb{Q}$ — $\mathbb{Q}$ -векторное пространство размерности $n \geq 0$ и $\mathcal{T}_n$ — симплициальный комплекс флагов $\mathbb{Q}$ -векторных подпространств V , т.е. геометрическая реализация частично упорядоченного множества нетривиальных подпространств V . Положим

$$\text{St}(V) := \begin{cases} H_{n-2}(\mathcal{T}_n, \mathbb{Z}), & n \geq 3, \\ \mathbb{Z}\text{-комбинации прямых в } V \text{ с общим весом } 0, & n = 2, \\ \mathbb{Z}, & n = 0, 1. \end{cases}$$

Это представление $\text{Aut}(V)$, которое будем обозначать St_n в случае $V = \mathbb{Q}^n$. Одна из ролей модуля Стейнберга — это роль дуализирующего модуля в том смысле, что

$$H_i(\text{SL}_n(\mathbb{Z}), \text{St}_n \otimes M) = H^{n(n-1)/2-i}(\text{SL}_n(\mathbb{Z}), M)$$

для любого представления M группы $SL_n(\mathbb{Z})$ с коэффициентами из $\mathbb{Q}$.

Пусть, как и в (9.1), $\mathcal{F}(V) = \mathcal{F}_n$, где идентификация зависит от выбора базиса в V , разные выборы связаны действием группы $GL_n(\mathbb{Q})$ на $\mathcal{F}_n$. Имеем фильтрацию по подмодулям

$$0 \subset \mathcal{F}^{\leq 0}(V) \subset \mathcal{F}^{\leq 1}(V) \subset \dots \subset \mathcal{F}^{\leq n}(V) = \mathcal{F}(V),$$

где $\mathcal{F}^{\leq i}(V)$ порождаются функциями, образы которых принадлежат фактор-пространствам размерности i . В частности,

$$\mathcal{F}^{\leq 0}(V) = \mathbb{Z} = \{\text{постоянные } \mathbb{Z}\text{-значные функции на } V\}.$$

Следующее утверждение, по-видимому, хорошо известно.

Предложение 9.1. $\text{gr}^i(\mathcal{F}(V)) = \bigoplus_{V \rightarrow V', \dim(V')=i} \text{St}(V') \otimes \text{or}(V')$, где $\text{or}(V')$ — одномерный $\mathbb{Z}$ -модуль той же ориентации, что и V' , т.е. $GL(V')$ действует через знак детерминанта.

Доказательство. Сначала докажем, что группа $\text{gr}^n(\mathcal{F}(V)) = \mathcal{F}(V)/\mathcal{F}^{\leq n-1}(V)$ изоморфна $\text{St}(V) \otimes \text{or}(V)$. Применим преобразование Фурье к элементам $\mathcal{F}(V)$, которые понимаются как распределения умеренного роста на $V \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$. Например, преобразование Фурье характеристической функции стандартного координатного октанта $(\mathbb{R}_{\geq 0})^n$ равно распределению

$$\prod_{i=1}^n (\sqrt{-1} \text{ v. p.}(1/x_i) + \pi \delta(x_i)) \prod_{i=1}^n |dx_i|$$

со значениями в формах объема, где $\text{v. p.}(1/x)$ — единственное нечетное распределение со степенью однородности, равной -1 на $\mathbb{R}^1$ и $1/x$ на $\mathbb{R} \setminus 0$.

Образ $\mathcal{F}^{\leq n-1}(V)$ характеризуется тем, что носитель распределения содержится в конечном объединении гиперплоскостей. Поэтому фактор-группа $\mathcal{F}(V)/\mathcal{F}^{\leq n-1}(V)$ идентифицируется с абелевой группой, порожденной элементами объема на двойственном пространстве $(V \otimes \mathbb{R})^\vee$ вида

$$(\sqrt{-1})^n |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n| / (x_1 \cdots x_n),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — координаты в рациональном базисе в $(V \otimes \mathbb{R})^\vee$. Выбрав ориентацию в V (или, эквивалентно, в $V^\vee$) и разделив на $(\sqrt{-1})^n$, мы отождествим последнее пространство с мероморфными дифференциальными формами высшей степени на векторном пространстве $V^\vee$, которое рассматривается как алгебраическое многообразие $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^n$ над $\mathbb{Q}$, порожденное формами вида $\bigwedge_{i=1}^n (dx_i/x_i)$ с координатами в рациональном базисе. Это альтернативное описание модуля Стейнберга. Случай более глубоких членов фильтрации по размерностям рассматривается аналогично. $\square$

Сказанное означает, что вычисление когомологии с коэффициентами из $\mathcal{F}(V)$, после тензорного умножения на конечномерные модули, и, в частности, коинвариантов, будет сводиться к вычислению когомологии St -модулей и их обратных образов из параболических подгрупп. Имеется обширная литература о когомологиях St -модулей (см., например, [6] и библиографию там же), однако она не отражает потенциально интересных данных о расширении $\mathcal{F}(V)$.

Подводя итог, мы заключаем, что имеется сюръективный гомоморфизм $\mathcal{F}_n \twoheadrightarrow \text{St}_n \otimes \text{or}_n$, где $\text{or}_n : GL_n(\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}^\times$, $\gamma \mapsto \text{sgn}(\det(\gamma))$, который приводит к сюръективному гомоморфизму $H_0(\Gamma(G, n), \mathcal{F}_n) \twoheadrightarrow H_0(\Gamma(G, n), \text{St}_n \otimes \text{or}_n)$.

Предложение 9.2. *Имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H_0(\Gamma(G, n), \mathcal{F}_n) & \twoheadrightarrow & H_0(\Gamma(G, n), \text{St}_n \otimes \text{or}_n) \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathcal{M}_n(G) \otimes \mathbb{Q} & \xrightarrow{\mu^-} & \mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

где горизонтальные стрелки означают естественные сюръекции, левая вертикальная стрелка соответствует изоморфизму (9.3), а правая вертикальная стрелка также соответствует изоморфизму.

Доказательство. Коммутативность диаграммы доказывается очевидным образом. Мы поясним лишь правый вертикальный изоморфизм. Напомним, что сужение представления Стейнберга St_n на $GL_n(\mathbb{Z})$ порождается множеством $\mathbb{Z}$ -базисов $\{(e_1, \dots, e_n)\}$ по модулю соотношений

- $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = (-1)^n (e_1, \dots, e_n)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
- $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) = (e_1 + e_2, e_2, e_3, \dots, e_n) + (e_1, e_1 + e_2, \dots, e_n)$,
- $(e_1, \dots, e_n) = (-e_1, e_2, \dots, e_n)$

(см., например, [7, теорема В] и библиографию там же). Поэтому сужение $\text{St}_n \otimes \text{or}_n$ на $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ опять же порождается множеством $\mathbb{Z}$ -базисов $\{(e_1, \dots, e_n)\}$, но удовлетворяет другим соотношениям

- $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) = (e_1, \dots, e_n)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,
- $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) = (e_1 + e_2, e_2, e_3, \dots, e_n) + (e_1, e_1 + e_2, \dots, e_n)$,
- $(e_1, \dots, e_n) = -(-e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Первое соотношение — это отношение симметрии (S), последнее соотношение — отношение антисимметрии (5.1) и второе соотношение становится соотношением (M) при $k = 2$. $\square$

Положим $\mathbb{H}_n := \text{GL}_n(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}^\times \cdot \text{O}_n(\mathbb{R})$. Для $n \geq 2$ и группы G , порожденной не более, чем n элементами, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q} &= H_0(\Gamma(G, n), \text{St}_n \otimes \text{or}_n) = H_{n-1}^{BM}(\Gamma(G, n) \backslash \mathbb{H}_n, \text{or}_n) \\ &= H^{\frac{n(n-1)}{2}}(\Gamma(G, n) \backslash \mathbb{H}_n, \text{or}_n^{\otimes n}) = H^{\frac{n(n-1)}{2}}(\Gamma(G, n), \text{or}_n^{\otimes n}). \end{aligned}$$

Действительно, порождающая $(e_1, \dots, e_n)$ группы St_n , где $e_1, \dots, e_n$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^n$, отображается в класс гомологии цепи Бореля — Мура

$$(\mathbb{R}_{>0}^\times)^{n-1} \simeq \text{Diag}_{>0, n}(\mathbb{R})/\mathbb{R}_{>0}^\times \subset \mathbb{H}_n.$$

Третий изоморфизм — это двойственность Пуанкаре.

Пусть $\Gamma \subset \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ — арифметическая группа. Параболическая часть кохомологий с коэффициентами в конечномерном представлении ρ группы $\text{GL}_n(\mathbb{Q})$ имеет вид

$$H_{\text{cusp}}^*(\Gamma, \rho) := \text{Image}(H_c^*(\Gamma \backslash \mathbb{H}_n, \rho) \rightarrow H^*(\Gamma \backslash \mathbb{H}_n, \rho)).$$

Заметим, что сужение or_n на $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ совпадает с алгебраическим представлением $\det_n : \gamma \mapsto \det(\gamma)$. Известно, что $H_{\text{cusp}}^i(\Gamma, \rho) \neq 0$ только при условии

$$\frac{\frac{n(n+1)}{2} - 1}{2} - \frac{[n-1]}{2} \leq i \leq \frac{\frac{n(n+1)}{2} - 1}{2} + \frac{[n-1]}{2}.$$

Верхняя грань равна $[n(n-1)]/2$ при $n = 1, 2, 3$ и строго меньше этой величины при $n \geq 4$. Наши компьютерные вычисления (см. § 8) дают основание предположить, что

$$\mathcal{M}_{n, \text{prim}}^-(G) = H_{\text{cusp}}^{\frac{n(n-1)}{2}}(\Gamma(G, n), \text{or}_n^{\otimes n}),$$

и, следовательно, $\mathcal{M}_{n, \text{prim}}^-(G)$ обращаются в нуль при $n \geq 4$.

В следующем параграфе мы увидим, что при $n = 2$ главные роли играют модулярные формы веса 2 и суммы двух тейтовских мотивов, подкрученных характерами.

Возможны другие варианты определения $\mathcal{F}$:

- используя $\mathbb{Z}$ или конечные поля в качестве коэффициентов вместо $\mathbb{Q}$ -коэффициентов, можно изучать эффекты кручения,
- можно отказаться от условия факторизации характеристическими функциями с носителем при размерности $\leq (n-1)$,
- если представление ρ определено на пространстве полиномов степени d , можно рассмотреть *полиномиальные сплайны* относительно некоторого полного рационального веера Σ на $\mathbb{R}^n$, т.е. функции на $\mathbb{R}^n$, которые кусочно полиномиальны на конусах для Σ с $\mathbb{Q}$ -коэффициентами и обладают непрерывными производными порядка вплоть до некоторого фиксированного $d' < d$.

Последний вариант представляет особый интерес, поскольку такие представления реализуются в качестве подмодулей расширений модулей Стейнберга и коинварианты со значениями в таких модулях могли бы потенциально захватывать старшие группы гомологий модулей Стейнберга, делая их тем самым более приспособленными к компьютерным вычислениям.

Закончим этот параграф сложным вопросом, который касается возможности выйти за пределы когомологических (но все еще алгебраических) автоморфных форм, оставаясь при этом в рамках вопроса 9.1.

Вопрос 9.2. Можно ли найти представление $SL_2(\mathbb{Q})$, сужение которого на $SL_2(\mathbb{Z})$ было бы конечно порождаемым, а спектр Гекке захватывал бы модулярные формы веса 1 и формы Мааса с собственным значением оператора Лапласа $1/4$?

По всей видимости, такие модули должны реализоваться в классе нечетных/четных распределений на $\mathbb{R}^2$ со степенью однородности -1 .

10. Теоретико-решеточный подход к умножению и коумножению

В этом параграфе мы дадим интерпретацию умножения и коумножения на $\mathcal{M}_n^-(G)$ в терминах решеток, которая отличается от определений, введенных в § 5.

Для любых $n \geq 1$ и нетривиальной конечной абелевой группы G введем конечномерный перестановочный модуль $\mathcal{E}_n(G) := \mathbb{Q}^{\{\text{epi } \mathbb{Z}^n \rightarrow G\}}$ группы $GL_n(\mathbb{Z})$. Определим стек (с конечными стабилизаторами)

$$\mathbb{X}_n := GL_n(\mathbb{Z}) \backslash GL_n(\mathbb{R}) / O_n(\mathbb{R}).$$

Этот стек параметризует аракеловские расслоения ранга n на $\widehat{\text{Spec}(\mathbb{Z})}$, т.е. пары $(\mathbf{L}, h)$, где $\mathbf{L}$ — решетка ранга n и h — положительно определенная квадратичная форма на $\mathbf{L} \otimes \mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{L}_{n,G}$ — $\mathbb{Q}$ -локальная система на $\mathbb{X}_n$, ассоциированная с представлением $\mathcal{E}_n(G) \otimes \text{or}_n$. Тогда

$$\mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q} = H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}). \quad (10.1)$$

Умножение ∇^- , определенное в § 5, можно переопределить в этой терминологии следующим образом. Рассмотрим флаги $\mathcal{G}_\bullet$ подгрупп

$$0 = G_{\leq 0} \subsetneq G_{\leq 1} \subset \dots \subsetneq G_{\leq r} = G, \quad r \geq 1,$$

и последовательности положительных целых чисел $n_1, \dots, n_r$ таких, что $n_1 + \dots + n_r = n$. Определим гомоморфизм

$$\bigotimes_{i=1}^r H_{n_i}^{BM}(\mathbb{X}_{n_i}, \mathcal{L}_{n_i, \text{gr}_i(\mathcal{G}_\bullet)}) \rightarrow H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) \quad (10.2)$$

следующим образом. Рассмотрим график $\mathbb{Y}_{n_1, \dots, n_r}^\nabla \subset (\mathbb{X}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{X}_{n_r}) \times \mathbb{X}_n$, замкнутого вложения (следовательно, собственного отображения) $\mathbb{X}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{X}_{n_r} \rightarrow \mathbb{X}_n$, заданного формулой

$$(\mathbf{L}_1, h_1), \dots, (\mathbf{L}_r, h_r) \mapsto (\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{L}_r, h = h_1 \boxplus \dots \boxplus h_r).$$

Справедлива диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Y}_{n_1, \dots, n_r}^\nabla & \\ \swarrow \pi_{n_1, \dots, n_r} & & \searrow \pi_n \\ \mathbb{X}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{X}_{n_r} & & \mathbb{X}_n \end{array}$$

Здесь $\pi_{n_1, \dots, n_r}$ — изоморфизм. Морфизм локальных систем

$$\pi_{n_1, \dots, n_r}^*(\mathcal{L}_{n_1, \text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)} \boxtimes \dots \boxtimes \mathcal{L}_{n_r, \text{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)}) \rightarrow \pi_n^* \mathcal{L}_{n,G}$$

задан в каждой точке

- канонической идентификацией ориентационных расслоений

$$\text{or}(\mathbf{L}_1) \otimes \dots \otimes \text{or}(\mathbf{L}_r) \xrightarrow{\sim} \text{or}(\mathbf{L}),$$

- морфизмом слоев локальных систем, ассоциированными с перестановочными модулями

$$\mathbb{Q}^{\{\text{epi } \mathbf{L}_1^\vee \rightarrow A_1\}} \otimes \dots \otimes \mathbb{Q}^{\{\text{epi } \mathbf{L}_r^\vee \rightarrow A_r\}} \rightarrow \mathbb{Q}^{\{\text{epi } \mathbf{L}^\vee \rightarrow A\}}. \quad (10.3)$$

Рассмотрим $\chi \in \mathbf{L} \otimes A := \text{Hom}(\mathbf{L}^\vee, A)$ такой, что сужение χ на $\mathbf{L}_i^\vee \subset \mathbf{L}^\vee$ принимает значение в множестве характеров группы G , равных нулю на $G_{\leq i-1}$ для всех i ; такие характеры индуцируют характеры группы $\text{gr}_i(\mathcal{G}_\bullet)$ и гомоморфизмы $\chi_i : \mathbf{L}_i^\vee \rightarrow A_i := \text{Hom}(\text{gr}_i(\mathcal{G}_\bullet), \mathbb{C}^\times)$. Мы утверждаем, что χ_i сюръективны для всех i (тогда χ также будет сюръекцией). Характер χ определяет морфизм перестановочных модулей ранга 1, заданных элементарной матрицей с индексами $(\chi_1, \dots, \chi_r)$, χ . Суммируя по всем таким элементарным матрицам, получим требуемый гомоморфизм (10.3).

Коумножение Δ^- , определенное в § 5, также допускает геометрическую переформулировку. Мы имеем гомоморфизм

$$H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G}) \rightarrow \bigotimes_{i=1}^r H_{n_i}^{BM}(\mathbb{X}_{n_i}, \mathcal{L}_{n_i, \text{gr}_i(\mathcal{G}_\bullet)}), \quad (10.4)$$

определенный по аналогии с (10.2), но вместо графика $\mathbb{Y}_{n_1, \dots, n_r}^\nabla$ отображения рассмотрим *соответствие* $\mathbb{Y}_{n_1, \dots, n_r}^\Delta \subset \mathbb{X}_n \times (\mathbb{X}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{X}_{n_r})$. Это соответствие, этакое над $\mathbb{X}_n$ и *собственное* над $(\mathbb{X}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{X}_{n_r})$, можно рассматривать как график многозначного отображения. Более подробно, $\mathbb{Y}_{n_1, \dots, n_r}$ определяется

- решеткой $(\mathbf{L}, h)$ ранга n с метрикой, т.е. положительно определенной квадратичной формой h на $\mathbf{L} \otimes \mathbb{R}$, как выше,
- флагом $\mathbf{L}_\bullet$ полных подрешеток $0 = \mathbf{L}_{\leq 0} \subsetneq \mathbf{L}_{\leq 1} \subsetneq \dots \subsetneq \mathbf{L}_{\leq r} = \mathbf{L}$,
- выбором изоморфизмов $\mathbf{L}_i \simeq \text{gr}_i(\mathbf{L}_\bullet)$ таких, что индуцированные метрики на $\mathbf{L}_{n_i} \otimes \mathbb{R}$ совпадают с h_i .

