

Том 1 № 2 (2025)

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

СИРИУС

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТЕРРИТОРИЯ «СИРИУС»
МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР «СИРИУС»



ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

Том 1 № 2 (2025)

СИРИУС

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТЕРРИТОРИЯ «СИРИУС»
МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР «СИРИУС»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Председатель Научного совета Международного
математического центра «Сириус»

академик Шведской королевской академии наук
Европейской академии наук и Academia Europaea

Лаптев Арий Ариевич (ИКЛ & НТУ «Сириус»)

НАУЧНЫЙ СОВЕТ МЕЖДУНАРОДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА «СИРИУС»

д.ф.-м.н. *Ландо Сергей Константинович* (ВШЭ)

чл.-корр. РАН *Миронов Андрей Евгеньевич* (ИМ СО РАН)

академик *Трещев Дмитрий Валерьевич* (МИАН)

д.ф.-м.н. *Цих Август Карлович* (СФУ)

к.ф.-м.н. *Щуплев Алексей Валерьевич* (ММЦ «Сириус»)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

академик *Аптекарев Александр Иванович* (ИПМ РАН)

академик *Безродных Сергей Игоревич* (ФИЦ ИУ РАН)

академик *Беклемишев Лев Дмитриевич* (МИАН)

академик *Гончаров Сергей Савостьянович* (ИМ СО РАН)

академик *Кашин Борис Сергеевич* (МИАН)

академик *Кисляков Сергей Витальевич* (ПОМИ РАН)

академик *Козлов Валерий Васильевич* (МИАН)

академик *Конягин Сергей Владимирович* (МИАН)

академик *Лукоянов Николай Юрьевич* (ИММ УрО РАН)

академик *Матиясевич Юрий Владимирович* (ПОМИ РАН)

академик *Романов Владимир Гаврилович* (ИМ СО РАН)

академик *Семенов Алексей Львович* (МГУ)

академик *Тыртыйшиков Евгений Евгеньевич* (ИВМ РАН)

академик *Черноустько Феликс Леонидович* (ИПМех РАН)

академик *Четверушкин Борис Николаевич* (ИПМ РАН)

академик *Шайдуров Владимир Викторович* (КНЦ СО РАН)

академик *Шананин Александр Алексеевич* (МФТИ)

чл.-корр. РАН *Болотин Сергей Владимирович* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Бухштабер Виктор Матвеевич* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Василевский Юрий Викторович* (ИВМ РАН)

чл.-корр. РАН *Васин Владимир Васильевич* (ИММ УрО РАН)

чл.-корр. РАН *Веснин Андрей Юрьевич* (ИМ СО РАН)

чл.-корр. РАН *Гайфуллин Александр Александрович* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Гасников Александр Владимирович* (ИУ)

чл.-корр. РАН *Гущин Валентин Анатольевич* (ИАП РАН)

чл.-корр. РАН *Давыдов Алексей Александрович* (МГУ)

чл.-корр. РАН *Кабанихин Сергей Игоревич* (ИМ СО РАН)

чл.-корр. РАН *Лазарева Галина Геннадьевна* (РУДН)

чл.-корр. РАН *Петров Игорь Борисович* (МФТИ)

чл.-корр. РАН *Попов Владимир Леонидович* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Протасов Владимир Юрьевич* (МГУ)

чл.-корр. РАН *Прохоров Юрий Геннадьевич* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Разборов Александр Александрович* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Садовский Владимир Михайлович* (ИВМ СО РАН)

чл.-корр. РАН *Тишкин Владимир Федорович* (ИПМ РАН)

чл.-корр. РАН *Шкаликов Андрей Андреевич* (МГУ)

чл.-корр. РАН *Якобовский Михаил Владимирович* (ИПМ РАН)

МЕЖДУНАРОДНЫЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
«СИРИУС»

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

СИРИУС
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 1

2025

№ 2

Под редакцией

А. А. Лантева

Имперский колледж Лондона, Англия

Научно-технологический университет «Сириус», Россия

Федеральная территория «Сириус»
Международный математический центр «Сириус»
2025

Журнал учрежден в 2024 г. Образовательным фондом «Талант и успех»
Издается при финансовой поддержке Федеральной территории «Сириус»

УДК 51
ББК 22.1
С402

С402 Сириус. Математический журнал. Том 1, № 2 — Федеральная территория «Сириус» : Международный математический центр «Сириус», 2025 — 112 с.

Представлены новые результаты по актуальным проблемам теоретической и прикладной математики. В частности, доказано, что 3-многообразия, допускающие надстройки над градиентно-подобными диффеоморфизмами с тремя периодическими орбитами на произвольных ориентируемых поверхностях, являются малыми многообразиями Зейферта, построена асимптотика решения задачи непрямого оптимального управления, выведены новые двусторонние оценки числа ϵ с точными константами, исследованы векторные расслоения над квантовыми классами сопряженности, разработана модель расчета осадконакопления и изменения рельефа поверхности и проведены численные эксперименты для прибрежных зон Цимлянского водохранилища, показано, что каждая собственная 2-вычислимо перечислимая wtt -степень изолирована со стороны некоторой вычислимо перечислимой wtt -степенью, установлены теоремы существования и единственности классического решения задачи о стационарном пограничном слое жидкости с реологическим законом Ладыженской вблизи твердой стенки при условии проскальзывания вблизи стенки, доказана повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы неоднородных p -эллиптических уравнений с линейными членами младшего порядка.

Для специалистов по теоретической и прикладной математике — научных работников, преподавателей вузов, а также аспирантов и студентов.

УДК 51
ББК 22.1

Редколлегия: А. И. Аптекарев, А. Д. Баранов, В. М. Бухштабер, Ю. В. Василевский, А. Ю. Веснин, С. С. Гончаров, С. И. Кабанихин, В. А. Калягин, А. А. Лаптев (гл. ред.), Т. Е. Панов, Ю. Л. Сачков, Т. М. Садыков, А. П. Солодов, В. Н. Темляков, К. Ю. Федоровский, С. Б. Шлосман.

Журнал публикует новые научные результаты по всем направлениям теоретической и прикладной математики. В качестве авторов приглашаются участники всех мероприятий, проводимых Международным математическим центром «Сириус» с 2020 г., а также номинанты и лауреаты Премии молодым математикам России, учрежденной Образовательным фондом «Талант и успех». Рукописи для публикации в «Сириус. Математическом журнале» принимаются через платформу EditFlow <https://ef.msp.org/submit/sirius>

Все статьи, прошедшие рецензирование через EditFlow и одобренные главным редактором, публикуются на английском языке издательством Springer в журнале-источнике «Sirius Mathematical Journal» отдельными выпусками «Journal of Mathematical Sciences. Series B».

Онлайн версия «Сириус. Математического журнала» на сайте
<https://siriusmathcenter.ru/SiriusMathJ>

Подписано в печать 27.08.2025. Формат 220х290 мм. Усл. печ. л. 14. Тираж 500 экз.

Адрес редакции: 354340, Федеральная территория «Сириус», Дельта Сириус, Триумфальный пер., 1, офис 9-047, тел.: +7 (862) 241-98-44, доб. 5824, email: rozhkovskaya.tn@talantiuspeh.ru.

ООО «Типография «Сочи пресс», 354000, Сочи, Виноградный пер., 15, тел.: 7 (862) 296-08-08.

Заказ № от 09.09.2025.

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

© Международный математический центр «Сириус», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Д. А. Баранов, О. В. Починка, Д. Д. Шубин, Е. И. Яковлев

О надстройках над градиентно-подобными диффеоморфизмами поверхностей с тремя

периодическими орбитами	8
1. Введение и формулировка результата	8
2. Вспомогательные сведения	10
2.1. Градиентно-подобные диффеоморфизмы	10
2.2. Многообразия Зейферта	10
2.3. Периодические гомеоморфизмы	11
3. Классификация потоков множества G^t	12
4. Топология многообразия M_f	12
5. Подсчет числа классов эквивалентности потоков на данном многообразии	13
6. Группы гомологий некоторых переклеенных торов	14
6.1. Случай $q = 2p$	14
6.2. Случай $q = 2p + 1$	16
Литература	17

А. Р. Данилин, А. А. Шабуров

Асимптотика решения задачи непрямого оптимального управления с интегральным

выпуклым критерием качества и дешевым управлением	18
1. Введение	18
2. Постановка задачи	18
3. Основные результаты	20
4. Внешнее асимптотическое разложение и точки смены вида оптимального управления	21
5. Внутреннее разложение и полное асимптотическое разложение определяющего вектора	25
Литература	27

М. А. Кисатов, В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин

О существовании и единственности решения системы пограничного слоя нелинейно

вязкой жидкости в условиях проскальзывания на обтекаемой поверхности	29
1. Введение	29
2. Постановка задачи и формулировка основного результата	29
3. Переход к переменным Мизеса	31
4. Существование решения задачи в переменных Мизеса	31
5. Вспомогательные леммы	33
6. Доказательство теорем 4.1 и 4.2	39
7. Единственность решения задачи в переменных Мизеса	40
8. Доказательство основного результата	40
9. Скорость стекания пленки в поле сил тяжести	40
Литература	41

А. Б. Костин, В. Б. ШерстюковДвусторонние оценки аналитической функции, связанной с числом e

1. Постановка задачи и основной результат	43
---	----

Международный математический центр «Сириус»

5

2. Доказательство теоремы 1.1	44
3. Рациональные приближения числа e	46
4. Открытый вопрос	48
Литература	50

А. Мудров

Векторные расслоения над квантовыми классами сопряженности	51
1. Введение	51
2. Предварительные сведения	53
2.1. Основные сведения о квантовых группах	53
2.2. Структура Пуассона — Ли на классах сопряженности	55
2.3. Определение обобщенных параболических модулей Верма	56
2.4. Экстремальный проектор	57
3. Тензорное произведение модулей старшего веса	58
4. Квазиклассический предел элементов Шаповалова	61
4.1. Обратная форма Шаповалова и ее матричные элементы	61
4.2. Регулярность элементов Шаповалова	63
4.3. Все точки максимального тора квантуемы	64
5. Обобщенные параболические категории	66
5.1. Базовый модуль	68
5.2. Обобщенные параболические модули Верма	70
6. Квантование векторных расслоений	72
6.1. Эквивариантное $\star$ -умножение	72
6.2. Квантовые векторные расслоения как проективные $\mathcal{T}^e$ -модули	75
Приложение А. Двойственность для индуцированных модулей	77
Литература	78

Е. А. Проценко, С. В. Проценко, В. В. Сидорякина

Математическое моделирование процессов осадконакопления и изменения рельефа прибрежной зоны абразионного типа	80
1. Введение	80
2. Материалы и методы	81
2.1. Характеристика объекта исследования	81
2.2. Комплексная математическая модель для расчета осадконакопления и изменения рельефа донной поверхности	81
2.2.1. Моделирование транспорта взвешенных частиц	81
2.2.2. Моделирование транспорта наносов	83
2.2.3. Моделирование гидродинамических характеристик	85
3. Результаты исследования	86
Литература	90

А. Г. Чечкина

Неравенство Боярского — Мейерса для уравнения нелинейной диффузии с конвекцией и краевых условий переменного типа	91
1. Постановка задачи	91
2. Основной результат	93
Литература	100

М. М. Ямалеев

Изолированность со стороны и избегание конусов в 2-вычислимо перечислимых wtt -степенях	102
1. Введение	102
2. Обобщенная изолированность	103
2.1. Стратегии и их взаимодействия	104
2.2. Выходы и дерево стратегий	105

Содержание

2.3. Конструкция	106
2.4. Верификация	107
3. Вспомогательная структурная теорема	108
3.1. Стратегии и их взаимодействия	109
3.2. Предварительные сведения	109
3.3. Конструкция	110
3.4. Верификация	110
4. Изолированность со стороны	111
Литература	111

Д. А. Баранов, О. В. Починка, Д. Д. Шубин, Е. И. Яковлев

О НАДСТРОЙКАХ НАД ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫМИ ДИФФЕОМОРФИЗМАМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ТРЕМЯ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ОРБИТАМИ

Смейл показал, что надстройки над сопряженными диффеоморфизмами топологически эквивалентны. При определенных предположениях сопряженность диффеоморфизмов эквивалентна эквивалентности надстроек. Мы показываем, что этот критерий выполняется для градиентно-подобных диффеоморфизмов с тремя периодическими орбитами на произвольных ориентируемых поверхностях, доказываем, что 3-многообразия, допускающие надстройки над такими диффеоморфизмами, являются малыми многообразиями Зейферта и вычисляем группы гомологий этих многообразий и количество классов эквивалентности потоков на каждом допустимом многообразии Зейферта.

1. Введение и формулировка результата

В теории динамических систем весьма полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток, называемый надстройкой над f . Смейл [1] показал, что надстройки над сопряженными диффеоморфизмами топологически эквивалентны. Обратное утверждение в общем случае неверно, но критерий выполняется, если диффеоморфизм задан на многообразии, фундаментальная группа которого не допускает эпиморфизм в группу $\mathbb{Z}$ [2]. Таким образом, для ориентируемых поверхностей критерий гарантированно выполняется лишь на двумерной сфере. В настоящей статье критерий обобщается на класс градиентно-подобных диффеоморфизмов с тремя периодическими орбитами на произвольных ориентируемых поверхностях.

Пусть S_p — замкнутая ориентируемая поверхность рода $p > 0$ и G — класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса — Смейла $f : S_p \rightarrow S_p$, неблуждающее множество которых состоит в точности из трех периодических орбит. Полная топологическая классификация диффеоморфизмов класса G получена в [3] (см. также [4], где предложены эффективные алгоритмы распознавания инвариантов таких систем). В [3] также установлено, что число классов топологической сопряженности диффеоморфизмов множества G на поверхности рода p вычисляется по формуле $N_p = \varphi(4p) + \varphi(4p + 2)$, где $\varphi(n)$ — функция Эйлера, т.е. количество взаимно простых с n чисел, не превышающих n .

Напомним определение надстройки над диффеоморфизмом $f : S_p \rightarrow S_p$. Определим поток ξ^t на многообразии $S_p \times \mathbb{R}$ формулой $\xi^t(s, r) = (s, r + t)$ и диффеоморфизм $g : S_p \times \mathbb{R} \rightarrow S_p \times \mathbb{R}$ формулой $g(s, r) = (f(s), r - 1)$. Положим $G = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$ и $M_f = (S_p \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $\nu_f : S_p \times \mathbb{R} \rightarrow M_f$ естественную проекцию, а через f^t — поток на многообразии M_f , заданный формулой $f^t(x) = \nu_f(\xi^t(\nu_f^{-1}(x)))$. Поток f^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом f* .

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ. Третий автор поддержан фондом «БАЗИС».

Д. А. Баранов: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, denbaranov0066@gmail.com.

О. В. Починка: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, olga-pochinka@yandex.ru.

Д. Д. Шубин: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, schub.danil@yandex.ru.

Е. И. Яковлев: НИУ «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия, elptv@yandex.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 4–16 (2024).

Обозначим через G^t класс надстроек над диффеоморфизмами $f \in G$. Неблуждающее множество потока f^t состоит из притягивающей A , отталкивающей R и седловой S периодических орбит [5, теоремы 2.1, 2.2]. Выберем трубчатую окрестность V орбиты A и образующие на $T = \partial V$: параллель $L \subset T$ (кривую, гомологичную в V орбите A) и меридиан $M \subset T$ (кривую, гомотопную нулю на V и существенную на торе $T = \partial V$). Кривые L и M можно рассматривать как петли в точке $L \cap M$, а потому их классы гомотопии являются генераторами группы $\pi_1(T)$. Чтобы не было путаницы, мы используем те же обозначения L и M для этих петель.

Пусть ρ — метрика на многообразии M^n . Любая гиперболическая орбита $\mathcal{O}$ потока $f^t: M^n \rightarrow M^n$ имеет устойчивое и неустойчивое многообразие

$$W_{\mathcal{O}}^s = \{y \in X: \lim_{k \rightarrow +\infty} d(\mathcal{O}, f^k(y)) \rightarrow 0\},$$

$$W_{\mathcal{O}}^u = \{y \in X: \lim_{k \rightarrow -\infty} d(\mathcal{O}, f^k(y)) \rightarrow 0\}.$$

Множество $\gamma = W_{\mathcal{O}}^u \cap T$ является узлом на торе T . Запишем его гомотопический тип относительно образующих L, M : $\langle \gamma \rangle = \langle l, m \rangle$. Число l не зависит от выбора образующих, тогда как m зависит от выбора параллели. Согласно [3, теорема 2] $l \geq 3$, а m может быть любым целым числом, взаимно простым с l . Тогда пара чисел (l, m) однозначно определяет не зависящее от выбора образующих число $d \in \{1, \dots, [\frac{l-1}{2}]\}$ соотношением $d \cdot m \equiv \pm 1 \pmod{l}$. Заметим, что l и d взаимно просты.

В настоящей работе установлен следующий классификационный результат.

Теорема 1.1. *Потоки $f^t, f'^t \in G^t$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда $(l, d) = (l', d')$.*

Таким образом, пара чисел (l, d) является полным топологическим инвариантом потока $f^t \in G^t$. В силу [3, теорема 1] пара чисел (l, d) является также полным топологическим инвариантом соответствующего диффеоморфизма $f \in G$, откуда вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Потоки $f^t, f'^t \in G^t$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены соответствующие диффеоморфизмы $f, f' \in G$.*

Связь градиентно-подобных диффеоморфизмов $f \in G$ с периодическими гомеоморфизмами, установленная в [3], позволяет описать топологию многообразий M_f , допускающих потоки $f^t \in G^t$ (в [6] рассмотрен более широкий класс потоков).

Теорема 1.2. *Пусть поток $f^t \in G^t$ имеет параметры (l, d) . Тогда многообразие M_f является малым многообразием Зейферта одного из следующих видов:*

- (1) $M_f \cong M\left(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), \left(l, \frac{l}{2} - d\right)\right)$, если l четное и $l/2$ четное,
- (2) $M_f \cong M\left(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), \left(\frac{l}{2}, \frac{l-d}{2}\right)\right)$, если l четное, $l/2$ нечетное,
- (3) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), (2l, l - 2d))$, если l нечетное.

В данной статье мы также вычисляем число классов эквивалентности рассматриваемых потоков на всех допустимых многообразиях.

Теорема 1.3. *Несущее многообразие любого потока f^t из класса G^t , являющегося надстройкой над диффеоморфизмом $f: S_p \rightarrow S_p \in G$, гомеоморфно в точности одному из следующих многообразий:*

- (1) $A_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 2p - d))$, $p \in \mathbb{N}$, $d \in \{1, \dots, p-1\}$, $(d, 4p) = 1$,
- (2) $B_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p+2, d), (2p+1, p - (d-1)/2))$, $p \in \mathbb{N}$, $d \in \{1, \dots, 2p-1\}$, $(d, 4p+2) = 1$.

При этом

- (1) *каждое многообразие $A_{p,d}$ допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества G^t , которые представимы потоками с параметрами $(4p, d)$ и $(4p, 2p - d)$,*

- (2) каждое многообразие $B_{p,d}$ допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества G^t , которые представимы потоками с параметрами $(4p+2, d)$ и $(2p+1, p-(d-1)/2)$.

Мы вычисляем все группы гомологий с целыми коэффициентами многообразий $A_{p,d}$, $B_{p,d}$.

Теорема 1.4. Группы гомологий с целыми коэффициентами многообразий $A_{p,d}$, $B_{p,d}$ изоморфны следующим группам:

- (1) $H_3(A_{p,d}) \cong H_2(A_{p,d}) \cong \mathbb{Z}$ и $H_1(A_{p,d}) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$,
 (2) $H_3(B_{p,d}) \cong H_2(B_{p,d}) \cong H_1(B_{p,d}) \cong \mathbb{Z}$.

2. Вспомогательные сведения

2.1. Градиентно-подобные диффеоморфизмы. Пусть S_p — замкнутая ориентируемая поверхность рода $p \geq 0$ с метрикой ρ . Гомеоморфизмы $f, f': S_p \rightarrow S_p$ называются *топологически сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h: S_p \rightarrow S_p$ такой, что $f'h = hf$. Точка $x \in S_p$ называется *блуждающей* для гомеоморфизма f , если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^n(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $n \in \mathbb{N}$. В противном случае точка называется *неблуждающей*. Множество неблуждающих точек f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f . Если множество Ω_f конечно, то каждая точка $r \in \Omega_f$ периодическая с некоторым периодом $m_r \in \mathbb{N}$.

Пусть f — диффеоморфизм. Точка $r \in \Omega_f$ называется *гиперболической*, если абсолютные значения всех собственных значений матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_r}}{\partial x}\right)\Big|_r$ не равны 1. Если абсолютные значения всех собственных значений меньше (больше) 1, то точка r называется *стоком* (*источником*). Стоки и источники называются *узлами*. Если гиперболическая периодическая точка не является узлом, то это *седловая точка*.

Для гиперболической периодической точки r диффеоморфизма f через q_r обозначим число собственных значений матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{m_r}}{\partial x}\right)\Big|_r$, по модулю больших 1. Гиперболическая структура периодической точки r влечет существование *устойчивого*

$$W_r^s = \{x \in S_p : \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(f^{k \cdot m_r}(x), r) = 0\}$$

и *неустойчивого*

$$W_r^u = \{x \in S_p : \lim_{k \rightarrow +\infty} \rho(f^{-k \cdot m_r}(x), r) = 0\}$$

многообразий, являющихся гладкими вложениями $\mathbb{R}^{2-q_r}$ и $\mathbb{R}^{q_r}$ в несущее многообразие соответственно.

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Компонента связности множества $W_r^u \setminus r$ ($W_r^s \setminus r$) называется *неустойчивой* (*устойчивой*) *сепаратрисой*. Диффеоморфизм $f: S_p \rightarrow S_p$ называется *диффеоморфизмом Морса — Смейла*, если Ω_f конечно и гиперболично, а инвариантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально.

Периодические данные периодической орбиты $\mathcal{O}_r$ периодической точки r — это набор чисел (m_r, q_r, ν_r) , где m_r — период r , $q_r = \dim W_r^u$ и ν_r — тип ориентации r : $\nu_r = +1$ ($\nu_r = -1$), если $f^{m_r}|_{W_r^u}$ сохраняет (меняет) ориентацию. Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов тип ориентации всех узлов равен $+1$, а тип ориентации седловых точек может быть равен $+1$ или -1 .

2.2. Многообразие Зейферта. Приведем необходимые сведения из теории многообразий Зейферта (см., например, [7]).

Полноторий $\mathbb{V} = \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$, разбитый на слои вида $\{x\} \times \mathbb{S}^1$, называется *тривиально расслоенным полноторием*. Рассмотрим полноторий $\mathbb{V}$ как цилиндр $\mathbb{D}^2 \times [0, 1]$ с основаниями, склеенными в силу поворота на угол $2\pi m/l$ для целых взаимно простых m, l , $l > 1$. Разбиение цилиндра на отрезки вида $\{x\} \times [0, 1]$ определяет разбиение этого полнотория на окружности, называемые *слоями*. Отрезок $\{0\} \times [0, 1]$ порождает слой, который называется *особым*, все остальные (*неособые*) слои

полнотория оборачиваются l раз вокруг особого слоя и m раз вокруг меридиана полнотория. Число l называется *кратностью* особого слоя. Полноторий с таким разбиением на слои называется *нетривиально расслоенным полноторием с орбитальными инвариантами* (l, m) .

Многообразие Зейферта — это компактное ориентируемое 3-многообразие M , разбитое на непересекающиеся простые замкнутые кривые (слои) так, что каждый слой имеет целиком состоящую из слоев окрестность, послойно гомеоморфную расслоенному полноторию. Такое разбиение называется *расслоением Зейферта*. Слои, которые переходят в центр нетривиально расслоенного полнотория, называются *особыми*.

Базой многообразия Зейферта M называется компактная поверхность $\Sigma = M/\sim$, где $\sim$ — отношение эквивалентности такое, что $x \sim y$ тогда и только тогда, когда x и y принадлежат одному слою. База любого многообразия Зейферта — компактная поверхность, которая замкнута тогда и только тогда, когда замкнуто многообразие M . Многообразие, допускающее расслоение Зейферта с базой сфера и не более, чем тремя особыми слоями, называется *малым*.

Расслоение Зейферта M с базой Σ и орбитальными инвариантами $(l_1, m_1), \dots, (l_s, m_s)$, $s \in \mathbb{N}$ обычно записывают в виде $M(\Sigma, (l_1, d_1), \dots, (l_s, d_s))$, где $m_i d_i \equiv 1 \pmod{l_i}$, $i \in \{1, \dots, s\}$. Ориентация на слоях расслоения Зейферта однозначно определяется ориентацией одного из слоев.

Два расслоения Зейферта M , M' называются *изоморфными*, если существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M'$, переводящий слои одного расслоения в слои другого с сохранением ориентации слоев. Гомеоморфизм h в этом случае называется *изоморфизмом расслоений Зейферта*.

Предложение 2.1 ([7, теорема 10.2]). *Расслоения Зейферта*

$$M(\Sigma, (l_1, d_1), \dots, (l_s, d_s)) \text{ и } M'(\Sigma', (l'_1, d'_1), \dots, (l'_s, d'_s))$$

изоморфны тогда и только тогда, когда выполнены условия

- Σ гомеоморфно Σ' ,
- $s = s'$, $l_i = l'_i$, $d_i \equiv \pm d'_i \pmod{l_i}$ для $i \in \{1, \dots, s\}$,
- если поверхность Σ замкнута, то $\sum_{i=1}^s \frac{d_i}{l_i} = \pm \sum_{i=1}^s \frac{d'_i}{l'_i}$.

Предложение 2.2 ([7, теорема 10.12]). *Если два малых расслоения Зейферта M и M' с тремя особыми слоями и базой сфера не изоморфны, то многообразия M и M' не гомеоморфны.*

2.3. Периодические гомеоморфизмы. Гомеоморфизм $\varphi: S_p \rightarrow S_p$ называется *периодическим*, если существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\varphi^n = id$. Наименьшее из таких n называется *периодом* φ . Точка x_0 называется *точкой меньшего периода* $n_0 < n$ гомеоморфизма φ , если $\varphi^{n_0}(x_0) = x_0$.

Согласно результатам Нильсена [8] (см. также [9]) для любого сохраняющего ориентацию периодического гомеоморфизма $\varphi: S_p \rightarrow S_p$ множество B_φ точек меньшего периода конечно, а пространство действий гомеоморфизма φ на S_p является сферой с g ручками (модульной поверхностью). В окрестности точки x_0 меньшего периода n_0 отображение f^{n_0} сопряжено повороту на некоторый рациональный угол $2\pi \frac{m_0}{l_0}$, где $l_0 = n/n_0$, $0 < m_0 < l_0$, $(m_0, l_0) = 1$. Обозначим через X_i , $i = 1, \dots, s$, орбиты точек меньшего периода, их периоды — через n_i и положим $l_i = n/n_i$. Обозначим через m_i/l_i соответствующее число вращения и определим число $d_i \in \{1, \dots, n_i - 1\}$ из условия $d_i \cdot m_i \equiv 1 \pmod{l_i}$. Набор параметров $(n, p, g, n_1, \dots, n_s, d_1, \dots, d_s)$ периодического гомеоморфизма φ называется его *полной характеристикой*.

Предложение 2.3 ([8]). *Два периодических гомеоморфизма топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые с точностью до перенумерации полные характеристики.*

Предложение 2.4 ([3, лемма 1]). *Любой диффеоморфизм $f: S_p \rightarrow S_p \in G$ имеет вид $f = \zeta \varphi$, где ζ — сдвиг на единицу времени градиентно-подобного потока и $\varphi: S_p \rightarrow S_p$ — периодический гомеоморфизм периода n со свойствами*

- $B_\varphi = \Omega_f$ и $\varphi|_{B_\varphi} = f|_{\Omega_f}$;
- гомеоморфизм φ имеет полную характеристику одного из следующих видов:

- (1) $(4p, 0, p, 2p, 1, 1, 1, q, 2p - q)$ при $0 < q < 2p$,
- (2) $(4p, g = 0, p, 2p, 1, 1, 1, q, 6p - d_2)$ при $2p < q < 4p$,
- (3) $(4p + 2, 0, p, 2p + 1, 2, 1, 1, q, 2p + 1 - 2d_2)$ при $0 < q \leq p$,
- (4) $(4p + 2, 0, p, 2p + 1, 2, 1, 1, q, 6p + 3 - 2d_2)$ при $p < q \leq 2p$;
- седловая орбита диффеоморфизма f имеет период $n/2$.

Обозначим через m/l число вращения, соответствующее стоковой орбите диффеоморфизма $f \in G$. Определим $d \in \{1, \dots, [\frac{l-1}{2}]\}$ из соотношения $d \cdot m \equiv \pm 1 \pmod{l}$.

Предложение 2.5 ([3, теорема 1]). Диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $(l, d) = (l', d')$.

Таким образом, пара чисел (l, d) является полным топологическим инвариантом диффеоморфизма $f \in G$.

3. Классификация потоков множества G^t

Доказательство теоремы 1.1. Необходимость. Пусть потоки $f^t, f'^t \in G^t$ с параметрами $(l, d), (l', d')$ топологически эквивалентны посредством некоторого гомеоморфизма $h: M_f \rightarrow M_{f'}$. Тогда гомеоморфизм h переводит периодические орбиты потока f^t в аналогичные периодические орбиты потока f'^t с сохранением типа и направления движения, т.е. $A' = h(A)$, $S' = h(S)$, $R' = h(R)$. Не уменьшая общности можно считать, что $V' = h(V)$, и $\gamma' = h(\gamma)$, поскольку $\gamma = \partial V \cap W_S^u$ и $\gamma = \partial V' \cap W_{S'}^u$. Тогда $h|_V: V \rightarrow V'$ — гомеоморфизм заполненных торов, сохраняющий направление образующих A, A' . Отсюда следует (см., например, [10]), что в образующих $L, M; L', M'$ торов $T = \partial V, T' = \partial V'$ гомеоморфизм $h|_T$ индуцирует изоморфизм $h_*: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$, где $k \in \mathbb{Z}$, и

$$(l', m') = (l, m) \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

$\langle l, m \rangle$ и $\langle l', m' \rangle$ — гомотопические типы узлов γ и γ' соответственно. Из (3.1) следует

$$l' = l, \quad m' \equiv \pm m \pmod{l}. \quad (3.2)$$

По определению число $d' \in \{1, \dots, [(l-1)/2]\}$ определяется соотношением $d' \cdot m' \equiv \pm 1 \pmod{l}$. В силу (3.2) число d' совпадает с числом $d \in \{1, \dots, [(l-1)/2]\}$, которое определяется соотношением $d \cdot m \equiv \pm 1 \pmod{l}$.

Достаточность. Пусть $f^t, f'^t \in G^t$ — потоки с параметрами $(l, d), (l', d')$ соответственно и $(l, d) = (l', d')$. В силу предложения 2.5 соответствующие диффеоморфизмы $f, f' \in G$ заданы на одной и той же поверхности S_p и существует гомеоморфизм $h_0: S_p \rightarrow S_p$ такой, что

$$h_0 f = f' h_0. \quad (3.3)$$

Определим гомеоморфизм $H: S_p \times \mathbb{R} \rightarrow S_p \times \mathbb{R}$ формулой $H(s, r) = (h_0(s), r)$. Напомним, что поток ξ^t на многообразии $S_p \times \mathbb{R}$ задан формулой $\xi^t(s, r) = (s, r + t)$, диффеоморфизм $g: S_p \times \mathbb{R} \rightarrow S_p \times \mathbb{R}$ задан формулой $g(s, r) = (f(s), r - 1)$, $G = \{g^k, k \in \mathbb{Z}\}$, $M_f = (S_p \times \mathbb{R})/G$, $\nu_f: S_p \times \mathbb{R} \rightarrow M_f$ — естественная проекция, и поток f^t на многообразии M_f задан формулой $f^t(x) = \nu_f(\xi^t(\nu_f^{-1}(x)))$. Аналогичные обозначения со штрихом имеют место для потока f'^t . Прямая проверка показывает, что $H\xi^t = \xi^t H$ и $Hg = g' H$ в силу (3.3). Тогда гомеоморфизм H проектируется в гомеоморфизм $h: M_f \rightarrow M_{f'}$ по формуле $h(x) = \nu_{f'}(H(\nu_f^{-1}(x)))$, где $hf^t = f'^t h$. $\square$

4. Топология многообразия M_f

Доказательство теоремы 1.2. Пусть диффеоморфизм $f \in G$ имеет вид $f = \xi\varphi$, где ξ — сдвиг на единицу времени градиентно-подобного потока и φ — периодический гомеоморфизм. Тогда f и φ гомотопны. Следовательно, многообразия M_f и M_φ гомеоморфны. В силу предложения 2.4 M_φ — многообразие Зейферта с базой сфера и тремя особыми слоями одного из следующих видов:

- (1) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 2p - d))$ при $0 < d < 2p$, $(d, 2p) = 1$,
- (2) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 6p - d))$ при $2p < d < 4p$, $(d, 2p) = 1$,
- (3) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (2p + 1, d), (4p + 2, 2p + 1 - 2d))$ при $0 < d \leq p$, $(d, 4p + 2) = 1$,
- (4) $M_\varphi \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (2p + 1, d), (4p + 2, 6p + 3 - 2d))$ при $p < d \leq 2p$, $(d, 4p + 2) = 1$.

Покажем, что любое многообразие вида (2) гомеоморфно некоторому многообразию вида (1). Действительно, положим $d = 4p - \tilde{d}$. Тогда многообразие вида (2) примет вид $M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, 4p - \tilde{d}), (4p, 2p + \tilde{d}))$, $0 < \tilde{d} < 2p$, $(\tilde{d}, 2p) = 1$.

Поскольку $1 \equiv -1 \pmod{2}$, $4p - \tilde{d} \equiv -\tilde{d} \pmod{4p}$ и $2p + \tilde{d} \equiv -(2p - \tilde{d}) \pmod{4p}$, в силу предложения 2.1

$$M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 6p - d)) \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, \tilde{d}), (4p, 2p - \tilde{d})).$$

Таким образом, любое многообразие M_f является многообразием Зейферта вида (1) или (3). Выразив параметры многообразия Зейферта через параметры потока (l, d) , мы получим список из трех типов многообразий, анонсированных в теореме. При этом первый тип соответствует надстройке над диффеоморфизмом f с неподвижными стоком и источником, второй тип — с неподвижным стоком и источником периода 2, третий тип — со стоком периода 2 и неподвижным источником. $\square$

5. Подсчет числа классов эквивалентности потоков на данном многообразии

Доказательство теоремы 1.3. В доказательстве теоремы 1.2 мы показали, что несущее многообразие M_f потока f^t с параметрами (l, d) может иметь один из следующих видов:

- (1) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), (l, l/2 - d))$ при $l = 4p$, $p \in \mathbb{N}$,
- (2) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), (l/2, (l/2 - d)/2))$ при $l = 4p + 2$, $p \in \mathbb{N}$,
- (3) $M_f \cong M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (l, d), (2l, l - 2d))$ при $l = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$.

В силу предложения 2.1 множество многообразий вида (2) совпадает с множеством многообразий вида (3) и все такие многообразия имеют вид

$$B_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p + 2, d), (2p + 1, p - (d - 1)/2)),$$

$$p \in \mathbb{N}, \quad d \in \{1, \dots, 2p - 1\}, \quad (d, 4p + 2) = 1.$$

В силу предложений 2.1 и 2.2 $B_{p,d} \cong B_{p',d'}$ тогда и только тогда, когда $p = p'$ и $d = d'$. Все многообразия первого типа имеют вид

$$A_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 2p - d)), \quad p \in \mathbb{N}, \quad d \in \{1, \dots, 2p - 1\}, \quad (d, 4p) = 1.$$

Из предложений 2.1 и 2.2 также следует, что никакое многообразие вида $A_{p,d}$ не гомеоморфно многообразию вида $B_{p,d}$, но $A_{p,d} \cong A_{p',d'}$ тогда и только тогда, когда $p = p'$, $d = 2p - d'$.

Таким образом, попарно различные многообразия первого типа имеют вид

$$A_{p,d} = M(\mathbb{S}^2, (2, 1), (4p, d), (4p, 2p - d)), \quad p \in \mathbb{N}, \quad d \in \{1, \dots, p - 1\}, \quad (d, 4p) = 1.$$

Из приведенных рассуждений и классификации потоков класса G^t (см. теорему 1.1) следует

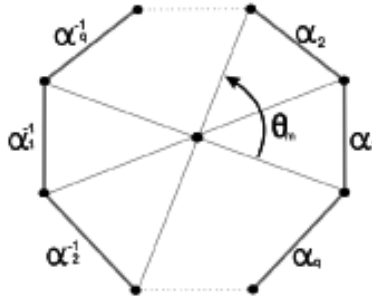
- (1) каждое многообразие $A_{p,d}$ допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества G^t , которые могут быть представлены потоками с параметрами $(4p, d)$ и $(4p, 2p - d)$,
- (2) каждое многообразие $B_{p,d}$ допускает в точности два класса топологической эквивалентности потоков множества G^t которые могут быть представлены потоками с параметрами $(4p + 2, d)$ и $(2p + 1, p - (d - 1)/2)$.

$\square$

6. Группы гомологий некоторых переклеенных торов

В этом параграфе мы доказываем теорему 1.4. Доказательство вытекает из более общего результата о группах гомологий с целыми коэффициентами для многообразий переклеенных торов M_φ , где φ — периодический гомеоморфизм, определенный следующим образом.

Пусть $q \in \mathbb{N}$ и Π_q — правильный $2q$ -угольник со схемой $a_1 a_2 \dots a_q a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_q^{-1}$. Выберем $m \in \{1, \dots, q-1\}$ и обозначим через $\overline{\varphi}: \Pi_q \rightarrow \Pi_q$ поворот многоугольника вокруг его центра на угол $\theta_m = \pi m/q$ в положительном направлении. Склеив одноименные стороны многоугольника Π_q , получим замкнутую ориентируемую поверхность S_p рода $p = [q/2]$, на которой поворот $\overline{\varphi}$ индуцирует гомеоморфизм $\varphi: S_p \rightarrow S_p$:



Пусть $\mu: \Pi_q \rightarrow S_p$ — естественная проекция и $\{i\} = i + q\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_q$, $i \in \mathbb{Z}$. Положим $\ell = (q, m)$, $\varkappa_m = m/\ell$, $\varkappa_q = q/\ell$. Вычисление групп гомологий многообразия M_φ проведем отдельно для случаев четного и нечетного q .