Справедлива диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Y}_{n_1, \dots, n_r}^\Delta & \\ \pi_n \swarrow & & \searrow \pi_{n_1, \dots, n_r} \\ \mathbb{X}_n & & \mathbb{X}_{n_1} \times \dots \times \mathbb{X}_{n_r} \end{array}$$

Морфизм локальных систем на $\mathbb{Y}_n$

$$\pi_n^* \mathcal{L}_{n,G} \rightarrow \pi_{n_1, \dots, n_r}^* (\mathcal{L}_{n_1, \text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)} \oplus \dots \oplus \mathcal{L}_{n_r, \text{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)})$$

задается в любой точке

- натуральным изоморфизмом ориентационных расслоений $\text{or}(\mathbf{L}) \simeq \text{or}(\mathbf{L}_1) \otimes \dots \otimes \text{or}(\mathbf{L}_r)$,
- морфизмом слоев локальных систем, ассоциированным с перестановочными модулями

$$\mathbb{Q}^{\{\text{epi } \mathbf{L}^\vee \rightarrow A\}} \rightarrow \mathbb{Q}^{\{\text{epi } \mathbf{L}_1^\vee \rightarrow A_1\}} \otimes \dots \otimes \mathbb{Q}^{\{\text{epi } \mathbf{L}_r^\vee \rightarrow A_r\}}. \quad (10.5)$$

Рассмотрим характер $\chi \in \mathbf{L} \otimes A := \text{Hom}(\mathbf{L}^\vee, A)$, индуцирующий коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{L}^\vee = \mathbf{L}_{\leq 0}^{\text{perp}} & \supsetneq & \mathbf{L}_{\leq 1}^{\text{perp}} & \dots & \supsetneq & \mathbf{L}_{\leq r}^{\text{perp}} \\ \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow \\ A = G_{\leq 0}^{\text{perp}} & \supsetneq & G_{\leq 1}^{\text{perp}} & \dots & \supsetneq & G_{\leq r}^{\text{perp}} \end{array}$$

т.е. $G_{\leq i}^{\text{perp}} = \chi(\mathbf{L}_{\leq i}^{\text{perp}})$, $i = 0, \dots, r-1$. Характер χ сюръективен (случай $i = 0$) и индуцирует сюръективные гомоморфизмы $\chi_i : \mathbf{L}_i^\vee \rightarrow A_i = \text{Hom}(G_i)$, $i = 1, \dots, r$, где $\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{\leq i} / \mathbf{L}_{\leq i-1}$ и $G_i = G_{\leq i} / G_{\leq i-1}$. Как и выше, такой характер χ определяет элементарную матрицу с индексами $\chi, (\chi_1, \dots, \chi_r)$. Суммируя по всем таким χ , получим требуемый гомоморфизм.

Предложение 10.1. *Используя идентификации $\mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q} = H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n,G})$ и формулы (10.2) и (10.4), получаем такие же гомоморфизмы $\mathcal{M}_{n_1}^-(G_1) \otimes \dots \otimes \mathcal{M}_{n_r}^-(G_r) \otimes \mathbb{Q} \rightrightarrows \mathcal{M}_n^-(G) \otimes \mathbb{Q}$, как гомоморфизмы, индуцированные из Δ и ∇ в § 5.*

Доказательство. Случай произведения следует непосредственно из определения: Базис $e_1, \dots, e_n$ в $\mathbf{L}$ дает замкнутую цепь Бореля — Мура $\simeq \mathbb{R}_{>0}^n$, состоящую из диагональных форм h в этом базисе.

В случае копроизведения предположим, что $\mathbf{L} \simeq \mathbb{Z}^n$ — стандартная координатная решетка, с точностью до действия $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, переставляющего координаты и действующего посредством знака на каждую координату. Имеем каноническую замкнутую цепь Бореля — Мура

$$C_n \subset \text{Chains}_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathbb{Z}), \quad \partial(C_n) = 0,$$

заданную образами положительных диагональных матриц. Для заданного флага

$$0 = \mathbf{L}_{\leq 0} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbf{L}_{\leq r} = \mathbf{L},$$

используя соответствие $\mathbb{Y}_{n_1, \dots, n_r}^\Delta$, получим замкнутую цепь Бореля — Мура

$$C_{\mathbf{L}_\bullet} \subset \text{Chains}_n^{BM}(\mathbb{X}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{X}_{n_r}, \mathbb{Z}).$$

Любой точке h в C_n сопоставим $(h_1, \dots, h_r) \in \mathbb{X}_{n_1} \times \cdots \times \mathbb{X}_{n_r}$.

Главный момент состоит в том, что если флаг не согласован с выбранным координатным разложением, то соответствующая цепь будет границей. Отсюда следует, что только координатные флаги вносят вклад в формулу. $\square$

Следуя рассуждениям из § 5 (особенно (5.17)), определим $H_{n, \text{prim}}^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G}) \subset H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G})$ как общее ядро всех нетривиальных гомоморфизмов коумножения ($r \geq 2$). Очевидно, что при такой идентификации $\mathcal{M}_{n, \text{prim}}^-(G) \otimes \mathbb{Q} = H_{n, \text{prim}}^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G})$.

Напомним топологическое определение параболических когомологий:

$$H_{n, \text{cusp}}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G}) := \text{Image}(H_n(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G}) \rightarrow H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G})).$$

Гипотеза 10.1. Для каждой нетривиальной конечной абелевой группы G и каждого $n \geq 1$

$$H_{n, \text{prim}}^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G}) = H_{n, \text{cusp}}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G}) \subset H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G}).$$

Эта гипотеза по сути совпадает с нашим предположением, сформулированным неявно в § 5. Приняв эту гипотезу, мы получили бы следующую переформулировку.

Гипотеза 10.2. Для каждой нетривиальной конечной абелевой группы G и каждого $n \geq 1$ естественный гомоморфизм

$$\bigoplus_{r=1}^n \bigoplus_{\substack{n_1 + \dots + n_r = n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } r}} H_{n_1, \text{cusp}}(\mathbb{X}_{n_1}, \mathcal{L}_{n_1, \text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)}) \otimes \cdots \otimes H_{n_r, \text{cusp}}(\mathbb{X}_{n_r}, \mathcal{L}_{n_r, \text{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)}) \rightarrow H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G})$$

является изоморфизмом.

Теория представлений предоставляет каноническое разложение когомологий арифметических групп в сумму параболической и всех остальных (эйзенштейновских) частей после тензорного умножения на $\mathbb{C}$. В наших рассмотрениях для $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ предполагается разложение над $\mathbb{Q}$. Именно, определим $H_{n, \text{coprim}}^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G})$ как фактор по сумме образов всех нетривиальных отображений произведения (10.2). Весьма соблазнительно высказать сопутствующую гипотезу.

Гипотеза 10.3. Для каждой нетривиальной конечной абелевой группы G и каждого $n \geq 1$ гомоморфизм

$$H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G}) \rightarrow \bigoplus_{r=1}^n \bigoplus_{\substack{n_1 + \dots + n_r = n \\ \mathcal{G}_\bullet \text{ длины } r}} H_{n_1, \text{coprim}}(\mathbb{X}_{n_1}, \mathcal{L}_{n_1, \text{gr}_1(\mathcal{G}_\bullet)}) \otimes \cdots \otimes H_{n_r, \text{coprim}}(\mathbb{X}_{n_r}, \mathcal{L}_{n_r, \text{gr}_r(\mathcal{G}_\bullet)})$$

является изоморфизмом.

Гипотеза 10.4. Композиция

$$H_{n, \text{prim}}^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G}) \hookrightarrow H_n^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G}) \twoheadrightarrow H_{n, \text{coprim}}^{BM}(\mathbb{X}_n, \mathcal{L}_{n, G})$$

является изоморфизмом.

Вышеизложенные соображения укладываются в общие рамки. Для $n \geq 1$ обозначим через R_n множество конечномерных неприводимых представлений $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$, которые возникают как прямые слагаемые тензорных произведений

- представлений групп $\mathrm{GL}_n(\widehat{\mathbb{Z}}) = \prod_p \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$,
- неприводимых алгебраических представлений $\rho_\lambda : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \rightarrow V_\lambda$ со старшим весом λ .

Очевидно, что R_1 состоит из двух элементов и R_n — счетные бесконечные множества при $n \geq 2$.

Для заданных $\rho_1 \in R_{n_1}$, $\rho_2 \in R_{n_2}$, $\rho \in R_n$, $n = n_1 + n_2$, можно ввести пространство кратностей $\mathrm{mult}_{\rho_1, \rho_2}^\rho \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$ — конечномерное комплексное векторное пространство

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{Z})}(\rho_{n_1} \boxtimes \rho_{n_2}, \rho|_{\mathrm{GL}_{n_1}(\mathbb{Z}) \times \mathrm{GL}_{n_2}(\mathbb{Z})}).$$

Соответствие $\mathbb{Y}_{n_1, n_2}^\nabla$ поднимается до естественного гомоморфизма

$$\mathrm{mult}_{\rho_1, \rho_2}^\rho \otimes H_*^{BM}(\mathbb{X}_n, \rho_{n_1}) \otimes H_*^{BM}(\mathbb{X}_{n_2}, \rho_{n_2}) \rightarrow H_*^{BM}(\mathbb{X}_n, \rho).$$

Такие соответствия можно организовать следующим образом. Пусть $\mathcal{C}$ — полупростая (в счетном смысле) $\mathbb{C}$ -линейная тензорная категория со счетными суммами и тензорными произведениями, коммутирующими с суммами, и с простыми объектами ϵ_ρ , соответствующими $\rho \in \coprod_{n \geq 1} R_n$. Тензорное произведение задается формулой

$$\epsilon_{\rho_1} \otimes \epsilon_{\rho_2} = \bigoplus_\rho \mathrm{mult}_{\rho_1, \rho_2}^\rho \otimes_{\mathbb{C}} \epsilon_\rho,$$

где выражение в правой части бесконечно. Положим

$$\mathcal{A}_\bullet := \bigoplus_{n \geq 1} \bigoplus_{\rho \in R_n} H_\bullet^{BM}(\mathbb{X}_n, \rho \otimes \epsilon_\rho) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C}).$$

Объект $\mathcal{A}_\bullet$ несет структуру суперкоммутативной ассоциированной $\mathbb{Z}$ -градуированной неунитарной алгебры в $\mathcal{C}$. Использование цепей приводит не к группам гомологий, а к коммутативной дифференциальной $\mathbb{Z}$ -градуированной неунитарной алгебре, которую с помощью двойственности в смысле Кошули можно идентифицировать с дифференциальной градуированной алгеброй Ли (или L_∞ -алгеброй). Следующий вопрос: Что это за алгебра или ее двойственная по Кошулю алгебра Ли?

Сама категория $\mathcal{C}$, по-видимому, допускает описание как категория представлений определенного типа бесконечномерной полугруппы.

В первом модельном примере рассмотрим R_n^{fin} , состоящий из неприводимых представлений симметрической группы $\mathfrak{S}_n$. Тогда соответствующий аналог $\mathcal{C}^{\mathrm{fin}}$ категории $\mathcal{C}$ является подкатегорией категорий Делиня представлений $\mathfrak{gl}_t$, где t — параметр (дробная размерность).

Во втором модельном примере, более близком к нашим рассуждениям, R_n^{alg} — множество неприводимых алгебраических представлений $\rho_\lambda : \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \rightarrow V_\lambda$ со старшим весом λ . Определив пространства кратностей $\mathrm{mult}_{\rho_1, \rho_2}^\rho$ аналогичным образом, получим категорию $\mathcal{C}^{\mathrm{alg}}$ представлений со старшим весом (хорошо известного) центрального расширения

$$1 \rightarrow \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbf{G} \rightarrow \mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})^\circ \rightarrow 1,$$

где $\mathrm{GL}_\infty(\mathbb{C})^\circ$ — связная компонента единицы группы $\{g \in \mathrm{Aut}_{\mathrm{cont}, \mathbb{C}\text{-mod}}(\mathbb{C}^\infty)\}$, $\mathbb{C}^\infty := \mathbb{C}((t))$. Группа $\mathbf{G}$ действует на пространстве счетной размерности $V := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \wedge^{\frac{\infty}{2} + i}(\mathbb{C}^\infty)$. Согласно аналогу двойственности Шура — Вейля для всех $n \geq 1$ группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ действует на $V^{\otimes n}$, коммутируя с $\mathbf{G}$ -действием и идентифицируя представления со старшим весом группы $\mathbf{G}$ уровня n (т.е. такие, для которых центральное расширение действует с характером $z \mapsto z^n$) с алгебраическими неприводимыми представлениями группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Для наших целей важно отождествить в явном виде категорию $\mathcal{C}^{/p}$, простые объекты которой соответствуют неприводимым конечномерным представлениям групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$, $n \geq 1$, с категорией $\mathcal{C}^p$, простые объекты которой соответствуют неприводимым конечномерным представлениям непрерывных групп $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$, $n \geq 1$.

Аналогично можно рассмотреть коумножение. Для заданных $\rho_1 \in R_{n_1}$, $\rho_2 \in R_{n_2}$, $\rho \in R_n$, $n = n_1 + n_2$, определим пространство коумножения $\mathrm{comult}_{\rho_1, \rho_2}^{\rho_1, \rho_2} \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}$, конечномерное комплексное векторное пространство как $\mathrm{Hom}_{P_{n_1, n_2}(\mathbb{Z})}(\rho|_{P_{n_1, n_2}(\mathbb{Z})}, \rho_{n_1} \boxtimes \rho_{n_2})$, где $P_{n_1, n_2} \subset \mathrm{GL}_{n_1}$ — стабилизатор

флага $\mathbb{Z}^{n_1} \subset \mathbb{Z}^n$. Соответствие $\mathbb{Y}_{n_1, n_2}^\Delta$ поднимается до естественного гомоморфизма

$$\mathrm{comult}_{\rho_1, \rho_2}^\rho \otimes H_*^{BM}(\mathbb{X}_n, \rho) \rightarrow H_*^{BM}(\mathbb{X}_n, \rho_{n_1}) \otimes H_*^{BM}(\mathbb{X}_{n_2}, \rho_{n_2}).$$

Мы получим коассоциативную коалгебру без единицы в тензорной категории, которая уже не будет заведомо симметрической.

Заметим, что возможны нетривиальные расширения между двумя представлениями из R_n , и это дает основания предположить, что определения категории $\mathcal{C}$ и алгебры $\mathcal{A}_\bullet$ можно было бы усилить, приняв во внимание дополнительные данные. Кроме того, категория $\mathcal{C}$ не является жесткой, и, следовательно, ее нельзя интерпретировать как категорию представлений группы, но лишь полугруппы.

Наконец, все проведенные выше рассуждения можно провести в случае числовых полей, заменив решетки нетривиальными конечно порожденными модулями без кручения.

11. Случай $n = 2$. Модулярные символы

Напомним определение модулярных символов веса 2 для

$$\Gamma_1(N) := \left\{ \gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \gamma = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}, \quad N \in \mathbb{Z}_{\geq 2}.$$

Пусть $\mathbb{M}_2(\Gamma_1(N))$ — $\mathbb{Q}$ -векторное пространство, порожденное парами (c, d) , где $c, d \in \mathbb{Z}/N$, $\mathrm{НОД}(c, d, N) = 1$, и выполнены соотношения

- (1) $(c, d) = -(d, -c)$ (и, следовательно, $= (-c, -d) = -(-d, c)$),
- (2) $(c, d) + (d, -c-d) + (-c-d, c) = 0$.

Известно, что $\mathbb{M}_2(\Gamma_1(N))$ естественным образом отождествляет группу гомологий Бореля — Мура $H_1^{BM}(X_1(N), \mathbb{Q})$ с комплексной модулярной кривой $X_1(N) := \Gamma_1(N) \backslash \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — верхняя полуплоскость. Символ (c, d) соответствует образу геодезического пути в $X_1(N)$ из $\mathbf{a}/\mathbf{c}$ в $\mathbf{b}/\mathbf{d}$, где

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix} \in \Gamma_1(N)$$

обозначает любой элемент такой, что $c, d = \mathbf{c}, \mathbf{d} \pmod{N}$.

В силу (1) можно записать (2) в виде

$$(2') \quad (d, c) = (d, c-d) + (d-c, c).$$

Действительно, подставляя $c \mapsto -c$ в (2), получим

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(2)}{=} (-c, d) + (d, c-d) + (c-d, -c) \stackrel{(1)}{=} -(d, c) + (d, c-d) + (c-d, -c) \\ &\stackrel{(1)}{=} -(d, c) + (d, c-d) + (d-c, c). \end{aligned}$$

На $\mathbb{M}_2(\Gamma_1(N))$ определена инволюция $\iota : (c, d) \mapsto (-c, d) \stackrel{(1)}{=} -(d, c)$, которая, записанная в виде $(c, d) \mapsto -(d, c)$, очевидно, сохраняет соотношение (2') и соотношение циклической антисимметрии (1). Эта инволюция соответствует автоморфизму первой группы гомологий, полученной из антиголоморфной инволюции на $X_1(N)$, ассоциированной с отображением $\tau \mapsto -\bar{\tau}$, $\tau \in \mathcal{H}$ на универсальном покрытии. Обозначим через $\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))$ $(-)$ -собственное пространство инволюции ι .

Размерности заданы следующим образом:

$$\begin{aligned} \dim(\mathbb{M}_2(\Gamma_1(N))) &= 2g + C(N) - 1, \\ \dim(\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))) &= g + \frac{C(N) - C_2(N)}{2}, \end{aligned}$$

где

- $g = g(N)$ — род модулярной кривой $\overline{X_1(N)}$, который совпадает с размерностью пространства параболических форм веса 2 для $\Gamma_1(N)$ (см. таблицу в § 5),
- $C(N)$ — число параболических точек или каспов (элементов $P^1(\mathbb{Q})/\Gamma_1(N)$),

- $C_2(N)$ — число неподвижных параболических точек антиголоморфной инволюции, описанной выше.

Для $N = 1, 2, 3, 4$ имеем $C(N) = C_2(N) = 1, 2, 2, 3$, соответственно, а при $N \geq 5$ мощности $C(N)$ и $C_2(N)$ задаются формулами

$$C(N) = \frac{1}{2} \sum_{d|N} \varphi(d) \varphi(N/d),$$

$$C_2(N) = \begin{cases} \varphi(N) + \varphi(N/2), & N \text{ чётно,} \\ \varphi(N), & N \text{ нечётно.} \end{cases}$$

Теперь обсудим, как вышеизложенное связано с нашими группами символов $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ и $\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$.

Предложение 11.1. $\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ и $\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))$ изоморфны.

Доказательство. Действительно, подпространство $\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))$ (или, точнее, его фактор-пространство) можно описать в терминах порождающих и соотношений следующим образом:

- (R1) $(a_1, a_2)^- = (a_2, a_1)^-$,
 (R2) $(a_1, a_2)^- = (a_1, a_2 - a_1)^- + (a_1 - a_2, a_2)^-$,
 (R3) $(a_1, a_2)^- = -(a_2, -a_1)^-$.

Здесь (R3) совпадает с (1), (R2) совпадает с (2') и (R1) — ι -инвариантность. Поэтому естественное отображение $\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))$, $\langle a_1, a_2 \rangle^- \mapsto (a_1, a_2)^-$, является изоморфизмом, так как (R1), (R2), (R3) суть определяющие соотношения для $\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$. $\square$

Заметим, что $(a, 0)^- = (0, a)^- = 0 \in \mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))$ в силу (R1) и (R3). Кроме того, (R2) можно заменить ковекторной версией

$$(R2^*) \quad (a_1, a_2)^- = (a_1 + a_2, a_2)^- + (a_1, a_1 + a_2)^-.$$

Действительно, можно сделать замены $a_1 \mapsto a_1$ и $a_2 \mapsto a_1 + a_2$ в (R2) и воспользоваться диэдральной симметрией в силу (R1) и (R3).

В качестве следствия теорем 5.1, 5.2 и наших гипотез

$$\dim(\mathcal{M}_{2,\text{prim}}(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\mathcal{M}_{2,\text{prim}}^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = g(N)$$

можно было бы получить формулу, вытекающую из предложения 11.1,

$$\dim(\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = g(N) + \frac{1}{4} \sum_{d|N, 3 \leq d \leq N/3} \varphi(d) \varphi(N/d)$$

$$\stackrel{\text{для всех } N \geq 1}{=} \dim(\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(N))) = g(N) + \frac{C(N) - C_2(N)}{2},$$

а также *гипотетическую* формулу

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) \stackrel{?}{=} g(N) + \frac{1}{2} \sum_{d|N, d \geq 3} \varphi(d) \varphi(N/d) \stackrel{N \geq 5}{=} g(N) + C(N) - \frac{C_2(N)}{2}.$$

По-видимому, доказать последнюю формулу можно с помощью соотношения между модулем Стейнберга и модулем $\mathcal{F}_2$ (см. предложение 9.1). Для простого числа $N = p \geq 5$ формулы для размерностей упрощаются:

$$g(p) = \frac{(p-5)(p-7)}{24}, \quad C(p) = C_2(p) = p-1,$$

$$\dim(\mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) = \dim(\mathbb{M}_2^-(\Gamma_1(p))) = g(p),$$

$$\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}) \stackrel{?}{=} \frac{p^2 + 23}{24} = g(p) + \frac{p-1}{2}. \quad (11.1)$$

Оставшаяся часть параграфа посвящена прямому доказательству формулы (11.1).

Мы имеем два отображения

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad \langle a, b \rangle \mapsto \langle a, b \rangle^-, \quad (11.2)$$

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \xrightarrow{\Delta} \mathcal{M}_1(1) \otimes \mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) = \mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), \quad (11.3)$$

где (11.3) — (единственно возможное) отображение копроизведения

$$\langle a, b \rangle \mapsto (1 - \delta_{a,0})\langle a \rangle^- + (1 - \delta_{b,0})\langle b \rangle^-.$$

Отображение (11.2) сюръективно по определению, а (11.3) сюръективно с точностью до 2-кручения: после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$ правое обратное отображение, задается формулой

$$\langle a \rangle^- \mapsto \frac{1}{2}(\langle a, 0 \rangle - \langle -a, 0 \rangle). \quad (11.4)$$

Формула (11.1) вытекает из следующего утверждения.

Предложение 11.2. *Отображение, заданное суммой отображений (11.2) и (11.3),*

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \rightarrow \mathcal{M}_2^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \oplus \mathcal{M}_1^-(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),$$

является изоморфизмом с точностью до кручения.

Доказательство. Мы проверим (после тензорного умножения на $\mathbb{Q}$), что ядро отображения (11.2) порождается образом отображения (11.4). По определению (5.1) ядро отображения (11.2) порождается элементами $\langle a, b \rangle + \langle a, -b \rangle \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$.

Лемма 11.1. *Для всех $a, b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $a \neq 0$,*

$$\langle a, b \rangle + \langle a, -b \rangle = 2 \cdot \langle a, 0 \rangle \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}).$$

Доказательство. Из (M) следует

$$\langle a, b \rangle = \langle a - b, b \rangle + \langle a, b - a \rangle,$$

$$\langle a - b, a \rangle = \langle -b, a \rangle + \langle a - b, b \rangle.$$

Для разности первой и второй строк справедливо равенство

$$\langle a, b \rangle + \langle -b, a \rangle = \langle a, b - a \rangle + \langle a, a - b \rangle,$$

которое с учетом (S) можно записать в виде

$$\langle a, b \rangle + \langle a, -b \rangle = \langle a, b - a \rangle + \langle a, -b + a \rangle.$$

Итерируя, находим

$$\langle a, b \rangle + \langle a, -b \rangle = \langle a, b - ma \rangle + \langle a, -b + ma \rangle, \quad m = 1, \dots, p.$$

Для $a \neq 0 \pmod{p}$ существует решение m уравнения $ma = b \pmod{p}$, откуда следует требуемое тождество

$$\langle a, b \rangle + \langle a, -b \rangle = 2 \cdot \langle a, 0 \rangle. \quad (11.5)$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 11.2. *Для всех $a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $a \neq 0$,*

$$\langle a, 0 \rangle + \langle -a, 0 \rangle = 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}.$$

Доказательство. Заменив a на $-a$ в (11.1) и суммируя уравнения, получим

$$(\langle a, b \rangle + \langle -a, b \rangle) + (\langle a, -b \rangle + \langle -a, -b \rangle) = 2 \cdot (\langle a, 0 \rangle + \langle -a, 0 \rangle).$$

Используя опять (11.1) с заменой a на b и, соответственно, $-b$, находим

$$2 \cdot (\langle b, 0 \rangle + \langle -b, 0 \rangle) = 2 \cdot (\langle a, 0 \rangle + \langle -a, 0 \rangle) \quad (11.6)$$

для всех $a, b \neq 0$. Покажем, что $\delta := \langle 1, 0 \rangle + \langle -1, 0 \rangle \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ равно нулю. Для этого рассмотрим сумму

$$\sum_{a, b \neq 0} (\langle a, b \rangle + \langle b, -a \rangle) = 2(p-1) \cdot \sum_{b \neq 0} \langle b, 0 \rangle = (p-1)^2 \delta,$$

где мы использовали равенства (11.5) и (11.6). Применим соотношение раздутья (M) к каждому члену и соотнесем результат к начальной сумме

$$\begin{aligned} & \stackrel{(M)}{=} \sum_{a,b \neq 0} \langle a-b, b \rangle + \sum_{a,b \neq 0} \langle a, b-a \rangle + \sum_{a,b \neq 0} \langle b+a, -a \rangle + \sum_{a,b \neq 0} \langle b, -a-b \rangle \\ & \stackrel{(S)}{=} 4 \sum_{b \neq 0, a \neq -b} \langle a, b \rangle = 4 \sum_{a,b \neq 0} \langle a, b \rangle + 4 \sum_{a \neq 0} \langle a, 0 \rangle - 4 \sum_{a \neq 0} \langle a, -a \rangle \\ & = 2(p-1)^2 \delta + 2(p-1) \delta = 2p(p-1) \delta. \end{aligned}$$

После применения соотношения раздутья мы заменили переменные в суммировании, используя отношение симметрии, а затем вернулись к начальной области суммирования, учитывая недостающие члены, и далее воспользовались соотношениями

$$\sum_{a \neq 0} (\langle a, 0 \rangle + \langle -a, 0 \rangle) = (p-1) \delta,$$

$$\langle a, -a \rangle = 0 \iff \langle a, 0 \rangle \stackrel{(M)}{=} \langle a, 0 \rangle + \langle a, -a \rangle.$$

В результате получаем $(p-1)^2 \delta = 2p(p-1) \delta$, откуда следует

$$(p^2 - 1) \delta = 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}). \quad (11.7)$$

Таким образом, для всех $a \neq 0$ имеем требуемое тождество $\langle a, 0 \rangle + \langle -a, 0 \rangle = 0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$. $\square$

Теперь мы готовы закончить доказательство предложения 11.2. В силу леммы 11.1 ядро отображения (11.2) порождается (с точностью до кручения) элементами вида $\langle a, 0 \rangle$. Из леммы 11.2 следует, что эти элементы можно записать в виде

$$\langle a, 0 \rangle = \frac{1}{2} (\langle a, 0 \rangle - \langle -a, 0 \rangle) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}.$$

Таким образом, мы получаем образ правого обратного отображения (11.4). $\square$

Замечание 11.1. Присутствие множителя $(p^2 - 1)$ в (11.7) частично объясняет экспериментально наблюдаемое скачкообразное поведение $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_\ell)$ для простых чисел $\ell \mid (p \pm 1)$ (см. § 8).

Литература

1. A. Kresch, Yu. Tschinkel, “Arithmetic properties of equivariant birational types”, *Res. Number Theory* **7**, No. 2, Paper No. 27 (2021).
2. L. A. Borisov, P. E. Gunnells, “Toric modular forms and nonvanishing of L -functions”, *J. Reine Angew. Math.* **539**, 149–165 (2001).
3. L. A. Borisov, P. E. Gunnells, “Toric modular forms of higher weight”, *J. Reine Angew. Math.* **560**, 43–64 (2003).
4. M. Kontsevich, Yu. Tschinkel, “Specialization of birational types”, *Invent. Math.* **217**, No. 2, 415–432 (2019).
5. The SpaSM group, *SpaSM: a Sparse direct Solver Modulo p* , v1.2 (2017). <http://github.com/cbouilla/spasm>
6. A. Ash, A. Putman, S. V. Sam, “Homological vanishing for the Steinberg representation”, *Compos. Math.* **154**, No. 6, 1111–1130 (2018).
7. T. Church, A. Thomas, “The codimension-one cohomology of $\mathrm{SL}_n\mathbb{Z}$ ”, *Geom. Topol.* **21**, No. 2, 999–1032 (2017).

Статья поступила в редакцию 20 апреля 2024 г.

Ю. В. Матиясевич

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА–ФУНКЦИИ РИМАНА ЧЕРЕЗ ЗНАЧЕНИЯ ЕЕ ПРОИЗВОДНЫХ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

Исследуются следующие два вопроса. Пусть заданы значения нескольких первых производных дзета–функции Римана в некоторой (неизвестной нам) точке a .

- Как найти приближенное значение дзета–функции в этой точке без предварительного нахождения самого числа?
- Как найти приближенное значение числа a ?

Мы предлагаем несколько алгоритмов, которые дают ответы на эти вопросы. Точность алгоритмов демонстрируется численными примерами. Предложенные алгоритмы выявляют новые свойства дзета–функции.

1. Дзета–функция Римана

В этом параграфе мы приводим некоторые известные факты, которые потребуются в дальнейшем.

Простые числа $2, 3, \dots$ представляют один из наиболее значимых объектов исследования в теории чисел. Важным и эффективным инструментом изучения простых чисел является знаменитая дзета–функция Римана. Для комплексного числа s такого, что $\operatorname{Re}(s) > 1$, дзета–функцию можно определить через ряд Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}. \quad (1.1)$$

Эта функция изучалась еще Л. Эйлером (но лишь для вещественных s). Помимо функции $\zeta(s)$ Эйлер также рассматривал знакопеременную дзета–функцию (известную также как эта–функция Дирихле)

$$\eta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{-s}. \quad (1.2)$$

Эти две функции, (1.1) и (1.2), связаны легко проверяемым соотношением

$$\eta(s) = (1 - 2 \times 2^{-s}) \zeta(s). \quad (1.3)$$

Ряд Дирихле (1.2) имеет большую область сходимости, чем ряд (1.1), а именно: ряд (1.2) сходится при $\operatorname{Re}(s) > 0$. С помощью (1.3) можно определить функцию $\zeta(s)$ в этой расширенной полуплоскости всюду за исключением точки $s = 1$, которая является единственным полюсом дзета–функции.

Для определения $\zeta(s)$ в остальной части комплексной плоскости можно воспользоваться следующим функциональным уравнением, которому удовлетворяет дзета–функция:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} (1-s) \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right) \zeta(s) = \pi^{\frac{s-1}{2}} s \Gamma\left(\frac{1-s}{2} + 1\right) \zeta(1-s). \quad (1.4)$$

Ю. В. Матиясевич: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия, yumat@pdmi.ras.ru.

Перевод с англ.: *J. Math. Sci.* **275**, No. 1, 25–37 (2023).

Это свойство дзета-функции было обнаружено Эйлером [1, § 10] (фактически, он рассматривал эквивалентный аналог (1.4) в терминах дзета-функции). Б. Риман [2] предложил другое определение дзета-функции на всей комплексной плоскости и установил тождество (1.4) для всех комплексных s .

Эйлер указал, что дзета-функция обращается в нуль на отрицательных четных целых числах (эти числа называют *тривиальными нулями*). Риман доказал, что все другие нули (называемые *нетривиальными*) дзета-функции не являются вещественными и лежат внутри *критической полосы* $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$.

Риман установил важное соотношение между простыми числами и нулями дзета-функции. Именно, он нашел явное представление количества $\pi(x)$ простых чисел, не превосходящих x , в терминах этих нулей. Это представление является довольно громоздким; более простое соотношение между простыми числами и нулями дзета-функции можно получить, используя *пси-функцию Чебышева*, которая также считает простые числа и их степени с весами

$$\psi(x) = \sum_{\substack{q \leq x \\ q - \text{ степень} \\ \text{простого числа } p}} \ln(p). \quad (1.5)$$

Г. фон Мангольдт [3] доказал, что для нецелых чисел x , больших единицы,

$$\psi(x) = x - \sum_{\zeta(\rho)=0} \frac{x^\rho}{\rho} - \ln(2\pi). \quad (1.6)$$

В 2013 г. автор эмпирически вывел другое соотношение между простыми числами и нетривиальными нулями дзета-функции. В некотором смысле в этом соотношении закодированы решето Эратосфена и двойственное ему решето (см. [4, 5]).

Естественно было бы ожидать, что x окажется главным членом в правой части равенства (1.6). Порядок разности $\psi(x) - x$ зависит от максимального значения вещественной части нулей дзета-функции. Согласно знаменитой *гипотезе Римана* все нетривиальные нули дзета-функции должны иметь вещественные части, равные $1/2$. Если это действительно так, то

$$\psi(x) = x + O(\ln^2(x)\sqrt{x}) \quad (1.7)$$

и

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dy}{\ln(y)} + O(\ln(x)\sqrt{x}). \quad (1.8)$$

Более того, гипотеза Римана эквивалентна каждой из оценок (1.7) и (1.8) (см., например, фундаментальную монографию [6, п. 4.2]).

Гипотеза Римана остается недоказанной уже более, чем полтора века. Эффектным неформальным подтверждением этой гипотезы может служить точное вычисление вещественных частей первых нетривиальных нулей дзета-функции. Наилучший на сегодняшний день результат в этом направлении, представленный в [7], подтверждает, что первые 12363153437138 (пары сопряженных) нулей дзета-функции действительно удовлетворяют гипотезе Римана.

Вычисление таких нулей включает вычисление многих значений дзета-функции. Для таких вычислений предлагалось много методов различного характера. Например, упомянутая выше проверка гипотезы Римана потребовала одновременного вычисления многочисленных значений дзета-функции для аргументов с большими мнимыми частями, но с относительно небольшой точностью (достаточной для разделения соседних нулей). С другой стороны, П. Борвейн [8] предложил метод вычисления $\eta(s)$ с высокой точностью (относительно последних модификаций метода Борвейна см. [9]).

В данной статье мы также занимаемся вычислением дзета- и эта-функций, но наши методы не предназначены для нахождения значений этих функций с помощью компьютера. Описанные ниже алгоритмы представляют в основном теоретический интерес, поскольку они выявляют новые свойства дзета-функции (например, приближенные линейные соотношения между производными дзета-функции, вычисленными в нулях; см. замечание 3.1 ниже).

2. Вопросы

В этом параграфе мы сформулируем два вопроса, ответы на которые будут даны в последующей части статьи.