6.1. Случай $q = 2p$.

Лемма 6.1. Пусть $q = 2p$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда группы гомологий многообразия $M = M_\varphi$ изоморфны следующим группам:

- если $\varkappa_m$ четно, то $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$ и $H_2(M) \cong H_1(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$,
- если $\varkappa_m$ нечетно, то $H_3(M) \cong H_2(M) \cong \mathbb{Z}$ и $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^\ell$.

Доказательство. Для $i = 1, \dots, q$ положим $z_{\{i\}} = \mu(a_i)$. Тогда $H_1(S_p) = \langle [z_{\{1\}}], \dots, [z_{\{q\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^q$, а индуцированный гомеоморфизмом φ автоморфизм $\varphi_*: H_1(S_p) \rightarrow H_1(S_p)$ описывается равенствами

$$\varphi_*([z_{\{i\}}]) = (-1)^{[\frac{i-1+m}{q}]} [z_{\{i+m\}}], \quad i = 1, \dots, q. \quad (6.1)$$

Положим $N = \nu(S_p \times 0)$, где $\nu = \nu_\varphi: S_p \times [0, 1] \rightarrow M_\varphi$ — естественная проекция. Для вычисления групп гомологий многообразия M используем топологическую пару (M, N) и соответствующую гомологическую последовательность (см. [11, теорема 4.4.3])

$$\dots \rightarrow H_n(N) \xrightarrow{i_*^n} H_n(M) \xrightarrow{j_*^n} H_n(M, N) \xrightarrow{\partial_*^n} H_{n-1}(N) \rightarrow \dots \quad (6.2)$$

Положим $z_{\{i\}}^0 = \nu(z_{\{i\}} \times 0)$ для $i = 1, \dots, q$. Тогда $H_n(N) = 0$ при $n > 2$ и

$$H_2(N) \cong \mathbb{Z}, \quad H_1(N) = \langle [z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{q\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}^q. \quad (6.3)$$

Вычислим группы $H_n(M, N)$. Для этого рассмотрим надстройку ΣS_p , которая получается стягиванием в точки v_0 и v_1 оснований $S_p \times 0$ и $S_p \times 1$ цилиндра $S_p \times [0, 1]$. Положим $V = \{v_0, v_1\}$. Тогда $M/N = \Sigma S_p/V$. Подмножества $N \subset M$ и $V \subset \Sigma S_p$ замкнуты и являются деформационными ретрактами некоторых окрестностей $U_N \subset M$ и $U_V \subset \Sigma S_p$. Отсюда и из соотношений между группами абсолютных и относительных гомологий [7, предложение 2.22] для $n > 0$ следует

$$H_n(M, N) \cong H_n(M/N) = H_n(\Sigma S_p/V) \cong H_n(\Sigma S_p, V). \quad (6.4)$$

Согласно изоморфизму надстройки [11, теорема 4.4.10]

$$H_3(\Sigma S_p) \cong H_2(S_p) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2(\Sigma S_p) \cong H_1(S_p) \cong \mathbb{Z}^q, \quad H_1(\Sigma S_p) = 0.$$

Подставив последние формулы в гомологическую последовательность пары $(\Sigma S_p, V)$, получим

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{j_*^3} H_3(\Sigma S_p, V) \xrightarrow{\partial_*^3} 0 \xrightarrow{i_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{j_*^2} H_2(\Sigma S_p, V) \xrightarrow{\partial_*^2} \\ \longrightarrow 0 \xrightarrow{i_*^1} 0 \xrightarrow{j_*^1} H_1(\Sigma S_p, V) \xrightarrow{\partial_*^1} \mathbb{Z}^2 \xrightarrow{i_*^0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$H_3(\Sigma S_p, V) \cong \mathbb{Z}, \quad H_2(\Sigma S_p, V) \cong \mathbb{Z}^q, \quad H_1(\Sigma S_p, V) \cong \mathbb{Z}. \quad (6.5)$$

В силу (6.2), (6.3), (6.4) и (6.5) следующая последовательность точна:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_3(M) \xrightarrow{j_*^3} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*^3} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*^2} H_2(M) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial_*^2} \\ \longrightarrow \langle [z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{q\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}^q \xrightarrow{i_*^1} H_1(M) \xrightarrow{j_*^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\partial_*^1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*^0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Так как S_p — ориентируемое 2-многообразие, а гомеоморфизм φ сохраняет ориентацию, M — ориентируемое замкнутое 3-многообразие. Следовательно, $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$ [7, теорема 3.26] и j_*^3 в (6.6) — изоморфизм. Но тогда $\partial_*^3 = 0$. С другой стороны, i_*^0 — изоморфизм, и потому $\partial_*^1 = 0$.

Поскольку $\nu : S_p \times 0 \rightarrow N$ — гомеоморфизм, формула $\varphi^0(\nu(x, 0)) = \nu(\varphi(x), 0)$ определяет гомеоморфизм $\varphi^0 : N \rightarrow N$.

Пусть $\varphi_*^0 : H_1(N) \rightarrow H_1(N)$ — автоморфизм, индуцированный гомеоморфизмом φ^0 . В цилиндре $S_p \times [0, 1]$ циклы $z_{\{i\}} \times 0$ и $z_{\{i\}} \times 1$ гомологичны. В процессе построения многообразия M цикл $z_{\{i\}} \times 1$ приклеивается к циклу $\varphi(z_{\{i\}}) \times 0$. Это означает, что в группе $H_1(M)$ имеет место равенство $\varphi_*^0([z_{\{i\}}^0]) = [z_{\{\varphi(i)\}}^0]$. Тогда в силу (6.1) в $H_1(M)$ справедливы соотношения

$$[z_{\{i+jm\}}^0] = (-1)^{\lfloor \frac{i-1+jm}{q} \rfloor} [z_{\{i\}}^0] \quad i = 1, \dots, \ell, \quad j = 1, \dots, \varkappa_q. \quad (6.7)$$

Таким образом, подгруппа $\text{im } i_*^1 \subset H_1(M)$ порождается гомологическими классами $[z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{\ell\}}^0]$. При $j = q$ имеем

$$\left\lfloor \frac{i-1+qm}{q} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{i-1}{q} + \frac{qm}{q\ell} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{i-1}{q} + \varkappa_m \right\rfloor = \varkappa_m.$$

Поэтому для $j = q$ из (6.7) при четном $\varkappa_m$ следуют тривиальные соотношения $[z_{\{i\}}^0] = [z_{\{i\}}^0]$, а при нечетном $\varkappa_m$ — соотношения $[z_{\{i\}}^0] = -[z_{\{i\}}^0]$. В первом случае $[z_{\{i\}}^0]$ — свободные образующие группы $\text{im } i_*^1$. Следовательно,

$$\text{im } i_*^1 = \langle [z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{\ell\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}^\ell. \quad (6.8)$$

Во втором случае $2[z_{\{i\}}^0] = 0$ в $H_1(M)$ для всех $i = 1, \dots, \ell$ и, следовательно,

$$\text{im } i_*^1 = \langle [z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{\ell\}}^0] \parallel 2[z_{\{1\}}^0], \dots, 2[z_{\{\ell\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}_2^\ell. \quad (6.9)$$

Из (6.8), (6.6) и равенств $\partial_*^3 = 0$ и $\partial_*^1 = 0$ получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{i_*^1} \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow 0, \quad (6.10)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^\ell \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (6.11)$$

В силу (6.11) имеем $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$. В последовательности (6.10) имеем $\text{im } \partial_*^2 = \ker i_*^1 \cong \mathbb{Z}^{q-\ell}$. Тогда $\text{im } j_*^2 = \ker \partial_*^2 \cong \mathbb{Z}^{q-(q-\ell)} = \mathbb{Z}^\ell$. Поэтому $H_2(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell+1}$.

Из (6.9) и (6.6) получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{i_*^1} \mathbb{Z}_2^\ell \longrightarrow 0, \quad (6.12)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^\ell \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (6.13)$$

В силу (6.13) $H_1(P) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^\ell$. В последовательности (6.12)

$$\text{im } \partial_*^2 = \ker i_*^1 = \mathbb{Z}^{q-\ell} \times (2\mathbb{Z})^\ell \cong \mathbb{Z}^q.$$

Таким образом, ∂_*^2 — мономорфизм, откуда следует $\text{im } j_*^2 = \ker \partial_*^2 = 0$. Но тогда $H_2(P) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

6.2. Случай $q = 2p + 1$.

Лемма 6.2. Пусть $q = 2p + 1$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда группы гомологий многообразия $M = M_\varphi$ изоморфны следующим группам:

- если m четно, то $H_3(M) \cong \mathbb{Z}$, $H_2(M) \cong \mathbb{Z}^{\ell-1}$, $H_1(M) \cong \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}_{\varkappa_q}$,
- если m нечетно, то $H_3(M) \cong H_2(M) \cong \mathbb{Z}$ и $H_1(M) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^{\ell-1}$.

Доказательство. Положим $z_{\{i\}} = \mu(a_i + a_{i+1})$ для $i = 1, \dots, 2p$ и $z_{\{0\}} = z_{\{q\}} = \mu(a_q - a_1)$. Тогда $H_1(S_p) = \langle [z_{\{1\}}], \dots, [z_{\{2p\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^{2p}$, а индуцированный гомеоморфизмом φ автоморфизм $\varphi_* : H_1(S_p) \rightarrow H_1(S_p)$ удовлетворяет равенствам

$$\varphi_*([z_{\{i\}}]) = (-1)^{\lfloor \frac{i-1+m}{q} \rfloor} [z_{\{i+m\}}], \quad i = 1, \dots, q.$$

Пусть $\nu : S_p \times [0, 1] \rightarrow M$ — естественная проекция, $N = \nu(S_p \times 0)$ и $z_{\{i\}}^0 = \nu(z_{\{i\}} \times 0)$ для $i = 1, \dots, q$. Тогда, как и в случае $q = 2p$, точно последовательность (6.6). Рассуждая так же, как в теореме 6.1, получаем $[z_{\{i+jm\}}^0] = (-1)^{\lfloor \frac{i-1+jm}{q} \rfloor} [z_{\{i\}}^0]$ для всех $i = 1, \dots, \ell$, $j = 1, \dots, \varkappa_q$.

Таким образом, подгруппа $\text{im } \iota_*^1 \subset H_1(M)$ здесь также порождается гомологическими классами $[z_{\{1\}}^0], \dots, [z_{\{\ell\}}^0]$. Поскольку ℓ в данном случае нечетно, числа m и $\varkappa_m$ четны или нечетны одновременно. Как и в лемме 6.1, при $j = q$ из (6.7) при четном $\varkappa_m$ следуют тривиальные соотношения $[z_{\{i\}}^0] = [z_{\{i\}}^0]$, а при нечетном $\varkappa_m$ — соотношения $2[z_{\{i\}}^0] = 0$.

По построению цикла $z_{\{0\}} = z_{\{q\}}$ имеем

$$[D] = \sum_{\lambda=1}^q (-1)^\lambda [z_{\{\lambda\}}^0] = 0.$$

Положим

$$[\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}] = \sum_{\lambda=1}^{\ell} (-1)^\lambda [z_{\{\lambda+l\ell\}}^0]$$

при $l = 0, \dots, \varkappa_q - 1$ и $[\widehat{z}_{\{i\}}] = [z_{\{i\}}^0]$ при $i = 2, \dots, \ell$.

Поскольку матрица перехода от $[z_{\{1\}}^0], [z_{\{2\}}^0], \dots, [z_{\{\ell\}}^0]$ к $[\widehat{z}_{\{1\}}], [\widehat{z}_{\{2\}}], \dots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}]$ унимодулярна, гомологические классы $[\widehat{z}_{\{1\}}], [\widehat{z}_{\{2\}}], \dots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}]$ также порождают подгруппу $\text{im } \iota_*^1 \subset H_1(M)$.

Так как ℓ нечетно, имеем

$$[D] = \sum_{l=0}^{\varkappa_q-1} (-1)^l [\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}] = \sum_{l=0}^{\varkappa_q-1} (-1)^{l\ell} [\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}]. \quad (6.14)$$

По построению группы $\mathbb{Z}_q$

$$[\widehat{z}_{\{1+jm\}}] = [\widehat{z}_{\{1+l\ell\}}], \quad l\ell = jm - \left\lfloor \frac{jm}{q} \right\rfloor = jm - \left\lfloor \frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q} \right\rfloor, \quad j = 1, \dots, q. \quad (6.15)$$

С другой стороны, в силу (6.7)

$$[\widehat{z}_{\{1+jm\}}] = (-1)^{\lfloor \frac{jm}{q} \rfloor} [\widehat{z}_{\{1\}}] = (-1)^{\lfloor \frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q} \rfloor} [\widehat{z}_{\{1\}}]. \quad (6.16)$$

Из (6.14) и (6.15) получаем

$$[D] = \sum_{j=1}^{\varkappa_q} (-1)^{jm - \lfloor \frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q} \rfloor} [\widehat{z}_{\{1+jm\}}] = \sum_{j=1}^{\varkappa_q} (-1)^{jm - \lfloor \frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q} \rfloor + \lfloor \frac{j\varkappa_m}{\varkappa_q} \rfloor} [\widehat{z}_{\{1\}}] = [\widehat{z}_{\{1\}}] \sum_{j=1}^{\varkappa_q} (-1)^{jm}.$$

Поэтому $[D] = \varkappa_q [\widehat{z}_{\{1\}}] = 0$ для четного m и $[D] = -[\widehat{z}_{\{1\}}] = 0$ для нечетного m .

Таким образом,

$$\text{im } \iota_*^1 = \langle [\widehat{z}_{\{1\}}], \dots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}] \parallel \varkappa_q [\widehat{z}_{\{1\}}] \rangle \cong \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z}_{\varkappa_q} \quad (6.17)$$

для четного m и

$$\text{im } \iota_*^1 = \langle [\widehat{z}_{\{2\}}], \dots, [\widehat{z}_{\{\ell\}}] \parallel 2[z_{\{2\}}^0], \dots, 2[z_{\{\ell\}}^0] \rangle \cong \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \quad (6.18)$$

для нечетного m . Из (6.17) и (6.6) согласно ранее полученным равенствам $\partial_*^3 = 0$ и $\partial_*^1 = 0$ получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{i_*^1} \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z}_{\kappa_q} \longrightarrow 0, \quad (6.19)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^{\ell-1} \times \mathbb{Z}_{\kappa_q} \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (6.20)$$

В силу (6.20) имеем $H_1(P) \cong \mathbb{Z}^\ell \times \mathbb{Z}_{\kappa_q}$. В последовательности (6.19) $\text{im } \partial_*^2 = \ker i_*^1 = \mathbb{Z}^{2p-\ell+1} \times \kappa_q \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{2p-\ell+2}$. Но тогда

$$\text{im } j_*^2 = \ker \partial_*^2 \cong \mathbb{Z}^{2p-(2p-\ell+2)} = \mathbb{Z}^{\ell-2}.$$

Поэтому $H_2(P) \cong \mathbb{Z}^{\ell-1}$.

Из (6.18) и (6.6) получаем точные последовательности

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H_2(M) \xrightarrow{j_*^2} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{\partial_*^2} \mathbb{Z}^{2p} \xrightarrow{i_*^1} \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \longrightarrow 0, \quad (6.21)$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2^{\ell-1} \longrightarrow H_1(M) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0. \quad (6.22)$$

В силу (6.22) имеем $H_1(P) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2^{\ell-1}$. В последовательности (6.21) имеем

$$\text{im } \partial_*^2 = \ker i_*^1 = \mathbb{Z}^{2p-\ell+1} \times (2\mathbb{Z})^{\ell-1} \cong \mathbb{Z}^{2p}.$$

Таким образом, ∂_*^2 — мономорфизм, и поэтому $\text{im } j_*^2 = \ker \partial_*^2 = 0$. Но тогда $H_2(P) \cong \mathbb{Z}$. $\square$

Литература

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Am. Math. Soc.* **73**, No. 6, 747–817 (1967).
2. G. Ikegami, “On classification of dynamical systems with cross-sections”, *Osaka J. Math.* **6**, 419–433 (1969).
3. Д. А. Баранов, Е. С. Косолапов, О. В. Починка, “Узел как полный инвариант диффеоморфизмов поверхностей с тремя периодическими орбитами”, *Сиб. мат. журн.* **64**, No. 4, 687–699 (2023).
4. V. Z. Grines, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina, “Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms”, *Regul. Chaotic Dyn.* **21**, No. 2, 189–203 (2016).
5. T. Medvedev, E. Nozdrinova, O. Pochinka, “On periodic data of diffeomorphisms with one saddle orbit”, *Topol. Proc.* **54**, 49–68 (2019).
6. O. Pochinka, D. Shubin, “Topology of ambient 3-manifolds of nonsingular flows with twisted saddle orbit”, *Russ. J. Nonlinear Dyn.* **19**, No. 3, 371–381 (2023).
7. С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, *Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии*, МГУ, М. (1991).
8. J. Nielsen, “Die Struktur Periodischer Transformationen von Flächen”, *Math. Fys. Medd., Danske Vid. Selsk.* **15**, No. 1, 1–77 (1937).
9. D. A. Baranov, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, E. E. Chilina, “On a classification of periodic maps on the 2-torus”, *Russ. J. Nonlinear Dyn.* **19**, No. 1, 91–110 (2023).
10. D. Rolfsen, *Knots and Links*, Publish or Perish, Houston, TX (1990).
11. C. R. F. Maunder, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge etc. (1980).

Статья поступила в редакцию 15 апреля 2024 г.

А. Р. Данилин, А. А. Шабуров

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕПРЯМОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВЫПУКЛЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА И ДЕШЕВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассматривается задача оптимального управления для линейной системы с постоянными коэффициентами и непрямым быстро стабилизирующимся управлением с интегральным выпуклым критерием качества и дешевым управлением в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями на управление. Исследуется случай, когда у предельной задачи оптимальное управление не меняет свой вид, а у исходной задачи имеется единственная точка смены вида оптимального управления. С помощью метода вспомогательного параметра построено полное асимптотическое разложение определяющего вектора.

1. Введение

Рассматривается задача оптимального управления [1]–[3] для линейной системы с постоянными коэффициентами и непрямым быстро стабилизирующимся управлением с интегральным выпуклым критерием качества в классе кусочно-непрерывных управлений с гладкими геометрическими ограничениями. Интегральное слагаемое в критерии качества содержит в качестве множителя малый параметр; такие задачи называются задачами с дешевым управлением [4]–[6]. Асимптотика решения линейно-квадратичных задач с дешевым управлением ранее строилась только при условии отсутствия ограничений на оптимальное управление [7]–[9]. При стремлении малого параметра к нулю исходная задача с дешевым управлением сводится к задаче оптимального управления с терминальным критерием качества. Отметим, что в предельной задаче оптимальное управление может иметь разрывы, в то время как у исходной задачи оптимальное управление непрерывно во всех точках. Асимптотика оптимального управления находится путем построения асимптотики определяющего вектора. Для задач быстрого действия в такой ситуации возможно появление сложных асимптотических разложений (см., например, [10, 11]). Зависимость решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешевым управлением от малого параметра в случае разрывного управления предельной задачи, вообще говоря, более регулярная, чем в задаче быстрого действия в такой же ситуации [12]. В отличие от [12], в данной статье помимо дешевого управления рассматривается управляемая система с быстрыми и медленными переменными. Такая система с терминальным критерием качества изучалась в [13].

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления в классе кусочно-непрерывных управлений

$$\begin{aligned} \dot{x}_\varepsilon &= Ax_\varepsilon + By_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) &= x^0, & t &\in [0; T], \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon &= -y_\varepsilon + u, & y_\varepsilon(0) &= y^0, & \|u\| &\leq 1, \end{aligned} \quad (2.1)$$

А. Р. Данилин: ИММ им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия, dar@imm.uran.ru.

А. А. Шабуров: ИММ им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург, Россия, alexandershaburov@mail.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 59–71 (2024).

с интегральным выпуклым критерием качества

$$J_\varepsilon(u) := \frac{1}{2} \|x_\varepsilon(T; u)\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \rightarrow \min, \quad (2.2)$$

где $x_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $y_\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^m$, A , B — постоянные матрицы соответствующих размеров, $\|\cdot\|$ — евклидова норма в соответствующем конечномерном векторном пространстве, x^0 и y^0 — заданные векторы, $x_\varepsilon(\cdot; u)$ — решение системы (2.1) при заданном управлении $u(\cdot)$, а $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать скалярное произведение в соответствующем конечномерном векторном пространстве, а транспонирование матриц — верхним индексом $*$.

Управляемую систему (2.1) запишем в матричном виде

$$\dot{z}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon + \mathcal{B}_\varepsilon u_\varepsilon, \quad z_\varepsilon(0) = z^0, \quad (2.3)$$

где

$$z_\varepsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\varepsilon(t) \\ y_\varepsilon(t) \end{pmatrix}, \quad z^0 := \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_\varepsilon = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -\varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1}I \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

а I — матрица тождественного отображения соответствующего конечномерного пространства.

Предположение 2.1. Система (2.3) вполне управляема, что в силу критерия Калмана [3, п. 2.3, теорема 5] эквивалентно условию $\text{rank}(\mathcal{B}_\varepsilon, \mathcal{A}_\varepsilon \mathcal{B}_\varepsilon, \dots, \mathcal{A}_\varepsilon^{k-1} \mathcal{B}_\varepsilon) = n + m$.

Непосредственными вычислениями с учетом (2.4) получаем

$$e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} = \begin{pmatrix} e^{At} & \varepsilon W(t, \varepsilon) \\ 0 & e^{-t/\varepsilon} I \end{pmatrix}, \quad e^{\mathcal{A}_\varepsilon t} \mathcal{B}_\varepsilon = \begin{pmatrix} W(t, \varepsilon) \\ \varepsilon^{-1} e^{-t/\varepsilon} I \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

где

$$W(t, \varepsilon) := (I + \varepsilon A)^{-1} (e^{At} - e^{-t/\varepsilon} I) B. \quad (2.6)$$

Используя [14, формулы (23), (27)] и соотношения $\nabla(\|\zeta\|^2/2) = \zeta$, запишем уравнение для определяющего вектора

$$\tilde{l}_\varepsilon = -x_\varepsilon(T; u_\varepsilon^{opt}) = -\nabla(\|x_\varepsilon(T; u_\varepsilon^{opt})\|^2/2), \quad (2.7)$$

$$-\tilde{l}_\varepsilon = e^{AT} x^0 + \varepsilon W(T, \varepsilon) y^0 + \int_0^T W(t, \varepsilon) u_\varepsilon^{opt}(T-t) dt, \quad (2.8)$$

где

$$u_\varepsilon^{opt}(T-t) = \frac{W^*(t, \varepsilon) \tilde{l}_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|W^*(t, \varepsilon) \tilde{l}_\varepsilon\|)}, \quad S_\varepsilon(\xi) := \begin{cases} \varepsilon, & \xi \in [0; \varepsilon), \\ \xi, & \xi \geq \varepsilon. \end{cases} \quad (2.9)$$

Определение 2.1. Решения t_ε уравнения

$$\|W^*(t, \varepsilon) \tilde{l}_\varepsilon\| = \varepsilon$$

будем называть *точкой смены (переключения) вида оптимального управления*.

Как показано в [14, теорема 1], предельной для (2.1), (2.2) будет задача

$$\dot{x}_0 = Ax_0 + Bu, \quad t \in [0; T], \quad \|u\| \leq 1, \quad x_0(0) = x^0, \quad J_0(u_0) := \frac{1}{2} \|x_0(T; u)\|^2 \rightarrow \min. \quad (2.10)$$

Предположение 2.2. Система из предельной задачи (2.10) вполне управляема.

При выполнении предположения 2.2 [14, формулы (24), (25), теорема 3] ненулевой вектор $l_0 \in \mathbb{R}^n$, определяющий оптимальное управление в задаче (2.10)

$$u_0^{opt}(T-t) = \frac{B^* e^{A^* t} l_0}{\|B^* e^{A^* t} l_0\|}, \quad (2.11)$$

удовлетворяет уравнению

$$-l_0 = e^{AT}x^0 + \int_0^T e^{At}B \frac{B^*e^{A^*t}l_0}{\|B^*e^{A^*t}l_0\|} dt. \quad (2.12)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ верна сходимость $\tilde{l}_\varepsilon \rightarrow l_0$. Вместо вектора $\tilde{l}_\varepsilon$ удобно рассмотреть вектор $l_\varepsilon := (I + \varepsilon A^*)^{-1}\tilde{l}_\varepsilon$ или, что эквивалентно, $\tilde{l}_\varepsilon = (I + \varepsilon A^*)l_\varepsilon$. Отметим, что $l_\varepsilon \rightarrow l_0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, и, зная асимптотическое разложение вектора l_ε , стандартно получаем асимптотическое разложение вектора $\tilde{l}_\varepsilon$. Уравнение (2.8) принимает вид

$$0 = (I + \varepsilon A)(I + \varepsilon A^*)l_\varepsilon + (I + \varepsilon A)e^{AT}x^0 + \varepsilon(e^{AT} - e^{-T/\varepsilon}I)By^0 + \int_0^T (e^{At} - e^{-t/\varepsilon}I)B \frac{B^*(e^{A^*t} - e^{-t/\varepsilon}I)l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|B^*(e^{A^*t} - e^{-t/\varepsilon}I)l_\varepsilon\|)} dt. \quad (2.13)$$

В работе используются степенные ряды многих скалярных переменных $v_1, \dots, v_n$ со скалярными или векторными коэффициентами, т.е. каждое слагаемое имеет вид $\beta v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}$, $k_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Через $R(v_1, \dots, v_n; i)$ обозначаем степенные ряды переменных $v_1, \dots, v_n$, для каждого члена $\beta v_1^{k_1} \dots v_n^{k_n}$ которых выполнено условие $k_1 + \dots + k_n \varepsilon i$. Через $R(v_1, \dots, v_n; i; t)$ обозначаем аналогичные ряды, но с коэффициентами, зависящими от t .

Степенные ряды будем представлять в виде

$$R(v; i) := R(v_1, \dots, v_n; i) = \sum_{p=i}^{\infty} P_p(v),$$

где $P_p(v) := P_p(v_1, \dots, v_n)$ — однородные степени p полиномы от $v = (v_1, \dots, v_n)$ со скалярными или векторными коэффициентами.

Так как сумма сходящегося в окрестности нуля степенного ряда аналитична в этой окрестности, в силу формулы Тейлора справедлива оценка

$$\|R(v_1, \dots, v_n; i)\| = O(\|v\|^i), \quad v \rightarrow 0, \quad (2.14)$$

где $v := (v_1, \dots, v_n)$, $\|v\| = |v_1| + \dots + |v_n|$.

Под степенным асимптотическим разложением функции $w(v)$ при $v \rightarrow 0$ стандартно понимается степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(v)$ такой, что

$$w(v) - \sum_{n=0}^N P_n(v) = o(\|v\|^N)$$

для всех $N \in \mathbb{N}$. Этот факт будем обозначать следующим образом: $w(v) \stackrel{as}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(v)$ при $v \rightarrow 0$.

3. Основные результаты

Предположение 3.1. Для некоторого $\alpha > 0$ при всех $t \in [0; T]$ справедливо неравенство $\|B^*e^{A^*t}l_0\| \geq \alpha$.

Теорема 3.1. Пусть выполнено предположение 3.1. Тогда существуют ε_0 и Δ_0 такие, что при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\Delta l \in (0; \Delta_0]$ существует единственная точка $t(\varepsilon, \Delta l) \in [0; T]$ смены вида оптимального управления. Справедливо равенство $\Delta\tau(\varepsilon, \Delta l) := (t(\varepsilon, \Delta l)/\varepsilon) \in (0; 1)$ и асимптотическое разложение

$$\Delta\tau(\varepsilon, \Delta l) \stackrel{as}{=} \varepsilon\eta_0 + R(\varepsilon, \Delta l; 2), \quad \eta_0 = \frac{1}{\|B^*l_0\|}, \quad \varepsilon + \|\Delta l\| \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

Теорема 3.2. Пусть выполнены предположения 2.1, 2.2, 3.1. Тогда Δl и $\Delta\tau$ представимы в виде степенных асимптотических рядов при $\varepsilon \rightarrow +0$. Верно равенство

$$\Delta l = -\varepsilon(I + C_1)^{-1}(e^{AT}(Ax^0 + By^0) + (A + A^*)l_0) + O(\varepsilon^2), \quad \Delta\tau = \frac{\varepsilon}{\|B^*l_0\|} + O(\varepsilon^2),$$

где линейный оператор C_1 определен формулой

$$C_1 \Delta l := \int_0^T \frac{\|C^*(t)l_0\|^2 C(t)C^*(t)\Delta l - C(t)C^*(t)l_0 \langle C^*(t)l_0, C^*(t)\Delta l \rangle}{\|C^*(t)l_0\|^3} dt, \quad C(t) := e^{At}B. \quad (3.2)$$

Отметим, что в силу неравенства Коши — Буняковского $C_1 \geq 0$.

Пример 3.1. Приведем пример задачи (2.1), (2.2). Это задача управления точкой малой массы в среде с сопротивлением

$$\begin{aligned} \dot{x}_\varepsilon &= y_\varepsilon, & x_\varepsilon(0) &= x^0, & t &\in [0; T], \\ \varepsilon \dot{y}_\varepsilon &= -y_\varepsilon + u, & y_\varepsilon(0) &= y^0, & \|u\| &\leq 1. \end{aligned}$$

Здесь $x_\varepsilon, y_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$, $A = 0$, $B = I$, $C(t) = I$, $W(t, \varepsilon) = (1 - e^{-t/\varepsilon})I$. Предельной будет задача

$$\dot{x}_0 = u, \quad t \in [0; T], \quad \|u\| \leq 1, \quad x_0(0) = x^0, \quad J_0(u_0) := \frac{1}{2} \|x_0(T; u)\|^2 \rightarrow \min.$$

Согласно формуле (2.12) имеем $x^0 = -l_0 \left(\frac{\|l_0\| + T}{\|l_0\|} \right)$. Пусть $T = 1$ и l_0 — вектор такой, что $\|l_0\| = 1$. Тогда $x^0 = -2l_0$, и в силу формулы (3.2)

$$C_1 \Delta l = \int_0^1 \Delta l - l_0 \langle l_0, \Delta l \rangle dt = \Delta l - l_0 \langle l_0, \Delta l \rangle, \quad (I + C_1)^{-1} y^0 = \frac{1}{2} (y^0 + \langle y^0, l_0 \rangle l_0).$$

Справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} \Delta l_\varepsilon &= -\frac{\varepsilon}{2} (y^0 + \langle y^0, l_0 \rangle l_0) + O(\varepsilon^2), & \varepsilon &\rightarrow 0, \\ \Delta \tau_\varepsilon &= \varepsilon + O(\varepsilon^2), & t_\varepsilon = \varepsilon \Delta \tau_\varepsilon &= O(\varepsilon^2), & \varepsilon &\rightarrow 0, \\ l_\varepsilon &= -\frac{\varepsilon}{2} (y^0 + \langle y^0, l_0 \rangle l_0) + O(\varepsilon^2), & \varepsilon &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Значения функционалов качества в исходной и предельной задаче следующие:

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2} \|l_\varepsilon\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 \|u(t)\|^2 dt, \quad J_0 = \frac{1}{2} \|l_0\|^2 = \frac{1}{2}.$$

Поскольку оптимальное управление удовлетворяет тождеству $\|u(t)\| \equiv 1$ при $t \geq t_\varepsilon$, выполнено равенство

$$J_\varepsilon = \frac{1}{2} - \varepsilon \langle y_0, l_0 \rangle + \frac{\varepsilon}{2} + O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

4. Внешнее асимптотическое разложение и точки смены вида оптимального управления

Наша цель — с помощью (2.13) получить систему асимптотических разложений по малым параметрам ε , $\Delta l := l_\varepsilon - l_0 \rightarrow 0$ (и возможно другим малым параметрам), которые позволят найти асимптотическое разложение определяющего вектора l_ε и единственной точки t_ε смены вида оптимального управления задаче (2.1), (2.2).

Поскольку (2.13) имеет вид

$$0 = R(\varepsilon, \Delta l; 0) + \int_0^T (e^{At} - e^{-t/\varepsilon} I) B \frac{B^*(e^{A^*t} - e^{-t/\varepsilon} I) l_\varepsilon}{S_\varepsilon(\|B^*(e^{A^*t} - e^{-t/\varepsilon} I) l_\varepsilon\|)} dt, \quad (4.1)$$

необходимо построить асимптотическое разложение интеграла из этого равенства. Отметим, что $R(\varepsilon, \Delta l; 0)$ — это сумма четырех полиномов

$$R(\varepsilon, \Delta l; 0) = P_0(\varepsilon, \Delta l) + P_1(\varepsilon, \Delta l) + P_2(\varepsilon, \Delta l) + P_3(\varepsilon, \Delta l),$$

где

$$\begin{aligned} P_0(\varepsilon, \Delta l) &= l_0 + e^{AT} x^0, & P_1(\varepsilon, \Delta l) &= \varepsilon A l_0 + \varepsilon A^* l_0 + \Delta l + \varepsilon A e^{AT} x^0 + \varepsilon e^{AT} B y^0, \\ P_2(\varepsilon, \Delta l) &= \varepsilon^2 A A^* l_0 + \varepsilon(A + A^*) \Delta l, & P_3(\varepsilon, \Delta l) &= \varepsilon^2 A A^* \Delta l. \end{aligned}$$

Поскольку подынтегральное выражение в интеграле в (4.1) имеет существенно разные асимптотические разложения по ε при больших t ($t \geq \varepsilon^q$, $q \in (0; 1)$) и малых $t \in (0; \varepsilon^q)$, для нахождения асимптотики интеграла из (4.1) естественно применить метод вспомогательного параметра (см., например, [15, § 30.II], [16]).

Разобьем интеграл на две части

$$\int_0^T = \int_0^\mu + \int_\mu^T =: I_1 + I_2,$$

где

$$\mu = \varepsilon^q, \quad q \in (0; 1). \quad (4.2)$$

Рассмотрим интеграл I_2 . В силу (4.2) при $t \geq \mu$ верна асимптотическая оценка $e^{-t/\varepsilon} = \mathbb{O}$, $\varepsilon \rightarrow 0$, где $\mathbb{O}$ — асимптотический нуль относительно степенной асимптотической последовательности, т.е. для всех $\gamma > 0$ выполнено $\mathbb{O} = o(\varepsilon^\gamma)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому

$$I_2 \stackrel{as}{=} \int_\mu^T \frac{C(t)C^*(t)(l_0 + \Delta l)}{S_\varepsilon(\|C^*(t)(l_0 + \Delta l)\|)} dt + \mathbb{O}. \quad (4.3)$$

В силу предположения 3.1 справедливо неравенство $\|C^*(t)(l_0 + \Delta l)\| \geq \alpha/2$ при всех малых Δl . Поэтому

$$S_\varepsilon(\|C^*(t)(l_0 + \Delta l)\|) = \|C^*(t)(l_0 + \Delta l)\|$$

при всех $t \geq \mu$. Следовательно, подынтегральное выражение в (4.3) представимо в виде степенного ряда по Δl с коэффициентами, гладко зависящими от t ,

$$\begin{aligned} \frac{C(t)C^*(t)(l_0 + \Delta l)}{\|C^*(t)(l_0 + \Delta l)\|} &= \frac{C(t)C^*(t)l_0}{\|C^*(t)l_0\|} \\ &+ \frac{\|C^*(t)l_0\|^2 C(t)C^*(t)\Delta l - C(t)C^*(t)l_0 \langle C^*(t)l_0, C^*(t)\Delta l \rangle}{\|C^*(t)l_0\|^3} + R(\Delta l; 2; t). \end{aligned}$$

Отсюда в силу (2.12) выводим

$$\begin{aligned} I_2 \stackrel{as}{=} \int_0^T + \int_\mu^0 + \mathbb{O} &\stackrel{as}{=} \int_0^T \frac{\|C^*(t)l_0\|^2 C(t)C^*(t)\Delta l - C(t)C^*(t)l_0 \langle C^*(t)l_0, C^*(t)\Delta l \rangle}{\|C^*(t)l_0\|^3} dt \\ &- l_0 - e^{AT} x^0 + R(\Delta l; 2) + \mu R(\mu, \Delta l; 0). \end{aligned} \quad (4.4)$$

В интеграле I_1 сделаем замену переменной

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\mu (e^{At} - e^{-t/\varepsilon} I) B \frac{B^*(e^{A^*t} - e^{-t/\varepsilon} I)(l_0 + \Delta l)}{S_\varepsilon(\|B^*(e^{A^*t} - e^{-t/\varepsilon} I)(l_0 + \Delta l)\|)} dt = [\tau = t/\varepsilon] \\ &= \varepsilon \int_0^{\mu/\varepsilon} (e^{A\varepsilon\tau} - e^{-\tau} I) B \frac{B^*(e^{A^*\varepsilon\tau} - e^{-\tau} I)(l_0 + \Delta l)}{S_\varepsilon(\|B^*(e^{A^*\varepsilon\tau} - e^{-\tau} I)(l_0 + \Delta l)\|)} d\tau. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Покажем, что при всех малых ε и Δl на отрезке $[0; \mu/\varepsilon]$ имеется единственная точка переключения вида оптимального управления τ_ε

$$\|B^*(e^{A^*\varepsilon\tau_\varepsilon} - e^{-\tau_\varepsilon} I)(l_0 + \Delta l)\| = \varepsilon. \quad (4.6)$$

Для этого рассмотрим функции $E(\tau, \varepsilon)$ и $\varphi(\tau, \varepsilon, \Delta l)$

$$\begin{aligned} E(\tau, \varepsilon) &:= (e^{A\varepsilon\tau} - e^{-\tau}I)B = \left(\tau I + A\varepsilon\tau + (e^{A\varepsilon\tau} - I - A\varepsilon\tau) - (e^{-\tau} - 1 + \tau)I\right)B, \\ \varphi(\tau, \varepsilon, \Delta l) &:= \|E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)\|. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Функция $E(\tau, \varepsilon)$ бесконечно дифференцируема, а функция $\varphi(\tau, \varepsilon, \Delta l)$ непрерывна во всех точках и бесконечно дифференцируема в точках $(\tau, \varepsilon, \Delta l)$, в которых $\varphi(\tau, \varepsilon, \Delta l) \neq 0$. Кроме того,

$$e^{A\varepsilon\tau} - I - A\varepsilon\tau = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(\varepsilon\tau)^k}{k!} A^k = O(\varepsilon^2\tau^2), \quad e^{-\tau} - 1 + \tau = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k \tau^k}{k!} = O(\tau^2). \quad (4.8)$$

Лемма 4.1. Пусть выполнено предположение 3.1. Тогда существуют ε_0 и Δ_0 такие, что при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\Delta l \in (0; \Delta_0]$ и $\tau \in (0; 1]$ справедливо соотношение $\varphi(\tau, \varepsilon, \Delta l) \neq 0$.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда найдутся τ_k , ε_k и Δl_k такие, что

$$\tau_k \in (0; 1], \quad 0 < \varepsilon_k \leq \frac{1}{k}, \quad 0 < \Delta l_k \leq \frac{1}{k}, \quad B^*(e^{A^*\varepsilon_k\tau_k} - e^{-\tau_k}I)(l_0 + \Delta l_k) = 0. \quad (4.9)$$

Без ограничения общности можно считать, что $\tau_k \rightarrow \tau_0 \in [0; 1]$. Поделив равенство в (4.9) на τ_k и перейдя в нем к пределу при $k \rightarrow +\infty$, получим $(\tau_0^{-1} - e^{-\tau_0})B^*l_0 = 0$ (при $\tau_0 \neq 0$) или $B^*l_0 = 0$ (при $\tau_0 = 0$). Поскольку $\tau_0^{-1} - e^{-\tau_0} \neq 0$ при $\tau_0 \in (0; 1]$, во всех случаях получаем $B^*l_0 = 0$, что противоречит предположению 3.1. $\square$

Лемма 4.2. Пусть выполнено предположение 3.1. Тогда существуют ε_0 и Δ_0 такие, что при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\Delta l \in (0; \Delta_0]$ и $\tau \in [1; \mu/\varepsilon]$ справедливо соотношение $\varphi(\tau, \varepsilon, \Delta l) > \varepsilon$.