Предположим, что задана последовательность чисел

$$d_1, d_2, \dots, \quad (2.1)$$

относительно которых известно, что эти числа суть значения производных дзета-функции Римана в некоторой точке $s = a$,

$$d_k = \frac{d^k}{ds^k} \zeta(s) \Big|_{s=a}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

но при этом сама точка a нам неизвестна. Такая точка a единственна (в ином случае производные дзета-функции были бы периодическими). Таким образом, если числа (2.1) известны, то этого достаточно для определения a и, следовательно, для вычисления значения самой дзета-функции

$$d_0 = \zeta(a). \quad (2.3)$$

В данной статье мы исследуем, как реально извлечь такую информацию из заданных чисел (2.1).

Вопрос 1. Как вычислить $\zeta(a)$ по заданным числам (2.1)?

Вопрос 2. Как вычислить a по заданным числам (2.1)?

Очевидно, что ответ на вопрос 2 сразу же дает ответ на вопрос 1. Однако мы будем отвечать на эти вопросы по порядку. Сначала мы укажем способ вычисления (приближенного) значения $\zeta(a)$ с помощью нескольких первых чисел последовательности (2.1) *без нахождения a* . После этого мы вычислим значения дзета-функции в нескольких точках, близких a , и затем найдем (приближенное) значение числа a .

Дополнение для русской версии. Впоследствии автор дал несколько других ответов на вопрос 1 (см. DOI 10.13140/RG.2.2.26591.23206). Существенное отличие новых методов состоит в том, что в них $\zeta(a)$ вычисляется как значение рациональной дроби от производных, в то время как в настоящей работе для этого используются линейные многочлены.

3. Алгоритм A1

В этом параграфе мы начинаем отвечать на вопрос 1.

Как уже отмечалось в конце предыдущего параграфа, нам надо вычислить $\zeta(a+s)$ для нескольких значений числа s . Если эти значения достаточно малы, то вычисления можно было бы провести с помощью начального фрагмента ряда Тейлора

$$\zeta(a+s) \approx T_N(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{d_k}{k!} s^k \quad (3.1)$$

при некотором N . Однако $d_0 = \zeta(a)$ нам пока неизвестно. Поэтому вместо ряда Тейлора надо будет использовать ряд Дирихле.

Попробуем аппроксимировать $\zeta(a+s)$ конечным рядом Дирихле

$$\zeta(a+s) \approx D_N(s) = \sum_{n=1}^N c_n n^{-s} \quad (3.2)$$

с некоторыми коэффициентами

$$c_1, c_2, \dots, c_N. \quad (3.3)$$

Естественно потребовать, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$\frac{d^k}{ds^k} D_N(s) \Big|_{s=0} = d_k, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (3.4)$$

Из этой системы можно определить $c_2, \dots, c_N$, но не c_1 . Значение этого коэффициента является ключевым для аппроксимации (3.2), однако не очевидно, как выбрать c_1 .

Первое численное наблюдение можно сформулировать следующим образом. *Хороший выбор c_1 может быть сделан независимо от значений чисел (2.2); именно:*

$$c_1 = 1. \quad (3.5)$$

Приведенные рассуждения реализуются в алгоритме A1 (см. рис. 1). Выходное значение этого алгоритма следующее:

$$D_N(s) = 1 - \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2^{-s} & \dots & N^{-s} \\ d_1 & (-\ln(2))^1 & \dots & (-\ln(N))^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{N-1} & (-\ln(2))^{N-1} & \dots & (-\ln(N))^{N-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (-\ln(2))^1 & \dots & (-\ln(N))^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\ln(2))^{N-1} & \dots & (-\ln(N))^{N-1} \end{vmatrix}} \quad (3.6)$$

(матрица в знаменателе по существу является матрицей типа Вандермонда, и, следовательно, ее детерминант не обращается в нуль).

ВХОДНЫЕ ДАННЫЕ: Целое число N , комплексные числа $d_1, \dots, d_{N-1}$ и s

ШАГ 1. Решим линейную систему

$$\sum_{n=2}^N (-\ln(n))^k c_n = d_k, \quad k = 1, \dots, N-1,$$

ШАГ 2. Положим $c_1 = 1$

ШАГ 3. Положим $z = \sum_{n=1}^N c_n n^{-s}$

ВЫХОДНЫЕ ДАННЫЕ: z

Рис. 1. Алгоритм A1 для аппроксимации $\zeta(a+s)$.

Численный пример 3.1. Пусть $N = 20$, числа (2.1) определены формулой (2.2) при $a = -0.2 + 14i$ и $s = -1 - i$. В этом случае по алгоритму A1 получаем

$$\begin{aligned} D_N(s) &= -0.23543\ 72893\ 03507\ 30402\dots - 2.8335\ 33677\ 65029\ 05628\dots i \\ &= \zeta(a+s) - 1.9174\dots \times 10^{-11} - 1.2104\dots \times 10^{-10}i. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Численный пример 3.2. В качестве a рассмотрим несколько первых нетривиальных нулей дзета-функции и положим $s = 0$. В таблице 1 указаны значения $|D_N(0)|$ для некоторых N .

Таблица 1. Если a — нетривиальный нуль ρ_m дзета-функции, то $D_N(0)$ почти равна нулю.

m	$a = \rho_m$	$ D_N(0) $		
		$N = 16$	$N = 30$	$N = 50$
1	$0.5 + 14.13472\dots$	$7.7808\dots \cdot 10^{-10}$	$3.1660\dots \cdot 10^{-14}$	$7.6774\dots \cdot 10^{-17}$
2	$0.5 + 21.02203\dots$	$1.3440\dots \cdot 10^{-11}$	$1.3062\dots \cdot 10^{-18}$	$7.4006\dots \cdot 10^{-25}$
3	$0.5 + 25.01085\dots$	$3.7407\dots \cdot 10^{-12}$	$2.4584\dots \cdot 10^{-20}$	$3.3201\dots \cdot 10^{-28}$
4	$0.5 + 30.42487\dots$	$1.4197\dots \cdot 10^{-12}$	$4.3805\dots \cdot 10^{-22}$	$8.2480\dots \cdot 10^{-32}$
5	$0.5 + 32.93506\dots$	$1.1301\dots \cdot 10^{-12}$	$1.0109\dots \cdot 10^{-22}$	$3.3226\dots \cdot 10^{-33}$
6	$0.5 + 37.58617\dots$	$9.7731\dots \cdot 10^{-13}$	$1.1201\dots \cdot 10^{-23}$	$1.9702\dots \cdot 10^{-35}$

Замечание 3.1. Согласно (3.6) функция $D_N(0)$ линейна по $d_1, \dots, d_{N-1}$. Таким образом, таблица 1 демонстрирует, что производные дзета-функции, вычисленные в *различных* первых нетривиальных нулях, удовлетворяют *одинаковым* приближенным линейным соотношениям $D_N(0) \approx 0$.

Численный пример 3.3. Отметим следующий феномен. Конечные ряды Дирихле $D_N(s)$ были определены в подражание ряду Тейлора (3.1) посредством уравнений (3.4). Однако $D_N(s)$ может обеспечить аппроксимацию $\zeta(a+s)$ значительно лучше, чем $T_N(s)$, что и наблюдается в следующем случае. Пусть $N = 50$, числа (2.1) определены формулой (2.2) при $a = 1 + 30i$ и $s = 3 + 10i$. Тогда

$$|T_N(s)/\zeta(a+s) - 1| = 0.0270..., \quad (3.8)$$

$$|D_N(s)/\zeta(a+s) - 1| = 5.6644... \times 10^{-27}. \quad (3.9)$$

Численный пример 3.4. Приведенный выше феномен оказывается даже более впечатляющим, когда s находится вне круга сходимости ряда Тейлора для дзета-функции. Это именно так и происходит в следующем случае. Пусть $N = 50$, числа (2.1) определены формулой (2.2) при $a = 1 + 30i$ и $s = 3 + 31i$. Тогда

$$|T_N(s)/\zeta(a+s) - 1| = 1.0768... \times 10^{22}, \quad (3.10)$$

$$|D_N(s)/\zeta(a+s) - 1| = 8.7339... \times 10^{-6}. \quad (3.11)$$

4. Алгоритм A2

В этом параграфе мы начинаем отвечать на вопрос 2, а именно, находим аппроксимацию $\operatorname{Re}(a)$.

Согласно (1.1)

$$\zeta(a+s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a} n^{-s}, \quad (4.1)$$

и мы можем использовать начальный фрагмент этого бесконечного ряда Дирихле в качестве $D_N(s)$. Однако такой усеченный ряд будет аппроксимировать $\zeta(a+s)$ только в случае $\operatorname{Re}(a+s) > 1$.

В § 3 мы видели, что конечный ряд Дирихле $D_N(s)$ (определенный формулами (3.2), (3.4), (3.5)) способен обеспечить хорошую аппроксимацию $\zeta(a+s)$ и при $\operatorname{Re}(a+s) < 1$. Этот факт позволяет предположить, что коэффициенты (3.3) должны отличаться от соответствующих коэффициентов ряда (4.1). Тем не менее мы можем сформулировать второе численное наблюдение следующим образом. *Несколько первых коэффициентов $D_N(s)$ почти равны соответствующим коэффициентам ряда (4.1):*

$$c_n \approx n^{-a}. \quad (4.2)$$

Численный пример 4.1. При тех же параметрах, как в примере 3.1, имеем

$$c_2 = 2^{-a} + 9.5334... \times 10^{-10} - 2.3374... \times 10^{-7}i, \quad (4.3)$$

$$c_3 = 3^{-a} - 6.5358... \times 10^{-6} + 4.3567... \times 10^{-5}i, \quad (4.4)$$

$$c_4 = 4^{-a} + 7.1934... \times 10^{-4} - 2.4284... \times 10^{-3}i. \quad (4.5)$$

Согласно (4.2)

$$\operatorname{Re}(a) \approx -\operatorname{Re}(\log_n(c_n)). \quad (4.6)$$

В алгоритме A2 (см. рис. 2) мы полагаем $n = 2$, что позволяет ожидать наилучшую точность.

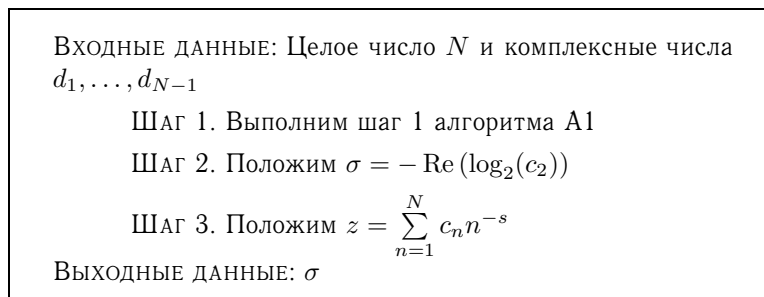


Рис. 2. Алгоритм A2 для аппроксимации $\operatorname{Re}(a)$.

Численный пример 4.2. При тех же параметрах, как в примере 3.1, имеем следующий результат работы алгоритма A2:

$$\sigma = -0.1999999179227... = \operatorname{Re}(a) + 8.2077... \times 10^{-8}. \quad (4.7)$$

5. Алгоритм A3

В этом параграфе мы продолжаем отвечать на вопрос 2, а именно, находим аппроксимацию $\operatorname{Im}(a)$.

Можно было бы опять воспользоваться (4.2) с некоторым n , большим единицы, но c_n определяет $\operatorname{Im}(a)$ лишь с точностью до целочисленного множителя $2\pi/\ln(n)$:

$$\operatorname{Im}(a) \approx -\operatorname{Im}(\log_n(c_n)) + \frac{2\pi}{\ln(n)}m, \quad (5.1)$$

где m — целое число. Поэтому нам потребуется другой метод нахождения $\operatorname{Im}(a)$.

Наш подход основан на функциональном уравнении (1.4). Оно содержит гамма-функцию, аргументы которой мы не можем вычислить. К счастью, эта функция удовлетворяет своему собственному функциональному уравнению

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s), \quad (5.2)$$

которое можно использовать для того, чтобы исключить гамма-функцию из (1.4) и получить

$$4\pi^2\zeta(s-1)\zeta(-s) = s(s-1)\zeta(2-s)\zeta(s+1). \quad (5.3)$$

Если обе части (5.3) отличны от нуля и $s = 1/2 + it$, где t — вещественное число, то из (5.3) следует

$$t^2 + \frac{1}{4} = 4\pi^2 \left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2})}{\zeta(it + \frac{3}{2})} \right|^2. \quad (5.4)$$

Заменив t на $t \pm u$ и вычитая одно полученное тождество из другого, для ненулевого вещественного u находим

$$t = \frac{\pi^2}{u} \left(\left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} + iu)}{\zeta(it + \frac{3}{2} + iu)} \right|^2 - \left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} - iu)}{\zeta(it + \frac{3}{2} - iu)} \right|^2 \right). \quad (5.5)$$

Если $\operatorname{Re}(a)$ и комплексное r имеют относительно малые абсолютные значения и $t = \operatorname{Im}(a)$, то

$$\zeta(it + r) = \zeta(a - \operatorname{Re}(a) + r) \approx D_N(r - \operatorname{Re}(a)) \quad (5.6)$$

в силу (3.2). Соответственно,

$$\operatorname{Im}(a) \approx \frac{\pi^2}{u} (R(u, \operatorname{Re}(a)) - R(-u, \operatorname{Re}(a))), \quad (5.7)$$

где

$$R(u, \sigma) = \left| \frac{D_N(-\sigma - \frac{1}{2} + iu)}{D_N(-\sigma + \frac{3}{2} + iu)} \right|^2. \quad (5.8)$$

В алгоритме A3 (см. рис. 3) мы воспользовались соотношением (5.7) при $u = 1$ и заменили $\operatorname{Re}(a)$ приближенным значением, вычисленным по алгоритму A2.

Численный пример 5.1. При тех же параметрах, как в примере 3.1, имеем следующий результат работы алгоритма A3:

$$t = 14.000\ 00508\ 30495... = \operatorname{Im}(a) + 5.0830... \times 10^{-6}. \quad (5.9)$$

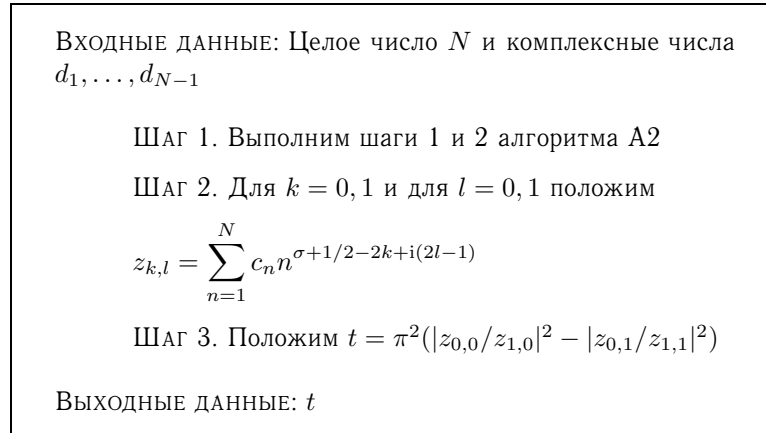


Рис. 3. Алгоритм А3 для аппроксимации $\text{Im}(a)$.

6. Алгоритм А4

В этом параграфе мы улучшим метод вычисления $\text{Re}(a)$.

Если хорошая аппроксимация a_0 числа a уже найдена, можно улучшить ее точность с помощью решения, скажем, уравнения

$$\zeta'(s) = d_1, \quad (6.1)$$

например, методом Ньютона с начальной точкой a_0 . Для этого потребуется вычислить первую и вторую производные дзета-функции в нескольких точках. В этом и последующих параграфах мы покажем, как повысить точность аппроксимации a , используя лишь изначально заданные значения (2.1) производных дзета-функции. Это удастся сделать с помощью функционального уравнения иного вида. Поскольку левая часть (5.5), не зависит от u , для ненулевых вещественных u_1 и u_2 справедливо тождество

$$\frac{\left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} + iu_1)}{\zeta(it + \frac{3}{2} + iu_1)} \right|^2}{u_1} - \frac{\left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} - iu_1)}{\zeta(it + \frac{3}{2} - iu_1)} \right|^2}{u_1} - \frac{\left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} + iu_2)}{\zeta(it + \frac{3}{2} + iu_2)} \right|^2}{u_2} - \frac{\left| \frac{\zeta(it - \frac{1}{2} - iu_2)}{\zeta(it + \frac{3}{2} - iu_2)} \right|^2}{u_2} = 0. \quad (6.2)$$

Вместо (6.1) мы применим метод Ньютона для приближенного аналога (6.2)

$$\frac{R(u_1, \sigma) - R(-u_1, \sigma)}{u_1} - \frac{R(u_2, \sigma) - R(-u_2, \sigma)}{u_2} = 0, \quad (6.3)$$

где u_1 и u_2 фиксированы, а σ — неизвестное вещественное число.

В алгоритме А4 (см. рис. 4) мы полагаем $u_1 = 1$, $u_2 = 0.5$ и вычисляем начальное значение σ по алгоритму А2. Алгоритм А4 представляет собой реализацию одного шага метода Ньютона (выполнение большего числа шагов не приведет к значительному повышению точности, поскольку в (6.3) мы используем не дзета-функцию, а ее приближение (3.2)).

Численный пример 6.1. При тех же параметрах, как в примере 3.1, имеем следующий результат работы алгоритма А4:

$$\sigma = -0.2000\ 00000\ 04795\dots = \text{Re}(a) - 4.7957\dots \times 10^{-11}. \quad (6.4)$$

Эта аппроксимация лучше, чем (4.7).