Доказательство. Предположим обратное. Тогда найдутся τ_k , ε_k и Δl_k такие, что

$$\tau_k \in [1; \mu/\varepsilon], \quad 0 < \varepsilon_k \leq \frac{1}{k}, \quad 0 < \Delta l_k \leq \frac{1}{k}, \quad \varepsilon_k \geq \|B^*(e^{A^*\varepsilon_k\tau_k} - e^{-\tau_k}I)(l_0 + \Delta l_k)\|. \quad (4.10)$$

Не ограничивая общности можно считать, что $\tau_k \rightarrow \tau_0$, где $\tau_0 \in [1; +\infty)$ или $\tau_0 = +\infty$. Поскольку $0 \leq \varepsilon_k\tau_k \leq \mu_k = \varepsilon_k^q$, а $e^{-\tau_k} \rightarrow D_0$, где $D_0 = e^{-\tau_0}$ при $\tau_0 \neq +\infty$ или $D_0 = 0$ при $\tau_0 = +\infty$, переходя в неравенстве из (4.10) к пределу при $k \rightarrow +\infty$, получим $0 = \|(1 - D_0)B^*l_0\|$. В силу равенства $(1 - D_0) \neq 0$ это противоречит предположению 3.1. $\square$

Доказательство теоремы 3.1. 1. Покажем, что существуют ε_0 и Δ_0 такие, что при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\Delta l \in (0; \Delta_0]$ и $\tau \in [0; 1]$ функция $\varphi(\tau, \varepsilon, \Delta l)$ строго возрастает по τ .

В силу леммы 4.1 при $\tau > 0$ функция $\varphi(\tau, \varepsilon, \Delta l)$ бесконечно дифференцируема во всех точках $(\tau, \varepsilon, \Delta l)$. Пусть $\tau > 0$. Тогда в силу (4.7)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau, \varepsilon, \Delta l) = \frac{1}{\varphi(\tau, \varepsilon, \Delta l)} \left(B^*(e^{A^*\varepsilon\tau} - e^{-\tau}I)(l_0 + \Delta l), B^*(\varepsilon e^{A^*\varepsilon\tau} + e^{-\tau}I)(l_0 + \Delta l) \right).$$

Покажем, что второй сомножитель в получившемся произведении положителен при малых ε и Δl . Пусть $\Delta_0 > 0$ таково, что $\|B^*(l_0 + \Delta l)\| \geq \alpha/2$ при $0 \leq \Delta l \leq \Delta_0$. Тогда при всех таких Δl и произвольных $\varepsilon > 0$ в силу (4.8) имеем

$$\begin{aligned} & \left(B^*(e^{A^*\varepsilon\tau} - e^{-\tau}I)(l_0 + \Delta l), B^*(\varepsilon e^{A^*\varepsilon\tau} + e^{-\tau}I)(l_0 + \Delta l) \right) \\ &= \tau \left(B^*(O(\varepsilon) + \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau}I)(l_0 + \Delta l), B^*(O(\varepsilon) + e^{-\tau}I)(l_0 + \Delta l) \right) \\ &= \tau \left(\frac{(1 - e^{-\tau})}{\tau} e^{-\tau} \|B^*(l_0 + \Delta l)\| + O(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

В силу свойств рядов типа Лейбница при $\tau \in (0; 1]$

$$\left(\frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} \right)' = \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \tau^{k-1} \right)' = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)}{k!} \tau^{k-2} < 0.$$

Поэтому функция $(1 - e^{-\tau})/\tau$ убывает и

$$\frac{(1 - e^{-\tau})}{\tau} e^{-\tau} \|B^*(l_0 + \Delta l)\| + O(\varepsilon) \geq \frac{(1 - e^{-1})}{1} e^{-1} \frac{\alpha}{2} + O(\varepsilon) > 0$$

при всех $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, где ε_0 — некоторая константа.

2. Функция $\varphi(\cdot, \varepsilon, \Delta l)$ непрерывна и возрастает на $[0; 1]$, а в силу леммы 4.2 справедливо неравенство $\varphi(1, \varepsilon, \Delta l) > \varepsilon > 0 = \varphi(0, \varepsilon, \Delta l)$. Поэтому по теореме о промежуточном значении существует единственное $\Delta\tau(\varepsilon, \Delta l) =: \Delta\tau \in (0; 1)$ такое, что $\varphi(\Delta\tau(\varepsilon, \Delta l), \varepsilon, \Delta l) = \varepsilon$. Покажем, что $\Delta\tau(\varepsilon, \Delta l) = O(\varepsilon)$.

В силу определения $\Delta\tau$ и (4.7)

$$\varepsilon = \|E^*(\Delta\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)\| = \|B^*(A^*\varepsilon\Delta\tau + O(\varepsilon^2\Delta\tau^2) + (1 - e^{-\Delta\tau}))(l_0 + \Delta l)\|$$

или

$$1 = \left\| B^*(A^*\Delta\tau + O(\varepsilon\Delta\tau^2))(l_0 + \Delta l) + B^*\frac{1 - e^{-\Delta\tau}}{\varepsilon}(l_0 + \Delta l) \right\|. \quad (4.11)$$

Поскольку $\Delta\tau \in (0; 1]$, величина $B^*(A^*\Delta\tau + O(\varepsilon\Delta\tau^2))(l_0 + \Delta l)$ ограничена. Поэтому второе слагаемое под нормой также ограничено

$$\begin{aligned} K\varepsilon \geq (1 - e^{-\Delta\tau})\|B^*(l_0 + \Delta l)\| &\geq (1 - e^{-\Delta\tau})\frac{\alpha}{2} \Rightarrow e^{-\Delta\tau} \geq 1 - \frac{2K\varepsilon}{\alpha} \\ \Rightarrow -\Delta\tau &\geq \ln\left(1 - \frac{2K\varepsilon}{\alpha}\right) = -\frac{2K\varepsilon}{\alpha} + O(\varepsilon^2) \Rightarrow 0 < \Delta\tau \leq \frac{2K\varepsilon}{\alpha} + O(\varepsilon^2) = O(\varepsilon). \end{aligned}$$

3. Пусть $\eta(\varepsilon, \Delta l)$ определено равенством $\Delta\tau(\varepsilon, \Delta l) = \varepsilon\eta(\varepsilon, \Delta l)$. Тогда $\eta(\varepsilon, \Delta l)$ ограничено. Пусть η_0 — произвольный частичный предел $\eta(\varepsilon, \Delta l)$ при $(\varepsilon + \|\Delta l\|) \rightarrow 0$, т.е. существуют $\varepsilon_k \rightarrow 0$ и $\Delta l_k \rightarrow 0$ такие, что $\eta(\varepsilon_k, \Delta l_k) \rightarrow \eta_0$. Тогда в силу (4.11) выполняется равенство

$$1 = \left\| B^*(A^*\varepsilon_k\eta(\varepsilon_k, \Delta l_k) + O(\varepsilon^2))(l_0 + \Delta l_k) + B^*\frac{1 - e^{-\varepsilon_k\eta(\varepsilon_k, \Delta l_k)}}{\varepsilon_k}(l_0 + \Delta l_k) \right\|.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $k \rightarrow +\infty$ и учитывая, что $(1 - e^{-\varepsilon_k\eta(\varepsilon_k, \Delta l_k)})/\varepsilon_k \rightarrow \eta_0$, получим $1 = \eta_0\|B^*l_0\|$ или $\eta_0 = 1/\|B^*l_0\|$.

4. Покажем, что $\eta(\varepsilon, \Delta l)$ представим в виде степенного ряда при $\varepsilon + \|\Delta l\| \rightarrow 0$. Функция $\eta(\varepsilon, \Delta l)$ задана неявно

$$F(\eta, \varepsilon, \Delta l) = \|E^*(\varepsilon\eta, \varepsilon)\varepsilon^{-1}(l_0 + \Delta l)\| - 1, \quad F(\eta_0, 0, 0) = 0. \quad (4.12)$$

Покажем, что $F'_\eta(\eta_0, 0, 0) \neq 0$, что в силу теорем о неявно заданных функциях даст бесконечную дифференцируемость $\eta(\varepsilon, \Delta l)$ при всех малых ε и Δl . В силу (4.7) и (4.8)

$$\begin{aligned} E^*(\varepsilon\eta, \varepsilon)\varepsilon^{-1} &= \varepsilon^{-1}(\varepsilon\eta B^* + B^*A^*\varepsilon^2\eta + O(\varepsilon^4\eta^2) + O(\varepsilon^2\eta^2)) \\ &= \eta B^* + B^*A^*\varepsilon\eta + O(\varepsilon^3\eta^2) + O(\varepsilon\eta^2), \end{aligned}$$

и все асимптотические оценки допускают дифференцирование. Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(E^*(\varepsilon\eta, \varepsilon)\varepsilon^{-1})\Big|_{(\eta_0, 0, 0)} = B^* + B^*A^*\varepsilon + O(\varepsilon^3\eta) + O(\varepsilon\eta)\Big|_{(\eta_0, 0, 0)} = B^*.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(F(\varepsilon\eta, \varepsilon, \Delta l))\Big|_{(\eta_0, 0, 0)} = \frac{1}{\eta_0\|B^*l_0\|}(B^*l_0, \eta_0 B^*l_0) = \|B^*l_0\| \neq 0.$$

Таким образом, $\eta(\varepsilon, \Delta l) \stackrel{as}{=} \eta_0 + R(\varepsilon, \Delta l; 2)$ и в силу определения $\eta(\varepsilon, \Delta l)$ для $\Delta\tau(\varepsilon, \Delta l)$ справедливо асимптотическое разложение (3.1).

5. Внутреннее разложение и полное асимптотическое разложение определяющего вектора

В силу определения (2.9) функции S интеграл (4.5) можно записать в виде

$$I_1 = \int_0^{\Delta\tau} E(\tau, \varepsilon) E^*(\tau, \varepsilon) (l_0 + \Delta l) d\tau + \varepsilon \int_{\Delta\tau}^{\mu/\varepsilon} E(\tau, \varepsilon) \frac{E^*(\tau, \varepsilon) (l_0 + \Delta l)}{\|E^*(\tau, \varepsilon) (l_0 + \Delta l)\|} d\tau =: I_{1,1} + I_{1,2}. \quad (5.1)$$

Поскольку отрезок интегрирования в $I_{1,1}$ мал, а подынтегральное выражение бесконечно дифференцируемо по своим аргументам и в степенном разложении присутствуют степени τ^k только с $k \geq 1$, получаем асимптотику

$$I_{1,1} = \int_0^{\Delta\tau} E(\tau, \varepsilon) E^*(\tau, \varepsilon) (l_0 + \Delta l) d\tau \stackrel{as}{=} R(\varepsilon, \Delta\tau; 2) (l_0 + \Delta l). \quad (5.2)$$

Разобьем $I_{1,2}$ на два слагаемых

$$I_{1,2} = \int_{\Delta\tau}^1 + \int_1^{\mu/\varepsilon} =: I_{1,2,1} + I_{1,2,2},$$

где $I_{1,2,1}$ не зависит от μ/ε , а $I_{1,2,2}$ — от $\Delta\tau$.

Разложим подынтегральные выражения в этих интегралах в степенные ряды: для $I_{1,2,1}$ — по $(\tau, \varepsilon, \Delta l)$, а для $I_{1,2,2}$ — по $(\varepsilon, \Delta l)$ с коэффициентами, зависящими от τ . В обоих случаях это связано с представлением $E(\tau, \varepsilon)$ в виде

$$E(\tau, \varepsilon) = (e^{A\varepsilon\tau} - e^{-\tau} I) B = g(\tau) \left(B + \frac{E_1(\tau, \varepsilon)}{g(\tau)} \right), \quad (5.3)$$

где

$$E_1(\tau, \varepsilon) := e^{A\varepsilon\tau} B - B = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \varepsilon^k \tau^k A^k B, \quad (5.4)$$

$$g(\tau) := 1 - e^{-\tau} = \tau - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \tau^k = \tau \left(1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \tau^{k-1} \right) =: \tau - \tau g_1(\tau). \quad (5.5)$$

Отметим, что все ряды в (5.4) и (5.5) являются сходящимися при любых τ и ε , и

$$0 \leq g_1(\tau) \leq \frac{1}{2}, \quad \tau \in [0; 1]. \quad (5.6)$$

Рассмотрим подынтегральное выражение в $I_{1,2,1}$. В силу (5.3)–(5.6)

$$\begin{aligned} \frac{E_1(\tau, \varepsilon)}{g(\tau)} &= \left(\varepsilon AB + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \varepsilon^k \tau^{k-1} A^k B \right) \cdot (1 - g_1(\tau))^{-1} \\ &= \left(\varepsilon AB + \varepsilon \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \varepsilon^{k-1} \tau^{k-1} A^k B \right) \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} g_1^k(\tau) \right) = \varepsilon R_1(\varepsilon; 0; \tau), \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\frac{E_1(\tau, \varepsilon)}{g(\tau)} = \varepsilon R_1(\varepsilon; 0; \tau), \quad E(\tau, \varepsilon) = g(\tau) (B + \varepsilon R_1(\varepsilon; 0; \tau)),$$

$$\frac{E_1^*(\tau, \varepsilon)}{g(\tau)} = \varepsilon R_2(\varepsilon; 0; \tau), \quad E^*(\tau, \varepsilon) = g(\tau) (B^* + \varepsilon R_2(\varepsilon; 0; \tau)).$$

Теперь в силу (5.7) получаем

$$\|E^*(\tau, \varepsilon) (l_0 + \Delta l)\|^{-1} = \frac{1}{g(\tau)} \|B^* l_0 + B^* \Delta l + \varepsilon R_2(\varepsilon; 0; \tau) (l_0 + \Delta l)\|^{-1}$$

$$= \frac{1}{g(\tau)\|B^*l_0\|} \left(1 - \frac{\langle B^*l_0, B^*\Delta l \rangle}{\|B^*l_0\|^2} + \varepsilon R_3(\varepsilon, \Delta l; 0; \tau) \right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{E(\tau, \varepsilon)E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)}{\|E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)\|} &= g(\tau)(B + \varepsilon\tau R_1(\varepsilon; \tau, 0))(B^* + \varepsilon\tau R_2(\varepsilon; \tau, 0)) \frac{(l_0 + \Delta l)}{\|B^*l_0\|} \\ &\cdot \left(1 - \frac{\langle B^*l_0, B^*\Delta l \rangle}{\|B^*l_0\|^2} + \varepsilon R_3(\varepsilon, \Delta l; 0; \tau) \right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{E(\tau, \varepsilon)E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)}{\|E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)\|} = \frac{g(\tau)}{\|B^*l_0\|} \left(BB^*l_0 - \frac{BB^*l_0\langle B^*l_0, B^*\Delta l \rangle}{\|B^*l_0\|^2} \right) + \varepsilon\Delta\tau R_4(\varepsilon, \Delta l; 0; \tau).$$

Поскольку $g(\tau) = R(\tau; 1)$, из последнего равенства вытекает

$$\begin{aligned} I_{1,2,1} &= \varepsilon \int_{\Delta\tau}^0 \frac{E(\tau, \varepsilon)E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)}{\|E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)\|} d\tau + \varepsilon \int_0^1 \frac{E(\tau, \varepsilon)E^*(\Delta\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)}{\|E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)\|} d\tau \\ &= \varepsilon\Delta\tau R(\varepsilon, \Delta\tau, \Delta l; 0) + \varepsilon \frac{BB^*l_0}{\|B^*l_0\|} \int_0^1 g(\tau) d\tau + \varepsilon^2 R(\varepsilon, \Delta l; 0) \end{aligned}$$

или

$$I_{1,2,1} \stackrel{as}{=} \varepsilon \frac{BB^*l_0}{e\|B^*l_0\|} + R(\varepsilon, \Delta\tau, \Delta l; 2). \quad (5.8)$$

Теперь рассмотрим $I_{1,2,2}$. В этом случае функцию $g(\tau)$ не требуется записывать в виде асимптотического ряда, так как она не обращается в нуль на $[1; +\infty)$ и $g(\tau) \stackrel{as}{=} 1$ при $\tau \rightarrow +\infty$.

Поскольку $0 < \tau\varepsilon \leq \mu$ мало, имеем $E_1(\tau, \varepsilon)/g(\tau) = O(\mu^2)$. Поэтому $E(\tau, \varepsilon) = g(\tau)B + R((\tau\varepsilon); 1)$,

$$\begin{aligned} \|E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)\|^{-1} &= \frac{1}{g(\tau)} \|B^*(l_0 + \Delta l) + g^{-1}(\tau)R_1((\tau\varepsilon); 1)(l_0 + \Delta l)\|^{-1} \\ &= \frac{1}{g(\tau)\|B^*l_0\|} \left(1 - \frac{\langle B^*l_0, B^*\Delta l \rangle}{\|B^*l_0\|^2} + R_2(\varepsilon, \Delta l; 2; \tau) \right). \end{aligned}$$

Отметим, что коэффициенты последнего ряда пропорциональны $(\varepsilon\tau)^k/g^l(\tau)$. Поэтому

$$\frac{\varepsilon E(\tau, \varepsilon)E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)}{\|E^*(\tau, \varepsilon)(l_0 + \Delta l)\|} = \frac{\varepsilon g(\tau)BB^*l_0}{\|B^*l_0\|} + \varepsilon g(\tau)R_3((\varepsilon\tau), \Delta l; 2; \tau)$$

и коэффициенты последнего ряда также пропорциональны $(\varepsilon\tau)^k/g^l(\tau)$. Следовательно,

$$I_{1,2,2} = \frac{\varepsilon BB^*l_0}{\|B^*l_0\|} \int_1^{\mu/\varepsilon} g(\tau) d\tau + \varepsilon \int_1^{\mu/\varepsilon} (g(\tau)\varepsilon\tau R_3((\varepsilon\tau), \Delta l; 1; \tau) + R_4(\varepsilon, \Delta l; 2; \tau)) d\tau.$$

Так как

$$\varepsilon \int_1^{\mu/\varepsilon} g(\tau) d\tau = \varepsilon \left(\frac{\mu}{\varepsilon} + e^{-\mu/\varepsilon} - 1 - e^{-1} \right) = -\varepsilon(1 + e^{-1}) + \mathbb{O} + \mu,$$

а для $k \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ в силу равенства $g(\tau) \stackrel{as}{=} 1$ при $\tau \rightarrow +\infty$ справедливы асимптотики

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_1^{\mu/\varepsilon} (\varepsilon\tau)^k g^p(\tau) d\tau &= \varepsilon^{k+1} \int_1^{\mu/\varepsilon} \tau^k d\tau + \varepsilon^{k+1} \int_1^{+\infty} \tau^k (g^p(\tau) - 1) d\tau + \varepsilon^{k+1} \int_{+\infty}^{\mu/\varepsilon} \tau^k (g^p(\tau) - 1) d\tau \\ &\stackrel{as}{=} \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)} - \frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1} + \varepsilon^{k+1} \int_1^{+\infty} \tau^k (g^p(\tau) - 1) d\tau + \mathbb{O} \stackrel{as}{=} \varepsilon^{k+1} D_{k,l} + \frac{\mu^{k+1}}{(k+1)}, \end{aligned}$$

имеем

$$I_{1,2,2} \stackrel{as}{=} -\varepsilon \frac{(1 + e^{-1})BB^*l_0}{\|B^*l_0\|} + \varepsilon R(\varepsilon, \Delta l; 2) + \mu R_1(\mu, \Delta l; 0). \quad (5.9)$$

□

Доказательство теоремы 3.2. Собирая асимптотики (4.4), (5.2), (5.8), (5.9) и учитывая, что в силу леммы из [16] ряды вида $\mu R(\mu, \Delta l; 0)$ в сумме I_1 и I_2 взаимно уничтожаются, получаем асимптотическое разложение интеграла из (2.13)

$$I_1 + I_2 \stackrel{as}{=} -l_0 - e^{AT}x^0 + C_1\Delta l - \varepsilon \frac{BB^*l_0}{\|B^*l_0\|} + R(\varepsilon, \Delta\tau, \Delta l; 2), \quad (5.10)$$

где оператор C_1 определен в (3.2).

Итоговая система асимптотических равенств имеет вид

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{as}{=} (I + C_1)\Delta l + \varepsilon(e^{AT}(Ax^0 + By^0) + (A + A^*)l_0) + R(\varepsilon, \Delta\tau, \Delta l; \tau, 2), \\ 0 &\stackrel{as}{=} \Delta\tau - \varepsilon\eta_0 + R(\varepsilon, \Delta l; 2). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Поскольку в силу неравенства Коши — Буняковского $C_1 \geq 0$, оператор $(I + C_1) > 0$ обратим, а потому обратим и оператор первого приближения $\begin{pmatrix} I + C_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$ системы (5.11). Это позволяет применить теорему 1 из [17] и завершить доказательство. □

Литература

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, М. (1961).
2. Н. Н. Красовский, *Теория управления движением. Линейные системы*, Наука, М. (1968).
3. Э. Б. Ли, Л. Маркус, *Основы теории оптимального управления*, Наука, М. (1972).
4. М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина, “Сингулярные возмущения в задачах управления”, *Автом. телемех.* **2006**, No. 1, 3–51 (2006).
5. Y. Zhang, D. S. Naidu, C. Cai, Y. Zou, “Singular perturbation and time scales in control theories and applications: an overview 2002–2012”, *Int. J. Inf. Syst. Sci.* **9**, No. 1, 1–36 (2014).
6. Г. А. Курина, М. А. Калашникова, “Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными”, *Автом. телемех.* **2022**, No. 1, 3–61 (2022).
7. В. Я. Глизер, М. Г. Дмитриев, “Асимптотика решения одной сингулярно возмущенной задачи Коши, возникающей в теории оптимального управления”, *Диффер. уравн.* **14**, No. 4, 601–612 (1978).
8. N. T. Hoai, “Asymptotic solution of a singularly perturbed linear–quadratic problem in critical case with cheap control”, *J. Optim. Theory Appl* **175**, No. 2, 324–340 (2017).
9. Г. А. Курина, М. А. Калашникова, “Прямая схема асимптотического решения линейно–квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены”, *Диффер. уравн.* **55**, No. 1, 83–102 (2019).
10. А. Р. Данилин, А. М. Ильин, “Асимптотическое поведение решения задачи быстрогодействия для линейной системы при возмущении начальных данных”, *Докл. Акад. наук, Росс. Акад. наук* **350**, No. 2, 155–157 (1996).
11. А. Р. Данилин, А. М. Ильин, “О структуре решения одной возмущенной задачи быстрогодействия”, *Фундамент. прикл. мат.* **4**, No. 3, 905–926 (1998).
12. А. Р. Данилин, А. А. Шабуров, “Асимптотическое разложение решения задачи оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и дешевым управлением”, *Сиб. ж. инд. мат.* **25**, No. 3, 5–13 (2022).
13. А. Р. Данилин, “Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстростабилизирующемся непрямым управлением в регулярном случае”, *Диффер. уравн.* **42**, No. 11, 1473–1480 (2006).

14. А. Р. Данилин, А. А. Шабуров, “Асимптотика решения линейных сингулярно возмущенных задач оптимального управления с интегральным выпуклым критерием качества и “дешевым” управлением”, *Диффер. уравн.* **59**, No. 1, 85–99 (2023).
15. А. М. Ильин, А. Р. Данилин, *Асимптотические методы в анализе*, Физматлит, М. (2009).
16. А. Р. Данилин, “Асимптотика оптимального значения функционала качества при быстросtabilизирующемся непрямом управлении в сингулярном случае”, *Ж. вычисл. мат. мат. физики* **46**, No. 12, 2166–2177 (2006).
17. А. Р. Данилин, О. О. Коврижных, “Асимптотика решения одной задачи быстрогодействия с неограниченным целевым множеством для линейной системы в критическом случае”, *Тр. Инст. мат. мех. (Екатеринбург)* **28**, No. 1, 58–73 (2022).

Статья поступила в редакцию 26 июля 2024 г.

М. А. Кисатов, В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НЕЛИНЕЙНО ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ НА ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Установлены теоремы существования и единственности классического решения задачи о стационарном пограничном слое жидкости с реологическим законом Ладыженской вблизи твердой стенки с заданными условиями, характеризующими силу поверхностного натяжения и явление проскальзывания вблизи этой стенки. Получен аналитический вид скорости стекания жидкости с вертикальной стенки под действием силы тяжести и заданных граничных условий.

1. Введение

При изучении математических задач течения жидкостей вблизи твердых поверхностей традиционно используется условие прилипания. Однако иногда, ввиду реологических свойств жидкости или физических свойств поверхностей, условие прилипания может нарушаться, и тогда оно заменяется каким-либо условием проскальзывания.

Условие проскальзывания вблизи твердых стенок может возникнуть в задачах течения вязких жидкостей в канале под действием постоянного перепада давления [1, 2]. Условие проскальзывания реализуется в задачах течения бурового раствора в скважине [3, 4].

В данной статье изучается задача о пограничном слое нелинейно вязкой жидкости вблизи твердой обтекаемой стенки. Предполагается также, что жидкость удовлетворяет реологическому закону Ладыженской (см. [5]), а вблизи твердой стенки вместо привычного условия прилипания задано условие проскальзывания. Некоторые результаты по пограничному слою жидкости с реологией Ладыженской содержатся в [6]–[10].

2. Постановка задачи и формулировка основного результата

Мы рассматриваем двумерный стационарный пограничный слой жидкости в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$, $X > 0$. Предполагается, что пограничный слой подчиняется реологическому закону Ладыженской, т.е. удовлетворяет системе уравнений

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 20-11-20272).

М. А. Кисатов: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, kisatov@mail.ru.

В. Н. Самохин: Московский политехнический университет, Москва, Россия, avt428212@yandex.ru.

Г. А. Чечкин: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия, chechkin@mech.math.msu.su.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 239–254 (2025).

$$\begin{aligned} \nu g \left[1 + 3kg \left(\frac{\partial u}{\partial y} g \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + U(x) \frac{dU(x)}{dx} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где функции $U(x)$ и $p(x)$ связаны равенством $U^2(x) + 2p(x) = \text{const}$. Предполагается, что решения удовлетворяют краевым условиям

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= u_0(y), \quad u|_{y=0} = \Lambda U(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} g \Big|_{y=0} = \frac{\sigma}{\mu X}, \quad v|_{y=0} = v_0(x), \\ u(x, y) &\rightrightarrows U(x), \quad y \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ — неизвестные компоненты скорости течения жидкости, X — длина обтекаемой области, ν и μ — кинематическая и динамическая вязкости жидкости, Λ ($0 < \Lambda < 1$) — коэффициент проскальзывания вдоль границы $\{y = 0\}$, σ — коэффициент поверхностного натяжения, $p(x)$ — давление, $U(x)$ — скорость внешнего потока, $u_0(y)$ — исходный профиль скоростей и $v_0(x)$ — скорость отвода (инъекции) жидкости через границу $\{y = 0\}$.

Основные результаты первой части статьи — теоремы существования и единственности решения задачи (2.1), (2.2).

Теорема 2.1 (существование). Пусть выполнены следующие условия:

- 1) $u_0(y) > \Lambda U(0)$ при $y > 0$,
- 2) $u_0(0) = \Lambda U(0)$, $u'_0(0) = \sigma/\mu X > 0$, $u_0(y) \rightarrow U(0) \neq 0$ при $y \rightarrow \infty$,
- 3) dU/dx , $v_0(x)$ непрерывно дифференцируемы при $0 \leq x \leq X$,
- 4) $u_0(y)$, $u'_0(y)$, $u''_0(y)$ ограничены при $0 \leq y < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера.

Также предполагается, что выполнено условие согласования в точке $(0, 0)$

$$\nu g \left[1 + 3kg \left(\frac{du_0(y)}{dy} g \right)^2 \right] \frac{d^2 u_0(y)}{dy^2} - v_0(0) \frac{du_0(y)}{dy} + (1 - \Lambda^2) U(0) \frac{dU(0)}{dx} = O(y^2), \quad y \rightarrow 0.$$

Тогда при некотором $X > 0$ в области D существует решение $u(x, y)$, $v(x, y)$ задачи (2.1), (2.2), обладающее следующими свойствами:

- (1) функция $u(x, y)$ непрерывна и ограничена в $\overline{D}$,
- (2) $u(x, y) > \Lambda U(x)$ при $y > 0$,
- (3) $\partial u / \partial y > m > 0$ при $0 < y \leq y_0$, где m и y_0 — некоторые постоянные,
- (4) $\partial u / \partial y$, $\partial^2 u / \partial y^2$ непрерывны и ограничены в D ,
- (5) $\partial u / \partial x$, v , $\partial v / \partial y$ непрерывны и ограничены в любой конечной части $\overline{D}$.

Если $|u'_0(y)| \leq m_1 \exp(-m_2 y)$, $m_1, m_2 = \text{const} > 0$, то $\partial u / \partial x$, $\partial v / \partial y$ ограничены в D . В случае $dp/dx \leq 0$ и $v_0(x) \leq 0$ или $dp/dx < 0$, такое решение задачи (2.1), (2.2) существует в D при любом $X > 0$.

Теорема 2.2 (единственность). Пусть для решения $u(x, y)$, $v(x, y)$ задачи (2.1), (2.2) в области D выполнены условия теоремы 2.1 и неравенства

$$\begin{aligned} 0 &< u < M, \quad \psi > 0, \\ M_1 y &\leq u \leq M_2 y, \quad 0 < y < y_0, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \leq M_3, \quad (x, y) \in D,$$

где M , M_1 , M_2 , M_3 и y_0 — некоторые положительные постоянные. Тогда $u(x, y)$, $v(x, y)$ — единственное решение задачи (2.1), (2.2).

3. Переход к переменным Мизеса

Доказательство теорем проводится в два этапа. Сначала сделаем замену переменных фон Мизеса для сведения системы уравнений к одному нелинейному уравнению, затем докажем теоремы существования и единственности решений полученной новой краевой задачи и с помощью обратной замены получим доказательство теорем 2.1 и 2.2.

Сделаем замену переменных Мизеса

$$\begin{aligned} x &= x, \quad \psi = \psi(x, y), \quad \bar{w}(x, \psi) = u^2(x, y), \quad W(x) = U^2(x), \\ u(x, y) &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v(x, y) - v_0(x) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi|_{y=0}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

при помощи которой задача (2.1), (2.2) в области D переходит в задачу

$$\nu \sqrt{\bar{w}g} \left[1 + \frac{3}{4} kg \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \psi} g \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - v_0(x) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \psi} + \frac{dW}{dx} = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}|_{x=0} &= \bar{w}_0(\psi), \quad \bar{w}|_{\psi=0} = \Lambda^2 W(x), \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \psi} g \Big|_{\psi=0} = 2 \frac{\sigma}{\mu X}, \quad v|_{\psi=0} = v_0(x), \\ \bar{w}(x, \psi) &\rightrightarrows W(x), \quad \psi \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

в области $G = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$, $X > 0$, где $\bar{w}_0(\psi) = u_0^2(y)$.

После замены (3.1) условия теоремы 2.1 принимают следующий вид:

- 1) $\bar{w}_0(\psi) > \Lambda^2 W(0)$ при $\psi > 0$,
- 2) $\bar{w}_0(0) = \Lambda^2 W(0)$, $\bar{w}'_0(0) = 2\sigma/\mu X > 0$, $\bar{w}_0(\psi) \rightarrow W(0) \neq 0$ при $\psi \rightarrow \infty$,
- 3) dW/dx , $v_0(x)$ непрерывно дифференцируемы при $0 \leq x \leq X$,
- 4) $\bar{w}_0(\psi)$, $\bar{w}'_0(\psi)$, $\bar{w}''_0(\psi)$ ограничены при $0 \leq \psi < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера.

Предполагается, что выполнено условие согласования в точке $(0, 0)$ вида

$$\nu \sqrt{\bar{w}_0(\psi)g} \left[1 + \frac{3}{4} kg \left(\frac{d\bar{w}_0(\psi)}{d\psi} g \right)^2 \right] \frac{d^2 \bar{w}_0(\psi)}{d\psi^2} - v_0(0) \frac{d\bar{w}_0(\psi)}{d\psi} + (1 - \Lambda^2) \frac{dW(0)}{dx} = O(\psi), \quad \psi \rightarrow 0.$$

4. Существование решения задачи в переменных Мизеса

Произведем замену неизвестной функции

$$w(x, \psi) = \bar{w}(x, \psi) - \Lambda^2 W(x), \quad w_0(\psi) = \bar{w}_0(\psi) - \Lambda^2 W(0), \quad (4.1)$$

которая сводит задачу (3.2), (3.3) с «проскальзыванием» в области G к следующей задаче с «прилипанием»:

$$\nu \sqrt{w + \Lambda^2 W(x)g} \left[1 + \frac{3}{4} kg \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} g \right)^2 \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - v_0(x) \frac{\partial w}{\partial \psi} + (1 - \Lambda^2) \frac{dW}{dx} = 0, \quad (4.2)$$

$$w|_{x=0} = w_0(\psi), \quad w|_{\psi=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \psi} g \Big|_{\psi=0} = 2 \frac{\sigma}{\mu X}, \quad v|_{\psi=0} = v_0(x), \quad (4.3)$$

$$w(x, \psi) \rightrightarrows (1 - \Lambda^2) W(x), \quad \psi \rightarrow +\infty$$

в области G .

С учетом замен (3.1), (4.1) условия теоремы 2.1 принимают следующий вид:

- 1) $w_0(\psi) > 0$ при $\psi > 0$,
- 2) $w_0(0) = 0$, $w'_0(0) = 2\sigma/\mu X > 0$, $w_0(\psi) \rightarrow (1 - \Lambda^2)W(0) \neq 0$ при $\psi \rightarrow \infty$,
- 3) dW/dx , $v_0(x)$ непрерывно дифференцируемы при $0 \leq x \leq X$,
- 4) $w_0(\psi)$, $w'_0(\psi)$, $w''_0(\psi)$ ограничены при $0 \leq \psi < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера.

Предполагается, что выполнено условие согласования в окрестности точки $(0, 0)$ вида

$$\begin{aligned} \Psi(\psi) = \nu \sqrt{w_0(\psi) + \Lambda^2 W(0)} g \left[1 + \frac{3}{4} k g \left(\frac{dw_0(\psi)}{d\psi} g \right)^2 g \right] \frac{d^2 w_0(\psi)}{d\psi^2} \\ - v_0(0) \frac{dw_0(\psi)}{d\psi} + (1 - \Lambda^2) \frac{dW(0)}{dx} = O(\psi), \quad \psi \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Следующие теоремы будут доказаны в § 6.

Теорема 4.1. Пусть

- 1) $w_0(\psi) > 0$ при $\psi > 0$,
- 2) $w_0(0) = 0$, $w'_0(0) = 2\sigma/\mu X > 0$, $w_0(\psi) \rightarrow (1 - \Lambda^2)W(0) \neq 0$ при $\psi \rightarrow \infty$,
- 3) dW/dx , $v_0(x)$ непрерывно дифференцируемы при $0 \leq x \leq X$,
- 4) $w_0(\psi)$, $w'_0(\psi)$, $w''_0(\psi)$ ограничены при $0 \leq \psi < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера.

Предполагается, что выполнено условие согласования (4.4) в точке $(0, 0)$, т.е. $\Psi(\psi) = O(\psi)$ при $\psi \rightarrow 0$.

Тогда задача (4.2), (4.3) имеет в области G решение $w(x, \psi)$ такое, что $w(x, \psi)$ ограничено в $\overline{G}$, $w(x, \psi) > 0$ при $\psi > 0$ и

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial w}{\partial \psi} \right| \leq M_{14}, \quad \left| \sqrt{w + \Lambda^2 W(x)} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} \right| \leq M_{14}, \quad (x, \psi) \in G, \\ \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| \leq M_{14} \psi^{1-\beta}, \quad \frac{\partial w}{\partial \psi} \geq M_{15} > 0, \quad 0 \leq \psi \leq \psi_2, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где положительные постоянные M_{14} , M_{15} , ψ_2 зависят от заданных функций $U(x)$, $u_0(y)$, $v_0(x)$ и значения X . Если $dU/dx \geq 0$ и $v_0(x) \leq 0$ либо $dU/dx > 0$, то решение $w(x, \psi)$ с указанными свойствами существует в G при любом $X > 0$.