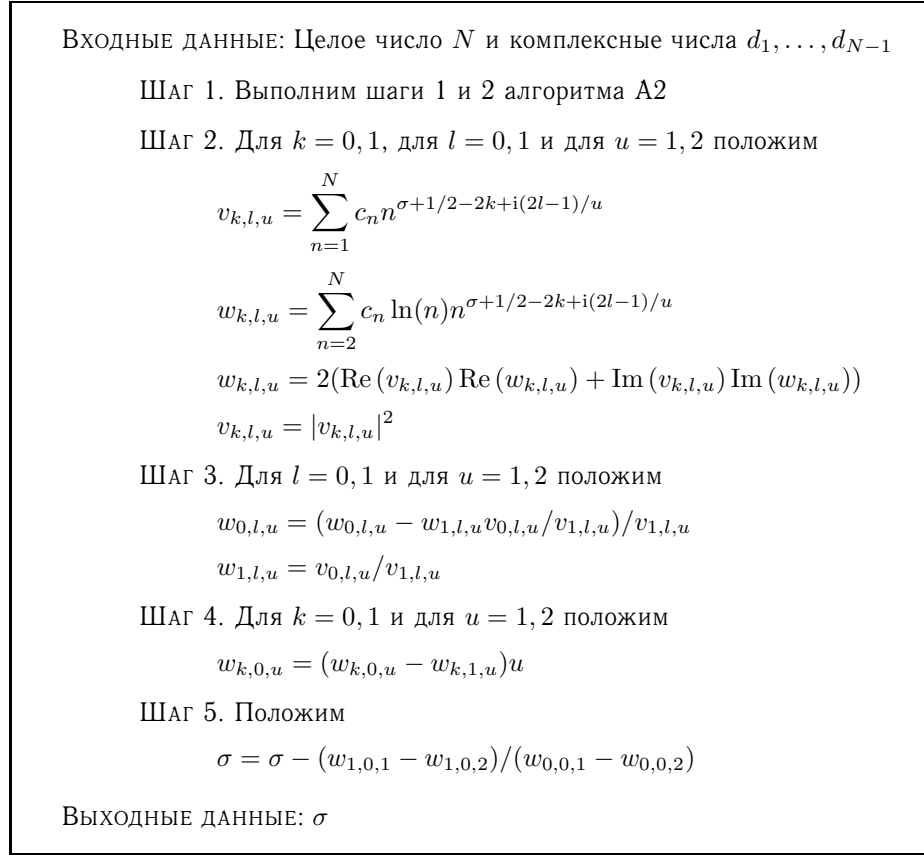


Рис. 4. Алгоритм А4 для более точной аппроксимации $\operatorname{Re}(a)$.

7. Алгоритм А5

В этом параграфе мы опишем более точный метод вычисления $\operatorname{Im}(a)$.

Уточненное значение $\operatorname{Re}(a)$, вычисленное по алгоритму А4, можно использовать для вычисления $\operatorname{Im}(a)$ с более высокой точностью, что и реализовано непосредственно в алгоритме А5 (см. рис. 5).

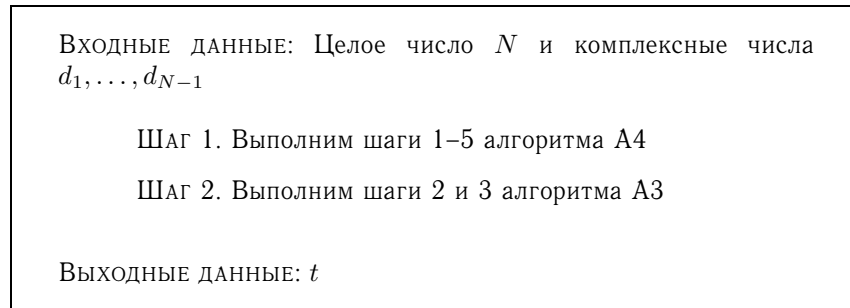


Рис. 5. Алгоритм А5 для аппроксимации $\operatorname{Im}(a)$ с более высокой точностью.

Численный пример 7.1. При тех же параметрах, как в примере 3.1, имеем следующий результат работы алгоритма А5:

$$t = 13.999\,99999\,97497\dots = \operatorname{Re}(a) - 2.5023\dots \times 10^{-10}. \quad (7.1)$$

Эта аппроксимация лучше, чем (5.9).

8. Случай знакопеременной дзета-функции

В этом параграфе мы рассмотрим вычисление функции $\eta(s)$.

До сих пор мы рассматривали только дзета-функцию Римана. На самом деле, та же техника (с естественными модификациями) работает также для некоторых других функций, определяемых через ряды Дирихле. В этом параграфе мы рассмотрим те же два вопроса, что и выше, но для знакопеременной дзета-функции (1.2).

Чтобы сохранить обозначения, будем считать в этом параграфе, что числа (2.1) имеют (вместо (2.2)) следующие значения:

$$d_k = \left. \frac{d^k}{ds^k} \eta(s) \right|_{s=a}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

Соответственно, коэффициенты конечных рядов (3.2) определяются как решение системы (3.4), но с другими правыми частями.

Как и выше, положим $c_1 = 1$. Тогда алгоритм A1 без каких-либо модификаций обеспечивает хорошие приближения функции $\eta(a + s)$.

Численный пример 8.1. Пусть $N = 20$, числа (2.1) определены формулой (8.1) при $a = -1 + 20i$ и $s = -1 - i$. В этом случае по алгоритму A1 получаем

$$\begin{aligned} D_N(s) &= 10.776\ 18709\ 43313\ 10697\dots + 126.45\ 64909\ 52247\ 95194\dots i \\ &= \eta(a + s) + 1.8229\dots \times 10^{-15} + 1.7082\dots \times 10^{-15}i. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Естественно, что теперь вместо (4.2) мы имеем знакопеременные приближенные равенства

$$c_n \approx (-1)^{n+1} n^{-a}. \quad (8.3)$$

Численный пример 8.2. При тех же параметрах, как в примере 8.1, имеем

$$c_2 = -2^{-a} - 3.6346\dots \times 10^{-10} + 4.9004\dots \times 10^{-10}i, \quad (8.4)$$

$$c_3 = 3^{-a} + 6.7766\dots \times 10^{-8} - 9.6926\dots \times 10^{-5}i, \quad (8.5)$$

$$c_4 = -4^{-a} - 3.9039\dots \times 10^{-6} + 5.9426\dots \times 10^{-6}i. \quad (8.6)$$

Несмотря на различия между (4.2) и (8.3) в данном случае нет необходимости корректировать алгоритм A2.

Численный пример 8.3. При тех же параметрах, как в примере 8.1, имеем следующий результат работы алгоритма A2:

$$\sigma = -1.0000\ 00000\ 41128\dots = \operatorname{Re}(a) - 4.1128\dots \times 10^{-10}. \quad (8.7)$$

Как и в алгоритме A3, для применения (5.5) нам потребуются значения дзета-функции, а не эта-функции. К счастью, благодаря (8.3) имеем

$$\zeta(a + s) = \frac{\eta(a + s)}{1 - 2 \times 2^{-a-s}} \approx \frac{D_N(s)}{1 + 2c_2 2^{-s}}. \quad (8.8)$$

Используя это приближенное равенство (вместо (3.2)), можно переопределить (5.8) следующим образом:

$$R(u, \sigma) = \left| \frac{(1 + 2c_2 2^{\sigma - \frac{3}{2} - iu}) D_N(-\sigma - \frac{1}{2} + iu)}{(1 + 2c_2 2^{\sigma + \frac{1}{2} - iu}) D_N(-\sigma + \frac{3}{2} + iu)} \right|^2 \quad (8.9)$$

тем самым сохранив справедливость соотношения (5.7). Соответственно, присваивание на шаге 2 в алгоритме A3 следует заменить следующим:

$$z_{k,l} = \frac{\sum_{n=1}^N n^{\sigma+1/2-2k+i(2l-1)}}{1 + 2c_2 2^{\sigma+1/2-2k+i(2l-1)}}. \quad (8.10)$$

Численный пример 8.4. При тех же параметрах, как в примере 8.1, имеем следующий результат работы модифицированного алгоритма АЗ:

$$t = 19.999\ 99990\ 75779\dots = \operatorname{Re}(a) - 9.2422\dots \times 10^{-10}. \quad (8.11)$$

Дополнение для русской версии. Другие методы вычисления $\eta(a)$ через производные функции η указаны в DOI 10.13140/RG.2.2.26591.23206.

9. Обобщение

В этом параграфе мы кратко обсудим другие способы применения производных дзета-функции в вычислениях.

Нет необходимости использовать *последовательные* первые производные дзета-функции для вычисления ее значения и значения аргумента. Числа (3.3) можно было бы определить из линейных уравнений (3.4) для любого множества $N - 1$ значений k ; однако это может снизить точность дальнейших вычислений.

Численный пример 9.1. Пусть $N = 20$, $a = -0.2 + 14i$, $s = -1 - i$ (как в примере 3.1), и пусть числа (3.3) определены из уравнений (3.4), где теперь k изменяется от 2 до N . В этом случае

$$\begin{aligned} D_N(s) &= -0.23543\ 72910\ 09787\ 07937\dots - 2.8335\ 33680\ 47765\ 18326\dots i \\ &= \zeta(a + s) - 1.7254\dots \times 10^{-9} - 2.9484\dots \times 10^{-9}i, \end{aligned} \quad (9.1)$$

что дает результат хуже, чем (3.7). Нетрудно вычислить пропущенную первую производную

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dz} D_N(z) \right|_{z=s} &= 1.2645\ 73245\ 24735\ 58967\dots + 0.52502\ 80791\ 36458\ 93625\dots i \\ &= \left. \frac{d}{dz} \zeta(z) \right|_{z=a+s} + 1.8014\dots \times 10^{-10} + 2.4446\dots \times 10^{-10}\dots i. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Можно также вычислить несколько производных более высокого порядка (с более низкой точностью) из производных меньшего порядка.

Численный пример 9.2. Пусть $N = 50$, $a = 0.4 + 20i$ и числа (3.3) определены уравнениями (3.4). В этом случае

$$\left. \frac{d^{50}}{dz^{50}} D_N(z) \right|_{z=0} = (1 + 2.311\dots \times 10^{-10} - 5.1044\dots \times 10^{-11}i) \left. \frac{d^{50}}{dz^{50}} \zeta(z) \right|_{z=a}, \quad (9.3)$$

$$\left. \frac{d^{51}}{dz^{51}} D_N(z) \right|_{z=0} = (1 + 1.5296\dots \times 10^{-8} - 1.0474\dots \times 10^{-8}i) \left. \frac{d^{51}}{dz^{51}} \zeta(z) \right|_{z=a}, \quad (9.4)$$

$$\left. \frac{d^{52}}{dz^{52}} D_N(z) \right|_{z=0} = (1 + 4.0835\dots \times 10^{-7} - 6.1408\dots \times 10^{-7}i) \left. \frac{d^{52}}{dz^{52}} \zeta(z) \right|_{z=a}. \quad (9.5)$$

Литература

1. L. Euler, “Remarques sur un beau rapport entre les séries des puissances tant directes que réciproques”, *Mém. Acad. Sci. Berlin* **17**, 83–106 (1768). <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/352>
2. B. Riemann, “Ueber die Anzhal der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse”, *Monatsberichte Berl. Akad.* (1859). <http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Riemann/Zeta/EZeta.pdf>
3. H. von Mangoldt, “Zu Riemann’s Abhandlung ‘Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse’”, *J. für Math.* **114**, 255–305 (1895). DOI 10.1515/crll.1895.114.255
4. G. Beliakov, Yu. Matiyasevich, “Approximation of Riemann’s zeta function by finite Dirichlet series: A multiprecision numerical approach”, *Exp. Math.* **24**, No. 2, 150–161 (2015). DOI 10.1080/10586458.2014.976801

5. Ю. В. Матиясевич, “Дзета-функция Римана и конечные ряды Дирихле” *Алгебра анал.* **27**, No. 6, 174–198 (2015); Англ. перевод: *St. Petersburg Math. J.* **27**, No. 6, 985–1002 (2016). DOI 10.1090/spmj/1431
6. K. Broughan, *Equivalents of the Riemann Hypothesis. Volume 1: Arithmetic Equivalents*, Cambridge University Press, Cambridge (2017).
7. D. Platt, T. Trudgian, “The Riemann hypothesis is true up to $3 \cdot 10^{12}$ ”, *Bull. Lond. Math. Soc.* **53**, No. 3, 792–797 (2021). DOI 10.1112/blms.12460
8. P. Borwein, “An efficient algorithm for the Riemann zeta function”, In: *Constructive, Experimental, and Nonlinear Analysis*, pp. 29–34, Am. Math. Soc., Providence, RI (2000).
9. I. Belovas, “A local limit theorem for coefficients of modified Borwein’s method”, *Glas. Mat., Ser. III* **54** No. 1, 1–9 (2019). DOI 10.3336/gm.54.1.01

Статья поступила в редакцию 12 апреля 2024 г.

Дж. Найт

КЛАССЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Мы рассмотрим некоторые аспекты теории вычислимых структур, которые демонстрируют выразительную силу бесконечных предложений при описании математических структур и классов структур. Наш обзор включает как классические результаты такие, как теорема Скотта об изоморфизме, теорема Лопеза — Эскобара, а также результаты Фридмана и Стенли о сравнении классов структур на основании сложности их инвариантов, так и недавно полученные результаты для абелевых групп без кручения.

1. Соглашения

Мы рассматриваем счетные структуры и классы структур при следующих условиях.

- Носителем структуры является множество ω или его подмножество.
- Языки счетны и, если особо не оговорено, вычислимы.
- Классы структур имеют фиксированный язык и замкнуты относительно изоморфизма.

2. Логика $L_{\omega_1, \omega}$

В бесконечной логике $L_{\omega_1, \omega}$ формулы содержат счетные бесконечные дизъюнкции и конъюнкции, но цепочки кванторов могут быть только конечными.

2.1. Примеры формул. Следующее высказывание о вещественном замкнутом упорядоченном поле говорит, что это поле архимедово:

$$(\forall x) \bigvee_n x < \underbrace{1 + \dots + 1}_n.$$

Следующая формула с элементом абелевой группы означает, что этот элемент не является кручением:

$$\bigwedge_n \underbrace{x + \dots + x}_n \neq 0.$$

2.2. Нормальная форма. Вообще говоря, мы не можем приписать кванторы в начало предложений логики $L_{\omega_1, \omega}$, поэтому в рассматриваемом случае мы не располагаем предваренной нормальной формой. Однако можно вписать отрицания внутрь формулы, что приведет к иному типу *нормальной формы*. Сложность формул в такой нормальной форме измеряется числом чередований $\bigvee$ и $\bigwedge$.

2.3. Сложность. Мы выделяем классы Σ_α -формул и Π_α -формул для счетных ординалов α .

1. Формула $\varphi(\vec{x})$ классифицируется как Σ_0 -формула и Π_0 -формула, если она конечна и бескванторна.

Исследование частично поддержано грантом NSF (№ 1800692).

Дж. Найт: Нотрдамский университет, Нотр Дам, США, j1knight@nd.edu.

Перевод с англ.: *J. Math. Sci.* **275**, No. 1, 16–24 (2023).

2. Для счетных ординалов $\alpha > 0$

- (a) $\varphi(\bar{x})$ классифицируется как Σ_α -формула, если она имеет вид $\bigvee_i (\exists \bar{u}_i) \psi_i(\bar{x}, \bar{u}_i)$, где каждая формула ψ_i является Π_{β_i} -формулой для некоторого $\beta_i < \alpha$,
- (b) $\varphi(\bar{x})$ классифицируется как Π_α -формула, если она имеет вид $\bigwedge_i (\forall \bar{u}_i) \psi_i(\bar{x}, \bar{u}_i)$, где каждая формула ψ_i является Σ_{β_i} -формулой для некоторого $\beta_i < \alpha$.

2.4. Отрицания. Для $L_{\omega_1\omega}$ -формулы φ в нормальной форме введем формулу $\text{neg}(\varphi)$, полученную внесением отрицания внутрь формулы φ . Эта формула, логически эквивалентная отрицанию φ , имеет нормальную форму. Заметим, что если φ — Σ_α -формула или Π_α -формула, то $\text{neg}(\varphi)$ является Π_α -формулой или Σ_α -формулой.

2.5. Разности. Будем говорить, что формула является d - Σ_α -формулой, если она имеет вид $(\varphi \ \& \ \psi)$, где φ — Σ_α -формула и ψ — Π_α -формула.

2.6. Сложность формул из п. 2.1. Высказывание $(\forall x) \bigvee_n x < \underbrace{1 + \dots + 1}_n$ об архимедовости вещественного замкнутого поля является Π_2 -формулой. Формула $\bigwedge_n \underbrace{x + \dots + x}_n \neq 0$, утверждающая, что элемент абелевой группы не будет элементом кручения, является Π_1 -формулой. Для каждого n найдется d - Σ_2 -высказывание о $\mathbb{Q}$ -векторном пространстве, которое говорит, что размерность пространства равна n . Действительно, сначала заметим, что имеется естественная Π_1 -формула $\varphi_n(x_1, \dots, x_n)$ о линейной независимости элементов $x_1, \dots, x_n$. Мы получаем Σ_2 -высказывание δ_n о том, что векторное пространство имеет размерность не меньше, чем n . Тогда d - Σ_2 -высказывание $(\delta_n \ \& \ \text{neg}(\delta_{n+1}))$ говорит, что размерность пространства равна в точности n .

2.7. Предложения Скотта. Следующий результат, доказанный Скоттом [1], иллюстрирует выразительную силу логики $L_{\omega_1\omega}$ при описании счетных структур.

Теорема 2.1 (теорема Скотта об изоморфизме). *Для каждой структуры $\mathcal{A}$ имеется $L_{\omega_1\omega}$ -высказывание φ такое, что счетные модели φ суть в точности изоморфные копии $\mathcal{A}$.*

Высказывание с описанным выше свойством называется *предложением Скотта* для $\mathcal{A}$.