Теорема 4.2. Пусть

- 1) $\overline{w}_0(\psi) > \Lambda^2 W(0)$ при $\psi > 0$,
- 2) $\overline{w}_0(0) = \Lambda^2 W(0)$, $\overline{w}'_0(0) = 2\sigma/\mu X > 0$, $\overline{w}_0(\psi) \rightarrow W(0) \neq 0$ при $\psi \rightarrow \infty$,
- 3) dW/dx , $v_0(x)$ непрерывно дифференцируемы при $0 \leq x \leq X$,
- 4) $\overline{w}_0(\psi)$, $\overline{w}'_0(\psi)$, $\overline{w}''_0(\psi)$ ограничены при $0 \leq \psi < \infty$ и удовлетворяют условию Гёльдера.

Предполагается, что выполнено условие согласования в точке $(0, 0)$

$$\nu \sqrt{\overline{w}_0(\psi)} g \left[1 + \frac{3}{4} k g \left(\frac{d\overline{w}_0(\psi)}{d\psi} g \right)^2 g \right] \frac{d^2 \overline{w}_0(\psi)}{d\psi^2} - v_0(0) \frac{d\overline{w}_0(\psi)}{d\psi} + (1 - \Lambda^2) \frac{dW(0)}{dx} = O(\psi), \quad \psi \rightarrow 0.$$

Тогда задача (3.2), (3.3) имеет в области G решение $\overline{w}(x, \psi)$ такое, что $\overline{w}(x, \psi)$ ограничено в $\overline{G}$, $\overline{w}(x, \psi) > 0$ при $\psi > 0$ и

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \overline{w}}{\partial \psi} \right| \leq M_{16}, \quad \left| \sqrt{\overline{w}} \frac{\partial^2 \overline{w}}{\partial \psi^2} \right| \leq M_{16}, \quad (x, \psi) \in G, \\ \left| \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} \right| \leq M_{16} \psi^{1-\beta}, \quad \frac{\partial \overline{w}}{\partial \psi} \geq M_{17} > 0, \quad 0 \leq \psi \leq \psi_3, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где положительные постоянные M_{16} , M_{17} и ψ_3 зависят от заданных функций $U(x)$, $u_0(y)$, $v_0(x)$ и значения X . Если $dU/dx \geq 0$ и $v_0(x) \leq 0$ либо $dU/dx > 0$, то решение $\overline{w}(x, \psi)$ с указанными свойствами существует в G при любом $X > 0$.

5. Вспомогательные леммы

Доказательство существования решения задачи (4.2), (4.3) проводится следующим образом. Мы получаем решение $w(x, \psi)$ задачи (4.2), (4.3) как предел при $\varepsilon \rightarrow 0$ последовательности решений $w_\varepsilon(x, \psi)$ уравнения (4.2) с граничными условиями

$$\begin{aligned} w_\varepsilon(x, 0) &= w_0(\varepsilon) \exp\left(\frac{\mu(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right), \quad w_\varepsilon(0, \psi) = w_0(\varepsilon + \psi), \\ w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) &= w_0\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{\mu(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon})x}{w_0(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon})}\right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

в области $G_\varepsilon = \{0 < x < X, 0 < \psi < 1/\varepsilon\}$ с границей

$$\Gamma_\varepsilon = \{0 < x < X, \psi = 0\} \cup \left\{x = 0, 0 < \psi < \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \left\{0 < x < X, \psi = \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

Лемма 5.1. Если задача (4.2), (5.1) имеет положительное решение $w_\varepsilon(x, \psi)$ в области G_ε , то существуют $X > 0$ и $\varepsilon_0 > 0$ такие, что для любого $\varepsilon < \varepsilon_0$ в области G_ε выполнено неравенство

$$w_\varepsilon(x, \psi) \geq w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)(1 + e^{-\alpha x}), \quad (5.2)$$

где $\alpha > 0$, а функция $f(\psi)$ такова, что $f(\psi) = A_1\psi^{4/3} + A_2\psi$ при $\psi \leq 1$ и $f(1) \leq f(\psi) \leq A_3$ при $\psi > 1$; при этом $|f'(\psi)| \leq A_4$, $|f''(\psi)| \leq A_5$ при $\psi > 1$. Здесь A_i — положительные постоянные.

Если $U'(x) \geq 0$ и $v_0(x) \leq 0$, то в области G_ε верна априорная оценка

$$w_\varepsilon(x, \psi) \geq w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)e^{-\alpha x} \quad (5.3)$$

при любом $X > 0$ и достаточно малом $\varepsilon_0 > 0$.

Если $U'(x) \geq \beta_0 > 0$, то в области G_ε имеет место неравенство

$$w_\varepsilon(x, \psi) \geq w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi). \quad (5.4)$$

Доказательство. Пусть

$$\Phi_\varepsilon(x, \psi) = w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)(1 + e^{-\alpha x}), \quad \alpha = \text{const} > 0.$$

Тогда в силу регуляризованных условий (5.1)

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(x, 0) &= w_\varepsilon(x, 0), \\ \Phi_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) &= w_\varepsilon(x, 0) + f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(1 + e^{-\alpha x}) = w_0(\varepsilon) \exp\left(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right) \\ &\quad + f\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)(1 + e^{-\alpha x}) \leq w_0(\varepsilon) \exp\left(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right) + 2A_3. \end{aligned}$$

При достаточно малом ε и некоторых постоянных C_1 и C_2 справедливо неравенство

$$\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)} \leq \frac{C_1\varepsilon x}{C_2\varepsilon} \leq Cx, \quad (5.5)$$

из которого следует оценка

$$\Phi_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) \leq C_3\varepsilon e^{Cx} + 2A_3 \leq C_3\varepsilon e^{CX} + 2A_3,$$

где C_3 — постоянная. С другой стороны,

$$w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) = w_0\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{\Psi(\varepsilon + 1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon + 1/\varepsilon)}\right) \geq w_0\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

при достаточно малом значении ε . Следовательно, можно выбрать значения параметров ε и A_3 так, чтобы выполнялась цепочка неравенств

$$\Phi_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right) < w_0\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \leq w_\varepsilon\left(x, \frac{1}{\varepsilon}\right). \quad (5.6)$$

Далее,

$$\Phi_\varepsilon(0, \psi) = w_0(\varepsilon) + 2f(\varepsilon) = w_0(\varepsilon) + 2A_1\varepsilon^{\frac{4}{3}} + 2A_2\varepsilon < w_0(\varepsilon + \psi) \quad (5.7)$$

при достаточно малых значениях параметров A_1, A_2 , так как $w_0(\psi)$ возрастает при малых значениях ψ . Поскольку $w_0(\psi) \rightarrow (1 - \Lambda^2)W(0) > 0$, при больших ψ и малых ε , имеет место неравенство $w_0(\varepsilon + \psi) > w_0(\varepsilon)$.

Введем оператор

$$L(w) \equiv \nu \sqrt{w + \Lambda^2 W(x)} g \left[1 + \frac{3}{4} k g \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} g \right)^2 g \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - v_0(x) \frac{\partial w}{\partial \psi}$$

и рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} L(\Phi_\varepsilon) &= \nu \sqrt{\Phi_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \left(1 + \frac{3}{4} k (f'(\psi)(1 + e^{-\alpha x}))^2 \right) f''(\psi)(1 + e^{-\alpha x}) \\ &\quad - \frac{\partial w_\varepsilon(x, 0)}{\partial x} + \alpha f(\psi) e^{-\alpha x} - v_0(x) f'(\psi)(1 + e^{-\alpha x}). \end{aligned}$$

Тогда при $\psi \leq 1$ получим

$$\begin{aligned} L(\Phi_\varepsilon) &= \nu \sqrt{w_\varepsilon(x, 0) + (A_1 \psi^{\frac{4}{3}} + A_2 \psi)(1 + e^{-\alpha x}) + \Lambda^2 W(x)} \\ &\quad \times \left(1 + \frac{3}{4} k g \left(\left(\frac{4}{3} A_1 \psi^{\frac{1}{3}} + A_2 \right) (1 + e^{-\alpha x}) g \right)^2 \right) \frac{4}{9} A_1 \psi^{-\frac{2}{3}} (1 + e^{-\alpha x}) \\ &\quad - \Psi(\varepsilon) \exp \left(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)} \right) + \alpha (A_1 \psi^{\frac{4}{3}} + A_2 \psi) e^{-\alpha x} - v_0(x) \left(\frac{4}{3} A_1 \psi^{\frac{1}{3}} + A_2 \right) (1 + e^{-\alpha x}) \\ &\geq \nu \frac{4}{9} \sqrt{A_2 \psi} A_1 \psi^{-\frac{2}{3}} - \Psi(\varepsilon) \exp \left(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)} \right) + \alpha (A_1 \psi^{\frac{4}{3}} + A_2 \psi) e^{-\alpha x} \\ &\quad - v_0(x) \left(\frac{4}{3} A_1 \psi^{\frac{1}{3}} + A_2 \right) (1 + e^{-\alpha x}). \end{aligned}$$

В силу оценки (5.5) из последнего соотношения следует

$$L(\Phi_\varepsilon) \geq \nu \frac{4}{9} \sqrt{A_2} A_1 \psi^{-1/6} - h(x),$$

где

$$h(x) = |\Psi(\varepsilon)| e^{Cx} - 2|v_0(x)| \left(\frac{4}{3} A_1 + A_2 \right).$$

При $0 < x < X$ имеем

$$h(x) + (1 - \Lambda^2) \left| \frac{dW}{dx} \right| \leq C_4,$$

где C_4 — постоянная. Поскольку $\psi^{-1/6} \rightarrow +\infty$ при $\psi \rightarrow 0$, существует $\psi_1 > 0$ такое, что при всех $\psi \in (0, \psi_1)$

$$\nu \frac{4}{9} \sqrt{A_2} A_1 \psi^{-\frac{1}{6}} > h(x) + (1 - \Lambda^2) \left| \frac{dW}{dx} \right|.$$

Следовательно, при всех $\psi \in (0, \psi_1)$

$$L(\Phi_\varepsilon) \geq (1 - \Lambda^2) \left| \frac{dW}{dx} \right|.$$

При $\psi \geq \psi_1$ функция $f(\psi)$ такова, что $f(\psi) \geq \delta > 0$, а значение X выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $e^{-\alpha X} \geq 1/2$. Тогда

$$L(\Phi_\varepsilon) \geq \nu \sqrt{\Phi_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} f''(\psi)(1 + e^{-\alpha x}) - \Psi(\varepsilon) \exp \left(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)} \right) + \frac{\alpha \delta}{2}$$

$$-v_0(x)f'(\psi)(1+e^{-\alpha x}) \geq \frac{\alpha\delta}{2} - C_5 \geq (1-\Lambda^2) \left| \frac{dW}{dx} \right|$$

при достаточно больших значениях α и некоторой постоянной C_5 . Поскольку

$$L(w_\varepsilon) - L(\Phi_\varepsilon) \leq -(1-\Lambda^2) \frac{dW}{dx} - (1-\Lambda^2) \left| \frac{dW}{dx} \right| \leq 0,$$

а на границе Γ_ε в силу оценок (5.6), (5.7) имеем неравенство

$$w_\varepsilon(x, \psi) - \Phi_\varepsilon(x, \psi) \geq 0,$$

по принципу максимума $w_\varepsilon(x, \psi) - \Phi_\varepsilon(x, \psi) \geq 0$ всюду в $\overline{G}_\varepsilon$.

Для доказательства оценки (5.3) значения постоянных A_1, A_2, A_3 выбираются так, чтобы при $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ на границе Γ_ε выполнялось неравенство

$$\Phi_\varepsilon^1(x, \psi) \equiv w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)e^{-\alpha x} \leq w_\varepsilon(x, \psi).$$

В области G_ε рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} L(\Phi_\varepsilon^1) &= e^{-\alpha x} g(\nu \sqrt{\Phi_\varepsilon^1 + \Lambda^2 W(x)} \left(1 + \frac{3}{4} k(f'(\psi)e^{-\alpha x})^2 \right) f''(\psi) \\ &+ \alpha f(\psi) - v_0(x)f'(\psi)g - \Psi(\varepsilon) \exp\left(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right). \end{aligned}$$

По условию теоремы 2.1 $v_0(x) \leq 0$. Поэтому множитель при $e^{-\alpha x}$ в правой части последнего выражения положителен при достаточно больших значениях α . Следовательно, $L(\Phi_\varepsilon^1) \geq 0$ при малых ε . Отсюда следует

$$L(w_\varepsilon) - L(\Phi_\varepsilon^1) \leq -(1-\Lambda^2) \frac{dW}{dx} \leq 0.$$

Поскольку $w_\varepsilon - \Phi_\varepsilon^1 \geq 0$ на границе Γ_ε , согласно принципу максимума справедливо неравенство $w_\varepsilon - \Phi_\varepsilon^1 \geq 0$ всюду в $\overline{G}_\varepsilon$.

Если $U'(x) \geq -\beta_0 > 0$, то постоянные $A_1, \dots, A_5$ и ε_0 выбираются так, чтобы при $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполнялись неравенства $L(w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)) \geq -\beta_0$ в G_ε и $w_\varepsilon(x, \psi) \geq w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)$ на Γ_ε . Тогда $L(w_\varepsilon) - L(w_\varepsilon(x, 0) + f(\psi)) \leq 0$. Следовательно, по принципу максимума в области G_ε справедлива оценка (5.4). $\square$

Лемма 5.2 ([11, лемма 2]). Пусть $w_\varepsilon(x, \psi)$ — решение задачи (4.2), (5.1). Тогда существуют положительные, постоянные M_4, M_5, M_6 , не зависящие от ε и такие, что

$$0 < w_\varepsilon(x, \psi) < M_4, \tag{5.8}$$

$$M_5 < \frac{\partial w}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} < M_6. \tag{5.9}$$

Лемма 5.3. Существует постоянная M_7 такая, что

$$\left| \frac{\partial w}{\partial \psi} \right| \leq M_7, \quad (x, \psi) \in G_\varepsilon.$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (4.2) по переменной ψ и положим $z_\varepsilon = \partial w_\varepsilon / \partial \psi$. Имеем

$$\begin{aligned} &\nu \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \left(1 + \frac{3}{4} k z_\varepsilon^2 \right) \frac{\partial^2 z_\varepsilon}{\partial \psi^2} + \frac{3}{2} \nu k \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} z_\varepsilon \left(\frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \psi} \right)^2 \\ &+ \frac{\nu}{2 \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}} \left(1 + \frac{3}{4} k z_\varepsilon^2 \right) z_\varepsilon \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \psi} - \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x} - v_0(x) \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial \psi} = 0. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Решение z_ε уравнения (5.10) ограничено на Γ_ε . Действительно, при $\psi = 0$ функция z_ε ограничена равномерно по ε в силу оценок (5.9). При $x = 0$ функция

$$z_\varepsilon(0, \psi) = \partial w_0(\psi + \varepsilon) / \partial \psi$$

ограничена равномерно по ε согласно условиям на $w_0(\psi)$. Для доказательства ограниченности z_ε при $\psi = 1/\varepsilon$ рассматривается оператор

$$L_1(w) = \nu \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} g \left[1 + \frac{3}{4} k \left(\frac{\partial w}{\partial \psi} \right)^2 g \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{\partial w}{\partial x} - v_0(x) \frac{\partial w}{\partial \psi}.$$

Пусть

$$\Phi_1(x, \psi) = w_\varepsilon \left(x, \frac{1}{\varepsilon} \right) + A_6 \left(1 - \exp \left(A_7 \psi - \frac{A_7}{\varepsilon} \right) \right),$$

где A_6, A_7 — некоторые положительные постоянные, ε — достаточно малый параметр, $1/\varepsilon - 1 \leq \psi \leq 1/\varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} L_1(\Phi_1) &= \nu \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} g \left(1 + \frac{3}{4} k \left(A_6 A_7 e^{A_7(\psi - 1/\varepsilon)} \right)^2 g \right) (-A_6 A_7^2 e^{A_7(\psi - 1/\varepsilon)}) \\ &\quad - s \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) \exp g \left(\frac{\Psi(\varepsilon + 1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon + 1/\varepsilon)} g \right) + v_0(x) A_6 A_7 e^{A_7(\psi - 1/\varepsilon)} < -(1 - \Lambda^2) \left| \frac{dW}{dx} \right| \end{aligned}$$

при достаточно больших значениях A_6 и A_7 . Значит

$$L_1(w_\varepsilon) - L_1(\Phi_1) > -(1 - \Lambda^2) \frac{dW}{dx} + (1 - \Lambda^2) \left| \frac{dW}{dx} \right| \geq 0.$$

При необходимости можно увеличить значение A_6 так, чтобы выполнялось неравенство

$$\Phi_1(0, \psi) = w_0 \left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \right) + A_6 (1 - e^{A_7(\psi - 1/\varepsilon)}) \geq w_\varepsilon(0, \psi).$$

Это можно сделать в силу оценок (5.8), поскольку $w_\varepsilon(0, \psi) \leq M_4$.

Далее,

$$\Phi_1 \left(x, \frac{1}{\varepsilon} \right) = w_\varepsilon \left(x, \frac{1}{\varepsilon} \right),$$

$$\Phi_1 \left(x, \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right) = w_\varepsilon \left(x, \frac{1}{\varepsilon} \right) + A_6 (1 - e^{-A_7}) \geq M_4 \geq w_\varepsilon \left(x, \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right)$$

при достаточно больших значениях A_6 . Отсюда и из принципа максимума следует, что $w_\varepsilon(x, \psi) \leq \Phi_1(x, \psi)$ при $1/\varepsilon - 1 \leq \psi \leq 1/\varepsilon$. Следовательно,

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \Big|_{\psi = \frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{\psi \rightarrow 1/\varepsilon - 0} \frac{w_\varepsilon(x, \psi) - w_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon})}{\psi - \frac{1}{\varepsilon}} \geq \lim_{\psi \rightarrow 1/\varepsilon - 0} \frac{A_6 (1 - e^{A_7 \psi - \frac{A_7}{\varepsilon}})}{\psi - \frac{1}{\varepsilon}} = -A_6 A_7.$$

Аналогичным образом устанавливается, что при достаточно больших значениях постоянных A_8 и A_9 имеет место оценка

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \Big|_{\psi = \frac{1}{\varepsilon}} \leq A_8 A_9.$$

Итак, ограниченность функции $\left| \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \right|$ на Γ_ε доказана. Отсюда и из принципа максимума следует, что $|z_\varepsilon|$ ограничено равномерно по ε во всей области G_ε . $\square$

Лемма 5.4. *Существуют положительные постоянные M_8 и M_9 , не зависящие от ε и такие, что в области G_ε выполнены оценки*

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \geq -M_8, \quad \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} \geq -M_9.$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (4.2) по переменной x в области G_ε , затем положим $r_\varepsilon = \partial w_\varepsilon / \partial x$ и примем во внимание, что

$$\nu g \left[1 + \frac{3}{4} k \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \right)^2 g \right] \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} = \frac{1}{\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}} \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} + v_0(x) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - (1 - \Lambda^2) \frac{dW}{dx} \right).$$

Имеем

$$\nu \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \left[1 + \frac{3}{4} k \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \right)^2 g \right] \frac{\partial^2 r_\varepsilon}{\partial \psi^2} + \left(\frac{3}{2} \nu k \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} - v_0(x) \right) \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial \psi}$$

$$+ \frac{1}{2(w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x))} \left(r_\varepsilon + \Lambda^2 \frac{dW}{dx} \right) \left(r + v_0(x) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - (1 - \Lambda^2) \frac{dW}{dx} \right) - \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x} - \frac{dv_0}{dx} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} + (1 - \Lambda^2) \frac{d^2 W}{dx^2} = 0.$$

Пусть (x_0, ψ_0) — точка минимума функции r_ε в области G_ε . Тогда в точке (x_0, ψ_0)

$$r_\varepsilon < 0, \quad \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial r_\varepsilon}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial^2 r_\varepsilon}{\partial \psi^2} \geq 0.$$

Следовательно, в точке (x_0, ψ_0) имеет место неравенство

$$r_\varepsilon^2 + v_0(x) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} r_\varepsilon + (2\Lambda^2 - 1) \frac{dW}{dx} r_\varepsilon \leq 2(w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)) \left[\frac{dv_0}{dx} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} - (1 - \Lambda^2) \frac{d^2 W}{dx^2} \right] - \Lambda^2 v_0(x) \frac{dW}{dx} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} + \Lambda^2 (1 - \Lambda^2) \left(\frac{dW}{dx} \right)^2.$$

Согласно леммам 5.2 и 5.3 функции w_ε и $\partial w_\varepsilon / \partial \psi$ ограничены в области G_ε . Тогда из последнего неравенства получаем, что $r_\varepsilon \geq -M_8$ во всех внутренних точках области G_ε .

При достаточно малых значениях ε , учитывая (5.1) и (5.5), получаем оценки на границе Γ_ε

$$\frac{\partial w_\varepsilon(x, 0)}{\partial x} = \Psi(\varepsilon) \exp\left(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)}\right) \geq -M_8,$$

$$\frac{\partial w_\varepsilon(x, \frac{1}{\varepsilon})}{\partial x} = s\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \exp\left(\frac{\Psi(\varepsilon + 1/\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon + 1/\varepsilon)}\right) \geq -M_8,$$

$$\frac{\partial w_\varepsilon(0, \psi)}{\partial x} = \Psi(\varepsilon + \psi) \geq -M_8.$$

Таким образом, оценка $r_\varepsilon = \partial w_\varepsilon / \partial x \geq -M_8$ выполняется во всей области G_ε . Учитывая уравнение (4.2), в области G_ε получаем неравенство

$$\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} \geq -M_9.$$

Лемма доказана. $\square$

Лемма 5.5 ([11, лемма 5]). В области G_ε при $\psi \geq \psi_* > 0$ решения w_ε задачи (4.2), (5.1) имеют производные $\partial w_\varepsilon / \partial \psi$, $\partial^2 w_\varepsilon / \partial \psi^2$, $\partial w_\varepsilon / \partial x$, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем максимум модулей этих производных ограничен постоянной, не зависящей от ε , но зависящей от ψ_* .

Лемма 5.6. Для решения задачи (4.2), (5.1) в области G_ε существуют положительные постоянные M_{10} , M_{11} , M_{12} , не зависящие от ε и такие, что

$$\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} \leq M_{10}, \quad \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \leq M_{11}, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \geq M_{12}, \quad 0 \leq \psi \leq \tilde{\psi} \quad (5.12)$$

для некоторого $\tilde{\psi} > 0$.

Доказательство. В силу леммы 5.5 для доказательства леммы 5.6 достаточно показать выполнение оценок (5.11) и (5.12) в области $G_\varepsilon \cap \{\psi \leq \tilde{\psi}\}$ для некоторого $\tilde{\psi} > 0$.

Установим сначала справедливость неравенства (5.12) при $0 \leq \psi \leq \tilde{\psi}$, где $\tilde{\psi}$ достаточно мало. Имеем

$$\frac{\partial w_\varepsilon(x, \psi)}{\partial \psi} = \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \Big|_{\psi=0} + \int_0^\psi \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} d\psi.$$

Согласно лемме 5.1 $w_\varepsilon \geq A_{10}\psi$ при $\psi \leq 1$. Поэтому при $\psi \leq \tilde{\psi}$ и достаточно малом $\tilde{\psi}$ из лемм 5.2, 5.4 следует

$$\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial \psi} \geq M_5 - \int_0^\psi \frac{M_9}{\sqrt{A_{10}\psi}} d\psi \geq M_{12}.$$

Докажем теперь неравенства (5.11). Рассмотрим уравнение (5.10), сделаем в нем замену $z_\varepsilon = \varphi(S_\varepsilon)$ и обозначим $\delta = \partial S_\varepsilon / \partial \psi$. Получим уравнение для δ

$$\begin{aligned} & \nu \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \left(1 + \frac{3}{4} k \varphi^2\right) \left(\frac{\varphi''}{\varphi'} \delta^2 + \frac{\partial \delta}{\partial \psi}\right) + \frac{3}{2} \nu k \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \varphi \varphi' \delta^2 \\ & + g \left[\frac{\nu}{2 \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}} \left(1 + \frac{3}{4} k \varphi^2\right) \varphi - v_0(x) g \right] \delta - \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Продифференцируем последнее соотношение по ψ и введем новую функцию $q = \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \delta$. Далее, предположим, что положительный максимум функции q принимается во внутренней точке области $G_\varepsilon \cap \{\psi \leq \tilde{\psi}\}$. Тогда имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{\nu q^3}{\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}} g \left[\frac{3k}{2} (2\varphi \varphi'' + \varphi'^2) + \left(1 + \frac{3}{4} k \varphi^2\right) \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)' g \right] \\ & + \frac{q^2}{(w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x))^{\frac{3}{2}}} g \left[-\frac{\nu}{2} \frac{\varphi''}{\varphi'} \varphi \left(1 + \frac{3}{4} k \varphi^2\right) + \frac{\nu}{2} \left(1 + \frac{3}{4} k \varphi^2\right) \varphi' - \frac{3\nu k}{2} \varphi \varphi' g \right] \\ & - (1 - \Lambda^2) \frac{dW}{dx} \frac{q}{(w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x))^{3/2}} \geq 0. \end{aligned}$$

Положим

$$\varphi(S_\varepsilon) = \frac{M_{12}}{2} (e^{S_\varepsilon} + 1).$$

При таком выборе функции $\varphi(S_\varepsilon)$ из последнего неравенства следует ограниченность функции q в области G_ε при $\psi \leq \tilde{\psi}$.

Оценим теперь функцию q на границе области G_ε при $\psi \leq \tilde{\psi}$. Имеем

$$q = \sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \frac{\partial S_\varepsilon}{\partial \psi} = \frac{\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)}}{\varphi'(S_\varepsilon)} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2}.$$

При $\psi = \tilde{\psi}$ производные $\partial^2 w_\varepsilon / \partial \psi^2$ ограничены [12, лемма 2.1.7]. Следовательно, производные $\partial^2 w_\varepsilon / \partial \psi^2$ равномерно ограничены по ε и q . Далее, q равномерно по ε ограничена при $x = 0$ и $\psi = 0$ в силу предположений относительно функций $u_0(y)$, $v_0(x)$ и $U(x)$. Поэтому

$$\sqrt{w_\varepsilon + \Lambda^2 W(x)} \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial \psi^2} = \varphi'(S_\varepsilon) q \leq M_{10}.$$

Отсюда и из уравнения (4.2) вытекает вторая оценка в (5.11). $\square$

Лемма 5.7. В области G_ε имеет место оценка

$$\left| w_\varepsilon^{\beta-1} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \right| \leq M_{13}, \quad 0 < \beta < \frac{1}{2}, \quad (5.13)$$

где значение постоянной M_{13} не зависит от ε .

Доказательство. Из леммы 5.5 вытекает требуемая оценка при $\psi \geq \psi_*$. Поэтому достаточно доказать оценку (5.13) при $0 \leq \psi \leq \psi_*$. Положим $w_\varepsilon = \tau^\gamma$, где $\gamma = 1/\beta$, и оценим выражение $|\partial \tau / \partial x|$ для достаточно малого ψ_* . Получим из уравнения (4.2)

$$\begin{aligned} & \nu \sqrt{\tau^\gamma + \Lambda^2 W(x)} g \left[1 + \frac{3}{4} k \gamma^2 \tau^{2\gamma-2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \psi}\right)^2 g \right] g \left[\gamma(\gamma-1) \tau^{\gamma-2} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \psi}\right)^2 + \gamma \tau^{\gamma-1} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \psi^2} g \right] \\ & - \gamma \tau^{\gamma-1} \frac{\partial \tau}{\partial x} - v_0(x) \gamma \tau^{\gamma-1} \frac{\partial \tau}{\partial \psi} + (1 - \Lambda^2) \frac{dW}{dx} = 0. \end{aligned}$$

Продифференцируем уравнение по x и положим $\omega = \partial\tau/\partial x$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{\nu}{\sqrt{\tau^\gamma + \Lambda^2 W(x)}} g \left(\gamma \tau^{\gamma-1} \omega + \Lambda^2 \frac{dW}{dx} g \right) g \left[1 + \frac{3}{4} k \gamma^2 \tau^{2\gamma-2} \left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi} \right)^2 g \right] \\ & g \left[\gamma(\gamma-1) \tau^{\gamma-2} \left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi} \right)^2 + \gamma \tau^{\gamma-1} \frac{\partial^2 \tau}{\partial\psi^2} g \right] \\ & + \nu \sqrt{\tau^\gamma + \Lambda^2 W(x)} g \left[\frac{3}{4} k \gamma^2 \left((2\gamma-2) \tau^{\gamma-3} \omega \left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi} \right)^2 + 2 \tau^{2\gamma-2} \frac{\partial\tau}{\partial\psi} \frac{\partial\omega}{\partial\psi} \right) g \right] \\ & \times g \left[\gamma(\gamma-1) \tau^{\gamma-2} \left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi} \right)^2 + \gamma \tau^{\gamma-1} \frac{\partial^2 \tau}{\partial\psi^2} g \right] \\ & + \nu \sqrt{\tau^\gamma + \Lambda^2 W(x)} g \left[1 + \frac{3}{4} k \gamma^2 \tau^{2\gamma-2} \left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi} \right)^2 g \right] \\ & \times g \left[\gamma(\gamma-1)(\gamma-2) \tau^{\gamma-3} \omega \left(\frac{\partial\tau}{\partial\psi} \right)^2 + 2\gamma(\gamma-1) \tau^{\gamma-2} \frac{\partial\tau}{\partial\psi} \frac{\partial\omega}{\partial\psi} \right. \\ & \left. + \gamma(\gamma-1) \tau^{\gamma-2} \omega \frac{\partial^2 \tau}{\partial\psi^2} + \gamma \tau^{\gamma-1} \frac{\partial^2 \omega}{\partial\psi^2} g \right] \\ & - \gamma(\gamma-1) \tau^{\gamma-2} \omega^2 - \gamma \tau^{\gamma-1} \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{dv_0}{dx} \gamma \tau^{\gamma-1} \frac{\partial\tau}{\partial\psi} \\ & - v_0(x) \gamma(\gamma-1) \tau^{\gamma-2} \omega \frac{\partial\tau}{\partial\psi} - v_0(x) \gamma \tau^{\gamma-1} \frac{\partial\omega}{\partial\psi} + (1 - \Lambda^2) \frac{d^2 W}{dx^2} = 0. \end{aligned}$$

Из лемм 5.4, 5.6 вытекает ограниченность коэффициента при ω в последнем уравнении при $0 \leq \psi \leq \psi_*$ для достаточно малого ψ_* . Поэтому если $|\omega|$ достигает наименьшего значения внутри области $G_\varepsilon \cap \{\psi \leq \psi_*\}$, то $|\omega|$ равномерно ограничен внутри области $G_\varepsilon \cap \{\psi \leq \psi_*\}$.

Если $|\omega|$ принимает наибольшее значение при $\psi = 0$, то его равномерная по ε оценка следует из равенства

$$\left. \frac{\partial\tau}{\partial x} \right|_{\psi=0} = \frac{1}{\gamma} w_\varepsilon^{\frac{1}{\gamma}-1} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} g \left[w_0(\varepsilon) \exp \left(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)} \right) g \right]^{1/\gamma-1} \Psi(\varepsilon) \exp \left(\frac{\Psi(\varepsilon)x}{w_0(\varepsilon)} \right).$$

Последнее выражение равномерно ограничено по ε в силу наложенных требований на функции $\Psi(\psi)$ и $w_0(\psi)$.

Если $|\omega|$ достигает своего наибольшего значения при $x = 0$, то оно не превосходит ограниченного равномерно по ε выражения

$$\max \left| \frac{\partial\tau}{\partial x} \right| g|_{x=0} = \max \frac{1}{\gamma} [w_0(\varepsilon + \psi)]^{\frac{1}{\gamma}-1} \left| \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} \right| = \max \left| \frac{1}{\gamma} w_0^{\frac{1}{\gamma}-1}(\varepsilon + \psi) \Psi(\varepsilon + \psi) \right|.$$

При $\psi = \psi_*$ оценка для $|\omega|$ уже установлена в лемме 5.5. □

6. Доказательство теорем 4.1 и 4.2

Из лемм 5.1–5.7 следует, что из последовательности решений $w_\varepsilon(x, \psi)$ задачи (4.2), (5.1) можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся при $\psi \leq N$ в области G и такую, что ее частные производные $\partial w_\varepsilon / \partial x$, $\partial w_\varepsilon / \partial \psi$, $\partial^2 w_\varepsilon / \partial \psi^2$ сходятся равномерно при $1/N \leq \psi \leq N$, где $N > 1$ — любое заданное число. Предельная функция этой подпоследовательности $w(x, \psi)$ является решением задачи (4.2), (4.3) в области G . Для частных производных функции $w(x, \psi)$ справедливы неравенства, установленные в леммах 5.1–5.7. Таким образом, теорема 4.1 доказана.

Возвращаясь к исходным переменным в (4.1), из теоремы 4.1 получаем доказательство теоремы 4.2) о существовании решения $\bar{w}(x, \psi)$ задачи (3.2), (3.3).

7. Единственность решения задачи в переменных Мизеса

Следующая теорема устанавливает единственность решения задачи (3.2), (3.3).

Теорема 7.1 ([11, теорема 5]). *Решение $\bar{w}(x, \psi)$ задачи (3.2), (3.3), удовлетворяющее условиям теоремы 4.2, а также с некоторыми постоянными k_1, k_2, k_3, ψ_4 неравенствам $k_1\psi \leq \bar{w}(x, \psi) \leq k_2\psi$ при $\psi \leq \psi_4$, $\sqrt{\bar{w}} \partial^2 \bar{w} / \partial \psi^2 \leq k_3$, является единственным в $\bar{G}$.*

8. Доказательство основного результата

Из существования решения $\bar{w}(x, \psi)$ задачи (3.2), (3.3) в области G , удовлетворяющего условиям теоремы 4.2, вытекает существование решения $u(x, y), v(x, y)$ задачи (2.1), (2.2) в области D , удовлетворяющего условиям теоремы 2.1. Доказательство см. в [11, п. 1.5].

9. Скорость стекания пленки в поле сил тяжести

Найдем скорость $u(x, y)$ стекания тонкого слоя вязкой жидкости с твердой вертикальной стенки при условиях (2.2) в поле сил тяжести с ускорением свободного падения g . Уравнение (2.1) в этом случае принимает вид (обоснование для пограничного слоя в поле силы тяжести в случае линейной вязкости см. в [13])

$$\nu g \left[1 + 3kg \left(\frac{\partial u}{\partial y} g \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + g = 0. \quad (9.1)$$

Запишем уравнение (9.1) в эквивалентном виде

$$\nu \frac{\partial}{\partial y} g \left[\frac{\partial u}{\partial y} + kg \left(\frac{\partial u}{\partial y} g \right)^3 \right] + g = 0$$

и проинтегрируем его по переменной y . Получим

$$\frac{\partial u}{\partial y} + kg \left(\frac{\partial u}{\partial y} g \right)^3 = -\frac{g}{\nu} y + \tilde{C}_1, \quad (9.2)$$

где $\tilde{C}_1$ — постоянная интегрирования, которая находится из (9.2) и граничного условия на функцию $\partial u / \partial y$ при $y = 0$ в (2.2). Имеем

$$\tilde{C}_1 = \frac{\sigma}{\mu X} g \left[1 + kg \left(\frac{\sigma}{\mu X} g \right)^2 \right].$$

Ввиду найденной постоянной $\tilde{C}_1$ уравнение (9.2) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} + kg \left(\frac{\partial u}{\partial y} g \right)^3 = -\frac{g}{\nu} y + \frac{\sigma}{\mu X} g \left[1 + kg \left(\frac{\sigma}{\mu X} g \right)^2 \right].$$

В последнем уравнении положим $\lambda = \partial u / \partial y$, $F = -g/\nu y + \sigma/\mu X [1 + k(\sigma/\mu X)^2]$ и получим кубическое уравнение относительно λ

$$\lambda^3 + \frac{1}{k} \lambda - \frac{F}{k} = 0. \quad (9.3)$$

Для решения уравнения (9.3) воспользуемся методом Кардано.

Найдем дискриминант уравнения (9.3)

$$\mathcal{D} = \frac{F^2}{4k^2} + \frac{1}{27k^3} = \frac{27kF^2 + 4}{108k^3}.$$

Поскольку $\mathcal{D} > 0$, уравнение (9.3) имеет один вещественный корень

$$\lambda_1 \equiv \frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt[3]{\frac{F}{2k}} + \sqrt{\mathcal{D}} + \sqrt[3]{\frac{F}{2k} - \sqrt{\mathcal{D}}}.$$

Интегрируя последнее равенство по переменной y , получаем

$$u(x, y) = \frac{-\nu}{g \sqrt[3]{12^5} \sqrt[3]{k^4}} g \left(\frac{kT_+^2 - 24}{\sqrt[3]{T_+^2}} + \frac{kT_-^2 - 24}{\sqrt[3]{T_-^2}} g \right) + \tilde{C}_2, \quad (9.4)$$

где $\tilde{C}_2$ — постоянная интегрирования, а выражения $T_{\pm}$ имеют вид

$$T_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{3}{k}} \sqrt{\frac{27kg^2y^2}{\nu^2} - \frac{54kg\sigma y}{\nu\mu X} g \left(1 + k \left(\frac{\sigma}{\mu X}\right)^2 g\right) + \frac{27k\sigma^2}{(\mu X)^2} g \left(1 + k \left(\frac{\sigma}{\mu X}\right)^2 g\right)^2 + 4} - \frac{9gy}{\nu} + \frac{9\sigma}{\mu X} g \left(1 + k \left(\frac{\sigma}{\mu X}\right)^2 g\right).$$

Постоянная $\tilde{C}_2$ находится из (9.4) и условия на функцию $u(x, y)$ при $y = 0$ в (2.2). Имеем

$$\tilde{C}_2 = \Lambda U(x) + \frac{\nu}{g \sqrt[3]{12^5} \sqrt[3]{k^4}} g \left(\frac{kT_{0+}^2 - 24}{\sqrt[3]{T_{0+}^2}} + \frac{kT_{0-}^2 - 24}{\sqrt[3]{T_{0-}^2}} g \right),$$

где выражения $T_{0\pm}$ принимают вид

$$T_{0\pm} = T_{\pm}|_{y=0} = \pm \sqrt{\frac{3}{k} g \left[\frac{27k\sigma^2}{(\mu X)^2} g \left(1 + k \left(\frac{\sigma}{\mu X}\right)^2 g\right)^2 + 4g \right] + \frac{9\sigma}{\mu X} g \left(1 + k \left(\frac{\sigma}{\mu X}\right)^2 g\right)}.$$

Таким образом, учитывая заданные условия на функции $u(x, y)$ и $\partial u / \partial y$ при $y = 0$, получаем аналитический вид скорости стекания вязкой пленки с вертикальной стенки под действием силы тяжести

$$u(x, y) = -\frac{\nu}{g \sqrt[3]{12^5} \sqrt[3]{k^4}} g \left(\frac{kT_{+}^2 - 24}{\sqrt[3]{T_{+}^2}} + \frac{kT_{-}^2 - 24}{\sqrt[3]{T_{-}^2}} g \right) + \frac{\nu}{g \sqrt[3]{12^5} \sqrt[3]{k^4}} g \left(\frac{kT_{0+}^2 - 24}{\sqrt[3]{T_{0+}^2}} + \frac{kT_{0-}^2 - 24}{\sqrt[3]{T_{0-}^2}} g \right) + \Lambda U(x).$$

Литература

1. Е. С. Барановский, М. А. Артемов, “О стационарном течении жидкостей второго порядка в канале”, *Вестн. СПбУ, Прикл. мат. информ. процессы упр.* **13**, No. 4, 342–353 (2017).
2. М. Bahrani, A. Tamayol, P. Taheri, “Slip-flow pressure drop in microchannels of general cross section”, *J. Fluids Engng.* **131**, 031201-1–031201-8 (2009).
3. K. Stamatakis, C. Tien, “Cake formation and growth in cake filtration”, *Chem. Engng. Sci.* **46**, No. 8, 1917–1933 (1991).
4. В. В. Шелухин, У. А. Христенко, “Об одном условии проскальзывания для уравнений вязкой жидкости”, *Прикл. мех. тех. физ.* **54**, No. 5, 101–109 (2013).
5. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука, М. (1970).
6. В. Н. Самохин, Г. М. Фадеева, Г. А. Чечкин, “Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье — Стокса”, *Тр. семин. им. И. Г. Петровского* **28**, 329–361 (2011).
7. М. А. Кисатов, “Система уравнений пограничного слоя Марангони в среде с реологическим законом О. А. Ладыженской”, *Докл. РАН, Мат. информ. процессы упр.* **498**, 41–44 (2021).
8. М. А. Кисатов, В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин, “О решениях уравнений магнитогидродинамического пограничного слоя с инъекцией среды с реологическим законом Ладыженской” *Пробл. мат. анал.* **113**, 61–80 (2022).
9. Р. Р. Булатова, В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин, “Уравнения симметрического МГД-пограничного слоя вязкой жидкости с реологическим законом О.А. Ладыженской”, *Тр. семин. им. И. Г. Петровского* **32**, 72–90 (2019).
10. R. R. Bulatova, G. A. Chechkin, T. P. Chechkina, and V. N. Samokhin, “On the influence of a magnetic field on the separation of the boundary layer of a non-Newtonian MHD medium”, *C. R. Méc., Acad. Sci. Paris* **346**, No 9, 807–814 (2018).

11. В. Н. Самохин, Г. А. Чечкин, “Неклассические задачи математической теории гидродинамического пограничного слоя”, *Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1* 79, No 1, 11–20 (2025).
12. О. А. Олейник, В. Н. Самохин, *Математические методы в теории пограничного слоя*, Наука, М. (1997).
13. В. Г. Левич, *Физико-химическая гидродинамика*, Физматлит М. (1959).

Статья поступила в редакцию 22 сентября 2024 г.

А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ, СВЯЗАННОЙ С ЧИСЛОМ e

Предложены новые двусторонние оценки числа e с точными константами. Миноранты и мажоранты в оценках имеют формат цепных дробей. Получены новые неравенства в задаче о рациональных приближениях числа e и выдвинута гипотеза о справедливости целой серии подобных неравенств. Обсуждается связь с известными результатами.

1. Постановка задачи и основной результат

В статьях авторов [1, 2], посвященных специальным аспектам задачи о рациональной аппроксимации числа e , естественным образом возникла и исследовалась функция

$$H(x) \equiv 1 - e^{-1}(1+x)^{1/x}, \quad x \in (-1, +\infty). \quad (1.1)$$

Изучение свойств некоторых близких по структуре функций способствовало продвижению в решении одной трудной проблемы из теории конечных разностей [3].

Аналитическая функция (1.1) допускает степенное разложение

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n x^n = \frac{1}{2}x - \frac{11}{24}x^2 + \frac{7}{16}x^3 - \frac{2447}{5760}x^4 + \dots, \quad x \in (-1, 1). \quad (1.2)$$

Доказано [1, предложение 2.1], что все коэффициенты a_n в представлении (1.2) являются положительными рациональными числами, которые можно найти по рекуррентному правилу

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{k+1} a_{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.3)$$

считая $a_0 = 1$. Числовая последовательность (1.3), строго убывая, стремится к $1/e$. Доказательство этих свойств основано на интегральном представлении

$$a_n = \frac{1}{e} \left(1 + \int_0^1 \varphi(\tau) \tau^n d\tau \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.4)$$

выведенном в [1, предложение 4.1]. Фигурирующая в формуле (1.4) функция φ имеет вид

$$\varphi(\tau) \equiv \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi\tau)}{\tau^{1-\tau}(1-\tau)^\tau}, \quad \tau \in (0, 1), \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 1. \quad (1.5)$$

Элементарная функция (1.5) симметрична, непрерывна на $[0, 1]$ и бесконечно дифференцируема на $(0, 1)$. Подробный анализ формулы (1.4) позволяет выявить [2, § 2] асимптотический закон

$$a_n = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} - \frac{\gamma}{n^2} \right) + O\left(\frac{\ln^2 n}{n^3}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\gamma = 0.57721\dots$ — константа Эйлера — Маскерони.

А. Б. Костин: МГУ и НИЯУ «МИФИ», Москва, Россия, abkoston@yandex.ru.

В. Б. Шерстюков: МГУ и МЦФПМ, Москва, Россия, shervb73@gmail.com.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 83–92 (2024).

Благодаря (1.4) удастся также найти удобное интегральное представление для исходной функции (1.1), которое можно записать в виде

$$H(x) = \frac{x}{e} \left(\frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau \right), \quad x \in (-1, +\infty). \quad (1.6)$$

Подробности см. в [2, теорема 1].

Основной результат статьи представлен в следующем утверждении.

Теорема 1.1. *Для аналитической функции (1.1) при всех $x \in (0, 1]$ справедливы точные двусторонние оценки*

$$\frac{e-2}{e}x \leq H(x) < \frac{x}{2}, \quad (1.7)$$

$$\frac{x}{2 + \frac{11x}{6}} \equiv \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{11}{6}} < H(x) \leq \frac{1}{\frac{2}{x} + \frac{4-e}{e-2}} \equiv \frac{x}{2 + \frac{(4-e)x}{e-2}}. \quad (1.8)$$

Левое неравенство в (1.7) обращается в равенство в точке $x = 1$, а в правом неравенстве коэффициент $1/2$ при x нельзя заменить меньшим ввиду асимптотики

$$H(x) = \frac{x}{2} + O(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

Правое неравенство в (1.8) обращается в равенство в точке $x = 1$, а в левом неравенстве число $11/6$ в знаменателе дроби нельзя заменить меньшим ввиду асимптотики

$$H(x) = \frac{x}{2 + \frac{11x}{6}} + O(x^3), \quad x \rightarrow 0,$$

вытекающей из (1.2).

2. Доказательство теоремы 1.1

Для вывода соотношений (1.7), (1.8) потребуются свойства вспомогательных функций

$$\Phi_1(x) \equiv \frac{H(x)}{x} = \frac{1}{x}(1 - e^{-1}(1+x)^{1/x}), \quad \Phi_1(0) = a_1 = \frac{1}{2}, \quad (2.1)$$

$$\Phi_2(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Phi_1(x)} - \frac{1}{\Phi_1(0)} \right) = \frac{1}{H(x)} - \frac{2}{x} = \frac{e}{e - (1+x)^{1/x}} - \frac{2}{x}, \quad \Phi_2(0) = \frac{a_2}{a_1^2} = \frac{11}{6}, \quad (2.2)$$

определенных и непрерывных при всех $x \in (-1, +\infty)$.

Лемма 2.1. *Функция $\Phi_1(x)$ из формулы (2.1) убывает на луче $x > -1$.*

Доказательство. Согласно (1.6)

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{e} \left(\frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau \right), \quad x \in (-1, +\infty). \quad (2.3)$$

Ввиду положительности на $[0, 1]$ функции (1.5) производная

$$\Phi_1'(x) = -\frac{1}{e} \left(\frac{1}{(1+x)^2} + \int_0^1 \frac{\tau^2 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2} d\tau \right) \quad (2.4)$$

отрицательна для всех $x \in (-1, +\infty)$. □

Лемма 2.2. *Функция $F(x) \equiv 1/\Phi_1(x)$, где $\Phi_1(x)$ определена в (2.1), возрастает и строго вогнута на луче $x > -1$.*

Доказательство. В силу леммы 2.1 функция $F(x)$ возрастает при $x > -1$. Покажем, что на этом луче F вогнута. Поскольку Φ_1 положительна и

$$F'(x) = -\frac{\Phi_1'(x)}{\Phi_1^2(x)}, \quad F''(x) = -\frac{\Phi_1(x)\Phi_1''(x) - 2(\Phi_1'(x))^2}{\Phi_1^3(x)},$$

достаточно доказать неравенство

$$\Phi_1(x)\Phi_1''(x) > 2(\Phi_1'(x))^2, \quad x \in (-1, +\infty). \quad (2.5)$$

Дифференцируя (2.4), находим

$$\Phi_1''(x) = \frac{2}{e} \left(\frac{1}{(1+x)^3} + \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau \right), \quad x \in (-1, +\infty). \quad (2.6)$$

Подставив (2.3), (2.4), (2.6) в (2.5), получим

$$\left(\frac{1}{1+x} + \int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau \right) \left(\frac{1}{(1+x)^3} + \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau \right) > \left(\frac{1}{(1+x)^2} + \int_0^1 \frac{\tau^2 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2} d\tau \right)^2. \quad (2.7)$$

Тем самым нужно доказать соотношение (2.7) при всех $x > -1$.

Для таких x и $\tau \in [0, 1]$ имеем

$$\sqrt{\frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau}} \sqrt{\frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3}} = \frac{\tau^2 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2}.$$

Но тогда согласно неравенству Коши — Буняковского

$$\int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau \geq \left(\int_0^1 \frac{\tau^2 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2} d\tau \right)^2, \quad x > -1. \quad (2.8)$$

Неравенство о среднем при тех же x дает

$$\frac{1}{(1+x)^3} \int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau + \frac{1}{1+x} \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau \geq \frac{2}{(1+x)^2} \sqrt{\int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau}.$$

Оценив подкоренное выражение с помощью (2.8), получим

$$\frac{1}{(1+x)^3} \int_0^1 \frac{\tau \varphi(\tau)}{1+x\tau} d\tau + \frac{1}{1+x} \int_0^1 \frac{\tau^3 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^3} d\tau > \frac{2}{(1+x)^2} \int_0^1 \frac{\tau^2 \varphi(\tau)}{(1+x\tau)^2} d\tau, \quad x > -1. \quad (2.9)$$

Строгий знак неравенства в (2.9) объясняется тем, что неравенство о среднем применено к неравным положительным величинам. Сложим (2.8) и (2.9), затем добавим к обеим частям слагаемое $\frac{1}{(1+x)^4}$ и придем к неравенству, которое сворачивается в (2.7). $\square$

Следующее утверждение имеет простой геометрический смысл и представляет собой вариант известной леммы о трех хордах (см., например, [4, гл. 7, § 1, задача 1.2]). Для полноты изложения приведем его с доказательством.

Лемма 2.3. Пусть функция $G(x)$ определена и строго вогнута при $x \geq 0$. Тогда разностное отношение

$$g(x) \equiv \frac{G(x) - G(0)}{x}$$

убывает на луче $x > 0$.

Доказательство. Пусть $\alpha \in (0, 1)$. По определению строгой вогнутости для любых $0 \leq t_1 < t_2$ верно неравенство

$$G(\alpha t_1 + (1 - \alpha)t_2) > \alpha G(t_1) + (1 - \alpha)G(t_2).$$

Убедимся, что для всех x_1, x_2 , удовлетворяющих условию $0 < x_1 < x_2$, выполнено соотношение

$$g(x_1) \equiv \frac{G(x_1) - G(0)}{x_1} > \frac{G(x_2) - G(0)}{x_2} \equiv g(x_2).$$

В самом деле, последнее равносильно неравенству

$$G(x_1) > \frac{x_2 - x_1}{x_2} G(0) + \frac{x_1}{x_2} G(x_2) \equiv \alpha G(0) + (1 - \alpha)G(x_2),$$

которое справедливо в силу строгой вогнутости $G(x)$. $\square$

Лемма 2.4. Функция $\Phi_2(x)$ из формулы (2.2) убывает на луче $x > 0$.

Доказательство. Согласно (2.2) и определению функции $F(x)$ (см. лемму 2.2)

$$\Phi_2(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Phi_1(x)} - \frac{1}{\Phi_1(0)} \right) \equiv \frac{F(x) - F(0)}{x}, \quad x \in (-1, +\infty).$$

По лемме 2.2 функция $F(x)$ строго вогнута на луче $x > -1$ (тем более, на луче $x > 0$). Но тогда по лемме 2.3 функция $\Phi_2(x)$ убывает при $x > 0$. $\square$

Доказательство теоремы 1.1. Обе функции $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ убывают на луче $x > 0$ (см. леммы 2.1, 2.4). Поэтому для всех $x \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} \frac{e-2}{e} = \Phi_1(1) &\leq \Phi_1(x) \equiv \frac{1}{x}(1 - e^{-1}(1+x)^{1/x}) \equiv \frac{H(x)}{x} < \Phi_1(0) = \frac{1}{2}, \\ \frac{4-e}{e-2} = \Phi_2(1) &\leq \Phi_2(x) \equiv \frac{e}{e - (1+x)^{1/x}} - \frac{2}{x} \equiv \frac{1}{H(x)} - \frac{2}{x} < \Phi_2(0) = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, верны неравенства (1.7) и (1.8). $\square$

Метод доказательства основного утверждения демонстрирует важность соображений монотонности при выводе точных оценок для используемых в анализе чисел и функций (см. также [5]).

3. Рациональные приближения числа e

Вопросу о наилучшей скорости рациональных приближений числа e и других специальных чисел посвящено много публикаций (см., например, [6, 7]). Покажем, что дают наши результаты в задаче о приближении эйлерова числа элементами конкретной последовательности $(1 + 1/m)^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Как доказано в [2, теорема 3], ряд (1.2) обертыкает функцию $H(x)$ при всех $x > 0$. Другими словами, при каждом $x > 0$ справедлива серия двусторонних оценок

$$\sum_{n=1}^{2p} (-1)^{n-1} a_n x^n < 1 - e^{-1}(1+x)^{1/x} < \sum_{n=1}^{2q-1} (-1)^{n-1} a_n x^n, \quad p, q \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $x = 1/m \in (0, 1]$ и $q = p + 1$ получим

$$\sum_{n=1}^{2p} \frac{(-1)^{n-1} a_n}{m^n} < 1 - e^{-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m < \sum_{n=1}^{2p+1} \frac{(-1)^{n-1} a_n}{m^n} \quad (3.1)$$

для всех $m, p \in \mathbb{N}$. Например, взяв $p = 1$, из (3.1) выводим

$$\frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} < 1 - e^{-1} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m < \frac{1}{2m} - \frac{11}{24m^2} + \frac{7}{16m^3}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.2)$$

что дает улучшенную рациональную аппроксимацию числа e

$$\frac{24m^2}{24m^2 - 12m + 11} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m < e < \frac{48m^3}{48m^3 - 24m^2 + 22m - 21} \left(1 + \frac{1}{m} \right)^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Действительно, подставив тестовое значение $m = 100$, найдем для e границы

$$\frac{240000}{238811}1.01^{100} = \mathbf{2.7182806\dots} < e < \mathbf{2.718281839\dots} = \frac{48000000}{47762179}1.01^{100}, \quad (3.3)$$

т.е. миноранту с пятью верными цифрами после запятой и мажоранту с семью верными цифрами после запятой, при этом

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 1.01^{100} = \mathbf{2.7048\dots}$$

справедливо только с одной верной цифрой после запятой.

Отметим, что обвертывание является удобным инструментом для исследования асимптотического поведения гамма-функции [8], центрального биномиального коэффициента [9], остатков числовых рядов [10].

Теорема 1.1 предоставляет другой полезный формат оценок для величины уклонения

$$H\left(\frac{1}{m}\right) = 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Так, выбирая $x = 1/m$ в неравенстве (1.7), приходим к простейшей оценке

$$\frac{e-2}{em} \leq 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{2m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.5)$$

в которой константы $(e-2)/e = 0.264\dots$ и $1/2$ на множестве всех $m \in \mathbb{N}$ неулучшаемы: первая — ввиду равенства в левой части (3.5) для $m = 1$, вторая — в силу обвертывания (3.1). Если воспользоваться двойным неравенством (1.8), то возникнет усиливающий (3.5) вариант

$$\frac{1}{2m + \frac{11}{6}} < 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \leq \frac{1}{2m + \frac{4-e}{e-2}}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.6)$$

где выбор констант $11/6 = 1.8(3)$ и $(4-e)/(e-2) = 1.784\dots$ для заданного шаблона оптимален по тем же причинам, что и в (3.5). Сравнив нижние оценки в (3.2) и (3.6), видим, что вторая всегда лучше. С верхними оценками в (3.2) и (3.6) ситуация иная: первая лучше при всех $m \geq 7$, что легко объяснить неасимптотическим характером константы $(4-e)/(e-2)$.

Результат (3.6) улучшает хорошо известное двойное неравенство

$$\frac{1}{2m+2} < 1 - e^{-1}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{2m+1}, \quad m \in \mathbb{N},$$

из классического задачника [11, I, гл. 4, § 2].

Для числа e левая часть (3.6) дает при любом $m \in \mathbb{N}$ оценку снизу

$$e > \frac{12m+11}{12m+5}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m.$$

Протестировав ее на прежнем значении $m = 100$, запишем

$$e > \frac{1211}{1205}1.01^{100} = \mathbf{2.718281782\dots},$$

где шесть верных цифр после запятой демонстрируют небольшое улучшение по сравнению с нижней границей в (3.3).

Еще один способ получения нетривиальных оценок эйлерова числа основан на связи между степенными средними и средними Радо (см. препринт S. Sitnik et al., *arXiv: 2209.02585*). На этом пути можно установить для e (соответственно, для (3.4)) следующие неравенства, справедливые при всех $m \in \mathbb{N}$ и выписанные в порядке увеличения точности:

$$e < \sqrt{\frac{m+1}{m}}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \iff H\left(\frac{1}{m}\right) < \frac{1}{m + \sqrt{m(m+1)}}, \quad (3.7)$$

$$e < \frac{4(m+1)}{(\sqrt{m} + \sqrt{m+1})^2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \iff H\left(\frac{1}{m}\right) < \frac{2m+3-2\sqrt{m(m+1)}}{4(m+1)}, \quad (3.8)$$

$$e < \left(\frac{2\sqrt[3]{(m+1)^2}}{\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{(m+1)^2}}\right)^{3/2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \iff H\left(\frac{1}{m}\right) < 1 - \left(\frac{\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{(m+1)^2}}{2\sqrt[3]{(m+1)^2}}\right)^{3/2}. \quad (3.9)$$

Подставив $m = 100$ в (3.7)–(3.9), последовательно находим

$$e < \frac{\sqrt{101}}{10} 1.01^{100} = 2.718304\dots,$$

$$e < \frac{404}{(10 + \sqrt{101})^2} 1.01^{100} = 2.71828743\dots,$$

$$e < 202 \sqrt{\frac{2}{(\sqrt[3]{10000} + \sqrt[3]{10201})^3}} 1.01^{100} = 2.7182818284631\dots,$$

где точность в десять знаков после запятой в последней оценке достигается за счет существенного усложнения ее формата.

Покажем, что подобной высокой точности можно добиться, не меняя выбранного в теореме 1.1 рационального шаблона цепных дробей. Но для этого потребуются доказать одну правдоподобную гипотезу, подтверждаемую численным расчетом.

4. Открытый вопрос

Определим на множестве $x \in (-1, +\infty)$ функциональную последовательность $\Phi_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, следующим образом. Пусть ее первые два элемента Φ_1 и Φ_2 заданы формулами (2.1) и (2.2) соответственно. Пусть

$$\Phi_3(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Phi_2(x)} - \frac{1}{\Phi_2(0)} \right) = \frac{1}{\frac{x}{H(x)} - 2} - \frac{6}{11x} = \frac{1}{\frac{x}{1 - e^{-1}(1+x)^{\frac{1}{x}}} - 2} - \frac{6}{11x} \quad (4.1)$$

при естественном соглашении

$$\Phi_3(0) = \left(\frac{a_1}{a_2} \right)^2 a_3 - a_1 = \frac{5}{242}. \quad (4.2)$$

Затем

$$\Phi_4(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Phi_3(x)} - \frac{1}{\Phi_3(0)} \right) = \frac{1}{\frac{x}{\frac{x}{H(x)} - 2} - \frac{6}{11}} - \frac{242}{5x}; \quad (4.3)$$

по соображениям непрерывности полагаем

$$\Phi_4(0) = \frac{5027}{250}. \quad (4.4)$$

Общее рекуррентное правило зададим в виде

$$\Phi_{n+1}(x) \equiv \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\Phi_n(x)} - \frac{1}{\Phi_n(0)} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.5)$$

с доопределением по непрерывности в точке $x = 0$. Тем самым $\Phi_n(x)$ — элементарная аналитическая функция при $x > -1$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Гипотеза. При любом $n \in \mathbb{N}$ функция $\Phi_n(x)$ из последовательности (4.5) является убывающей на луче $x > 0$.

В леммах 2.1 и 2.4 гипотеза подтверждается для первых номеров $n = 1$ и $n = 2$. Если предположить, что она верна для $n = 3$, то в силу (4.2) для функции (4.1) справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{17e - 46}{11(4 - e)} = \Phi_3(1) \leq \Phi_3(x) < \Phi_3(0) = \frac{5}{242}, \quad x \in (0, 1], \quad (4.6)$$

с границами

$$\frac{17e - 46}{11(4 - e)} = 0.0149\dots, \quad \frac{5}{242} = 0.0206\dots,$$

которую несложно записать в виде

$$\frac{x}{2 + \frac{x}{\frac{6}{11} + \frac{(17e - 46)x}{11(4 - e)}}} \leq H(x) < \frac{x}{2 + \frac{x}{\frac{6}{11} + \frac{5x}{242}}}, \quad x \in (0, 1]. \quad (4.7)$$

В таком случае для уклонения (3.4) из (4.7) следует двойное неравенство

$$\frac{1}{2m + \frac{11}{6 + \frac{17e - 46}{(4 - e)m}}} \leq 1 - e^{-1} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \frac{1}{2m + \frac{11}{6 + \frac{5}{22m}}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Правую часть (4.8) можно записать в виде

$$e < \frac{264m^2 + 252m}{264m^2 + 120m - 5} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.9)$$

Полагая $m = 100$ в (4.9), получим

$$e < \frac{2665200}{2651995} 1.01^{100} = \mathbf{2.718281828651\dots},$$

с девятью верными цифрами после запятой.

Предположим, что гипотеза верна для $n = 4$. Тогда в силу (4.4) для функции (4.3) справедлива двусторонняя оценка

$$\frac{11(1032 - 379e)}{5(17e - 46)} = \Phi_4(1) \leq \Phi_4(x) < \Phi_4(0) = \frac{5027}{250}, \quad x \in (0, 1], \quad (4.10)$$

которую можно записать в виде

$$\frac{x}{2 + \frac{6}{\frac{11}{11} + \frac{242}{5} + \frac{5027x}{250}}} < H(x) \leq \frac{x}{2 + \frac{6}{\frac{11}{11} + \frac{242}{5} + \frac{11(1032 - 379e)x}{5(17e - 46)}}}, \quad x \in (0, 1], \quad (4.11)$$

с теми же, что и в (4.10), константами

$$\frac{5027}{250} = 20.108\dots, \quad \frac{11(1032 - 379e)}{5(17e - 46)} = 18.485\dots,$$

найденными прямым вычислением на основе разложения (1.2). В таком случае для уклонения (3.4) из (4.11) следует двойное неравенство

$$\frac{1}{2m + \frac{6}{\frac{11}{11} + \frac{242m}{5} + \frac{5027}{250}}} < H\left(\frac{1}{m}\right) \leq \frac{1}{2m + \frac{6}{\frac{11}{11} + \frac{242m}{5} + \frac{11(1032 - 379e)}{5(17e - 46)}}}, \quad (4.12)$$

верное при всех $m \in \mathbb{N}$. Левая часть (4.12) содержит оценку

$$e > \frac{145200m^2 + 198924m + 55297}{145200m^2 + 126324m + 22385} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (4.13)$$

Полагая $m = 100$ в (4.13), получим

$$e > \frac{12164857}{12104585} 1.01^{100} = \mathbf{2.71828182845882\dots},$$

с одиннадцатью верными цифрами после запятой.

Пока неизвестно, справедливы ли опорные соотношения (4.6), (4.10). По всей видимости, подтверждение сформулированной гипотезы в полном объеме требует более тонкого подхода, чем предложенный в доказательстве теоремы 1.1.

Литература

1. А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков, “О тейлоровских коэффициентах аналитической функции, связанной с эйлеровым числом”, *Уфим. мат. журн.* **14**, No. 3, 74–89 (2022).
2. А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков, “Обвертывание значений аналитической функции, связанной с числом e ”, *Мат. заметки* **113**, No. 3, 374–391 (2023).
3. С. В. Конягин, А. Ю. Попов, “О восстановлении функций по значениям n -х разностей с шагом $1/n$ ”, *Тр. ИММ* **17**, No. 3, 178–185 (2011).
4. Б. М. Макаров, М. Г. Голузина, А. А. Лодкин, А. Н. Подкорытов, *Избранные задачи по вещественному анализу*, Наука, М. (1992).
5. E. A. Karatsuba, “On the asymptotic representation of the Euler gamma function by Ramanujan”, *J. Comput. Appl. Math.* **135**, No. 2, 225–240 (2001).
6. C. S. Davis, “Rational approximations to e ”, *J. Austral. Math. Soc., Ser. A.* **25**, 497–502 (1978).
7. Б. Г. Тасоев, “О рациональных приближениях некоторых чисел”, *Мат. заметки* **67**, No. 6, 931–937 (2000).
8. А. Ю. Попов, “Двусторонние оценки гамма-функции на действительной полуоси”, *Чебышевский сб.* **18**, No. 2, 205–221 (2017).
9. А. Ю. Попов, “Новые двусторонние оценки гамма-функции и чисел сочетаний из $2n$ по n . Усиленное обвертывание асимптотическим рядом”, *Мат. заметки* **103**, No. 5, 785–789 (2018).
10. А. Б. Костин, В. Б. Шерстюков, “Асимптотическое поведение остатков числовых рядов специального вида”, *Пробл. мат. анал.* **107**, 39–58 (2020).
11. Г. Полиа, Г. Сеге, *Задачи и теоремы из анализа. I. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций*, Наука, М. (1978).

Статья поступила в редакцию 29 апреля 2024 г.

А. Мудров

ВЕКТОРНЫЕ РАССЛОЕНИЯ НАД КВАНТОВЫМИ КЛАССАМИ СОПРЯЖЕННОСТИ

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли классического типа, а $U_q(\mathfrak{g})$ — соответствующая квантовая группа Дринфельда — Джимбо при q , не равном корню из единицы. С каждой точкой t фиксированного максимального тора T алгебраической группы G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ связывается аддитивная категория $\mathcal{O}_q(t)$ модулей над $U_q(\mathfrak{g})$, устойчивая относительно тензорного умножения на конечномерные квазиклассические $U_q(\mathfrak{g})$ -модули. Доказано, что категория $\mathcal{O}_q(t)$ существенно полупроста. Она используется для явного квантования эквивариантных векторных расслоений над классом сопряженности t .

1. Введение

Статья посвящена квантованию категории эквивариантных векторных расслоений над полупростыми классами сопряженности простой комплексной алгебраической группы G , что включает в себя квантование алгебры функций как тривиального расслоения ранга 1. Работа является продолжением проекта, начатого в [1]–[3], и технически опирается на методы [4, 5]. Полный анализ выполнен для групп четырех классических серий. Мы уверены, что наш подход в своих основных аспектах применим также для пяти исключительных типов. Главный технический вопрос, на который дан ответ для классических типов, — квазиклассическое поведение элементов Шаповалова.

Орбиты присоединенного действия группы на себе — это в точности классы сопряженности, являющиеся аффинными алгебраическими подмногообразиями в G [6]. В соответствии с теоремой Серра — Свана [7, 8] под векторным расслоением мы понимаем конечно порожденный проективный модуль глобальных сечений над координатным кольцом. Мы принимаем эту же точку зрения в квантовом случае и рассматриваем векторные расслоения над некоммутативным пространством как проективные (односторонние) модули над его квантовым координатным кольцом. Таким образом, программа деформационного квантования пуассонова многообразия естественно продолжается на совокупность всех векторных расслоений. При наличии симметрий она существенно становится частью теории представлений.

Пуассонова структура, приводящая к нашему квантованию, происходит из скобки Семенова–Тян–Шанского на группе G , связанной со стандартной классической r -матрицей [9]. Она превращает G в многообразие Пуассона над пуассоновой группой G , наделенной r -скобкой Дринфельда — Складина, по отношению к действию сопряжения. Нетривиальная структура Пуассона на G требует перехода к квантовой группе симметрий. Эквивариантность тогда понимается по отношению к квантованной универсальной обертывающей алгебре $U_q(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$.

Скобка Семенова–Тян–Шанского на группе G аналогична G -инвариантной скобке Ли на алгебре Ли $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$, которая сужается на каждую присоединенную орбиту. Задача эквивариантного квантования полупростых орбит в $\mathfrak{g}$ представляет давний интерес и решена около двадцати

Работа частично поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2022-289.

А. Мудров: Московский физико-технический институт, Москва, Россия; Университет Лестер, Лестер, Великобритания, mudrov.ai@mipt.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 93–125 (2024).

лет назад [10]–[12] в части, касающейся традиционной точки зрения, ограниченной алгебрами функций. Соответствующая теория представлений использует параболические модули Верма над классической универсальной обертывающей алгеброй $U(\mathfrak{g})$.

Подход к эквивариантному квантованию на основе теории представлений состоит в реализации квантовой алгебры функций на G –пространстве с помощью линейных операторов на $U_q(\mathfrak{g})$ –модуле (соответственно, $U(\mathfrak{g})$ –модуле в случае орбиты в $\mathfrak{g}$). Представляется естественным искать реализацию общего квантового векторного расслоения с помощью линейных отображений между модулями подходящей категории. Они обобщают параболические $U_q(\mathfrak{g})$ –модули из категории Бернштейна — Гельфанда — Гельфанда, которую мы обозначаем через $\mathcal{O}_q$. Такие модули образуют аддитивную подкатегорию в $\mathcal{O}_q$, определяемую с точностью до эквивалентности точкой t максимального тора $T \subset G$. Модули старшего веса из этой подкатегории параметризуются конечномерными неприводимыми представлениями подалгебры Ли $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ централизатора точки t .

Исследуемая подкатегория устойчива относительно тензорного умножения на конечномерные $U_q(\mathfrak{g})$ –модули. Она порождается базовым модулем M_λ со старшим весом λ , связанным с t , и мы обозначаем ее через $\mathcal{O}_q(t)$. Базовый вес λ определяется точкой t с точностью до действия группы характеров $U_q(\mathfrak{g})$, изоморфной, как известно, группе $\mathbb{Z}_2^{\text{rk } \mathfrak{g}}$, где $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Эта группа действует изоморфизмами на категориях, ассоциированных с t посредством тензорного умножения на соответствующий одномерный модуль. Квантование координатного кольца $\mathbb{C}[O]$ класса сопряженности $O \ni t$ строится как подалгебра в линейных эндоморфизмах $\text{End}(M_\lambda)$ базового модуля M_λ . По крайней мере для неисклужительных G различные t приводят к изоморфным квантованиям $\mathbb{C}[O]$, но различным точным представлениям (см., например, [13]). Мы ожидаем, что это верно для всех типов G .

Если t имеет конечный порядок, то $\mathcal{O}_q(t)$ полупроста при всех q , не равных корню из единицы, кроме, возможно, конечного числа значений. В тех случаях, которые мы обработали явно [2, 3], множество исключительных q оказалось пустым. Для общей точки t категория $\mathcal{O}_q(t)$ полупроста при почти всех q , не равных корням из спектра присоединенного оператора $\text{Ad}_t \in \text{End}(\mathfrak{g})$.

Категория $\mathcal{O}_q(t)$ оказывается эквивалентной категории эквивариантных конечно порожденных проективных модулей над проквантованным полиномиальным кольцом $\mathbb{C}[O]$ как категория модулей над конечномерными квазиклассическими представлениями $U_q(\mathfrak{g})$. Как абелева категория, $\mathcal{O}_q(t)$ эквивалентна категории классических $\mathfrak{k}$ –подмодулей, являющихся подмодулями в конечномерных $\mathfrak{g}$ –модулях.

В последнем параграфе этой работы мы строим эквивариантное $\star$ –умножение на $\mathbb{C}[O]$ посредством скручивания умножения в RTT–алгебре функций на квантовой группе [14]. Ограничение этой операции на пространство $\mathfrak{k}$ –инвариантов дает плоскую ассоциативную деформацию алгебры $\mathbb{C}[O]$. Эта конструкция не является новой для $\mathfrak{k}$ типа Леви. Для случая, когда $\mathfrak{k}$ не является подалгеброй Леви, это было сделано в [15] для четных квантовых сфер с помощью элементарного гармонического анализа на квантовом евклидовом пространстве и в [2] в рамках текущего подхода. В качестве другого примера квантования класса со стабилизатором не Леви можно указать кватернионную проективную плоскость [3]. Распространение метода квантования на векторные расслоения основывается на идеях [10]. Заметим, что операции умножения и действия выражаются через обратную контравариантную форму модулей из категории $\mathcal{O}_q(t)$, которая известна только в некоторых частных случаях. Обобщая результат [5], мы предъявляем явные альтернативные выражения для операций с помощью экстремального проектора $U_q(\mathfrak{g})$.

Нашим главным инструментом исследования являются контравариантные формы на $U_q(\mathfrak{g})$ –модулях и их связь с экстремальным проектором. Такие формы возникают в нашей теории в нескольких инкарнациях.

Вначале мы используем контравариантную форму на модулях Верма для построения их обобщенных параболических фактор–модулей. Специальные матричные элементы обратной формы составляют элементы Шаповалова $\varphi_{\alpha,m} \in U_q(\mathfrak{g}_-)$ веса $-m\alpha$ для положительного корня α подалгебры $\mathfrak{k}$ и натуральной степени $m \in \mathbb{N}$. Будучи примененными к старшему вектору, $\varphi_{\alpha,m}$ дают особые векторы модулей Верма, которые обращаются в нуль в обобщенных параболических фактор–модулях. Мы требуем, чтобы $\varphi_{\alpha,m}$ переходил в степень f_α^m корневого вектора $f_\alpha \in \mathfrak{k}_-$ в классическом пределе $q \rightarrow 1$. Это проверяется с помощью прямого анализа матричных элементов

обратной формы Шаповалова [16] на основе факторизации элементов Шаповалова, полученной в [17].

Другое применение контравариантных форм состоит в доказательстве неприводимости базового модуля M_λ . Мы аппроксимируем его противоположный модуль M'_λ младшего веса $-\lambda$ последовательностью $U_q(\mathfrak{g}_+)$ -подмодулей из некоторого семейства Ξ конечномерных $U_q(\mathfrak{g})$ -модулей с помощью экстремального проектора. Множество Ξ состоит из всех q -аналогов классических G -модулей V , содержащих орбиту, изоморфную O (это в точности модули, возникающие в разложении $\mathbb{C}[O]$). Они допускают $U_q(\mathfrak{g}_+)$ -гомоморфизмы $M'_\lambda \rightarrow V$, пересечение ядер которых по всем $V \in \Xi$ равно нулю. Затем мы аппроксимируем обратное инвариантное спаривание между M_λ и M'_λ посредством специальных особых векторов из $V \otimes M_\lambda$, в то время как V пробегает Ξ . Особый вектор задает отображение $M_\lambda \rightarrow V$, инъективность которого на некотором подпространстве эквивалентна неприводимости V .

Третье проявление контравариантных форм в нашем изложении возникает при доказательстве полной приводимости тензорных произведений. От базового модуля мы переходим к порождаемой им категории $\mathcal{O}_q(t)$. Как установлено в [4], контравариантная форма ответственна за полную приводимость тензорных произведений модулей старшего веса. Связь между формой и экстремальным проектором, выявленная в [5], дает практический вычислительный аппарат, позволяющий доказать, что все модули из изучаемой категории полупросты для почти всех q . Простыми объектами являются обобщенные параболические модули Верма $M_{\lambda,\xi}$ старшего веса $\lambda + \xi$, где ξ — старший вес $\mathfrak{k}$ -подмодуля в некотором конечномерном $\mathfrak{g}$ -модуле.

Наконец, обращенные контравариантные формы участвуют в построении $\star$ -умножения на $\mathbb{C}[O]$ и его действию на квантовых векторных расслоениях аналогично [10]–[12], [18, 19].

Мы доказываем, что локально конечная часть $U_q(\mathfrak{g})$ -модуля $\text{End}(M_\lambda)$ есть квантование $\mathbb{C}[O]$ для почти всех q . Неприводимое разложение $V \otimes M_\lambda \in \mathcal{O}_q(\lambda)$ приводит к разложению в прямую сумму тензорного произведения $V \otimes \text{End}(M_\lambda)$, превращая локально конечную часть каждого $U_q(\mathfrak{g})$ -модуля $\text{Hom}(M_{\lambda,\xi}, M_\lambda)$ (соответственно, $\text{Hom}(M_\lambda, M_{\lambda,\xi})$) в квантование эквивариантного векторного расслоения с $\mathfrak{k}$ -подмодулем старшего веса ξ в V (соответственно, его двойственным) в качестве слоя. Разложение $V \otimes \text{End}(M_\lambda)$ в прямую сумму квазиклассично и переходит в разложение тривиального векторного расслоения $V \otimes \mathbb{C}[O]$ в сумму эквивариантных подрасслоений.