3. Вычислимые бесконечные формулы

Вычислимые бесконечные формулы — это $L_{\omega_1\omega}$ -формулы, содержащие бесконечные дизъюнкции и конъюнкции над вычислимо перечислимыми множествами. Несмотря на то, что вычислимые бесконечные формулы бесконечно длинные, именно такие формулы представляются исчерпывающими. Для вычислимых бесконечных формул мы выделяем классы *вычислимых Σ_α -формул* и *вычислимых Π_α -формул* для *вычислимых ординалов α* . Более точно, чтобы множество формул было вычислимо перечислимым, надо индексировать формулы натуральными числами. Один из способов такой индексации предложен в [2], а другой подход описан в [3].

В примерах из п. 2.1 выражение $(\forall x) \bigvee_n x < \underbrace{1 + \dots + 1}_n$ об архимедовости упорядоченного поля является вычислимой Π_2 -формулой. Формула $\bigwedge_n \underbrace{x + \dots + x}_n \neq 0$, означающая, что элемент абелевой группы не является кручением, будет вычислимой Π_1 -формулой. Естественное высказывание о том, что $\mathbb{Q}$ -векторное пространство имеет размерность n (где $n \geq 1$), является вычислимой d - Σ_2 -формулой.

4. Иерархия Бореля

Напомним, что пространством Кантора, которое будем обозначать $2^{<\omega}$, называется множество всех конечных последовательностей из 0 и 1. При фиксированном языке L класс $\text{Mod}(L)$ является классом L -структур с носителем ω . Для упрощения изложения будем считать, что язык L реляционный. Пусть C — множество новых констант, представляющих натуральные числа. Можно отождествить $\text{Mod}(L)$ с 2^ω следующим образом. Пусть $(\alpha_n)_{n \in \omega}$ — список атомных высказываний $R\bar{a}$, где R — символ отношения в языке L и $\bar{a}$ — кортеж в C . Отождествим структуру $\mathcal{A}$ с

функцией $f \in 2^\omega$ такой, что

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \mathcal{A} \models \alpha_n, \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Существует естественная топология в пространстве 2^ω , порожденная базисными открыто-замкнутыми окрестностями $N_p = \{f \in 2^\omega : f \supseteq p\}$, $p \in 2^{<\omega}$. Заметим, что в случае $\text{Mod}(L)$ базисные открыто-замкнутые окрестности N_p имеют вид $\text{Mod}(\alpha)$, где α — конечное бескванторное высказывание.

Множества в σ -алгебре, порожденные множествами N_p , называются *борелевскими*. Для таких множеств вводим классы Σ_α и Π_α со счетным ординалом α .

1. Борелевское множество B является Σ_0 -множеством и Π_0 -множеством, если B — конечная булева комбинация базисных множеств N_p .
2. Для $\alpha > 0$
 - (а) борелевское множество B является Σ_α -множеством, если $B = \bigcup_i B_i$, где каждое множество B_i является Π_{β_i} -множеством для некоторого $\beta_i < \alpha$,
 - (б) борелевское множество B является Π_α -множеством, если $B = \bigcap_i B_i$, где каждое множество B_i является Σ_{β_i} -множеством для некоторого $\beta_i < \alpha$.

5. Эффективная иерархия Бореля

Эффективные борелевские множества получаются из базисных открыто-замкнутых множеств N_p с помощью вычислимо-перечислимых объединений и пересечений. Для более точной формулировки потребуются индексация множества. Хорошая система индексации, аналогичная индексации вычислимых бесконечных формул в [2], приведена в [4]. Для эффективных борелевских множеств рассматриваются два класса: Σ_α -эффективные и Π_α -эффективные борелевские множества, где α — вычислимый ординал.

6. Аксиоматизирующие классы

Борелевские классы $K \subseteq \text{Mod}(L)$, замкнутые относительно изоморфизма, связаны замечательным образом с высказываниями языка $L_{\omega_1\omega}$. Первый результат в этом направлении получил Лопез-Эскобар [5].

Теорема 6.1 (Лопез-Эскобар). *Замкнутый относительно изоморфизма класс $K \subseteq \text{Mod}(L)$ является борелевским множеством тогда и только тогда, когда он аксиоматизируется высказыванием из $L_{\omega_1\omega}$.*

Воот [6] уточнил этот результат, показав, что сложность аксиомы можно было бы сделать соответствующей сложности класса.

Теорема 6.2 (Воот). *Для счетного ординала $\alpha \geq 1$ замкнутый относительно автоморфизма класс $K \subseteq \text{Mod}(L)$ является Σ_α тогда и только тогда, когда он аксиоматизируется Σ_α -предложением из $L_{\omega_1\omega}$.*

Здесь наиболее сложной является импликация $\Rightarrow$. В оригинальном доказательстве Воота использовались так называемые *преобразования Воота*. Эффективную версию теоремы Воота доказал Ванден Бум в своей диссертации в Нотрдамском университете (см. [4]).

Теорема 6.3 (Ванден Бум). *Для вычислимого ординала $\alpha \geq 1$ замкнутый относительно изоморфизма класс $K \subseteq \text{Mod}(L)$ является Σ_α -эффективным тогда и только тогда, когда он аксиоматизируется вычислимым Σ_α -предложением.*

Релятивизация теоремы Вандена Бума приводит к теореме Воота. Эш установил более простую импликацию $\Leftarrow$, а для доказательства более сложной импликации $\Rightarrow$ мы использовали преобразования Воота (автору данной статьи эти преобразования всегда казались мистикой). Ванден Бум дал иное доказательство, основанное на понятии форсинга, при этом в его доказательстве формулы, определяющие форсинг, играли роль преобразований Воота.

7. Борелевские вложения

Грубо говоря, *классификация* структур класса K означает описание структур в K с точностью до изоморфизма или задания *инвариантов*, выделяющих из среди неизоморфных структур. Однако определения классификации и инвариантов довольно туманны. Поэтому Фридман и Стенли [7] ввели понятие, благодаря которому можно сравнивать классификационные задачи и определять, не будут ли инварианты одного класса более сложными, чем инварианты другого класса.

Определение 7.1 (Фридман — Стенли). Пусть K и K' — классы такие, что $K \subseteq \text{Mod}(L)$ и $K' \subseteq \text{Mod}(L')$. *Борелевским вложением* класса K в класс K' называется борелевская функция $\Phi : K \rightarrow K'$ такая, что $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$ для $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in K$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\mathcal{A}) \cong \Phi(\mathcal{A}')$.

7.1. Обозначения. Мы пишем

$K \leq_B K'$, если существует борелевское вложение K в K' ,

$K <_B K'$, если $K \leq_B K'$ и $K' \not\leq_B K$,

$K \equiv_B K'$, если $K \leq_B K'$ и $K' \leq_B K$.

Можно считать $\equiv_B$ -класс в K *борелевской мощностью* класса K .

7.2. На вершине цепи вложений. Фридман и Стенли [7] показали, что некоторые классы расположены на вершине цепи вложений относительно отношения порядка $\leq_B$. При этом в некоторых случаях были даны ссылки на ранние работы Лаврова [8] и Меклера [9], а в других — предложены новые конструкции. Ниже мы приведем новые результаты, которые получили Маркер [10], Ниес [11], Камерло и Гао [12], и др.

1. *Неориентированные графы* (Лавров, 1963; Ниес, 1996; Маркер, 2002).
2. *Поля фиксированной характеристики* (Фридман и Стенли, 1989; Р. Миллер — Пунен — Схоутенс — Шлапентох, 2018).
3. *2-ступенчатые нильпотентные группы* (Меклер, 1981; Мальцев, 1960).
4. *Линейные порядки* (Фридман — Стенли, 1989).
5. *Булевы алгебры* (Камерло — Гао, 2000).
6. *Вещественные замкнутые упорядоченные поля* (Маркер).
7. *Модели произвольных пополнений PA* (Найт).
8. *Абелевы группы без кручения* (Паолини — Шелах, 2021, 2022; Ласковски — Ульрих, 2022).

Для неориентированных графов этот результат установил Лавров. Ниес и Маркер нашли различные вложения $\text{Mod}(L)$ в неориентированные графы. Для полей Фридман и Стенли определили вложение графов в поля произвольной фиксированной характеристики. Для оригинального вложения восстановление входного графа по выходному полю имеет два скачка. Р. Миллер, Пунен, Схоутенс, Шлапентох [13] нашли другое вложение, обладающее таким свойством: входной граф можно эффективно восстановить по выходному полю. Для 2-ступенчатых нильпотентных групп Меклер [9] определил вложение графов в 2-ступенчатые нильпотентные группы. Ранее Мальцев [14] определил вложение полей в 2-ступенчатые нильпотентные группы, которое в композиции с вложением графов в поля дает вложение графов в 2-ступенчатые нильпотентные группы.

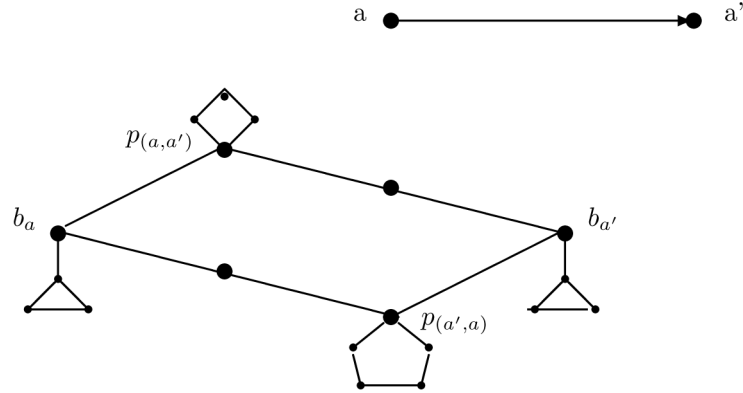
Фридман и Стенли [7] определили вложение графов в класс линейных порядков. Для булевых алгебр Камерло и Гао [12] показали, что для любого пополнения T теории булевых алгебр с не менее, чем двумя неизоморфными моделями, $\text{Mod}(T)$ находится на вершине цепи борелевских вложений.

Маркер описал вложение линейных порядков в вещественные замкнутые упорядоченные поля. По аналогии автор описала вложение линейных порядков в модели произвольного пополнения PA . Оба результата пока не опубликованы.

Фридман и Стенли показали, что класс абелевых p -групп лежит строго ниже вершины цепи вложений при отношении $\leq_B$ и поставили вопрос о положении в цепи класса абелевых групп без кручения.

Паолини и Шелах (arXiv:2102.12371) и Лаковски и Ульрих (arXiv:2102.07452) показали, что этот класс лежит на вершине цепи вложений.¹⁾

Ниже мы опишем некоторые вложения.



7.3. Вложение $\text{Mod}(L)$ в графы. Вложение

$\text{Mod}(L) \leq_B$ неориентированные графы

установлено Лавровым [8]. Здесь мы опишем вложение, полученное Маркером в контексте основной теории моделей [10]. Сначала предположим, что L — язык с одним символом бинарного отношения. Если $\mathcal{A} = (A, R)$, то $\Phi(\mathcal{A})$ состоит из

- (а) специальной точки b_a для каждого $a \in A$,
- (б) других точек, связывающих b_a с треугольником,
- (с) специальной точки $p_{(a, a')}$ для каждой упорядоченной пары (a, a') в A , где $p_{(a, a')}$ связана непосредственно с b_a и с одной остановкой на $b_{a'}$,
- (д) других точек таких, что, если $(a, a') \in R$, то $p_{(a, a')}$ — одна вершина квадрата; в ином случае это одна вершина пентагона.

Чтобы убедиться в том, что Φ взаимно однозначно на типах изоморфизма, заметим, что существует копия $\mathcal{A}$, определенная в $\Phi(\mathcal{A})$ через конечные экзистенциальные формулы. Для более общих L надо использовать больше специальных точек, остановов и n -угольников.

7.4. Вложение полей в 2-ступенчатые нильпотентные группы. Мальцев [14] определил вложение, которое вкладывает каждое поле F в ее группу Гейзенберга. Напомним, что группа Гейзенберга $H(F)$ — это группа матриц вида

$$\begin{bmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $a, b, c \in F$. Чтобы доказать, что вложение взаимно однозначно, Мальцев вывел конечные экзистенциальные формулы, определяющие копию F в $H(F)$. В этих формулах роль параметров играла некоммутирующая пара. Заметим, что в [15] параметры не фигурировали.

Теорема 7.1 (Алвир — Калверт — Гудман — Харизанов — Найт — Р. Миллер — Морозов — Соскова — Вейшар). *Имеются бесконечные экзистенциальные формулы без параметров, которые интерпретируют любое поле F в $H(F)$.*

Напомним, что когда $\mathcal{A}$ определена в $\mathcal{B}$, каждый элемент $\mathcal{A}$ представим единственным элементом или кортежем в $\mathcal{B}$. Когда $\mathcal{A}$ интерпретируется в $\mathcal{B}$, каждый элемент $\mathcal{A}$ представим классом эквивалентности элементов или кортежей.

¹⁾ Доказательство, которое предложили Паолини и Шелах, оказалось ошибочным. Лаковски и Ульрих обнаружили ошибку и дали другое доказательство, которое впоследствии Паолини и Шелах привели в своем доказательстве.

7.5. Вложение графов в класс линейных порядков. Для рассмотренных выше вложений имеются формулы, определяющие или интерпретирующие входную структуру в выходной структуре. При этом вложение взаимно однозначно на типах изоморфизма. Для вложения графов в линейные порядки, предложенного Фридманом и Стенли, в доказательстве взаимно однозначности вложения на типах изоморфизма понятие интерпретации не используется. Соскова, Ватев и автор [16], а также независимо Харрисон, Трейнор и Монтальбан [17] показали, что таких интерпретаций не существует.

Теорема 7.2 (Найт — Соскова — Ватев; Харрисон — Трейнор — Монтальбан). *Для вложения Фридмана — Стенли Φ графов в класс линейных порядков не существует $L_{\omega_1\omega}$ -формулы, определяющих интерпретацию любого графа G в $\Phi(G)$.*

7.6. Ниже вершины цепи вложений. Следующие классы находятся строго ниже вершины в цепи вложений относительно порядка $\leq_B$ по разным причинам:

- 1) $\mathbb{Q}$ -векторные пространства,
- 2) подполя алгебраических чисел,
- 3) абелевы p -группы.

Можно воспользоваться понятием мощности, чтобы отличать графы от $\mathbb{Q}$ -векторных пространств. Существует несчетное число типов изоморфизма для графов, но лишь счетное число типов изоморфизма для векторных пространств. Для подполей алгебраических чисел отношение изоморфизма является эффективной Π_2 -формулой для некоторых классов; отношение изоморфизма не будет борелевским. Для абелевых p -групп причина этого факта довольно тонкая и затрагивает природу инвариантов.

8. Вычислимые по Тьюрингу вложения

Кечрис предложил автору и ее студентам исследовать эффективные вложения. В [18] приведены два разных определения, одно из которых основано на сводимости вычислимости, а другое — сводимости по Тьюрингу. Как было отмечено С. Миллер, последнее понятие оказалось более полезным.

Определение 8.1 (Клаверт — Камминс — Найт — С. Миллер). Для классов K и K' *вычислимым по Тьюрингу вложением K в K' называется оператор Тьюринга $\Phi : K \rightarrow K'$ такой, что для $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in K$ имеем $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}'$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\mathcal{A}) \cong \Phi(\mathcal{A}')$. Этот факт обозначаем $K \leq_{tc} K'$.*

Замечание 8.1. В большинстве случаев борелевские вложения, которые мы рассматриваем, являются на самом деле вычислимыми по Тьюрингу. Исключение составляет вложение класса линейных порядков в модели заданного пополнения T для PA . Здесь естественное вложение вычислимо относительно T .

Борелевское вложение сводит задачу описания элементов класса K к аналогичной задаче для класса K' . Можно описать элемент $\mathcal{A} \in K$ через его Φ -образ. Если мы имеем вычислимое по Тьюрингу вложение, то можем описать $\mathcal{A}$ в его собственном языке (см. [19]).

Теорема 8.1 (Найт — С. Миллер (Квинн) — Ванден Бум). *Предположим, что Φ — вычислимое по Тьюрингу вложение K в K' . Для любого высказывания φ языка в K' имеется высказывание φ^* языка в K такое, что для $\mathcal{A} \in K$ имеем $\mathcal{A} \models \varphi^*$ тогда и только тогда, когда $\Phi(\mathcal{A}) \models \varphi$. Более того, для вычислимого ординала $\alpha \geq 1$, если высказывание φ Σ_α -вычислимо, то в качестве φ^* можно взять Σ_α .*

9. Инварианты

Предположим, что $K \leq_B K'$ через вложение Φ . Тогда Φ сводит задачу классификации для K к аналогичной задаче для K' — инварианты для K' определяют инварианты для K . Тот факт, что они имеют одинаковую борелевскую мощность означает по сути, что они имеют одинаковые

инварианты. Довольно затруднительно определить, какие инварианты можно считать “хорошими”. Инварианты структуры (разумеется, счетной) должны определять структуру с точностью до изоморфизма. Хорошие инварианты должны быть достаточно простыми.

1. Для $\mathbb{Q}$ -векторных пространств *размерность* является инвариантом. Этот факт общеизвестен.
2. Для абелевых p -групп *последовательность Ульма* и *размерность делимой части* являются инвариантами. Это утверждение не столь очевидно, но его можно доказать.
3. Для булевых алгебр *инварианты Кетонена* довольно сложны. Согласно результату Камерло и Гао [12] булевы алгебры находятся на вершине цепи борелевских вложений.