2. Предварительные сведения

На протяжении всей работы мы предполагаем, что параметр деформации q принимает значения в множестве $\mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{1}$ ненулевых комплексных чисел, которые не являются корнями из единицы. Мы вводим топологию на $\mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{1}$, индуцируя ее топологией Зарисского на $\mathbb{C}$. Другими словами, открытые множества в $\mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{1}$ — это дополнения к конечному подмножеству точек, возможно пустому. Под всеми q мы понимаем все точки из $\mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{1}$, а *почти все* означает все, кроме непустого открытого по Зарисскому множества.

В большинстве случаев мы работаем над основным полем $\mathbb{C}$, но некоторые вопросы требуют рассмотрения над $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ и дальнейшего расширения до локального кольца $\mathbb{C}_1(q)$ рациональных функций от q , регулярных в классической точке $q = 1$.

Под деформацией комплексного векторного пространства A мы понимаем любой $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ -модуль A_q такой, что $A_q/(q-1)A_q \simeq A$. Мы называем деформацию *плоской*, если после расширения над $\mathbb{C}_1(q)$ имеет место изоморфизм $A_q \simeq A \otimes \mathbb{C}_1(q)$. Под *квантованием* A мы понимаем его плоскую деформацию вместе с дополнительными структурами, например, алгебры, модуля и т.д. Такие структуры сохраняются под действием квантовой группы при эквивариантном квантовании.

2.1. Основные сведения о квантовых группах. Рассмотрим простую комплексную алгебру Ли классического типа и выберем ее подалгебру Картана $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$. Зафиксируем треугольное разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_+$ с максимальными нильпотентными подалгебрами Ли $\mathfrak{g}_\pm$. Через $R = R_{\mathfrak{g}}$ обозначим систему корней $\mathfrak{g}$, а через $R^+ = R_{\mathfrak{g}}^+$ — подмножество положительных корней с базисом простых корней $\Pi = \Pi_{\mathfrak{g}}$. Пусть Γ — корневая решетка и Γ_+ — ее неотрицательная часть $\mathbb{Z}_+\Pi$. Весовую решетку будем обозначать через $\Lambda = \Lambda_{\mathfrak{g}}$, а ее полугруппу доминантных весов — через

$\Lambda^+ = \Lambda_{\mathfrak{g}}^+$. Аналогичные обозначения используются для редутивных подалгебры в $\mathfrak{g}$; нижний индекс опускается только для объемлющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$, когда это ясно из контекста.

Выберем скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на $\mathfrak{h}$ кратным ограничению ad -инвариантной формы на $\mathfrak{g}$ и перенесем ее по двойственности на пространство $\mathfrak{h}^*$ линейных функций на $\mathfrak{h}$. Для каждого $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ через $h_\lambda \in \mathfrak{h}$ обозначим единственный элемент, для которого верно равенство $\mu(h_\lambda) = (\mu, \lambda)$ при всех $\mu \in \mathfrak{h}^*$.

Под $U_q(\mathfrak{g})$ мы понимаем стандартную квантовую группу [20, 21] как комплексную алгебру Хопфа с образующими e_α , f_α и $q^{\pm h_\alpha}$, помеченными простыми корнями α и удовлетворяющими соотношениям

$$q^{h_\alpha} e_\beta = q^{(\alpha, \beta)} e_\beta q^{h_\alpha}, \quad [e_\alpha, f_\beta] = \delta_{\alpha, \beta} [h_\alpha]_q, \quad q^{h_\alpha} f_\beta = q^{-(\alpha, \beta)} f_\beta q^{h_\alpha} \quad \forall \alpha, \beta \in \Pi.$$

Элементы q^{h_α} предполагаются обратимыми и $q^{h_\alpha} q^{-h_\alpha} = 1$, а $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ и $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ удовлетворяют квантовым соотношениям Серра [21]. Здесь и на протяжении всего текста мы используем обозначение $[z]_q = \frac{q^z - q^{-z}}{q - q^{-1}}$ для величин $z \in \mathfrak{h} + \mathbb{C}$. Комплексное число $q \neq 0$ не является корнем из единицы.

Мы вводим структуру алгебры Хопфа на $U_q(\mathfrak{g})$, задав коумножение на образующих в виде

$$\Delta(f_\alpha) = f_\alpha \otimes 1 + q^{-h_\alpha} \otimes f_\alpha, \quad \Delta(q^{\pm h_\alpha}) = q^{\pm h_\alpha} \otimes q^{\pm h_\alpha}, \quad \Delta(e_\alpha) = e_\alpha \otimes q^{h_\alpha} + 1 \otimes e_\alpha.$$

Тогда антипод действует на образующих с помощью соответствия

$$\gamma(f_\alpha) = -q^{h_\alpha} f_\alpha, \quad \gamma(q^{\pm h_\alpha}) = q^{\mp h_\alpha}, \quad \gamma(e_\alpha) = -e_\alpha q^{-h_\alpha},$$

а коединица возвращает значения

$$\epsilon(e_\alpha) = 0, \quad \epsilon(f_\alpha) = 0, \quad \epsilon(q^{h_\alpha}) = 1.$$

Через $U_q(\mathfrak{h})$, $U_q(\mathfrak{g}_+)$ и $U_q(\mathfrak{g}_-)$ обозначим ассоциативные унитарные подалгебры в $U_q(\mathfrak{g})$, порожденные $\{q^{\pm h_\alpha}\}_{\alpha \in \Pi}$, $\{e_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$ и $\{f_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$. Квантовые борелевские подгруппы определяются как $U_q(\mathfrak{b}_\pm) = U_q(\mathfrak{g}_\pm) U_q(\mathfrak{h})$; они образуют подалгебры Хопфа в $U_q(\mathfrak{g})$.

Мы рассматриваем инволютивный анти-автоморфизм коалгебры и автоморфизм алгебры $\sigma : U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow U_q(\mathfrak{g})$, задав его на образующих соответствием

$$\sigma : e_\alpha \mapsto f_\alpha, \quad \sigma : f_\alpha \mapsto e_\alpha, \quad \sigma : q^{h_\alpha} \mapsto q^{-h_\alpha}.$$

Инволюция $\omega = \gamma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \gamma$ является анти-автоморфизмом алгебры и сохраняет умножение.

С каждым нормальным порядком на $\mathbb{R}^+$ (сумма двух положительных корней между слагаемыми) ассоциируется система корневых векторов Люстига f_α, e_α для всех $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Каждая такая пара определяет ассоциативную подалгебру $U_q(\mathfrak{g}^\alpha) \subset U_q(\mathfrak{g})$, изоморфную $U_q(\mathfrak{sl}(2))$. Упорядоченные мономы от e_α и f_α образуют базис Пуанкаре — Биркгоффа — Витта в $U_q(\mathfrak{g}_+)$ и $U_q(\mathfrak{g}_-)$ [21].

Обозначим через G простую алгебраическую группу с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Если специально не оговаривается, это может быть любая группа между односвязной и присоединенной. Пусть $T \subset G$ — максимальный тор с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Через $T_{\mathbb{Q}} \subset T$ обозначаем подгруппу элементов конечного порядка, т.е. таких $t \in T_{\mathbb{Q}}$, что $t^m = 1$ для некоторого целого m .

Для каждого $t \in T$ мы называем его централизатор $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ *обобщенной подалгеброй Леви*. Поляризация $\mathfrak{g}$ индуцирует поляризацию $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{k}_+$ такую, что $\mathfrak{k}_\pm \subset \mathfrak{g}_\pm$. Мы называем $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ *подалгеброй Леви*, если $\Pi_{\mathfrak{k}} \subset \Pi_{\mathfrak{g}}$. Мы также называем ее *подалгеброй псевдо-Леви*, если она не сопряжена ни с какой подалгеброй Леви, например, если $\mathfrak{k} \subsetneq \mathfrak{g}$ полупроста. Эта терминология согласуется с принятой в литературе [22]. В общем случае, даже если t имеет централизатор Леви, в T могут быть другие точки из того же класса сопряженности, централизаторы которых не являются Леви в указанном выше смысле. Тип Леви является особенным, потому что в этом случае $U(\mathfrak{k})$ квантуется до подалгебры Хопфа в $U_q(\mathfrak{k}) \subset U_q(\mathfrak{g})$.

Для заданного $U_q(\mathfrak{g})$ -модуля Z через $Z[\mu]$ обозначаем его подпространство веса $\mu \in \mathfrak{h}^*$, т.е. множество векторов $z \in Z$, удовлетворяющих условию $q^{h_\alpha} z = q^{(\mu, \alpha)} z$ для всех $\alpha \in \Pi$. Множество весов модуля Z будем обозначать через $\Lambda(Z)$ как и в случае произвольных $U_q(\mathfrak{h})$ -модулей. Все модули предполагаются диагонализуемыми над $U_q(\mathfrak{h})$ с конечномерными весовыми пространствами либо конечными изотипическими компонентами над некоторой редутивной квантовой

группой. Для каждого такого модуля Z его ограниченный двойственный (правый или левый) обозначаем через Z^* . Если Z имеет старший вес λ , то Z' — его противоположный модуль младшего веса $-\lambda$. Имеется линейная биекция $\widehat{\sigma} : Z \rightarrow Z'$, сплетающая гомоморфизмы представления π и π' посредством инволюции σ : $\widehat{\sigma} \circ \pi(x) = \pi'(x) \circ \sigma$ для всех $x \in U_q(\mathfrak{g})$.

Для диагонализуемого $U_q(\mathfrak{h})$ -модуля V с конечномерными весовыми подпространствами определяется инфинитезимальный характер в виде формальной суммы $\sum_{\mu \in \Lambda(V)} \dim V[\mu] e^\mu$. Мы будем писать $\text{ch}(V) \leq \text{ch}(W)$, если $\dim V[\mu] \leq \dim W[\mu]$ для всех μ , и $\text{ch}(V) < \text{ch}(W)$, если это неравенство строгое при некотором μ .

Одномерное представление $U_q(\mathfrak{g})$ тривиально на $U_q(\mathfrak{g}_\pm)$ и присваивает знак ± 1 каждому q^{h_α} , $\alpha \in \Pi$. Такие представления образуют группу характеров, изоморфную $\mathbb{Z}_2^{\text{rk } \mathfrak{g}}$. Категория квазиклассических конечномерных $U_q(\mathfrak{g})$ -модулей обозначается через $\text{Fin}_q(\mathfrak{g})$. Такие модули диагонализуются, их веса принадлежат множеству q^Λ . Общие конечномерные $U_q(\mathfrak{g})$ -модули получаются из $\text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ тензорным умножением на одномерный модуль.

2.2. Структура Пуассона — Ли на классах сопряженности. В этом разделе мы напомним структуру Пуассона на группе G , которая является аналогом скобки Кириллова — Костанта — Сурьо на (двойственном пространстве к) алгебре Ли $\mathfrak{g}$.

Зафиксируем ad -инвариантное скалярное произведение на $\mathfrak{g}$. Выберем образующие Шевалле f_α и e_α , $\alpha \in \Pi_{\mathfrak{g}}$, для алгебры Ли $\mathfrak{g}$, удовлетворяющие нормировке $(e_\alpha, f_\alpha) = 1$, и ортонормированный базис $\{h_i\}_i$ в $\mathfrak{h}$. Элемент

$$r = \sum_i h_i \otimes h_i + \sum_{\alpha \in R^+} e_\alpha \otimes f_\alpha \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

удовлетворяет классическому уравнению Янга — Бакстера [20] и называется *классической r -матрицей*.

Рассмотрим лево- и правоинвариантные векторные поля на групп G ,

$$\xi^l f(g) = \frac{d}{dt} f(g e^{t\xi})|_{t=0}, \quad \xi^r f(g) = \frac{d}{dt} f(e^{t\xi} g)|_{t=0},$$

порожденные $\xi \in \mathfrak{g}$, где $f \in \mathbb{C}[G]$ и $g \in G$. Бивекторное поле $r^{l,l} - r^{r,r}$ превращает G в группу Пуассона [23].

Для каждого $\xi \in \mathfrak{g}$ через ξ^{ad} обозначим векторное поле $\xi^l - \xi^r$ на группе G . Пусть $r_\pm = \frac{1}{2}(r_{12} \pm r_{21})$ — симметрическая и антисимметрическая части r . Бивекторное поле Семенова–Тян–Шанского

$$r_-^{\text{ad}, \text{ad}} + (r_+^{r,l} - r_+^{l,r}) \quad (2.1)$$

задает пуассонову структуру на G [9]. Оно превращает G в многообразие Пуассона — Ли над пуассоновой группой G относительно действия сопряжения. Это бивекторное поле касательно к каждому классу сопряженности и превращает его в однородное многообразие Пуассона — Ли над G [24].

Квантование скобки Семенова–Тян–Шанского приводит к алгебре $\mathbb{C}_q[G]$, удовлетворяющей уравнению отражения [25], а полупростые классы сопряженности могут быть проквантованы в виде фактор-алгебры $\mathbb{C}_q[G]$ при выполнении некоторых технических условий. Эта точка зрения развивалась, например, в [26]. В данной работе мы рассматриваем класс O как фактор-пространство G/K , где подгруппа $K \subset G$ является централизатором t . Мы строим локальное $\star$ -умножение на сечениях эквивариантных векторных расслоений над $O = \text{Ad}_G(t)$ следуя [10].

Опишем ограничение скобки Семенова–Тян–Шанского на класс O полупростого элемента $t \in G$. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ расщепляется в прямую сумму $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m}$ векторных пространств, где $\mathfrak{m}$ образует Ad_t -инвариантное подпространство, на котором $\text{Ad}_t - \text{id}$ обратим. Это разложение ортогонально по отношению к ad -инвариантной форме на $\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{m}$ разлагается в прямую сумму $\mathfrak{m}_- \oplus \mathfrak{m}_+$ взаимно двойственных подпространств $\mathfrak{m}_\pm = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}_\pm$.

Касательное пространство к O в точке t естественно отождествляется с $\mathfrak{m}$ с помощью действия G . Выберем базис $\{e_\mu\} \subset \mathfrak{m}$ корневых векторов, удовлетворяющий условию $(e_\mu, e_\nu) = \delta_{\mu, -\nu}$. Тогда

ограничение бивектора Пуассона (2.1) на касательное пространство в точке t — это бивектор

$$r_{\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{m}} + \sum_{\mu \in R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}} \frac{\mu(t) + 1}{\mu(t) - 1} e_{\mu} \otimes e_{-\mu} \in \mathfrak{m} \wedge \mathfrak{m},$$

где первый член — это ортогональная проекция r на $\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{m}$. Второй член корректно определен, поскольку $\text{Ad}_t - \text{id}$ обратим на $\mathfrak{m}$.

2.3. Определение обобщенных параболических модулей Верма. В этом разделе мы вводим главный объект нашего исследования: класс $U_q(\mathfrak{g})$ -модулей, которые обобщают параболические модули Верма. Мы отложим детальное изучение их свойств до § 5, потому что для этого потребуется некоторый аппарат, который будет развит в § 3 и 4.

Каждый корень α является (мультипликативным) характером тора T , возвращающим собственное значение оператора Ad_t на α -корневом подпространстве в $\mathfrak{g}$. По определению централизатора равенство $\alpha(t) = 1$ выполнено тогда и только тогда, когда $\alpha \in R_{\mathfrak{k}}$. Для $t \in T_{\mathbb{Q}}$ и $\alpha \in R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+$ значение $\alpha(t) \neq 1$ является комплексным корнем из единицы.

Обозначим через $\varkappa \in \mathfrak{h}^*$ полусумму положительных корней $\mathfrak{k}$.

Определение 2.1. Мы называем $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ *базовым весом, ассоциированным с $t \in T$* , если

$$q_{\alpha}^{(\lambda+\rho, \alpha^{\vee})} = \pm \sqrt{\alpha(t)} q_{\alpha}^{(\varkappa, \alpha^{\vee})} \quad \forall \alpha \in \Pi_{\mathfrak{g}}. \quad (2.2)$$

Здесь $q_{\alpha} = q^{\frac{(\alpha, \alpha)}{2}}$ и $\alpha^{\vee} = \frac{2}{(\alpha, \alpha)} \alpha$. Символом $\sqrt{\alpha(t)}$ обозначаем один из двух квадратных корней из $\alpha(t) \in \mathbb{C}^{\times}$. Таким образом, точка t определяет мультипликативный базовый вес с точностью до знака в $\pm \sqrt{\alpha(t)}$ для каждого $\alpha \in \Pi_{\mathfrak{g}}$.

Напомним, что соответствие $q^{h_{\alpha}} \mapsto \pm 1$, $f_{\alpha} \mapsto 0$, $e_{\alpha} \mapsto 0$ для каждого $\alpha \in \Pi_{\mathfrak{g}}$ определяет одномерное представление $U_q(\mathfrak{g})$. Они образуют группу $U_q(\mathfrak{g})$ -характеров, которая изоморфна $\mathbb{Z}_2^{\text{rk } \mathfrak{g}}$. Эта группа свободно действует на множестве базовых весов точки t . Каждый базовый вес будет параметризовать категорию интересующих нас обобщенных параболических модулей. Группа $U_q(\mathfrak{g})$ -характеров будет действовать на этих категориях изоморфизмами с помощью тензорного умножения на соответствующие одномерные $U_q(\mathfrak{g})$ -модули. Таким образом, мы можем считать, что λ выбран раз и навсегда для каждого t .

Пусть $\Lambda_{\mathfrak{k}}$ — весовая решетку полупростой части $\mathfrak{k}$. Поскольку $R_{\mathfrak{k}} \subset R_{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{h}^*$ и каноническая форма на $\mathfrak{h}^*$ невырождена, мы рассматриваем $\Lambda_{\mathfrak{k}}$ как подмножество в $\mathfrak{h}^*$. Базовый вес λ порождает аффинный сдвиг $\lambda + \Lambda_{\mathfrak{k}}^+ \subset \mathfrak{h}^*$ полугруппы $\Lambda_{\mathfrak{k}}^+$, состоящей из $\mathfrak{k}$ -доминантных весов. Элементы из $\lambda + \Lambda_{\mathfrak{k}}^+$ будут старшими весами интересующих нас модулей. Множество $\Lambda_{\mathfrak{k}}^+ \cap \Lambda_{\mathfrak{g}}$ параметризует неприводимые эквивариантные векторные расслоения на O благодаря двойственности Фробениуса.

Для каждого $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^+$ рассмотрим характер алгебры $U_q(\mathfrak{h}) \simeq \mathbb{C}[T]$, действующий по правилу

$$q^{h_{\alpha}} \rightarrow q^{(\lambda+\xi, \alpha)} = \pm \sqrt{\alpha(t)} q^{2(\varkappa-\rho+\xi, \alpha)} \quad \forall \alpha \in \Pi_{\mathfrak{g}}, \quad (2.3)$$

где знаки зафиксированы выбором λ . Подчеркнем, что мы пользуемся экспоненциальным представлением образующих подалгебры Картана исключительно ради удобства вычислений. Это означает, что выражение $q^{(\lambda+\xi, \alpha)} = q^{(\lambda+\xi, \alpha)}$ полиномиально по $q^{\pm 1}$. Вес $\lambda + \xi$ удовлетворяет условию Кэца — Каца

$$[(\lambda + \xi + \rho, \alpha^{\vee}) - m_{\alpha}]_{q_{\alpha}} = 0 \quad m_{\alpha} = (\xi, \alpha^{\vee}) + 1 \quad \forall \alpha \in \Pi_{\mathfrak{k}}. \quad (2.4)$$

Поэтому модуль Верма $\widetilde{M}_{\lambda+\xi}$ со старшим весом $\lambda + \xi$ имеет подмодули Верма со старшими весами $\lambda + \xi - m_{\alpha} \alpha$ для каждого $\alpha \in \Pi_{\mathfrak{k}}$ [27].

Определение 2.2. Фактор модуля $\widetilde{M}_{\lambda+\xi}$ по подмодулю $\sum_{\alpha \in \Pi_{\mathfrak{k}}} \widetilde{M}_{\lambda+\xi-m_{\alpha}\alpha}$ называется *обобщенным параболическим модулем Верма* и обозначается через $M_{\lambda, \xi}$.

Отметим, что если $\mathfrak{k}$ — подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$ относительно данного треугольного разложения, то $M_{\lambda, \xi}$ является параболическим модулем Верма, индуцированным с $\mathbb{C}_{\lambda} \otimes X_{\xi}$, где X_{ξ} обозначает конечномерный $U_q(\mathfrak{k})$ -модуль старшего веса ξ , а $\mathbb{C}_{\lambda}$ — одномерный $U_q(\mathfrak{k})$ -модуль веса λ . Параболический случай хорошо изучен, поэтому наиболее интересная ситуация возникает, когда $\Pi_{\mathfrak{k}} \not\subset \Pi_{\mathfrak{g}}$.

В частном случае $\xi = 0$ мы используем обозначение $M_\lambda = M_{\lambda,0}$ и называем его *базовым модулем*. Мы ожидаем, что $\text{ch} M_\lambda$ равен характеру полиномиальной алгебры $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_+/\mathfrak{k}_-]$ с точностью до множителя e^λ . При отождествлении $\mathfrak{h}^* \simeq \mathfrak{h}$ посредством скалярного произведения на $\mathfrak{h}^*$ можно рассматривать

$$q^{2\lambda} = tq^{2\kappa-2\rho} \in T$$

как квантование начальной точки t .

Множество собственных значений $\{\alpha(t)\}_{\alpha \in \mathbb{R}} \cup \{1\}$ оператора $\text{Ad}_t \in \text{End}(\mathfrak{g})$ является инвариантом класса $O \in t$. Мы будем называть его *спектром класса/точки* t . Введем обозначение

$$\sqrt[t]{t} = \{q \in \mathbb{C}^\times \mid q_\alpha^m = \alpha(t) \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{R}^+\}. \quad (2.5)$$

Это множество исчерпывается корнями из единицы и из $(\alpha(t))^{\frac{2}{(\alpha, \alpha)}}$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+$. Понятно, что оно зависит только от класса точки t . Далее оно будет играть роль множества исключительных значений параметра деформации, где могут нарушаться свойства модулей, участвующих в квантовании класса $O \supset t$.

2.4. Экстремальный проектор. В этом разделе мы напомним q -версию экстремального проектора [28, 29], который станет основным инструментом нашего исследования. Мы рассмотрим сначала случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ и нормируем скалярное произведение так, чтобы выполнялось равенство $(\alpha, \alpha) = 2$ для единственного положительного корня α . Пусть $e = e_\alpha$, $f = f_\alpha$ и $q^h = q^{h_\alpha}$ обозначают стандартные генераторы $U_q(\mathfrak{g})$ в данном частном случае. Расширим $U_q(\mathfrak{g})$ до $\widehat{U}_q(\mathfrak{g})$, добавив бесконечные суммы элементов из $\mathbb{C}[f]\mathbb{C}[e]$ одного веса с коэффициентами в поле частных $\mathbb{C}(q^{\pm h})$. Такое же расширение применимо к общей полупростой $\mathfrak{g}$ и дает ассоциативную алгебру $\widehat{U}_q(\mathfrak{g})$ (см., например, [29]).

Обозначим через $p(s)$ рационально-тригонометрическую функцию комплексного параметра $s \in \mathbb{C}$ со значениями в $\widehat{U}_q(\mathfrak{sl}(2))$

$$p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f^k e^k \frac{(-1)^k q^{k(s-1)}}{[k]_q! \prod_{i=1}^k [h+s+i]_q}. \quad (2.6)$$

Этот элемент неподвижен относительно инволюции ω .

Для каждого модуля V с локально нильпотентным действием образующей e элемент $p(s)$ задает рационально-тригонометрический эндоморфизм каждого весового подпространства. На модуле старшего веса λ этот оператор действует по правилу

$$p(s)v = c \prod_{k=1}^l \frac{[s-k]_q}{[s+\eta(h)+k]_q} v, \quad (2.7)$$

где v — это вектор веса $\eta = \lambda - l\alpha$, а $c = q^{-l\eta(h)-l(l+1)}$ отлично от нуля.

Рассмотрим обрезанный оператор

$$p_m(s) = \sum_{k=0}^m f^k e^k \frac{(-1)^k q^{k(s-1)}}{[k]_q! \prod_{i=1}^k [h+s+i]_q}.$$

Лемма 2.1. *Предположим, что в $U_q(\mathfrak{g})$ -модуле V весовое пространство $V[\mu]$ аннулируется степенью e^{m+1} . Если $[(\mu, \alpha) + i]_q \neq 0$, $i = 0, \dots, m+1$, то $p_m(1)V[\mu] \subset \ker(e)$.*

Доказательство. Оператор $p_m(s)$ удовлетворяет соотношению

$$ep_m(s) = \frac{q^{-h-2}[s-1]_q}{[h+s-1]_q} p_{m-1}(s-1)e + f^m e^{m+1} \frac{(-1)^m q^{m(s-1)}}{[m]_q! \prod_{i=1}^m [h+s+i]_q}, \quad (2.8)$$

из которого и следует утверждение. □

Для общей простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ зафиксируем нормальный порядок на множестве положительных корней R^+ и рассмотрим вложение $\iota_\alpha: \widehat{U}_q(\mathfrak{sl}(2)) \rightarrow \widehat{U}_q(\mathfrak{g})$, определяемое парой корневых векторов Люстига f_α, e_α для каждого положительного корня $\alpha \in R^+$. Обозначим через $p_\alpha(s)$ образ элемента $p(s)$ в $\widehat{U}_q(\mathfrak{g})$ при вложении ι_α . Положим $\zeta_i = 2 \frac{(\zeta, \alpha^i)}{(\alpha^i, \alpha^i)} \in \mathbb{C}$ для $\zeta \in \mathfrak{h}^*$ и каждого $\alpha^i \in R^+$ и определим

$$p_{\mathfrak{g}}(\zeta) = p_{\alpha^1}(\rho_1 + \zeta_1) \cdots p_{\alpha^n}(\rho_n + \zeta_n), \quad n = \#R^+, \quad (2.9)$$

подразумевая, что произведение упорядочено слева направо в соответствии с нормальным порядком на R^+ . Это определение не зависит от нормального порядка и превращается в экстремальный проектор $p_{\mathfrak{g}}$ в точке $\zeta = 0$. Он является единственным элементом нулевого веса из $1 + \mathfrak{g}_- \widehat{U}_q(\mathfrak{g}) \mathfrak{g}_+$, удовлетворяющим тождествам

$$p_{\mathfrak{g}}^2 = p_{\mathfrak{g}}, \quad e_\alpha p_{\mathfrak{g}} = 0 = p_{\mathfrak{g}} f_\alpha \quad \forall \alpha \in \Pi.$$

Из единственности вытекает, что $p_{\mathfrak{g}}$ инвариантен относительно ω .

Предложение 2.1. Для всех $\zeta \in \mathfrak{h}^*$ оператор $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ ω -инвариантен.

Доказательство. Достаточно показать, что $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ инвариантен относительно ω как оператор на каждом конечномерном $U_q(\mathfrak{g})$ -модуле V для общего веса ζ . Выберем ζ таким, чтобы для всех $\mu \in \Lambda(V)$ и всех $\alpha \in R_{\mathfrak{g}}^+$ было верно $(\zeta + \mu, \alpha^\vee) \notin -\mathbb{N}$. Возьмем в качестве Z модуль Верма со старшим весом ζ . Проектор $p_{\mathfrak{g}}$ корректно определен как линейное отображение из $V \otimes 1_\zeta$ в пространство $U_q(\mathfrak{g}_+)$ -инвариантов в тензорном произведении $V \otimes \widehat{M}_\zeta$. Тогда для всех $v, w \in V$ матричный элемент $\langle p_{\mathfrak{g}}(\zeta)w, v \rangle$ относительно контравариантной формы на V равен

$$\langle p_{\mathfrak{g}}(\zeta)w, v \rangle = \langle p_{\mathfrak{g}}(w \otimes 1_Z), v \otimes 1_Z \rangle = \langle w \otimes 1_Z, p_{\mathfrak{g}}(v \otimes 1_Z) \rangle = \langle w, p_{\mathfrak{g}}(\zeta)b \rangle,$$

что и требуется. Левое и правое равенства выполняются благодаря [5, предложение 3.1]. Среднее равенство использует ω -инвариантность экстремального проектора. $\square$

3. Тензорное произведение модулей старшего веса

Ключевым вопросом, возникающим при эквивариантном квантовании полупростых классов сопряженности, является полупростота тензорных произведений некоторых модулей. В данном изложении используется критерий полной приводимости тензорных произведений неприводимых модулей старшего веса из [4]. Мы также модифицируем его в более слабых предположениях как достаточное условие того, что тензорное произведение представимо в виде суммы своих подмодулей старшего веса, отказавшись от неприводимости одного из тензорных сомножителей.

Напомним сначала результаты [4]. Известно, что модуль Z со старшим вектором 1_Z имеет единственную ω -контравариантную форму с нормировкой $(1_Z, 1_Z) = 1$. Модуль неприводим тогда и только тогда, когда его контравариантная форма невырождена. Обозначим через ϵ_Z линейную функцию $Z \rightarrow \mathbb{C}$, действующую по правилу $\epsilon_Z(z) = (z, 1_Z)$ для всех $z \in Z$.

Тензорное произведение модулей со старшим весом $V \otimes Z$ наделяется канонической контравариантной формой, которая является произведением канонических форм сомножителей. Рассмотрим Z как циклический $U_q(\mathfrak{g}_-)$ -модуль, порожденный старшим вектором 1_Z , и рассмотрим $U_q(\mathfrak{h})$ -инвариантный конечно порожденный левый идеал $J^- \subset U_q(\mathfrak{g}_-)$, лежащий в аннуляторе 1_Z . Если J^- исчерпывает весь аннулятор, то имеется изоморфизм $Z \simeq U_q(\mathfrak{g}_-)/J^-$. Аналогично рассматривается левый идеал $J^+ = \sigma(J^-) \subset U_q(\mathfrak{g}_+)$. Он уничтожает младший вектор в противоположном модуле Z' младшего веса, который отличается знаком от старшего веса Z .

Обозначим через $V^{J^+} \subset V$ ядро идеала J^+ . Оно является аннулятором векторного пространства $\omega(J^+)V = \gamma^{-1}(J^-)V$ (и наоборот ввиду конечномерности весовых подпространств) относительно контравариантной формы. Если Z неприводим, то $Z^* \simeq Z'$. В этом случае, если J^+ совпадает с аннулятором младшего вектора в Z' , то $V^{J^+} \simeq \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g}_+)}(Z^*, V)$.

Предположим теперь, что Z неприводим, а J^- — полный аннулятор вектора 1_Z . Обозначим через $(V \otimes Z)^+$ векторное пространство, порожденное особыми векторами в $V \otimes Z$ (подпространство $U_q(\mathfrak{g}_+)$ -инвариантов). Существует линейный изоморфизм $\delta_V: V^{J^+} \rightarrow (V \otimes Z)^+$, обратный к ограничению $\text{id} \otimes \epsilon_Z$ на $(V \otimes Z)^+$. Перенос канонической формы с $(V \otimes Z)^+$ на V^{J^+} при помощи

δ_V определяет линейное отображение $\theta: V^{J^+} \mapsto V/\omega(J^+)V$ (пространство коинвариантов правого идеала $\omega(J^+)$).

Теорема 3.1 ([4]). *Предположим, что V и Z — неприводимые $U_q(\mathfrak{g})$ -модули старшего веса. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- (1) $V \otimes Z$ вполне приводим,
- (2) θ биективно,
- (3) все подмодули со старшим весом в $V \otimes Z$ неприводимы,
- (4) $V \otimes Z$ — сумма подмодулей со старшим весом.

Ослабляя предположение о неприводимости Z , будем искать достаточное условие представимости $V \otimes Z$ в виде суммы подмодулей старшего веса. Мы будем пытаться следовать логике сформулированного выше критерия в ситуации, когда нам не известен аннулятор старшего вектора, а только лишь его часть. Новым фактором, призванным компенсировать этот недостаток информации, будет экстремальный проектор и его связь с экстремальным твистом [5].

Для модулей, веса которых лежат в $-\Gamma_+ + \nu$ при некотором $\nu \in \mathfrak{h}^*$ (например, модули старшего веса и их тензорные произведения), мы определим высоту веса μ как число простых корней в разложении разности $\nu - \mu \in \Gamma_+$ по базису Π . *Высота весового вектора* определяется как высота его веса. Если на V имеется контравариантная форма, то особые вектора разных весов ортогональны друг другу, как и порожденные ими подмодули. Для модуля V с функцией высоты обозначим через V_k его подмодуль, порожденный векторами высоты $\leq k$. Известно, что $(V \otimes Z)_k$ порождается тензорами из $V \otimes 1_Z$ высоты $\leq k$ [4, следствие 5.2].

Мы считаем, что V неприводим, но не требуем, чтобы левый идеал $J^- \subset U_q(\mathfrak{g}_-)$ был равен всему аннулятору вектора 1_Z . Определим $J^+ = \sigma(J^-) \subset U_q(\mathfrak{g}_+)$ как и выше.

Предположим, что подпространство V^{J^+} лежит в образе отображения $\text{id} \otimes \epsilon_Z$, ограниченного на $(V \otimes Z)^+$, и определим $U_q(\mathfrak{h})$ -аффинное (сохраняющее веса с точностью по постоянному слагаемому) сечение $\delta_V: V^{J^+} \rightarrow (V \otimes Z)^+$ отображения $\text{id} \otimes \epsilon_Z$. Рассмотрим перенос на V^{J^+} контравариантной формы посредством отображения δ_V и определим экстремальный твист $\theta: V^{J^+} \rightarrow V/\omega(J^+)V$ равенством $(\theta(v), w) = (\delta_V(v), \delta_V(w))$ для всех $v, w \in V^{J^+}$ как и раньше. Ясно, что θ коммутирует с действием $U_q(\mathfrak{h})$.

Отображение δ_V сохраняет высоту, потому что сдвигает веса на старший вес модуля Z .

Предложение 3.1. *Предположим, что перенос канонической формы с помощью δ_V невырожден на V^{J^+} . Тогда $V \otimes Z$ является суммой подмодулей старшего веса, старшие векторы которых лежат в образе $\delta_V(V^{J^+})$.*

Доказательство. Обозначим через $V \boxtimes Z$ сумму подмодулей в $V \otimes Z$ старшего веса, порожденных особыми векторами из $\delta_V(V^{J^+})$. Ясно, что $(V \boxtimes Z)_k \subset (V \otimes Z)_k$. Утверждение будет доказано, если мы продемонстрируем обратное включение.

Предположим, что мы доказали искомое включение для $k \geq 0$ (оно, очевидно, имеет место при $k = 0$). Выберем вектор $v \in \omega(J^+)V$ высоты $k + 1$ и представим его в виде $v = \sum_i \omega(e_i)v_i$, где $e_i \in J^+$, а $v_i \in V$ — какие-то векторы высоты $\leq k$. В силу [4, лемма 5.1] имеет место равенство $v \otimes 1_Z = \sum_i v_i \otimes \sigma(e_i)1_Z = 0$ по модулю $(V \otimes Z)_k$, т.е. $v \otimes 1_Z \in (V \boxtimes Z)_k$ по предположению индукции.

Далее, если вектор $v' \in V^{J^+}$ имеет высоту $k + 1$, то существует вектор $v \in V$ высоты $k + 1$ такой, что $\delta_V(v') = v \otimes 1_Z$ по модулю $(V \otimes Z)_k$ [4, лемма 5.1]. Вектор $\theta(v')$ является проекцией v вдоль $\omega(J^+)V$, так как все $\delta_V(w')$ с высотой $\text{ht}(w') = k + 1$ ортогональны особым векторам меньшей высоты и следовательно всему $(V \otimes Z)_k$ по предположению индукции

$$(\theta(v'), w') = (\delta_V(v'), \delta_V(w')) = (v \otimes 1_Z, \delta_V(w')) = (v, w').$$

По условию предложения отображение $\theta: V^{J^+} \rightarrow V/\omega(J^+)V$ сюръективно (и сохраняет высоту, поскольку сохраняет вес). Тогда каждый тензор вида $v \otimes 1_Z$ высоты $k + 1$ из $V \otimes 1_Z$ представимо в

виде $\delta_V(v')$ с точностью до $(V \otimes Z)_k$ плюс тензор из $\omega(J^+)V \otimes 1_Z$ высоты $k+1$, который также в содержится в $(V \otimes Z)_k$ по уже доказанному. Тогда тензор $v \otimes 1_Z$ лежит в $(V \boxtimes Z)_{k+1}$ для каждого v высоты $k+1$, что и требуется. Отсюда следует $(V \boxtimes Z)_{k+1} \supset (V \otimes Z)_{k+1}$. Индукция по k завершает доказательство. $\square$

Мы построим отображение δ_V с помощью экстремального проектора при условии, что он может быть регуляризован на подходящем подпространстве [5]. Обозначим через $\widehat{V^{J^+}} \subset V$ сумму весовых подпространств, имеющих ненулевое пересечение с V^{J^+} . Пусть ζ — старший вес Z .

Лемма 3.1. *Предположим, что проектор $p_{\mathfrak{g}}: \widehat{V^{J^+}} \otimes 1_Z \rightarrow (V \otimes Z)^+$ корректно определен. Тогда $\widehat{V^{J^+}}$ содержит образ $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)\widehat{V^{J^+}}$, а подпространство $\widehat{V^{J^+}} \cap \omega(J^+)V$ лежит в его ядре.*

Доказательство. Из [5, предложение 3.1] следует, что оператор $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ корректно определен на $\widehat{V^{J^+}}$, причем $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)v = (\text{id} \otimes \epsilon_Z)(p_{\mathfrak{g}}(v \otimes 1_Z))$ для всех $v \in \widehat{V^{J^+}}$. Тогда для всех $w \in \widehat{V^{J^+}}$ и $e \in J^+$ выполняется равенство

$$(w, ep_{\mathfrak{g}}(\zeta)v) = (w \otimes 1_Z, (e \otimes 1)p_{\mathfrak{g}}(v \otimes 1_Z)) = (w \otimes 1_Z, (1 \otimes \gamma^{-1}(e))p_{\mathfrak{g}}(v \otimes 1_Z)) = 0,$$

поскольку $(1_Z, \gamma^{-1}(e)z) = (\sigma(e)1_Z, z) = 0$ для всех $z \in Z$. Поэтому образ $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$, ограниченного на $\widehat{V^{J^+}}$, лежит в V^{J^+} . Вложение $\widehat{V^{J^+}} \cap \omega(J^+)V$ в $\ker p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ следует из ω -инвариантности $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ согласно предложению 2.1. $\square$

В предположениях леммы 3.1 мы можем считать, что $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ определен на всем V и принимает нулевое значение на $V[\mu]$ для $\mu \notin \Lambda(V^{J^+})$. Такие весовые подпространства содержатся в $\omega(J^+)V$, и определенный таким образом оператор ω -инвариантен. Следующий результат аналогичен [5, теорема 3.2].