10. Классы TFAb_n и F_n

Пусть TFAb_n — класс абелевых групп без кручения ранга n . Эти группы изоморфны подгруппам группы $\mathbb{Q}^n$ с n $\mathbb{Z}$ -линейно независимыми элементами. Можно описать элемент класса TFAb_1 , рассмотрев ненулевой элемент a и определив, какие натуральные числа делят a . Для другого ненулевого элемента a' мы получаем множества лишь с конечными различиями. На основе этого факта Баэр [20] нашел инварианты.

Хьорт [21] и Томас [22] указали, что инварианты Баэра класса TFAb_1 считаются, в общем, полезными. Для $n \geq 2$ Мальцев [14] и Курош [23] нашли инварианты для элементов класса TFAb_n . Однако, согласно Хьорту и Томасу, Фукс [24] раскритиковал эти инварианты, поскольку они не лучше самой группы. Следующие два результата неформально утверждают, что инварианты становятся намного сложнее с возрастанием n .

Теорема 10.1 (Хьорт). $\text{TFAb}_1 <_B \text{TFAb}_2$.

Теорема 10.2 (Томас). $\text{TFAb}_n <_B \text{TFAb}_{n+1}$ при $n \geq 2$.

В доказательствах обеих теорем используются нетривиальные результаты дескриптивной теории множеств.

Пусть F_n — класс полей характеристики 0 и степени трансцендентности n . Эти поля изоморфны подполям $\text{acl}(\mathbb{Q}(t_1, \dots, t_n))$ с независимым множеством размера n . Однако Р. Миллер и автор заметили, что некоторые свойства классов TFAb_n и F_n одинаковы. В каждом случае тип изоморфизма заданной структуры определяется экзистенциальным типом базиса. Отсюда следует, что всегда существует предложение Скотта Σ_3 . В некоторых случаях можно получить более сильное утверждение. В работе, которая пока еще в процессе подготовки, мы показываем, что $\text{TFAb}_n \leq_{tc} F_n$. Кроме того, для всех n имеем $F_n \leq_{tc} F_{n+1}$. Однако имеются различия между полями и группами. Хьорт и Томас доказали, что борелевская мощность класса групп TFAb_n строго возрастает, тогда как борелевская мощность класса полей F_n в итоге становится константой согласно результатам Томаса и Вилисковича [25].

Литература

1. D. Scott, “Logic with denumerably long formulas and finite strings of quantifiers”, In: *The Theory of Models. Proc. 1963 Int. Symp. Berkeley*, pp. 329–341, North-Holland, Amsterdam (1965).
2. C. J. Ash, J. F. Knight, *Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy*, Elsevier, Amsterdam (2000).
3. A. Montalbán, *Computable Structure Theory, Part II: Beyond the Arithmetic* [Submitted for publication in 2022].
4. M. Vanden Boom, “The effective Borel hierarchy”, *Fundam. Math.* **195**, No. 3, 269–289 (2007).
5. E. G. K. Lopez-Escobar, “An interpolation theorem for denumerably long formulas”, *Fundam. Math.* **57**, 253–272 (1965).
6. R. L. Vaught, “Invariant sets in topology and logic”, *Fundam. Math.* **82**, 269–294 (1974).
7. H. Friedman, L. Stanley, “A Borel reducibility theory for classes of countable structures”, *J. Symb. Log.* **54**, No. 3, 894–914 (1989).

8. И. А. Лавров, “Эффективная неотделимость множества тождественно истинных и множества конечно-опровержимых формул для некоторых элементарных теорий”, *Алгебра лог.* **2**, No. 1, 5–18 (1963).
9. A. Mekler, “Stability of nilpotent groups of class 2 and prime exponent”, *J. Symb. Log.* **46**, 781–788 (1981).
10. D. Marker, *Model Theory: An Introduction*, Springer, New York, NY (2002).
11. A. Nies, “Undecidable fragments of elementary theories”, *Algebra Univers.* **35**, No. 1, 8–33 (1996).
12. R. Camerlo, S. Gao, “The completeness of the isomorphism relation for countable Boolean algebras”, *Trans. Am. Math. Soc.* **353**, No. 2, 491–518 (2001).
13. R. Miller, B. Poonen, H. Schoutens, A. Shlapentokh, “A computable functor from graphs to fields”, *J. Symb. Log.* **83**, No. 1, 326–348 (2018).
14. А. И. Мальцев, “Об одном соответствии между кольцами и группами”, *Мат. сб.* **50**, 257–266 (1960).
15. R. Alvir et al., “Interpreting a field in its Heisenberg group”, *J. Symb. Log.* **87**, No. 3, 1215–1230 (2022).
16. J. F. Knight, A. Soskova, S. Vatev, “Coding in graphs and linear orderings”, *J. Symb. Log.* **85**, No. 2, 673–690 (2020).
17. M. Harrison-Trainor, A. Montalbán, “The tree of tuples of a structure,” *J. Symb. Log.* **87**, No. 1, 21–46 (2022).
18. У. Калверт, Д. Камминс, Д. Ф. Найт, С. Миллер, “Сравнение классов конечных структур”, *Алгебра лог.* **43**, No. 6, 666–701 (2004).
19. J. F. Knight, S. Miller (Quinn), M. Vanden Boom, “Turing computable embeddings”, *J. Symb. Log.* **72**, No. 3, 901–918 (2007).
20. R. Baer, “Abelian groups without elements of finite order”, *Duke Math. J.* **3**, 68–122 (1937).
21. G. Hjorth, “Around non-classifiability for countable torsion-free Abelian groups”, In: *Abelian Groups and Modules*, pp. 269–292., Birkhäuser, Basel (1999).
22. S. Thomas, “The classification problem for torsion-free Abelian groups of finite rank”, *J. Am. Math. Soc.* **16**, No. 1, 233–258 (2003).
23. A. G. Kurosh, “Primitive torsionsfreie abelsche Gruppen vom endlichen Range” [in German], *Ann. Math.* **38**, 175–203 (1937).
24. L. Fuchs, *Infinite Abelian Groups. Vol. II*, Academic Press, New York etc. (1973).
25. S. Thomas, B. Velickovic, “On the complexity of the isomorphism relation for fields of finite transcendence degree”, *J. Pure Appl. Algebra* **159**, No. 2-3, 347–363 (2001).

Статья поступила в редакцию 12 апреля 2024 г.

В. Г. Романов

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Для волнового уравнения, содержащего два нелинейных члена, изучается обратная задача, заключающаяся в определении финитных коэффициентов при нелинейностях. Для этого используется информация о решениях уравнения, соответствующих плоским волнам, бегущим из бесконечности и проходящим через неоднородность. Направление распространяющихся плоских волн является параметром задачи, решение измеряется на границе области, внутри которой лежит носитель искомых коэффициентов, для моментов времени, близких к приходу фронта волны. Основной результат заключается в сведении обратной задачи для одного из коэффициентов к хорошо известной задаче томографии, а для другого коэффициента — к новой задаче интегральной геометрии. Для последней задачи найдена оценка устойчивости ее решений.

1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + \sigma(\mathbf{x})(u_t)^m + q(\mathbf{x})u^2 &= 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^4, \\ u|_{t < 0} &= g(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R), \end{aligned} \tag{1.1}$$

в котором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ — гладкие функции, носители которых содержатся в шаре $B(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| < R\}$, число $m > 1$, ν — единичный вектор, $g(t)$ — функция такая, что $g(t) = 0$ для $t < 0$ и $g(0) = 0$, $g'(0) = a > 0$, $g \in C^\infty[0, \infty)$. В однородной среде (когда $\sigma(\mathbf{x}) = 0$ и $q(\mathbf{x}) = 0$) функция $u(\mathbf{x}, t) = g(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)$ представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в направлении ν . Решение задачи (1.1) соответствует падению волны на неоднородность, сосредоточенную в области $B(R)$. При этом фронт волны $t = \mathbf{x} \cdot \nu + R$ в момент времени $t = 0$ касается границы области $B(R)$ в точке $\mathbf{x} = -R\nu$. В этой статье под гладкостью функции понимается ее бесконечная дифференцируемость.

В дальнейшем предполагаем, что $\nu = \nu(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$, $\varphi \in [0, \pi)$, и φ — переменный параметр задачи. В связи с этим решение задачи (1.1) обозначим $u(\mathbf{x}, t, \varphi)$.

1.1. Прямая задача. При заданных функциях $\sigma(\mathbf{x})$, $q(\mathbf{x})$ и $g(t)$ найти функцию $u(\mathbf{x}, t, \varphi)$, являющуюся решением задачи (1.1).

Основной интерес представляет для нас задача, состоящая в определении функций $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$. Для этого мы используем некоторую информацию о решениях прямой задачи. Обозначим через $S(R)$ границу области $B(R)$ и через $S(R, \nu)$ — ее часть $S(R, \nu) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{x}| = R, \mathbf{x} \cdot \nu > 0\}$.

Пусть $g(t)$ — заданная функция.

1.2. Обратная задача. Требуется найти функции $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ для $\mathbf{x} \in B(R)$ по следу решений прямой задачи на $S(R, \nu)$ для различных значений параметра ν и для некоторого интервала

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект FWNF-2022-0009).

В. Г. Романов: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия, romanov@math.nsc.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 140–148 (2025).

времени, более точно, по заданной функции

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}, t, \varphi) &= u(\mathbf{x}, t, \varphi), \quad \forall \varphi \in [0, \pi), \quad \forall x \in S(R, \nu), \\ t &\in [\mathbf{x} \cdot \nu + R - \eta, \mathbf{x} \cdot \nu + R + \eta], \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\eta > 0$ — произвольно малое число.

Обратные задачи для квазилинейных волновых уравнений начали интенсивно изучаться в последнее время. Например, в [1]–[10] изучены задачи, в которых волновой оператор рассматривается на лоренцевом многообразии, а само уравнение является квазилинейным. При этом изучены задачи об определении лоренцевой метрики либо коэффициентов при нелинейностях. В [11, 12] изучены обратные задачи об определении коэффициента при младшем нелинейном члене волнового уравнения. В [13] исследована задача об определении некоторой функции $f(\mathbf{x}, u)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, входящей в волновое уравнение. Основой исследования этих задач являлось разложение решения прямой задачи в окрестности фронта волны. В [14] изучена одномерная обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением об определении коэффициента, стоящего при нелинейности. Найдены условия, при выполнении которых имеет место теорема о локальном существовании и единственности решения обратной задачи. Получена также и глобальная оценка устойчивости решений задачи.

В настоящей работе изучается поставленная выше обратная задача об определении коэффициентов $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$. В данной работе, так же, как и в [11]–[13], выписывается разложение решения прямой задачи в окрестности волнового фронта бегущей волны, и на его основе исследуется обратная задача. Решение задачи об определении функции $\sigma(\mathbf{x})$ сводится к классической задаче рентгеновской томографии, а об определении $q(\mathbf{x})$ — к задаче интегральной геометрии на семействе прямых линий. Суть этой последней задачи состоит в определении функции через интегралы от нее с заданной весовой функцией вдоль всевозможных прямых линий, лежащих в плоскостях, ортогональных оси x_3 . В работе получена оценка устойчивости решений для этой задачи. Все результаты статьи являются новыми и могут быть использованы для диагностики сред с нелинейным поглощением.

2. Исследование прямой задачи

Основой для изучения обратной задачи является следующая теорема о структуре решения прямой задачи в окрестности фронта бегущей волны.

Теорема 2.1. Пусть функции $\sigma(\mathbf{x})$ и $q(\mathbf{x})$ принадлежат пространству $C^\infty[0, \infty)$ и финитны с носителями в $B(R)$, и пусть для $\sigma(\mathbf{x})$ выполнено неравенство

$$\sigma(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \mathbf{x} \in B(R). \quad (2.1)$$

Пусть, кроме того, функция $g(t)$ удовлетворяет условиям

$$g \in C^\infty[0, \infty), \quad g(0) = 0, \quad g'(+0) = a > 0, \quad g''(+0) = b, \quad g'''(+0) = c.$$

Тогда в окрестности волнового фронта $t = \mathbf{x} \cdot \nu + R$ решение задачи (1.1) представимо в виде

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t, \varphi) &= H(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R) \left[\alpha(\mathbf{x}, \varphi)(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R) + \beta(\mathbf{x}, \varphi) \frac{(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)^2}{2!} \right. \\ &\quad \left. + \gamma(\mathbf{x}, \varphi) \frac{(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)^3}{3!} + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда: $H(t) = 0$ для $t < 0$ и $H(t) = 1$ для $t \geq 0$, а точками обозначены члены более высокого порядка, чем $(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)^3$ при $(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R) \rightarrow 0$. Функции $\alpha(\mathbf{x}, \varphi)$, $\beta(\mathbf{x}, \varphi)$ и $\gamma(\mathbf{x}, \varphi)$ являются гладкими и вычисляются по формулам

$$\alpha(\mathbf{x}, \varphi) = 2^{1/(m-1)} a \left(2 + (m-1)a^{m-1} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \sigma(\xi) ds \right)^{-1/(m-1)}, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{x}, \varphi) &= b \exp \left(-\frac{m}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \sigma(\xi) \alpha^{m-1}(\xi, \varphi) ds \right) + \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{m}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \sigma(\xi) \alpha^{m-1}(\xi, \varphi) ds \right) \\ &\times \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} (\Delta \alpha(\xi, \varphi)) \exp \left(\frac{m}{2} \int_{L(\xi, \nu)} \sigma(\xi') \alpha^{m-1}(\xi', \varphi) ds' \right) ds, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \gamma(\mathbf{x}, \varphi) &= c \exp \left(-\frac{m}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \sigma(\xi) \alpha^{m-1}(\xi, \varphi) ds \right) + \frac{1}{2} \exp \left(-\frac{m}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \sigma(\xi) \alpha^{m-1}(\xi, \varphi) ds \right) \\ &\times \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} [\Delta \beta(\xi, \varphi) - m(m-1) \sigma(\xi) \alpha^{m-2}(\xi, \varphi) \beta^2(\xi, \varphi) - q(\xi) \alpha^2(\xi, \varphi)] \\ &\times \exp \left(\frac{m}{2} \int_{L(\xi, \nu)} \sigma(\xi') \alpha^{m-1}(\xi', \varphi) ds' \right) ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В формулах (2.3), (2.4) и (2.5) через $L(\mathbf{x}, \nu)$ обозначен луч, выходящий из точки $\mathbf{x}$ в направлении вектора $-\nu$, $\xi = \mathbf{x} + s\nu$, $s \in [0, -\infty)$, $\xi' = \xi + s'\nu$, $s' \in [0, -\infty)$.

Доказательство. Вычисляя волновой оператор на функции $u(\mathbf{x}, t, \varphi)$, определенной равенством (2.2), находим

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= H(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R) \left[2\nabla \alpha \cdot \nu + (2\nabla \beta \cdot \nu - \Delta \alpha)(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R) \right. \\ &\quad \left. + (2\nabla \gamma \cdot \nu - \Delta \beta) \frac{(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)^2}{2!} + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

где точками обозначены члены более высокого порядка малости по сравнению с величиной $(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)^2$, когда $(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R) \rightarrow 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} (u_t)^m &= H(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R) \left[\alpha^m + m\beta \alpha^{m-1}(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R) \right. \\ &\quad \left. + (m\gamma \alpha^{m-1} + m(m-1)\alpha^{m-2}\beta^2) \frac{(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)^2}{2!} + \dots \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$u^2 = H(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R) \left[2\alpha^2 \frac{(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)^2}{2!} + \dots \right]. \quad (2.8)$$

Учитывая равенства (2.6)–(2.8) и уравнение (1.1), находим соотношения для вычисления коэффициентов α , β и γ разложения (2.2) в виде

$$2\nabla \alpha \cdot \nu + \sigma \alpha^m = 0, \quad (2.9)$$

$$2\nabla \beta \cdot \nu + m\sigma \alpha^{m-1} \beta - \Delta \alpha = 0, \quad (2.10)$$

$$2\nabla \gamma \cdot \nu + m\sigma \alpha^{m-1} \gamma + m(m-1)\sigma \alpha^{m-2} \beta^2 + 2q \alpha^2 - \Delta \beta = 0. \quad (2.11)$$

Из условия (1.1) при $t < 0$ получаем начальные условия

$$\alpha(\mathbf{x}, \varphi) = a, \quad \beta(\mathbf{x}, \varphi) = b, \quad \gamma(\mathbf{x}, \varphi) = c, \quad \mathbf{x} \cdot \nu + R \leq 0. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.9) и условие (2.12) для функции α запишем вдоль луча $L(\mathbf{x}, \nu)$ в виде

$$2 \frac{d}{ds} \alpha(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) + \sigma(\mathbf{x} + s\nu) \alpha^m(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) = 0, \quad s \in (-\infty, 0], \quad (2.13)$$

$$\alpha(\mathbf{x} + s\nu, \varphi)|_{s \rightarrow -\infty} = a. \quad (2.14)$$

Интегрируя уравнение (2.13) с учетом начального условия (2.14), находим соотношение

$$\alpha^{1-m}(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) - a^{1-m} = \frac{m-1}{2} \int_{-\infty}^s \sigma(\mathbf{x} + s\nu) ds,$$

из которого следует формула (2.3). Эта формула корректна, так как $\sigma(\mathbf{x}) \geq 0$ в $B(R)$ в силу условия (2.1) и $\sigma(\mathbf{x})$ финитна.

Уравнение и начальное условие для функции β запишем в виде

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{ds} \beta(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) + m\sigma(\mathbf{x} + s\nu) \alpha^{m-1}(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) \beta(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) \\ = (\Delta\alpha)(\mathbf{x} + s\nu, \varphi), \quad s \in (-\infty, 0], \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\beta(\mathbf{x} + s\nu, \varphi)|_{s \rightarrow -\infty} = b. \quad (2.16)$$

Преобразуем линейное уравнение (2.15) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\beta(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) \exp \left(\frac{m}{2} \int_{-\infty}^s \sigma(\mathbf{x} + s\nu) \alpha^{m-1}(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) ds \right) \right] \\ = \frac{1}{2} (\Delta\alpha)(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) \exp \left(\frac{m}{2} \int_{-\infty}^s \sigma(\mathbf{x} + s\nu) \alpha^{m-1}(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) ds \right), \quad s \in (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия (2.16), получаем формулу (2.4).