Предложение 3.2. *В условиях леммы 3.1 предположим, что образ оператора $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ равен V^{J^+} . Тогда существует такое $U_q(\mathfrak{h})$ -аффинное сечение $\delta_V: V^{J^+} \rightarrow (V \otimes Z)^+$ отображения $\text{id} \otimes \epsilon_Z$, что отображение $\theta: V^{J^+} \rightarrow V/\omega(J^+)V$ обратимо, и его обратным является отображение, индуцированное $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$.*

Доказательство. Определим δ_V как композицию $V^{J^+} \rightarrow \widehat{V^{J^+}} \rightarrow (V \otimes Z)^+$, где левая стрелка — любое $U_q(\mathfrak{h})$ -линейное сечение отображения $p_{\mathfrak{g}}(\zeta): \widehat{V^{J^+}} \rightarrow V^{J^+}$, а правая стрелка задается соответствием $v \mapsto p_{\mathfrak{g}}(v \otimes 1_Z)$ для всех $v \in \widehat{V^{J^+}}$. В силу [5, предложение 3.1] это действительно сечение отображения $\text{id} \otimes \epsilon_Z$.

По определению θ матричный элемент $(\delta \circ p_{\mathfrak{g}}(\zeta)(v), \delta \circ p_{\mathfrak{g}}(\zeta)(w))$ равен $(\theta \circ p_{\mathfrak{g}}(\zeta)(v), p_{\mathfrak{g}}(\zeta)(w))$ для всех $v, w \in V^{J^+}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} (p_{\mathfrak{g}}(v \otimes 1_Z), p_{\mathfrak{g}}(w \otimes 1_Z)) &= (v \otimes 1_Z, \omega(p_{\mathfrak{g}}) \circ p_{\mathfrak{g}}(w \otimes 1_Z)) \\ &= (v, (\text{id} \otimes \epsilon_Z)(p_{\mathfrak{g}}(w \otimes 1_Z))) = (v, p_{\mathfrak{g}}(\zeta)(w)). \end{aligned}$$

Поскольку образ $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ совпадает с V^{J^+} , приходим к равенству $\theta \circ p_{\mathfrak{g}}(\zeta) = \text{id}$ на $V/\omega(J^+)V$. $\square$

Следствие 3.1. *В условия предложения 3.2 $V \otimes Z$ является суммой подмодулей старшего веса. Если Z неприводим, то тензорное произведение $V \otimes Z$ вполне приводимо и $V^{J^+} = \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g}^+)}(Z', V)$.*

Доказательство. Отображение δ_V , построенное с участием экстремального проектора, и экстремальный твист θ , который оно определяет, удовлетворяют условиями предложения 3.1, откуда следует первая часть следствия. Второе утверждение верно в силу теоремы 3.1. $\square$

Отметим, что в [30] сдвинутый экстремальный проектор рассматривался как билинейная форма на пространстве коинвариантов в частном случае модулей Верма. Следствие 3.1 можно трактовать как обобщение предложения 2.3 из [30].

Под $p_g^{-1}(\zeta)$ мы будем понимать любое $U_q(\mathfrak{h})$ -инвариантное сечение отображения $p_g(\zeta): \widehat{V^{J^+}} \rightarrow V^{J^+}$ (если последнее сюръективно). Заметим, что для неприводимого Z существуют два альтернативных способа построения особых векторов из $(V \otimes Z)^+$: либо с помощью лифта $\mathcal{S} \in U_q(\mathfrak{g}_+) \otimes U_q(\mathfrak{g}_-)$ обратной инвариантной формы спаривания $Z \otimes Z' \rightarrow \mathbb{C}$, либо с помощью экстремального проектора. Связь между этими двумя способами выражается формулой

$$\mathcal{S}(v \otimes 1_Z) = p_g(p_g^{-1}(\zeta)v \otimes 1_Z) \quad (3.1)$$

для каждого весового вектора $v \in V_Z^+$ [5]. Мы воспользуемся этим соотношением для построения эквивариантного $\star$ -умножения на классах сопряженности в § 6.

Можно легко вычислить θ , если весовые пространства модуля V одномерны. Пусть ζ — старший вес модуля Z . Тогда θ действует на $V[\mu]$ умножением на скаляр $\prod_{\alpha \in R^+} \theta_\mu^\alpha$, где

$$\theta_\mu^\alpha = \prod_{k=1}^{l_{\mu,\alpha}} \frac{[(\zeta + \rho + \mu, \alpha^\vee) + k]_{q_\alpha}}{[(\zeta + \rho, \alpha^\vee) - k]_{q_\alpha}}, \quad (3.2)$$

с точностью до ненулевого множителя. Здесь $l_{\mu,\alpha}$ обозначает максимальное целое k , при котором $e_\alpha^k V[\mu] \neq \{0\}$.

4. Квазиклассический предел элементов Шаповалова

Напомним, что обобщенный параболический модуль Верма $M_{\lambda,\xi}$, где λ — базовый вес точки $t \in T$, а $\xi \in \Lambda_\mathfrak{k}^+$ — доминантный вес подалгебры Ли ее централизатора $\mathfrak{k}$, определяется как фактор модуля Верма $\widetilde{M}_{\lambda+\xi}$. Рассмотрим особый вектор веса $\lambda + \xi - m_\alpha \alpha$ в $\widetilde{M}_{\lambda+\xi}$ (определяемый с точностью до скалярного множителя), где $m_\alpha = (\xi, \alpha^\vee) + 1$. Обозначим с помощью $\varphi_{\alpha,m_\alpha} \in U_q(\mathfrak{g}_-)$ его образ относительно линейного изоморфизма $U_q(\mathfrak{g}_-) \rightarrow \widetilde{M}_{\lambda+\xi}$. Этот образ называется *элементом Шаповалова, соответствующим положительному корню α и натуральному числу m_α* . При фиксированных λ и ξ это рациональная $U_q(\mathfrak{g}_-)$ -значная функция от q (см. замечание после (2.3)). Поскольку $\varphi_{\alpha,m_\alpha}$ определен с точностью до скалярного множителя, мы можем предполагать, что он регулярен в окрестности 1 и не обращается в нуль в $q = 1$.

Ключевым предположением относительно начальной точки $t \in T$, которое делает возможным наш метод квантования, является регулярность поведения $\varphi_{\alpha,m_\alpha}$ в классическом пределе в следующем смысле.

Определение 4.1. Назовем точку $t \in T$ *квантуемой*, если $\lim_{q \rightarrow 1} \varphi_{\alpha,m}(\lambda + \xi) = f_\alpha^m$ для всех $\alpha \in \Pi_\mathfrak{k}$, $\xi \in \Lambda_\mathfrak{g}$ и $m \in \mathbb{N}$, где $f_\alpha \in \mathfrak{k}_-$ — классический корневой вектор, соответствующий корню $-\alpha \in R^-$.

Пусть $\mathfrak{l}$ обозначает максимальную подалгебру Ли в $\mathfrak{k}$, которая является подалгеброй Леви в $\mathfrak{g}$, так что $\Pi_\mathfrak{l} = \Pi_\mathfrak{k} \cap \Pi_\mathfrak{g}$. Ясно, что $M_{\lambda,\xi}$ при $\xi \in \Lambda_\mathfrak{k}^+$ — это просто параболический модуль Верма, если $\Pi_\mathfrak{k} = \Pi_\mathfrak{l}$, и тогда точка t квантуема. Таким образом, это свойство находится под вопросом только тогда, когда множество $\Pi_{\mathfrak{k}/\mathfrak{l}} = \Pi_\mathfrak{k} \setminus \Pi_\mathfrak{l}$ не пусто.

Мы докажем, что все точки максимального тора всех простых неисклчительных алгебраических групп квантуемы. Мы сделаем это с помощью прямого анализа элементов Шаповалова, используя их явную конструкцию с помощью обратной формы Шаповалова (как специальных перенормированных матричных элементов).

4.1. Обратная форма Шаповалова и ее матричные элементы. В этом разделе мы напомним явную конструкцию элементов Шаповалова, участвующих в построении обобщенных параболических модулей Верма, следуя [16, 17].

Для каждого веса $\mu \in \Gamma_+$ положим

$$\eta_\mu = h_\mu + (\mu, \rho) - \frac{1}{2}(\mu, \mu) \in \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}. \quad (4.1)$$

Мы можем рассматривать эту величину как аффинную функцию на $\mathfrak{h}^*$, действующую по правилу $\eta_\mu: \zeta \mapsto (\mu, \zeta + \rho) - \frac{1}{2}(\mu, \mu)$, $\zeta \in \mathfrak{h}^*$.

Выберем ортонормированный базис $\{h_i\}_{i=1}^{\text{rk } \mathfrak{g}} \in \mathfrak{h}$. Элемент $q^{\sum_i h_i \otimes h_i}$ лежит в пополнении тензорного произведения $U_q(\mathfrak{h}) \otimes U_q(\mathfrak{h})$ в $\hbar = \ln q$ -адической топологии. Выберем универсальную R -матрицу $\mathcal{R}$ для $U_q(\mathfrak{g})$ такой, что

$$\tilde{\mathcal{R}} = q^{-\sum_i h_i \otimes h_i} \mathcal{R} \in U_q(\mathfrak{g}_+) \otimes U_q(\mathfrak{g}_-),$$

и положим

$$\mathcal{C} = \frac{1}{q - q^{-1}} (\tilde{\mathcal{R}} - 1 \otimes 1).$$

Отправив левый тензорный множитель элемента $\mathcal{C}$ в представление, мы получим матрицу C с элементами из $U_q(\mathfrak{g}_-)$, которая будет использована для построения элементов Шаповалова.

Отметим, что в классическом пределе тензор $\mathcal{C}$ переходит в $\sum_{\alpha \in R^+} e_\alpha \otimes f_\alpha$, где классические корневые векторы e_α, f_α нормированы условием $(e_\alpha, f_\alpha) = 1$ относительно ad -инвариантной формы на $\mathfrak{g}$. Этот факт будет использован в доказательстве предложения 4.6 ниже.

Пусть $\widetilde{M}_\zeta$ — неприводимый модуль Верма со старшим весом ζ , а $S \in U_q(\mathfrak{g}_+) \widehat{\otimes} U_q(\mathfrak{g}_-)$ — подъем обратной инвариантной формы спаривания $\widetilde{M}_\zeta \otimes \widetilde{M}'_\zeta \rightarrow \mathbb{C}$. Выберем $V \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ и обозначим через S образ S в алгебре $\text{End}(V) \otimes U_q(\mathfrak{g}_-)$.

Модуль $\widetilde{M}_\zeta$ становится приводимым при некоторых ζ , что приводит к возникновению полюсов в S (они могут и не появиться S при некоторых V). Поэтому мы можем ослабить предположение о неприводимости $\widetilde{M}_\zeta$ и работать с S независимо, считая ее элементы рационально-тригонометрическими $U_q(\mathfrak{g}_-)$ -значными функциями веса ζ .

Каждая пара векторов $v, w \in V$ определяет матричный элемент $(v, S_1 w) S_2 \in \widehat{U}_q(\mathfrak{g}_-)$ (свидлеровские обозначения для S) по отношению к контравариантной форме на V . Явное выражение для элементов $s_{ij} = (v_i, S_1 v_j) S_2$ матрицы S в ортонормированном весовом базисе $\{v_i\}_{i \in I} \subset V$ может быть сформулировано на языке диаграмм Хассе, связанных с частично упорядоченными множествами. Мы вводим порядок на $\{v_i\}_{i \in I}$ (равносильно на I), полагая $v_i \succ v_j$, если $v_i - v_j \in \Gamma_+ \setminus \{0\}$, $l = 1, \dots, k$. Матрица S оказывается треугольной: $s_{ii} = 1$ и $s_{ij} = 0$ при $v_i \not\succ v_j$. Элемент s_{ij} является рационально-тригонометрической функцией $\mathfrak{h}^* \rightarrow U_q(\mathfrak{g}_-)$, и ее значение имеет вес $v_j - v_i \in -\Gamma_+$.

Положим $\check{s}_{ab} = -(v_b, S_1 v_a) S_2 [\eta_{v_b - v_a}]_q q^{-\eta_{v_b - v_a}} \in U_q(\mathfrak{b}_-)$ для каждого $v_b \succ v_a$. Явная формула для $\check{s}_{ab}$ в терминах образа $C = \sum_{ij} e_{ij} \otimes c_{ij} \in \text{End}(V) \otimes U_q(\mathfrak{g}_-)$ тензора $\mathcal{C}$ может быть извлечена из [16]:

$$\check{s}_{ab} = c_{ba} + \sum_{k \geq 1} \sum_{v_b \succ v_k \succ \dots \succ v_1 \succ v_a} c_{bk} \dots c_{1a} \frac{(-1)^k q^{\eta_{\mu_k}} \dots q^{\eta_{\mu_1}}}{[\eta_{\mu_k}]_q \dots [\eta_{\mu_1}]_q}, \quad (4.2)$$

где $\mu_l = v_l - v_a \in \Gamma_+$, $l = 1, \dots, k$. Каждая вершина v_l между v_b и v_a дает в произведение вклад $-q^{\eta_{\mu_l}} / [\eta_{\mu_l}]_q \in \widehat{U}_q(\mathfrak{h})$. Мы называем этот вклад *вершинным множителем*. При вычислении на конкретном весе эти множители могут приводить к сингулярностям.

Рассмотрим составной корень $\beta \in R^+$ и обозначим через $\Pi_\beta \subset \Pi$ множество простых корней, входящих в разложение β по базису Π с положительными коэффициентами. Напомним, что простая алгебра Ли $\mathfrak{g}(\beta) \subset \mathfrak{g}$, порожденная e_α, f_α с $\alpha \in \Pi_\beta$, называется *носителем* β . Ее универсальная обертывающая алгебра квантуется как подалгебра Хопфа в $U_q(\mathfrak{g})$.

Определение 4.2. Пусть V — конечномерный $U_q(\mathfrak{g})$ -модуль и $v_a, v_b \in V$ — пара векторов с весами ν_a, ν_b соответственно. Назовем тройку (V, v_a, v_b) *допустимым β -представлением*, если $e_\alpha v_b = 0$ для всех $\alpha \in \Pi_\beta$, $v_a = f_\beta v_b$ и $(\beta^\vee, v_b) = 1$.

Другими словами, тройка (V, v_a, v_b) допустима, если вектор $v_b \in V$ особый для $U_q(\mathfrak{g}(\beta))$ и порождает подмодуль $\simeq \mathbb{C}^2$ квантовой подалгебры $U_q(\mathfrak{g}^\beta)$. Для допустимого β -представления (V, v_a, v_b) положим $\varphi_\beta(\zeta) = \check{s}_{ba}(\zeta)$.

Предложение 4.1 ([17]). Предположим, что (V, v_a, v_b) — допустимое β -представление. Для $\zeta \in \mathfrak{h}^*$ и $m \in \mathbb{N}$ положим $\zeta_0 = \zeta$ и $\zeta_k = \zeta_{k-1} + \nu_a$, $k = 1, \dots, m$. Тогда произведение

$$\varphi_{\beta, m}(\zeta) = \varphi_\beta(\zeta_{m-1}) \dots \varphi_\beta(\zeta_0) \in U_q(\mathfrak{g}_-) \quad (4.3)$$

есть элемент Шаповалова для общего веса ζ , удовлетворяющего $q^{2(\zeta+\rho,\beta)} = q^{m(\beta,\beta)}$.

Следующим шагом мы укажем допустимые представления для всех составных корней неисклужительных алгебры Ли. Выпишем их базисы простых корней в терминах ортонормированной системы $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^n$:

$$\Pi_{\mathfrak{sl}(n)} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n\},$$

$$\Pi_{\mathfrak{sp}(2n)} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, 2\varepsilon_n\},$$

$$\Pi_{\mathfrak{so}(2n+1)} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \varepsilon_n\},$$

$$\Pi_{\mathfrak{so}(2n)} = \{\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n, \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n\}.$$

Занумеруем простые корни слева направо.

Предложение 4.2. Для каждого составного корня $\beta \in R_{\mathfrak{g}}^+$ имеется допустимое β -представление.

Доказательство. Во всех случаях, кроме коротких корней алгебры $\mathfrak{so}(2n+1)$, в качестве V мы берем естественный $\mathfrak{g}$ -модуль минимальной размерности. Тогда

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n): v_b = v_{\varepsilon_i}, v_a = v_{\varepsilon_j} \quad \beta = \varepsilon_i - \varepsilon_j, \quad i < j.$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n), \mathfrak{so}(2n), \mathfrak{so}(2n+1): v_b = v_{\varepsilon_i}, v_a = v_{\pm \varepsilon_j} \quad \text{для } \beta = (\varepsilon_i \mp \varepsilon_j), \quad i < j.$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n): v_b = v_{\varepsilon_i}, v_a = v_{-\varepsilon_i} \quad \text{для } \beta = 2\varepsilon_i.$$

Для коротких корней $\beta = \varepsilon_i$ алгебры $\mathfrak{so}(2n+1)$ в качестве V берем фундаментальный спинорный модуль с $\nu_b = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \varepsilon_l$ и $\nu_a = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \varepsilon_l - \varepsilon_i$. $\square$

Далее предполагаем, что допустимые тройки (V, v_a, v_b) выбраны как в предложении 4.2. Заметим, что во всех случаях размерности весовых пространств в V равны 1. Для каждого простого корня $\alpha \in \Pi$

$$e_{\alpha} \varphi_{\beta, m}(\zeta) 1_{\zeta} \propto \delta_{\nu_b - \nu_c, \alpha} (q^{2(\zeta+\rho, \beta)} - q^{m(\beta, \beta)}) \psi(\zeta) 1_{\zeta},$$

где $\psi(\zeta) \in U_q(\mathfrak{g}_-)$ [17]. Вектор $\varphi_{\beta, m}(\zeta) 1_{\zeta}$ особый, если ζ удовлетворяет равенству $q^{2(\zeta+\rho, \beta)} = q^{m(\beta, \beta)}$, а элементы $\varphi_{\beta, m}(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$ не обращаются в нуль. Эти условия выполняются в общей точке, но мы интересуемся очень специальными ζ , представимыми в виде суммы базового веса λ и $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{t}}^+$. Мы требуем, чтобы $\varphi_{\beta, m}(\zeta)$ был регулярным по q в окрестности $q = 1$ для каждого такого ζ . Более того, элемент $\varphi_{\beta, m}$ должен иметь правильный классический предел при $q \rightarrow 1$ при фиксированном ζ .

Факторизация элементов Шаповалова сводит проблему регулярности к вопросу о $\varphi_{\beta}(\zeta)$. Ввиду (4.2) отметим, что вершинные множители стремятся к нулю при общем ζ , и потому $\varphi_{\beta}(\zeta_k)$ стремится к классическому корневому вектору f_{β} . Однако $\varphi_{\beta}(\zeta_k)$ может иметь полюсы при специальных ζ_k , и регуляризованные $\varphi_{\beta}(\zeta_k)$ уже могут не стремиться к f_{β} . В следующем разделе мы продемонстрируем, что допустимые тройки из предложения 4.2 гарантируют правильный классический предел $\varphi_{\beta}(\zeta_k)$ для всех t .

4.2. Регулярность элементов Шаповалова. В предыдущем разделе мы напомнили конструкцию особых векторов в приводимых модулях Верма с помощью матричных элементов формы Шаповалова. Она очевидным образом работает для веса в общем положении, удовлетворяющего соответствующему условию Каждана — Каца. Для специальных весов из $\lambda + \Lambda_{\mathfrak{g}}$ некоторые вершинные множители могут иметь сингулярности, и свойства регуляризованных матричных элементов не столь очевидны. Эта проблема решается в данном разделе для всех начальных точек и их базовых весов.

Зафиксируем $t \in T$ с централизатором $\mathfrak{k}$, базовый вес λ и выберем $\beta \in \Pi_{\mathfrak{t}}$.

Определение 4.3. Назовем допустимое β -представление (V, v_a, v_b) t -регулярным, если для каждого вектора $v_c \in V$ веса ν_c , удовлетворяющего неравенству $v_b \succ v_c \succ v_a$, и всех $\zeta \in \lambda + \Lambda_{\mathfrak{g}}$ $U_q(\mathfrak{g}_-)$ -значная функция $q \mapsto s_{ca}(\zeta, q)$ регулярна при $q = 1$ и $s_{ca}(\zeta, 1) = 0$.

Из формулы (4.2) следует, что свойство быть регулярным зависит только от t , а не от выбора базового веса λ , потому что вершинные множители существенно зависят от квадратов $q^{(\lambda, \mu)}$ с $\mu \in \Gamma$ (см. (2.3)). В частности, регулярность подразумевает, что специализация на ζ превращает s_{ca} в корректно определенную рациональную функцию от q . Понятно, что если корень β простой, то любое его представление будет t -регулярным, потому что отсутствуют вершины между v_b и v_a , где могли бы нарушаться условия.

Назовем вершину v_c между v_b и v_a t -сингулярной, если $\nu_c(t) = \nu_a(t) = \nu_b(t)$ или, иначе говоря, $\mu_c(t) = 1$ при $\mu_c = \nu_c - \nu_a$. Тогда вершинный множитель $-\frac{q^{\eta_{\mu_c}}}{[\eta_{\mu_c}]_q}$ в (4.2), вычисленный в $\zeta \in \lambda + \Lambda_{\mathfrak{g}}$, не обратится в нуль в классическом пределе $q \rightarrow 1$. Как следствие, матричный элемент s_{ca} может не обратиться в нуль при $q \rightarrow 1$. Напротив, если все вершины между v_b и v_a не сингулярны относительно t , то β -представление (V, v_a, v_b) будет t -регулярно в силу того, что все вершинные множители исчезают при $q = 1$.

Специальный случай регулярного представления $\beta \in \Pi_{\mathfrak{f}}$ реализуется, когда обе весовые разности $\nu_b - \nu_c$ и $\nu_c - \nu_a$ являются корнями при всех v_c между v_b и v_a . Мы называем такие вершины v_c *расщепляющими корень*. В этом случае β -представление t -регулярно при любом t , для которого $\beta \in \Pi_{\mathfrak{f}}$. В самом деле, тогда t -сингулярные вершины v_c между v_b и v_a отсутствуют, поскольку в противном случае $\beta = (\nu_b - \nu_c) + (\nu_c - \nu_a)$ есть сумма двух других корней из $R_{\mathfrak{f}}^+$, что невозможно.

Предложение 4.3. *Предположим, что имеется t -регулярное β -представление (V, v_a, v_b) для каждого $\beta \in \Pi_{\mathfrak{f}}$. Тогда точка t квантуема.*

Доказательство. Элемент $\varphi_{\beta, m}$ допускает факторизацию (4.3). Поэтому достаточно рассмотреть только случай $m = 1$. С точностью до ненулевого скалярного множителя формула суммирования (4.2) может быть переписана в виде

$$\check{s}_{ba} = c_{ba} + \sum_{v_b \succ v_c \succ v_a} c_{bc} s_{ca}. \quad (4.4)$$

Только первый член выживает в классическом пределе, и он переходит в классический корневой вектор f_{β} . $\square$

4.3. Все точки максимального тора квантуемы. В этом разделе мы доказываем, что все точки максимального тора квантуемы, когда группа G принадлежит одному из классических типов A , B , C и D . А именно, мы покажем, что все допустимые β -представления из предложения 4.2 t -регулярны для каждого корня $\beta \in \Pi_{\mathfrak{f}/I}$ и всех $t \in T \subset G$.

Вершинный множитель в (4.2), вычисленный на весе $\zeta = \lambda + \xi$, $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{g}}$, приводится к виду

$$-\frac{q^{\eta_{\mu}(\zeta)}}{[\eta_{\mu}(\zeta)]_q} \propto \frac{q - q^{-1}}{\mu(t)q^{2(\xi + \eta, \mu) - \frac{1}{2}(\mu, \mu)} - 1}. \quad (4.5)$$

Если вершина не сингулярна, т.е. $\mu(t) \neq 1$, то этот множитель может иметь только конечное число полюсов как функция параметра q (в частном случае $t \in T_{\mathbb{Q}}$ полюса отсутствуют вообще, поскольку $\mu(t)$ — корень из единицы в отличие от q). Такие множители обращаются в нуль в классическом пределе. Если вершина t -сингулярна, то требуется более тонкий анализ. Мы столкнемся с этой ситуацией при изучении ортогональной $\mathfrak{g}$.

Предложение 4.4. *Все точки $t \in T$ квантуемы в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ и $\mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(2n)$.*

Доказательство. Для каждого составного корня модуль V в тройке (V, v_a, v_b) из предложения 4.2 является естественным представлением минимальной размерности. Частичный порядок на стандартном базисе V оказывается тотальным, и разность между любой парой различных весов из $\Lambda(V)$ является корнем. Поэтому каждая вершина между v_b и v_a расщепляет корень, и сингулярные вершинные множители отсутствуют. Отсюда следует требуемое утверждение, поскольку все множители (4.5) стремятся к нулю в классическом пределе. $\square$

4.3.1. *Ортогональная $\mathfrak{g}$.* Имеется естественная подалгебра $\mathfrak{sl}(n)$ в ортогональной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ ранга n . Ее элементы Шаповалова обсуждались в предыдущем параграфе. Здесь мы рассмотрим только дополнительные составные корни.

Сначала предположим, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$, а $\beta = \varepsilon_i$ — короткий корень. Допустимая тройка его представления реализуется в спинорном модуле V , где v_b имеет вес $\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n)$, а v_a — вес $\nu_a = \nu_b - \varepsilon_i$. Участок диаграммы Хассе между этими двумя точками линейен:

$$\begin{array}{ccccccc} \circ & \xleftarrow{e_{\alpha_n}} & \circ & \xleftarrow{\quad} & \dots & \xleftarrow{\quad} & \circ & \xleftarrow{e_{\alpha_i}} & \circ \\ v_b & & & & & & & & v_a \end{array}$$

Каждая вершина между v_b и v_a расщепляет ε_i в сумму двух корней $\varepsilon_i = (\varepsilon_i - \varepsilon_k) + \varepsilon_k$ для некоторого $i < k < n$. Поэтому это ε_i -представление t -регулярно для всех t .

Обратимся к случаю длинных корней. Положим N равным размерности минимального фундаментального представления $\mathfrak{g}$.

Лемма 4.1. *Если $\beta = \varepsilon_i + \varepsilon_j \in \Pi_{\mathfrak{k}}$ и $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in R_{\mathfrak{k}}^+$ для $i < j$, то справедливы равенства $\varepsilon_i(t) = \varepsilon_j(t) = -(\pm 1)^{N+1}$.*

Доказательство. Включения $\alpha, \beta \in R_{\mathfrak{k}}^+$ означают, что $\varepsilon_i(t) = \varepsilon_j(t) = \pm 1$. Предположим теперь, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$ и $\varepsilon_i(t) = \varepsilon_j(t) = 1$. Тогда $\varepsilon_i, \varepsilon_j \in R_{\mathfrak{k}}^+$, и корень $\beta = \varepsilon_i + \varepsilon_j$ не является простым в $R_{\mathfrak{k}}^+$, что противоречит условию. $\square$

Определим элементы $d_j = q^{\eta_{2\varepsilon_j}} + 1 = q^{2\eta_{\varepsilon_j}-1} + 1$ при $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n+1)$ и $d_j = q^{2\eta_{2\varepsilon_j}} - 1$ при $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(2n)$. Если для точки t , подлежащей базовому весу λ , выполняются условия $\varepsilon_j(t) = -(\pm 1)^{N+1}$, то $d_j(\lambda)$ стремится к нулю при $q \rightarrow 1$.

Рассмотрим теперь фундаментальный $U_q(\mathfrak{g})$ -модуль минимальной размерности V с множеством весов $\Lambda(V) = \{\pm \varepsilon_i\}_{i=1}^n$ в четном случае и $\Lambda(V) = \{\pm \varepsilon_i\}_{i=1}^n \cup \{0\}$ в нечетном.

Лемма 4.2. *Предположим, что $\beta = \varepsilon_i + \varepsilon_j \in \Pi_{\mathfrak{k}}$ при $i < j$. Тогда тройка (V, v_i, v_{-j}) является t -регулярными β -представлением.*

Доказательство. Единственная вершина между v_i и v_{-j} , картановский множитель которой может быть t -сингулярен, — это v_j , потому что все другие вершины расщепляют β в сумму двух корней. Поэтому $s_{l,-j}$ регулярны при почти всех q (всех, если $t \in T_{\mathbb{Q}}$) и стремятся к нулю при $q \rightarrow 1$ для всех l , удовлетворяющих неравенству $j \succ l \succ -j$. Докажем, что это верно и для $s_{j,-j}$. Это очевидно так, если v_j не сингулярна. В противном случае получаем равенство $\varepsilon_j(t) = -(\pm 1)^{N+1}$ как в лемме 4.1. Этот матричный элемент имеет возможную сингулярность в классическом пределе, поскольку знаменатель содержит множитель $[\eta_{2\varepsilon_j}]_q$, делящийся на d_j . Мы покажем, что эта сингулярность устранима. Без ограничения общности считаем, что $j = 1$ (иначе перейдем к квантовой подгруппе с корнями $\alpha_j, \dots, \alpha_n$, так как только она дает вклад в $s_{j,-j}$).

Заметим, что из $d_1(\zeta) = 0$ не вытекает условие Де Кончини — Каждана — Каца ни для одного из корней [27]. Поэтому мы можем выбрать неприводимый модуль Верма $\widetilde{M}_{\zeta}$ со старшим весом ζ в общем положении при условии $d_1(\zeta) = 0$. Особый вектор

$$-v_{-1} \otimes q^{-\eta_{2\varepsilon_1}} [\eta_{2\varepsilon_1}]_q 1_{\zeta} + \dots + v_1 \otimes \check{s}_{1,-1} 1_{\zeta} \in V \otimes \widetilde{M}_{\zeta}$$

веса $-\varepsilon_1 + \zeta$ исчезает при таких ζ , потому что крайний левый член обращается в нуль (в противном случае линейная оболочка его $\widetilde{M}_{\zeta}$ -компонент образует $U_q(\mathfrak{g}_+)$ -подмодуль, содержащий отличный от 1_{ζ} особый вектор в $\widetilde{M}_{\zeta}$). Поэтому $\check{s}_{1,-1}$ делится на d_1 и $\check{s}_{1,-1} = \psi d_1$, где элемент ψ регулярен по q при $d_1 = 0$ при почти всех q (всех, если t имеет конечный порядок), включая $q = 1$. Более того, $s_{1,-1} = \check{s}_{1,-1}(q - q^{-1})/(q^{-2\eta_{2\varepsilon_1}} - 1)$ при $\zeta \in \lambda + \Lambda_{\mathfrak{g}}$ в силу леммы 4.1, и $s_{1,-1} = (q - q^{-1})\psi d_1/(q^{-2\eta_{2\varepsilon_1}} - 1)$ обращается в нуль в классическом пределе $q \rightarrow 1$.

Используя разложение (4.4) для всех вершин l между i и j , приходим к выводу, что представление (V, v_i, v_{-j}) корня $\varepsilon_i + \varepsilon_j$ t -регулярно. $\square$

Суммируя эти результаты, мы приходим к нужному нам заключению.

Предложение 4.5. *Все точки $t \in T$ квантуемы для ортогональной $\mathfrak{g}$.*

Мы завершим этот раздел уточнением предложения 4.3, которое понадобится при изучении всей совокупности модулей $M_{\lambda, \xi}$ с фиксированным λ .

Предложение 4.6. Пусть $\beta \in \Pi_{\mathfrak{k}}$, $m \in \mathbb{N}$, а λ — базовый вес точки t . Тогда

- (1) элементы Шаповалова $\varphi_{\beta, m}(\zeta)$, вычисленные на весе $\zeta \in \lambda + \Lambda_{\mathfrak{k}}$, регулярны как функции q при всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[m]{t}$.
- (2) $\varphi_{\beta}(\zeta)$ не обращается в нуль при всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[m]{t}$.

Доказательство. Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$ классического типа каждый положительный корень β содержит простой корень α кратности 1. Согласно [17, предложение 4.4] можно выбрать $\varphi_{\beta} \in U_q(\mathfrak{b}_{-})$ так, что $\varphi_{\beta, m} = \varphi_{\beta}^m$. Поэтому $\varphi_{\beta, m}(\zeta) = \prod_{k=0}^{m-1} \varphi_{\beta}(\zeta - k\beta)$ для всех ζ . Поскольку сдвиг на β не меняет $\Lambda_{\mathfrak{k}}$, достаточно рассмотреть только один множитель $\varphi_{\beta}(\zeta)$. Далее φ_{β} строится как матричный элемент $\check{s}_{ba}$ с помощью диаграммы Хассе вида

$$v_b \xleftarrow{e_{\alpha}} f_{\alpha} v_b \quad \dots \quad v_a,$$

где опущенные члены не зависят от α . Она может быть реализована как поддиаграмма Хассе про-квантованного присоединенного $\mathfrak{g}$ -модуля, где v_b имеет нулевой вес, и поэтому весовые разности $\nu_b - \nu_c$ являются положительными корнями для всех $b \succ c$ [17, теорема 5.3].

Было показано, что t -сингулярные вершины могут появиться в s_{ca} только для ортогонального $\mathfrak{g}$, но соответствующие вершинные множители сокращаются. Таким образом, только те вершинные множители (4.5) дают сингулярность в $\varphi_{\beta}(\zeta)$, у которых вес μ является положительным корнем, лежащем в $R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^{+}$ (в противном случае вершина будет расщеплять простой $\beta \in \Pi_{\mathfrak{k}}$ в сумму двух корней из $R_{\mathfrak{k}}^{+}$, что невозможно). Тогда каждый знаменатель в (4.5) пропорционален $\mu(t)q^{2(\xi, \mu) - (\mu, \mu)} - 1$, причем $\mu(t) \in \text{Spec}(t)$. Этот множитель не обращается в нуль при $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[m]{t}$, что доказывает первое утверждение.

Для доказательства второго заметим, что мы выбрали диаграмму Хассе таким образом, что матричные элементы s_{ca} в формуле (4.4) не зависят от генератора f_{α} , так как только стрелка с α в поддиаграмме входит в первый член c_{bc} . Поэтому первый член не зависит от суммы благодаря теореме Пуанкаре — Биркгоффа — Витта, что доказывает второе утверждение. $\square$

Удобно записывать элемент Шаповалова в виде $\varphi_{\beta, m} = \varphi_{\beta}^m$, рассматривая его как элемент из $U_q(\mathfrak{b}_{-})$ (это равенство справедливо для специального выбора φ_{β} как в доказательстве выше). Это соглашение унифицирует обозначения со случаем $\beta \in \Pi_{\mathfrak{l}}$, когда элемент Шаповалова φ_{β}^m есть степень корневого вектора f_{β} .

5. Обобщенные параболические категории

В этом параграфе мы продолжим изучение обобщенных параболических модулей, введенных в п. 2.3.

Зафиксируем точку $t \in T$ с централизатором $\mathfrak{k}$ и максимальной подалгеброй Леви $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{k}$. Выберем базовый вес $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, $\mathfrak{k}$ -доминантный вес $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^{+}$ и положим $\zeta = \lambda + \xi$. Имеем систему условий Каждана — Каца (2.4) и множество $\{\varphi_{\alpha}^{m_{\alpha}} 1_{\zeta}\}_{\alpha \in \Pi_{\mathfrak{k}}}$ особых векторов в модуле Верма $\widetilde{M}_{\zeta}$. Обозначим через $\widehat{M}_{\lambda, \xi}$ фактор $\widetilde{M}_{\zeta}$ по сумме подмодулей, порожденных $\{\varphi_{\alpha}^{m_{\alpha}} 1_{\zeta}\}_{\alpha \in \Pi_{\mathfrak{l}}}$. Имеется последовательность эпиморфизмов

$$\widetilde{M}_{\zeta} \rightarrow \widehat{M}_{\lambda, \xi} \rightarrow M_{\lambda, \xi}.$$

Параболический модуль Верма $\widehat{M}_{\lambda, \xi}$ локально конечен над $U_q(\mathfrak{l})$ [1]. Следовательно, $M_{\lambda, \xi}$ также локально конечен как модуль над $U_q(\mathfrak{l})$. Этот факт будет важен для нашего исследования.

Выберем составной корень $\beta \in \Pi_{\mathfrak{k}/\mathfrak{l}}$. Из разложения (4.3) и предложения 4.6 следует, что элементы Шаповалова $\varphi_{\beta}^{m_{\beta}}$ регулярны при $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[m_{\beta}]{t}$. Поскольку только главный член в $\varphi_{\beta}(\zeta_k)$ (первое слагаемое в (4.2)) содержит генератор f_{β} базиса Пуанкаре — Биркгоффа — Витта, он не зависит от других членов. Поэтому $\varphi_{\beta}^{m_{\beta}} 1_{\zeta}$ не исчезает в $\widehat{M}_{\lambda, \xi}$ и является в нем особым вектором при условии $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[m_{\beta}]{t}$.

Как $U_q(\mathfrak{g}_-)$ -модуль, $M_{\lambda,\xi}$ изоморфен $U_q(\mathfrak{g}_-)/J_{\lambda,\xi}^-$, где $J_{\lambda,\xi}^-$ — левый идеал, аннулирующий старший вектор в $M_{\lambda,\xi}$. Он порождается элементами Шаповалова $\varphi_\alpha^{m_\alpha}(\zeta)$ при всех $\alpha \in \Pi_\mathfrak{k}$. Мы также рассмотрим противоположный модуль $M'_{\lambda,\xi}$ младшего веса $-\lambda - \xi$. Он изоморфен $U_q(\mathfrak{g}_+)/J_{\lambda,\xi}^+$, где $J_{\lambda,\xi}^+ = \sigma(J_{\lambda,\xi}^-)$.