Аналогично предыдущему преобразуем уравнение (2.11) к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\gamma(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) \exp \left(\frac{m}{2} \int_{-\infty}^s \sigma(\mathbf{x} + s\nu) \alpha^{m-1}(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) ds \right) \right] \\ = \frac{1}{2} (\Delta\beta - m(m-1)\sigma(\xi) \alpha^{m-2} \beta^2 - 2q(\xi) \alpha^2)(\xi + s\nu, \varphi) \\ \times \exp \left(\frac{m}{2} \int_{-\infty}^s \sigma(\mathbf{x} + s\nu) \alpha^{m-1}(\mathbf{x} + s\nu, \varphi) ds \right), \quad s \in (-\infty, 0]. \end{aligned}$$

Интегрируя это уравнение с учетом условия (2.16), получаем формулу (2.5). □

3. Анализ обратной задачи

3.1. Уравнение для $\sigma(\mathbf{x})$. Из представления (2.2) выводим

$$\alpha(\mathbf{x}, \varphi) = (u_t)_{t \rightarrow (\mathbf{x} \cdot \nu + R) + 0}.$$

Следовательно, функция $\alpha(\mathbf{x}, \varphi)$ может быть вычислена по данным обратной задачи на множестве $S(R, \nu) \times [0, \pi)$ следующим образом:

$$\alpha(\mathbf{x}, \varphi) = p_t(\mathbf{x}, \mathbf{x} \cdot \nu + R + 0, \varphi), \quad \mathbf{x} \in S(R, \nu), \quad \varphi \in [0, \pi). \quad (3.1)$$

Используя формулу (2.3), находим уравнение для $\sigma(\mathbf{x})$

$$\int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \sigma(\xi) ds = r_1(\mathbf{x}, \varphi), \quad \mathbf{x} \in S(R, \nu), \quad \varphi \in [0, \pi), \quad (3.2)$$

в котором $r_1(\mathbf{x}, \varphi)$ — заданная функция, вычисляемая по формуле

$$r_1(\mathbf{x}, \varphi) = \frac{2}{m-1} (\alpha^{1-m}(\mathbf{x}, \varphi) - a^{1-m}).$$

Формула (3.2) сводит обратную задачу об отыскании $\sigma(\mathbf{x})$ к стандартной задаче томографии для каждого сечения области $B(R)$ плоскостями $x_3 = z$, $z \in (-R, R)$. При этом интегралы от функции

$\sigma(\mathbf{x})$ по всевозможным прямым, лежащим в любой плоскости $x_3 = z$, известны. Поэтому в каждом таком сечении функция $\sigma(\mathbf{x})$ может быть однозначно найдена. Отсюда, в частности, следует теорема единственности для рассматриваемой обратной задачи.

Теорема 3.1. *Обратная задача об определении $\sigma(\mathbf{x})$ может иметь не более одного решения.*

Хорошо известны также оценки устойчивости решения задачи томографии. Сведение обратной задачи к решению задачи томографии открывает возможность ее эффективного численного решения.

3.2. Уравнение для $q(\mathbf{x})$. После нахождения функции $\sigma(\mathbf{x})$ коэффициенты $\alpha(\mathbf{x}, \varphi)$ и $\beta(\mathbf{x}, \varphi)$ разложения (2.2) могут быть вычислены по формулам (2.3) и (2.4) для любых $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ и любых значений φ . Из формул (1.2) и (2.2) следует, что коэффициент $\gamma(\mathbf{x}, \varphi)$ можно найти на множестве $S(R, \nu) \times [0, \pi)$

$$\gamma(\mathbf{x}, \varphi) = \frac{\partial^3 p(\mathbf{x}, t, \varphi)}{\partial t^3} \Big|_{t=(\mathbf{x} \cdot \nu + R) + 0}, \quad \mathbf{x} \in S(R, \nu), \quad \varphi \in [0, \pi). \quad (3.3)$$

Используя формулу (2.5), получаем уравнение для функции $q(\mathbf{x})$

$$\int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \rho(\xi, \varphi) q(\xi) ds = r_2(\mathbf{x}, \varphi), \quad \mathbf{x} \in S(R, \nu), \quad \varphi \in [0, \pi), \quad (3.4)$$

в котором $\rho(\mathbf{x}, \varphi)$ и $r_2(\mathbf{x}, \varphi)$ — заданные функции, вычисляемые по формулам

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, \varphi) &= \alpha^2(\mathbf{x}, \varphi) \exp \left(\frac{m}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \sigma(\xi) \alpha^{m-1}(\xi, \varphi) ds \right), \\ r_2(\mathbf{x}, \varphi) &= 2 \left[c - \gamma(\mathbf{x}, \varphi) \exp \left(\frac{m}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \sigma(\xi) \alpha^{m-1}(\xi, \varphi) ds \right) \right] \\ &+ \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} [m(m-1) \sigma(\xi) \alpha^{m-2}(\xi, \varphi) \beta^2(\xi, \varphi) - \Delta \beta(\xi, \varphi)] \\ &\times \exp \left(\frac{m}{2} \int_{L(\xi, \nu)} \sigma(\xi') \alpha^{m-1}(\xi', \varphi) ds' \right) ds. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Задача об отыскании функции $q(\mathbf{x})$ из уравнения (3.4) носит название задачи интегральной геометрии. Эта задача распадается на серию задач для каждой плоскости $\Sigma(z) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_3 = z\}$, $z \in (-R, R)$. В случае $\rho(\mathbf{x}, \varphi) = 1$ она совпадает с задачей томографии. В более общем случае, когда весовая функция $\rho(\mathbf{x}, \varphi)$ не является постоянной, а интегрирование проводится по семейству кривых, задачи интегральной геометрии с заданной весовой функцией $\rho(\mathbf{x}, \varphi)$ были исследованы Мухометовым [15] для двумерного пространства, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, и Романовым [16] при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Полученные в этих работах оценки устойчивости решений задачи в применении к уравнению (3.4) требуют, чтобы весовая функция $\rho(\mathbf{x}, \varphi)$ удовлетворяла условиям

$$\rho(\mathbf{x}, \varphi) \geq \rho_0 > 0, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \rho(\mathbf{x}, \varphi) \right| \leq \rho_1 < 1, \quad (3.6)$$

в которых ρ_0 и ρ_1 — некоторые положительные постоянные. Наша ближайшая цель заключается в отыскании условий на функцию $\sigma(\mathbf{x})$, которые гарантируют выполнение неравенств (3.6).

3.3. Условия на $\sigma(\mathbf{x})$.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия*

$$0 \leq \sigma(\mathbf{x}) \leq \sigma_0, \quad |\nabla \sigma(\mathbf{x})| \leq \sigma_1, \quad \mathbf{x} \in B(R). \quad (3.7)$$

Тогда справедливы неравенства

$$\alpha_0 \leq \alpha(\mathbf{x}, \varphi) \leq a, \quad |\nabla \alpha(\mathbf{x}, \varphi)| \leq \alpha_1, \quad |\alpha_\varphi(\mathbf{x}, \varphi)| \leq \alpha_2, \quad (3.8)$$

$$\rho(\mathbf{x}, \varphi) \geq \rho_0, \quad |(\ln \rho)_\varphi(\mathbf{x}, \varphi)| \leq \rho_1, \quad \mathbf{x} \in B(R), \quad (3.9)$$

в которых числа α_0 , α_1 , α_2 и ρ_0 , ρ_1 вычисляются по формулам

$$\alpha_0 = a(1 + (m-1)a^{m-1}R\sigma_0)^{-1/(m-1)}, \quad \alpha_1 = a^m R\sigma_1, \quad \alpha_2 = a^m R^2\sigma_1, \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \alpha_0^2 = a^2(1 + (m-1)a^{m-1}R\sigma_0)^{-2/(m-1)}, \\ \rho_1 &= \sigma_1 a^{m-1} R^2 [2(1 + (m-1)a^{m-1}R\sigma_0)^{1/(m-1)} + m + 2m(m-1)a^{m-1}R\sigma_0]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Доказательство. Используя формулу (2.3) и первое из условий (3.7), находим

$$a \geq \alpha(\mathbf{x}, \varphi) \geq a(1 + (m-1)a^{m-1}R\sigma_0)^{-1/(m-1)} =: \alpha_0.$$

Далее, дифференцируя равенство (2.3) по $\mathbf{x}$ и по φ , получаем

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}, \varphi) &= -2^{1/(m-1)} a^m \int_{L(\mathbf{x}, \varphi)} \nabla_{\xi} \sigma(\xi) ds \left(2 + (m-1)a^{m-1} \int_{L(\mathbf{x}, \varphi)} \sigma(\xi) ds \right)^{-m/(m-1)}, \\ \alpha_{\varphi}(\mathbf{x}, \varphi) &= -2^{1/(m-1)} a^m \int_{L(\mathbf{x}, \varphi)} \nabla_{\xi} \sigma(\xi) \cdot \nu_{\varphi} s ds \left(2 + (m-1)a^{m-1} \int_{L(\mathbf{x}, \varphi)} \sigma(\xi) ds \right)^{-m/(m-1)}. \end{aligned}$$

Используя найденные соотношения и условия (3.7), получаем оценки

$$|\nabla_{\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{x}, \varphi)| \leq a^m R\sigma_1 =: \alpha_1,$$

$$|\alpha_{\varphi}(\mathbf{x}, \varphi)| \leq a^m R^2\sigma_1 =: \alpha_2.$$

Таким образом, оценки (3.8), в которых постоянные α_0 , α_1 и α_2 определены равенствами (3.10), установлены.

Перейдем теперь к оценкам (3.9). Из формул (3.5) и (2.3) с учетом условий (3.7) находим

$$\rho(\mathbf{x}, \varphi) \geq \alpha_0^2 =: \rho_0.$$

Логарифмируя равенство (3.5) для функции $\rho(\mathbf{x}, \varphi)$, приходим к соотношению

$$\ln \rho(\mathbf{x}, \varphi) = 2 \ln \alpha(\mathbf{x}, \varphi) + \frac{m}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \sigma(\xi) \alpha^{m-1}(\xi, \varphi) ds.$$

Дифференцируя это соотношение по φ , получаем равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \rho(\mathbf{x}, \varphi) &= \frac{2\alpha_{\varphi}(\mathbf{x}, \varphi)}{\alpha(\mathbf{x}, \varphi)} + \frac{m}{2} \int_{L(\mathbf{x}, \nu)} \{s(\nabla_{\xi} \sigma(\xi) \cdot \nu_{\varphi}) \alpha^{m-1}(\xi, \varphi) \\ &+ (m-1)\sigma(\xi) \alpha^{m-2}(\xi, \varphi) [s(\nabla_{\xi} \alpha(\xi, \varphi) \cdot \nu_{\varphi}) + \alpha_{\varphi}(\xi, \varphi)]\} ds, \end{aligned}$$

из которого следует оценка

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln \rho(\mathbf{x}, \varphi) \right| &\leq \frac{2\alpha_2}{\alpha_0} + m\{\sigma_1 a^{m-1} R^2 + (m-1)\sigma_0 a^{m-2} [\alpha_1 R^2 + \alpha_2 R]\} \\ &= \sigma_1 a^{m-1} R^2 [2(1 + (m-1)a^{m-1}R\sigma_0)^{1/(m-1)} + m + 2m(m-1)a^{m-1}R\sigma_0] =: \rho_1. \end{aligned}$$

Из полученных выше оценок вытекают неравенства (3.9), в которых постоянные ρ_0 и ρ_1 определены равенствами (3.11). $\square$

3.4. Оценка устойчивости решений задачи для $q(\mathbf{x})$. Комбинируя теорему 3 из [15], которая там только сформулирована с неопределенной постоянной, и теорему об оценке решения задачи интегральной геометрии из [16], в которой эта постоянная указана явно, приходим к следующей теореме об устойчивости решений задачи (3.6).

Теорема 3.2. Пусть функция $q(\mathbf{x})$ финитна, ее носитель содержится в $B(R)$ и $q \in C(B(R))$. Пусть, кроме того, выполнены условия леммы 3.1, а числа ρ_0 и ρ_1 определены равенствами (3.11) и выполнено условие

$$\rho_1 < 1. \quad (3.12)$$

Тогда для любого сечения шара $B(R)$ плоскостью $\Sigma(z) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | x_3 = z\}$, $z \in (-R, R)$, имеет место оценка

$$\int_{\Sigma(z)} q^2(x_1, x_2, z) dx_1 dx_2 \leq \frac{1}{2\pi\rho_0^2(1-\rho_1)} \int_{\partial(\Sigma(z) \cap B(R))} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} r_2(x_1, x_2, z, \varphi) \right)^2 d\ell d\varphi, \quad (3.13)$$

в которой $\partial(\Sigma(z) \cap B(R)) = \{x_1^2 + x_2^2 + z^2 = R^2\}$ и $d\ell$ — элемент длины.

Из оценки (3.13) следует также теорема единственности.

Теорема 3.3. Пусть функция $\sigma(\mathbf{x})$ известна и условия теоремы 3.2 выполнены. Тогда обратная задача об отыскании коэффициента $q(\mathbf{x})$ может иметь не более одного решения.

Замечание 3.1. Неравенство (3.12) при фиксированных R , σ_0 и σ_1 можно рассматривать как условие на выбор числа $a = g'(+0)$. Оно не является ограничительным для экспериментатора. Если же число $a > 0$ фиксировано, то (3.12) является условием малости градиента функции $\sigma(\mathbf{x})$ или малости R .

Замечание 3.2. Результаты, полученные выше для трехмерного пространства, легко переносятся на случай пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Замечание 3.3. В уравнении (1.1) вместо u^2 можно взять u^k , где $k \geq 1$ — целое число. В этом случае разложение (2.2) по степеням $(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)$ надо выписать до члена $(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)^{k+1}$ и найти формулы для всех коэффициентов этого разложения. В коэффициент при $(t - \mathbf{x} \cdot \nu - R)^{k+1}$ тогда войдет $q(\mathbf{x})$ линейным образом. С другой стороны, этот коэффициент разложения можно вычислить по данным (1.2) обратной задачи. В результате задача об отыскании $q(\mathbf{x})$ приводится к задаче интегральной геометрии вида (3.4), конечно, с другими весовой функцией и правой частью.

Литература

1. Y. Kurylev, M. Lassas, G. Uhlmann, “Inverse problems for Lorentzian manifolds and non-linear hyperbolic equations”, *Invent. Math.* **212**, No. 3, 781–857 (2018).
2. M. Lassas, G. Uhlmann, Y. Wang, “Inverse problems for semilinear wave equations on Lorentzian manifolds”, *Commun. Math. Phys.* **360**, No. 2, 555–609 (2018).
3. P. Hintz, G. Uhlmann, “Reconstruction of Lorentzian manifolds from boundary light observation sets”, *Int. Math. Res. Not.* **2019**, No. 22, 6949–6987 (2019).
4. P. Hintz, G. Uhlmann, J. Zhai, “An inverse boundary value problem for a semilinear wave equation on Lorentzian manifolds”, *Int. Math. Res. Not.* **2022**, No. 17, 13181–13211 (2022).
5. M. Lassas, T. Liimatainen, L. Potenciano-Machado, T. Tyni, “Uniqueness, reconstruction and stability for an inverse problem of a semi-linear wave equation”, *J. Differ Equations* **337**, 395–435 (2022).
6. X. Chen, M. Lassas, L. Oksanen, G. P. Paternain, “Detection of Hermitian connections in wave equations with cubic non-linearity”, *J. Eur. Math. Soc.* **24**, No. 7, 2191–2232 (2022).
7. Y. Wang, T. Zhou, “Inverse problems for quadratic derivative nonlinear wave equations”, *Commun. Partial Differ. Equations* **44**, No. 11, 1140–1158 (2019).
8. A. S. Barreto, “Interactions of semilinear progressing waves in two or more space dimensions”, *Inverse Probl. Imaging* **14**, No. 6, 1057–1105 (2020).

9. G. Uhlmann, J. Zhai, “On an inverse boundary value problem for a nonlinear elastic wave equation”, *J. Math. Pures Appl. (9)* **153**, 114–136 (2021).
10. A. S. Barreto, P. Stefanov, “Recovery of a cubic non-linearity in the wave equation in the weakly nonlinear regime,” *Commun. Math. Phys.* **392**, No. 1, 25–53 (2022).
11. В. Г. Романов, Т. В. Бугуева, “Задача об определении коэффициента при нелинейном члене квазилинейного волнового уравнения”, *Сиб. журн. инд. мат.* **25**, No. 3, 154–169 (2022).
12. V. G. Romanov, “An inverse problem for a nonlinear wave equation with damping”, *Eurasian J. Math. Comput. Appl.* **11**, No. 2, 99–115 (2023).
13. В. Г. Романов, “Обратная задача для полулинейного волнового уравнения”, *Докл. РАН* **504**, No. 1, 36–41 (2022).
14. В. Г. Романов, “Обратная задача для волнового уравнения с нелинейным поглощением”, *Сиб. мат. журн.* **64**, No. 3, 635–652 (2023).
15. Р. Г. Мухометов, “Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия”, *Докл. АН СССР* **232**, No. 1, 32–35 (1977).
16. В. Г. Романов, “Интегральная геометрия на геодезических изотропной римановой метрики”, *Докл. АН СССР* **241**, No. 2, 290–293 (1978).

Статья поступила в редакцию 25 марта 2024 г.