Обозначим через $V_{\lambda,\xi}^+$ ядро $V^{J_{\lambda,\xi}^+}$ левого идеала $J_{\lambda,\xi}^+$. В классическом пределе весовые вектора из $V_{\lambda,\xi}^+$ находятся в биекции с неприводимыми подмодулями $\mathfrak{k}$ -модуля $V \otimes X_\xi$, поэтому $\Lambda(V_{\lambda,\xi}^+) + \xi$ содержится в $\Lambda_\mathfrak{k}^+$. Через ${}^+V_{\lambda,\xi}$ обозначим любое $U_q(\mathfrak{h})$ -инвариантное подпространство в V , трансверсальное к $\omega(J_{\lambda,\xi}^+)V$, которое мы можем отождествить с фактор-пространством $V/\omega(J_{\lambda,\xi}^+)V$, двойственным к $V_{\lambda,\xi}^+$ по отношению к контравариантной форме на V . Можно доказать, что в классическом пределе форма невырождена на $V_{\lambda,\xi}^+$, и потому можно положить ${}^+V_{\lambda,\xi} = V_{\lambda,\xi}^+$ для почти всех q . Тогда экстремальный твист θ , ответственный за полную приводимость $V \otimes M_{\lambda,\xi}$, превращается в оператор из $\text{End}(V_{\lambda,\xi}^+)$.

Значительная часть дальнейшего анализа опирается на элементарные технические факты, касающиеся базовых весов. Сформулируем эти факты в виде отдельной леммы.

Лемма 5.1. Пусть даны точка $t \in T$ с централизатором $\mathfrak{k}$ и ее базовый вес λ .

- (1) Для всех $\alpha \in R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+$ и $c \in \mathbb{Z}$ выражение $[(\lambda + \rho, \alpha^\vee) + c]_{q_\alpha}$ не обращается в нуль при $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$. Обратная дробь стремится к нулю при $q \rightarrow 1$.
- (2) Для всех $\alpha \in R_\mathfrak{k}^+$ и $c \in \mathbb{Q}$ функция $q \mapsto [(\lambda + \rho, \alpha^\vee) + c]_{q_\alpha}$ либо тождественно равна нулю, либо не обращается в нуль ни при каких $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{1}$.

Доказательство. Исходя из определения базового веса (2.2), запишем

$$[(\lambda + \rho, \alpha^\vee) + c]_{q_\alpha} = q_\alpha^{-(\lambda + \rho, \alpha^\vee) - c} \times \frac{\alpha(t)q_\alpha^{2(\varkappa, \alpha^\vee) + 2c} - 1}{q_\alpha - q_\alpha^{-1}}.$$

Если $\alpha \in R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+$, то числитель не обращается в нуль. Наконец, обратная дробь стремится к нулю в классическом пределе множителя ввиду $q_\alpha - q_\alpha^{-1}$. Это доказывает первое утверждение.

Теперь предположим, что $\alpha \in R_\mathfrak{k}^+$, и поэтому $\alpha(t) = 1$. Тогда $\alpha(t)q_\alpha^{2(\varkappa, \alpha^\vee) + 2c} = 1$ в том и только в том случае, когда $c = -(\varkappa, \alpha^\vee)$, так как q не является корнем из единицы. Но тогда это верно при всех таких q . Это доказывает второе утверждение. $\square$

Предложение 5.1. Пусть Z — модуль со старшим весом $\zeta \in \lambda + \Lambda$. Предположим, что Z локально конечен над $U_q(\mathfrak{l})$. Тогда для каждого $V \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ и каждого $\eta \in \Lambda_\mathfrak{k}^+$ отображение $p_\mathfrak{g}: (V \otimes Z)[\lambda + \mu] \rightarrow (V \otimes Z)^+$ корректно определено для $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$.

Доказательство. Без ограничения общности предполагаем, что базовый вес λ задает тривиальное представление $U_q(\mathfrak{l})$, т.е. $(\lambda, \alpha) = 0$ для всех $\alpha \in R_\mathfrak{l}$.

Если $\alpha \in R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+$, то все определители в картановских коэффициентах корневых множителей p_α , входящих в разложение проектора (2.9), не обращаются в нуль при $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$. Тогда каждый p_α регулярен на $(V \otimes Z)[\lambda + \eta]$. В частности, для простого α оператор p_α переводит $(V \otimes Z)[\lambda + \eta]$ в $\ker e_\alpha$, поскольку $V \otimes Z$ локально нильпотентен над $U_q(\mathfrak{g}_+^+)$ (см. лемму 2.1).

Теперь предположим, что $\alpha \in R_\mathfrak{k}^+$. Знаменатель в (2.6) равен $[(\varkappa + \eta, \alpha^\vee) + i]_{q_\alpha}$ на весовом подпространстве $(V \otimes Z)[\lambda + \eta]$. Это выражение никогда не обращается в нуль, так как $(\varkappa + \eta, \alpha^\vee)$ и i — натуральные числа. Поскольку Z локально конечен над $U_q(\mathfrak{l})$, тензорное произведение $V \otimes Z$ также локально конечно. Тогда вес $\lambda + \eta$ доминантен относительно $\mathfrak{l}$, и оператор p_α корректно определен на $(V \otimes Z)[\lambda + \eta]$. Таким образом, все весовое подпространство $(V \otimes Z)[\lambda + \eta]$ отображается в $\ker e_\alpha$ каждым оператором p_α с $\alpha \in \Pi_\mathfrak{l}$ [5, предложение 3.6].

Таким образом, отображение $p_\mathfrak{g}: (V \otimes Z)[\lambda + \eta] \rightarrow V \otimes Z$ корректно определено и не зависит от нормального порядка на $R_\mathfrak{g}^+$. Нам осталось убедиться, что его образ лежит в $(V \otimes Z)^+$. Выберем $\alpha \in \Pi_\mathfrak{g}$ и нормально упорядочим корни так, чтобы α оказался в крайнем левом положении. Тогда $p_\mathfrak{g}$ -образ $(V \otimes Z)[\lambda + \eta]$ аннулируется каждым оператором e_α по уже доказанному и, следовательно, всеми e_α для простых α в силу независимости $p_\mathfrak{g}$ от нормального порядка на R^+ . $\square$

Отметим, что $p_{\mathfrak{g}}$ может быть разложен в произведение $p_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}} \times p_{\mathfrak{l}}$, поскольку существует нормальный порядок на $R_{\mathfrak{g}}^+$, при котором все корни из $R_{\mathfrak{l}}^+$ собраны справа. Правый сомножитель является экстремальным проектором на подпространство $U_q(\mathfrak{l}_+)$ -инвариантов в $V \otimes Z$.

5.1. Базовый модуль. Мы начинаем наше изучение обобщенных параболических модулей Верма с базового модуля M_{λ} и докажем, что он неприводим для почти всех q . Наш интерес к M_{λ} обусловлен тем, что мы хотим представить квантовое полиномиальное кольцо $\mathbb{C}_q[O]$ как подалгебру линейных операторов на M_{λ} . Окрестность начальной точки $t \in O$ может быть параметризована касательным пространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} \simeq \mathfrak{g}_-/\mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{g}_+/\mathfrak{k}_+$, которое позволяет вложить $\mathbb{C}[O]$ в $\mathbb{C}[\mathfrak{g}/\mathfrak{k}] \simeq \mathbb{C}[\mathfrak{g}_+/\mathfrak{k}_+] \otimes \mathbb{C}[\mathfrak{g}_-/\mathfrak{k}_-]$. Это тензорное произведение будет иметь вид матричной алгебры, если имеется подходящее спаривание между тензорными сомножителями, превращающее их в двойственные пространства. Исходя из этого наблюдения, возникает идея искать деформацию $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_-/\mathfrak{k}_-]$ в виде модуля старшего веса с той же функциональной размерностью, а деформацию $\mathbb{C}[\mathfrak{g}_+/\mathfrak{k}_+]$ — как его противоположный модуль младшего веса. Искомая двойственность будет обеспечена, если модули будут неприводимы.

Условие на размер M_{λ} легко обеспечить, если $\mathfrak{k} = \mathfrak{l}$ является подалгеброй Леви, ввиду наличия базиса Пуанкаре — Биркгоффа — Витта в $U_q(\mathfrak{g}_-)$, у которого все мономы из $U_q(\mathfrak{l}_-)$ находятся справа. Дополнительные мономы образуют базис в скалярном параболическом модуле Верма M_{λ} с базовым старшим весом λ . Построение базиса в M_{λ} является трудной задачей, если $\mathfrak{k}$ не подалгебра Леви. Поэтому мы вынуждены обратиться к аргументам теории деформаций. Мы рассматриваем M_{λ} как модуль над $U_q(\mathfrak{g}_-)$ и расширяем кольцо скаляров до $\mathbb{C}_1(q)$, локализуя $\mathbb{C}[q, q^{-1}]$ в точке $q = 1$. Тогда M_{λ} будет деформацией классического $U_q(\mathfrak{g}_-)$ -модуля, и эта деформация сохраняет весовые подпространства с точностью до сдвига на постоянный вес λ .

Лемма 5.2. *Инфинитезимальный характер $\text{ch}(M_{\lambda})$ модуля M_{λ} , расширенного над $\mathbb{C}_1(q)$, равен $\prod_{\alpha \in R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+} (1 - e^{-\alpha})^{-1} \times e^{\lambda}$.*

Доказательство. Корневые векторы Люстига, порождающие базис Пуанкаре — Биркгоффа — Витта, деформируют классические корневые векторы. Переопределим f_{α} при $\alpha \in R_{\mathfrak{k}/\mathfrak{l}}^+$ следующим образом. Классический корневой вектор f_{α} есть композиция коммутаторов от f_{β} , $\beta \in \Pi_{\mathfrak{k}/\mathfrak{l}}$, f_{ν} , $\nu \in \Pi_{\mathfrak{l}}$. Определим их квантовый аналог, заменив f_{β} на $\varphi_{\beta}(\lambda)$, простые корневые векторы из $\mathfrak{l}_-$ на образующие Шевалле $U_q(\mathfrak{l}_-)$, а классические коммутаторы — на q -коммутаторы. По построению, они деформируют классические f_{α} при всех $\alpha \in R_{\mathfrak{k}}^+$.

Теперь переупорядочим корни в $R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{l}}^+$ так, чтобы все корни из $R_{\mathfrak{k}}^+$ находились справа от $R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+$, и рассмотрим систему упорядоченных мономов Пуанкаре — Биркгоффа — Витта от отрицательных корневых векторов, модифицированных как указано выше. Число таких мономов в каждом весе равняется размерности соответствующего подпространства благодаря существованию стандартного базиса Пуанкаре — Биркгоффа — Витта в $U_q(\mathfrak{g}_-)$. В классическом пределе эта система векторов превращается в базис Пуанкаре — Биркгоффа — Витта в $U(\mathfrak{g}_-)$ и, следовательно, образует базис в каждом весовом подпространстве $U_q(\mathfrak{g}_-)$ для почти всех q . Тогда мономы от корневых векторов с корнями из $R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+$ образуют базис в каждом весовом подпространстве M_{λ} для почти всех q . $\square$

Оставшаяся часть этого раздела посвящена вопросу неприводимости M_{λ} . Предположим, что G — связная односвязная группа с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Обозначим через K подгруппу с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$, которая является централизатором точки t . Известно, что K связна [31]. Пусть Ξ — множество классов изоморфных конечномерных $\mathfrak{g}$ -модулей Ξ с ненулевым подпространством $\mathfrak{k}$ -инвариантов. Это модули, возникающие в разложении Петера — Вейля для $\mathbb{C}[G/K]$ [32]. Поскольку $\mathfrak{k}$ редуктивна, каждый такой модуль входит в Ξ вместе со своим двойственным. Мы будем использовать то же обозначение для классов $U_q(\mathfrak{g})$ -модулей, классические аналоги которых лежат в Ξ .

Обозначим через $N^{\pm}$ фактор-модули $U(\mathfrak{g}_{\pm})/U(\mathfrak{g}_{\pm})\mathfrak{k}_{\pm}$. Из леммы 5.2 следует, что каждое подпространство веса $\mu + \lambda$ в M_{λ} имеет ту же размерность, что и подпространство $N^{-}[\mu]$ для почти всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{1}$. Каждый инвариантный вектор $v \in V^{\mathfrak{k}}$ порождает эквивариантное относительно $U(\mathfrak{g}_+)$ отображение $\widehat{\varphi}_v: U(\mathfrak{g}_+) \rightarrow V$, $x \mapsto x \triangleright v$, которое пропускается через отображение $\varphi_v: N^+ \rightarrow V$.

Лемма 5.3. Пересечение $\ker \varphi_v$ по всем $v \in V^\mathfrak{k}$ и $V \in \Xi$ равно нулю.

Доказательство. Выберем модуль $V \in \Xi$ и вектор $v \in V^K$, для которого K является подгруппой изотропии. Такая пара (V, v) существует [32, теорема 11.1.13]. Фактор-пространство G/K вкладывается в V как орбита с помощью отображения $g \mapsto gv$, поэтому φ_v осуществляет вложение $\mathfrak{g}_+/\mathfrak{k}_+ \rightarrow V$. Зафиксируем порядок на положительных корнях и рассмотрим мономы Пуанкаре — Биркгоффа — Витта $\prod_{\alpha \in R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+} e_\alpha^{m_\alpha}$ степени m . Применим их к K -инвариантному тензору $v^{\otimes m}$ в симметризованной тензорной степени $\text{Sym}(V^{\otimes m})$. Результатом будет симметризованный тензор $\propto \text{Sym}(\otimes_{\alpha \in R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+} (e_\alpha v)^{\otimes m_\alpha})$ плюс члены $\propto \text{Sym}(v^{\otimes k} \otimes (\dots))$ с $k > 0$. Первый член не зависит от остальных, и более того, образы мономов Пуанкаре — Биркгоффа — Витта степени m независимы в $V^{\otimes m}$. $\square$

Из доказанной леммы следует, что для каждого веса $\mu \in \Lambda(N^+)$ существуют модуль $V \in \Xi$ и $\mathfrak{g}_+$ -инвариантное отображение $N^+ \rightarrow V$, порожденное вектором $v \in V^\mathfrak{k} = V^{\mathfrak{k}+}[0]$, которое инъективно на $N^+[\mu]$. Мы смоделируем подобную ситуацию при $q \neq 1$.

Положим $Z = M_\lambda$. Выберем особый вектор $u \in (V \otimes Z)^+$, у которого коэффициент $v = (\text{id} \otimes \epsilon_Z)(u) \in V$ отличен от нуля. Определим линейное отображение $\psi_v: Z \rightarrow V$ правилом $\psi_v(z) = u^1(u^2, z)$ (в свидлеровских обозначениях) для всех $z \in Z$. Оно факторизуется в композицию отображений $Z \rightarrow {}^*Z \rightarrow V$, где первая стрелка определяется с помощью контравариантной формы, понимаемой как линейное отображение из Z в ограниченное $(U_q(\mathfrak{h})\text{-локально конечное})$ правое двойственное пространство *Z .

Лемма 5.4. Для каждого элемента $f \in U_q(\mathfrak{g}_-)$ веса $-\alpha$ отображение ψ_v действует по правилу $\psi_v(f1_Z) = q^{-(\lambda+\mu, \alpha)} \sigma(f)v$, где μ — вес вектора v .

Доказательство. Достаточно проверить равенство для монома от образующих Шевалле. Для простого корня α имеем

$$(1 \otimes \omega(f_\alpha))u = -(1 \otimes q^{-h_\alpha} e_\alpha)u = -(\gamma(e_\alpha) \otimes q^{-h_\alpha})u = (e_\alpha q^{-h_\alpha} \otimes q^{-h_\alpha})u = (\sigma(f_\alpha) \otimes 1)q^{-h_\alpha}u.$$

Отсюда получаем равенство $(1 \otimes \omega(f))u = q^{-(\lambda+\mu, \alpha)} (\sigma(f) \otimes 1)u$ для всех α и мономов f индукцией по степени f . Теперь утверждение немедленно следует ввиду очевидного равенства $\psi_v(f1_Z) = (\text{id} \otimes \epsilon_Z)((1 \otimes \omega(f_\alpha))(u))$. $\square$

Другими словами, ψ_v является гомоморфизмом $U_q(\mathfrak{g}_-)$ -модулей. Подчеркнем, что v не произвольный вектор из $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g}_-)}(Z, V)$, а порождаемый особым вектором из $V \otimes Z$. Этот факт важен, потому что только в этом случае гомоморфизм $Z \rightarrow V$, $f1_Z \mapsto q^{-(\lambda+\mu, \alpha)} \sigma(f)v$, факторизуется через гомоморфизм ${}^*Z \rightarrow V$. Неприводимость Z будет доказана, если установить, что отображение $Z \rightarrow {}^*Z$ имеет нулевое ядро и, следовательно, является изоморфизмом. Достаточно проверить это только на тех весовых подпространствах в Z , где может появиться особый вектор. Другими словами, на орбите старшего веса ζ модуля Z относительно аффинного действия $\zeta \mapsto w.\zeta = w(\zeta + \rho) - \rho$ группы Вейля $W \ni w$.

Следующий результат — один из основных в этом разделе. При его доказательстве мы опираемся на частный случай предложения 5.2 при $\xi = 0$.

Теорема 5.1. Базовый модуль M_λ неприводим для почти всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[t]{t}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что M_λ не имеет особых векторов или, что эквивалентно, его контравариантная форма M_λ невырождена на $M_\lambda[\mu]$, где $\mu \in W.\lambda$. Пусть $N_q^+ \simeq M_\lambda'$ — фактор-модуль $U_q(\mathfrak{g}_+)$ по левому идеалу J^+ , аннулирующему младший вектор в модуле M_λ' . В силу леммы 5.2 справедливы равенства

$$\dim N_q^+[\lambda - \mu] = \dim N^+[\lambda - \mu] = \dim M_\lambda'[-\mu] = \dim M_\lambda[\mu]$$

для почти всех q . Выберем такой модуль $V \in \Xi$, чтобы весовое пространство $N^+[\lambda - \mu]$ в классическом пределе вкладывалось в V с помощью некоторого φ_{v_0} . Предложение 5.2 для $\xi = 0$

гарантирует, что для почти всех q существует ненулевой вектор $v = p_{\mathfrak{g}}(\lambda)v'$, $v' \in V[0]$, деформирующий v_0 , причем вектор $u = p_{\mathfrak{g}}(v' \otimes 1_{\lambda}) \in V \otimes M_{\lambda}$ особый и $v = (\text{id} \otimes \epsilon_{M_{\lambda}})(u)$. Тогда пространство $N_q^+[\lambda - \mu]$ вкладывается в V , и отображение $\psi_v: M_{\lambda}[\mu] \rightarrow N_q^+[\lambda - \mu]v$ есть изоморфизм для почти всех q . Поскольку μ пробегает конечное множество $W \cdot \lambda$, утверждение доказано. $\square$

5.2. Обобщенные параболические модули Верма. В этом разделе мы изучим категорию $\text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ -модулей, порожденную базовым модулем. Как и прежде, $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ обозначает централизатор точки $t \in T$. Выберем базовый вес λ для t , $\mathfrak{k}$ -доминантный вес $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^+$ и положим $\zeta = \lambda + \xi$. Обозначим $m_{\alpha} = (\xi, \alpha^{\vee}) + 1 \in \mathbb{N}$, для всех $\alpha \in \Pi_{\mathfrak{k}}$.

Пусть V — $\mathfrak{g}$ -модуль, рассматриваемый посредством сужения как $\mathfrak{k}$ -модуль. Для неприводимого конечномерного $\mathfrak{k}$ -модуля X в качестве V_X^+ возьмем $\text{Hom}_{\mathfrak{k}}(X^*, V)$. Если веса V имеют кратность 1, то можно отождествить V_X^+ с подпространством в соответствующем $U_q(\mathfrak{g})$ -модуле V .

Предложение 5.2. *Предположим, что все весовые подпространства модуля $V \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ одномерны. Тогда для всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$, кроме конечного множества, $U_q(\mathfrak{h})$ -модули $V_{\lambda, \xi}^+$ являются плоскими деформациями пространств V_X^+ при всех $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^+$, а оператор $p_{\mathfrak{g}}(\zeta): V_{\lambda, \xi}^+ \rightarrow V_{\lambda, \xi}^+$ сюръективен.*

Доказательство. Обозначим через $W = \sum_{\mu \in \Lambda(V_X^+)} V[\mu]$ сумму всех весовых подпространств, веса которых входят в $\Lambda(V_X^+)$. В силу предложения 5.1 оператор $p_{\alpha}(\zeta)$ корректно определен на W и принимает значения в $V_{\lambda, \xi}^+$ по лемме 3.1.

Рассмотрим собственное значение корневого множителя $p_{\alpha}(\zeta)$, представленное формулой (3.2), на подпространстве веса $\mu \in \Lambda(W)$. Если $\alpha \in R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+$, то ни числители $\propto [(\lambda + \xi + \mu + \rho, \alpha^{\vee}) + k]_{q_{\alpha}}$, ни знаменатели $\propto [(\lambda + \xi + \rho, \alpha^{\vee}) + k]_{q_{\alpha}}$ не могут обратиться в нуль при $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$ в силу утверждения (1) леммы 5.1. Остается рассмотреть случай $\alpha \in R_{\mathfrak{k}}^+$.

В классическом пределе все множители $p_{\alpha}(\zeta)$ при $\alpha \in R_{\mathfrak{g}/\mathfrak{k}}^+$ превращаются в тождественный оператор на V_X^+ . Поэтому остаются только множители с $\alpha \in R_{\mathfrak{k}}^+$, а оператор $p_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ переходит в $p_{\mathfrak{k}}(\xi)$ (нормальный порядок на $R_{\mathfrak{g}}^+$ индуцирует нормальный порядок на $R_{\mathfrak{k}}^+ \subset R_{\mathfrak{g}}^+$). Но это обратный экстремальный твист θ для конечномерного $\mathfrak{k}$ -модуля X , который обратим в силу полной приводимости $\mathfrak{k}$ -модулей. Таким образом, все множители (3.2) регулярны по q и не обращаются в нуль в некоторой окрестности $q = 1$, а потому и для всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$ в силу утверждения (2) леммы 5.1.

Осталось доказать, что $W = V_{\lambda, \xi}^+$, кроме, возможно, конечного подмножества $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$, не зависящего от ξ . Поскольку при деформации ядра не увеличиваются, $V_{\lambda, \xi}^+ \subset W$ для почти всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$. С другой стороны, по доказанному $V_{\lambda, \xi}^+ \supset p_{\mathfrak{g}}(\zeta)W = W$ для всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$, откуда $V_{\lambda, \xi}^+ \supset W$ для всех q и $V_{\lambda, \xi}^+ = W$ для почти всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$. Но множество весов V конечно, поэтому W может быть меньше V только для конечного числа ξ (элемент Шаповалова достаточно большой степени аннулирует все V). Следовательно, конечное множество $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$, вне которого выполняется равенство $W = V_{\lambda, \xi}^+$, можно выбрать не зависящим от ξ . $\square$

Напомним, что категория $\mathcal{O}_q$ состоит из конечно порожденных $U_q(\mathfrak{g})$ -модулей, которые диагонализуются над $U_q(\mathfrak{h})$ и локально конечны над $U_q(\mathfrak{g}_+)$. Тензорное умножение на конечномерный квазиклассический модуль слева сохраняет $\mathcal{O}_q$ и превращает ее в категорию $\text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ -модулей. Нашей целью будет изучение подкатегории $\text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ -модулей $\mathcal{O}_q$, ассоциированной с точкой $t \in O \cap T$. Объекты в $\mathcal{O}_q(t)$ будут интерпретироваться как представления векторных расслоений над квантованной алгеброй $\mathcal{C}[O]$ при условии, что $\mathcal{O}_q(t)$ полупроста. Это и есть главный вопрос, на который следует ответить.

Определение 5.1. Полная подкатегория $\mathcal{O}_q(t)$ категории $\mathcal{O}_q$, объектами которой являются $U_q(\mathfrak{g})$ -подмодули в модулях вида $V \otimes M_{\lambda}$, где $V \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$, называется *обобщенной параболической категорией точки t* .

Категория $\mathcal{O}_q(t)$, очевидно, аддитивна и устойчива относительно левого тензорного умножения на модули из $\text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ по построению. Хотя $\mathcal{O}_q(t)$ зависит от λ , другой выбор λ приводит к изоморфной категории, поэтому мы не будем указывать базовый вес в обозначении.

Отметим, что для различных точек $t \in T \cap O$ категории $\mathcal{O}_q(t)$ различны, хотя мы покажем их эквивалентность для почти всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$.

Выберем в качестве V фундаментальный модуль минимальной размерности для специальной линейной и симплектической $\mathfrak{g}$. Для ортогональных $\mathfrak{g}$ пусть V будет фундаментальным спинорным модулем. Во всех случаях весовые подпространства в V одномерны. Односвязная группа G с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ точно представлена в $\text{End}(V)$, и все эквивариантные векторные расслоения над классом сопряженности O порождаются векторными подрасслоениями, появляющимися в $O \times V$.

Обозначим через $L(\mu)$ неприводимый $U_q(\mathfrak{g})$ -модуль со старшим весом $\mu \in \mathfrak{h}^*$, а через X_ξ — классический конечномерный $\mathfrak{k}$ -модуль со старшим весом $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^+$.

Теорема 5.2. *Для каждой точки $t \in T$ при почти всех $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$ справедливы следующие утверждения.*

- (1) Категория $\mathcal{O}_q(t)$ полупроста.
- (2) Простые объекты $\mathcal{O}_q(t)$ суть в точности модули $L(\lambda + \xi)$ с $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^+ \cap \Lambda_{\mathfrak{g}}$.

Доказательство. Поскольку каждый конечномерный $U_q(\mathfrak{g})$ -модуль является подмодулем в некоторой тензорной степени V , мы докажем (1), если сделаем это для всех $V^{\otimes m} \otimes M_\lambda$ с помощью индукции по $m \in \mathbb{Z}_+$ (для $m = 0$ это теорема 5.1). Предполагая, что $V^{\otimes m} \otimes M_\lambda$ вполне приводим и у его простых подмодулей $L(\lambda + \xi)$ веса таковы, что $X_\xi \subset V^{\otimes m}$, мы докажем (1) для каждого $V \otimes L(\zeta)$, $\zeta = \lambda + \xi$, используя этот шаг в качестве индукционного перехода.

Предположим, что мы сделали это для некоторого $m \geq 0$. Рассмотрим неприводимое разложение $V^{\otimes m} \otimes M_\lambda = \bigoplus_i L(\zeta_i)$, где $\zeta_i = \lambda + \xi_i$, и положим ζ равным одному из ζ_i . Тогда полная приводимость $V \otimes L(\zeta)$ вытекает из утверждения (1) предложения 5.2 и следствия 3.1.

Ввиду предложения 5.2 ясно, что каждый модуль $L(\lambda + \xi)$ с $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^+ \cap \Lambda_{\mathfrak{g}}$ появляется в $V^{\otimes m} \otimes M_\lambda$ для некоторого m , потому что X_ξ появляется в некотором $V^{\otimes m}$. Это доказывает (2). $\square$

Из доказательства ясно, что категория $\mathcal{O}_q(t)$ полупроста при $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$ таких, что размерность обобщенных экстремальных пространств совпадает с классической, а базовый модуль M_λ неприводим. Обозначим через $\Omega_t \subset \mathbb{C} \setminus \sqrt[q]{t}$ множество таких значений q . Оно открыто относительно топологии, индуцированной топологией Зарисского на $\mathbb{C}$.

Предложение 5.3. *Для каждого $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^+ \cap \Lambda_{\mathfrak{g}}$ верно равенство $\text{ch}(L(\lambda + \xi)) = \text{ch}(X_\xi)\text{ch}(M_\lambda)$ при всех $q \in \Omega_t$.*

Доказательство. Рассмотрим $M_{\lambda, \xi}$ как $U_q(\mathfrak{g}_-)$ -модуль. В классическом пределе он переходит в фактор-модуль $U(\mathfrak{g}_-)$ по левому идеалу, порожденному аннулятором старшего веса в X_ξ . Поэтому справедливы неравенства

$$\text{ch}(L(\lambda + \xi)) \leq \text{ch}(M_{\lambda, \xi}) \leq \text{ch}(X_\xi)\text{ch}(\mathfrak{g}_-/\mathfrak{k}_-)e^\lambda = \text{ch}(X_\xi)\text{ch}(M_\lambda)$$

над $\mathbb{C}_1(q)$, означающие неравенства размерностей каждого весового пространства для q из проколотой окрестности точки 1 (которая, вообще говоря, зависит от веса).

Предположим, что утверждение верно для всех $L(\lambda + \xi) \subset V^m \otimes M_\lambda$ при некотором $m \geq 0$ (оно тривиально верно при $m = 0$). Из разложения в прямую сумму $V \otimes L(\lambda + \xi) = \sum_i L(\lambda + \xi_i)$ следует

$$\begin{aligned} \text{ch}(V)\text{ch}(L(\lambda + \xi)) &= \sum_i \text{ch}(L(\lambda + \xi_i)) \leq \sum_i \text{ch}(M_{\lambda, \xi_i}) \\ &\leq \sum_i \text{ch}(X_{\xi_i})\text{ch}(M_\lambda) = \text{ch}(V)\text{ch}(X_\xi)\text{ch}(M_\lambda) \end{aligned} \quad (5.1)$$

над $\mathbb{C}_1(q)$, поскольку $V \otimes X_\xi = \sum_i X_{\xi_i}$. Следовательно, все неравенства на самом деле равенства. Далее, для каждого i и каждого веса μ имеет место равенство

$$\dim L(\zeta_i)[\mu] = \dim M_{\lambda, \xi_i}[\mu] = \dim(X_{\xi_i} \otimes M_\lambda)[\mu] \quad (5.2)$$

при почти всех $q \in \Omega_t$. Но тогда $\text{ch}(L(\zeta_i)) \geq \text{ch}(X_{\xi_i})\text{ch}(M_\lambda)$ для всех $q \in \Omega_t$, поскольку $L(\zeta_i)$ — фактор-модуль модуля Верма, плоского во всех точках $q \in \mathbb{C} \setminus \sqrt[m]{1} \supset \mathbb{C} \setminus \sqrt[m]{t}$. Если это неравенство строгое при некотором i , то

$$\text{ch}(V)\text{ch}(L(\lambda + \xi)) = \sum_i \text{ch}(L(\lambda + \xi_i)) > \sum_i \text{ch}(X_{\xi_i})\text{ch}(M_\lambda).$$

Но это невозможно, так как крайний левый и крайний правый члены здесь равны $\text{ch}(V)\text{ch}(X_\xi)\text{ch}(M_\lambda)$. Поэтому $\text{ch}(L(\zeta_i)) = \text{ch}(X_{\xi_i})\text{ch}(M_\lambda)$ в Ω_t . Это верно для всех ξ_i , для которых $X_{\xi_i} \subset V^{\otimes(m+1)}$, и потому для всех $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{t}}^+ \cap \Lambda_{\mathfrak{g}}$ по соображениям индукции. $\square$

Теперь мы опишем неприводимые подмодули в $\mathcal{O}_q(t)$ и покажем, что это в сущности обобщенные параболические модули Верма.

Следствие 5.1. Для каждого $\xi \in \Lambda_{\mathfrak{t}}^+ \cap \Lambda_{\mathfrak{g}}$ и всех $q \in \Omega_t$ модуль $M_{\lambda, \xi}$ неприводим и выполняется равенство $\text{ch}(M_{\lambda, \xi}) = \text{ch}(X_\xi)\text{ch}(M_\lambda)$.

Доказательство. Неприводимый модуль $L(\lambda + \xi)$ является фактором модуля $M_{\lambda, \xi}$, поэтому достаточно проверить, что их характеры равны. Мы установили равенство размерностей весовых подпространств в (5.2) для каждого веса при почти всех $q \in \Omega_t$ и затем доказали его справедливость при всех $q \in \Omega_t$. Это доказывает неприводимость $M_{\lambda, \xi}$, а формула для характера следует из предложения 5.3. $\square$

6. Квантование векторных расслоений

Конструкция эквивариантного $\star$ -умножения на однородных пространствах с подгруппами изотропии типа Леви была открыта около двадцати лет назад [10]–[12], [18]. Она использовала динамический твист или, что эквивалентно, обратную инвариантную форму спаривания между базовым модулем M_λ и противоположным к нему M'_λ . Подъем этой формы в $U_q(\mathfrak{g}_+) \otimes U_q(\mathfrak{g}_-)$ служит квази-хопфовым твистом для $U_q(\mathfrak{g})$ [33]. Сопутствующий твист двойственной алгебры функций на квантовой группе дает ассоциативную алгебру при ограничении на подпространство $U_q(\mathfrak{k})$ -инвариантов.

Алгебраически эта конструкция работает в более общем контексте [19], чем параболические модули Верма, однако возникает вопрос о размере пространства $\mathfrak{k}$ -инвариантов в условиях отсутствия квантовой подгруппы $U_q(\mathfrak{k}) \subset U_q(\mathfrak{g})$. Мы ответили на этот вопрос положительно в случае квантовых сфер в [15] с помощью гармонического анализа на квантовой евклидовой плоскости. В этом разделе мы распространяем этот результат на все классы сопряженности $O(t)$, $t \in T$. Мы помещаем это в общую схему квантования векторных расслоений в развитие подхода [10]. Кроме того, мы получим явное представление $\star$ -умножения, выразив его через экстремальный проектор, как это было сделано в [5].

6.1. Эквивариантное $\star$ -умножение. Обозначим с помощью $\mathcal{T}$ квантование алгебры $\mathbb{C}[G]$ вдоль скобки Дринфельда — Складина [14]. Известно [34, 35], что это квантование является локальным $\star$ -умножением (умножение задается бидифференциальным оператором). Алгебра $\mathcal{T}$ снабжена двусторонним действием $U_q(\mathfrak{g})$ с помощью левых и правых сдвигов. Разложение Петера — Вейля расщепляет $\mathcal{T}$ в прямую сумму $\oplus_{[V]} V^* \otimes V$ по классам изоморфности конечномерных квазиклассических $U_q(\mathfrak{g})$ -модулей. Структура $U_q(\mathfrak{g})$ -бимодуля происходит из реализации $\mathcal{T}$ с помощью матричных элементов представлений $x \triangleright (v^* \otimes v) = (v^* \otimes xv)$ и $(v^* \otimes v) \triangleleft x = (v^* x \otimes v)$, где мы предполагаем естественное правое действие на двойственном пространстве посредством линейного сопряжения. В терминах спаривания Хопфа между $\mathcal{T}$ и $U_q(\mathfrak{g})$ эти действия могут быть записаны в виде

$$x \triangleright a = a^{(1)}(a^{(2)}, x), \quad a \triangleleft x = (a^{(1)}, x)a^{(2)}$$

для всех $a \in \mathcal{T}$ и $x \in U_q(\mathfrak{g})$. Отсюда получается, что $\mathcal{T}$ — модуль-алгебра по отношению к левому действию $\triangleright$. Противоположное умножение на $\mathcal{T}$ эквивариантно по отношению к левому действию $x \diamond a = a \triangleleft \gamma(x)$.

С каждым конечномерным неприводимым $\mathfrak{k}$ -модулем $X \in \text{Fin}(\mathfrak{k})$, который является подмодулем в конечномерном $\mathfrak{g}$ -модуле, ассоциируется векторное расслоение над базой O со слоем $\simeq X$. При реализации $\mathbb{C}[O]$ как подалгебры $\mathfrak{k}$ -инвариантов в $\mathbb{C}[G]$ под действием $\triangleright$ (в классическом пределе) $\mathbb{C}[O]$ -модуль глобальных сечений может быть реализован как $\text{Hom}_{\mathfrak{k}}(X^*, \mathcal{T})$ относительно левого умножения на $\mathbb{C}[G]$. Мы проквантуем эту картину в данном разделе.

Предложение 6.1. Для каждого $V \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ и всех $\xi, \eta \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^+$ имеет место изоморфизм

$$\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(M_{\lambda, \eta}, V \otimes M_{\lambda, \xi}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{k}}(X_{\eta}, V \otimes X_{\xi}), \quad q \in \Omega_t.$$

Доказательство. Следствие 5.1 влечет равенство $\text{ch}(V \otimes M_{\lambda, \xi}) = \sum_{\eta \in I} \text{ch}(M_{\lambda, \eta})$, где суммирование по весам в $V_{\lambda, \xi}^+$ выполняется с кратностями (они параметризуют неприводимое разложение $V \otimes M_{\lambda, \xi}$). Из него вытекает равенство $\text{ch}(V \otimes X_{\xi}) = \sum_{\eta \in I} \text{ch}(X_{\eta})$ по тому же следствию. Поэтому $\mathfrak{k}$ -модуль $\oplus_{\eta \in I} X_{\eta}$ изоморфен $V \otimes X_{\xi}$, что и доказывает утверждение. $\square$

Отсюда мы немедленно получаем описание конечномерных изотипических компонент модуля $\text{Hom}(M_{\lambda, \eta}, M_{\lambda, \xi})$.

Следствие 6.1. Для каждого $V \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ и всех $\xi, \eta \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^+$ имеет место изоморфизм

$$\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(V^*, \text{Hom}(M_{\lambda, \eta}, M_{\lambda, \xi})) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{k}}(X_{\eta}, V \otimes X_{\xi}), \quad q \in \Omega_t.$$

Доказательство. Поскольку $M_{\lambda, \xi}$ и $M_{\lambda, \eta}$ неприводимы вместе со своими двойственными модулями младшего веса, эквивариантные отображения из V^* в $\text{Hom}(M_{\lambda, \eta}, M_{\lambda, \xi})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с эквивариантными отображениями из $\text{Hom}(M'_{\lambda, \xi}, M'_{\lambda, \eta})$ в V для каждого $V \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$. Это дает версию предложения 6.1 для двойственных модулей младшего веса

$$\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(\text{Hom}(M'_{\lambda, \xi}, M'_{\lambda, \eta}), V) \simeq \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(M'_{\lambda, \eta}, V \otimes M'_{\lambda, \xi}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{k}}(X_{\eta}^*, V \otimes X_{\xi}^*).$$

Крайний правый член изоморфен $\text{Hom}_{\mathfrak{k}}(V^* \otimes X_{\xi}, X_{\eta}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{k}}(X_{\eta}, V^* \otimes X_{\xi})$, поскольку $V^* \otimes X_{\xi}$ вполне приводим над $\mathfrak{k}$. $\square$

Для каждого локально конечного $U_q(\mathfrak{g})$ -модуля A с конечномерными изотипическими компонентами и каждой пары доминантных весов $\eta, \xi \in \Lambda_{\mathfrak{k}}^+$ определим подпространства

$$A^{(\xi, \eta)} = \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(M_{\lambda, \eta}, A \otimes M_{\lambda, \xi}) \simeq \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(M_{\lambda, \eta} \otimes M'_{\lambda, \xi}, A).$$

В случае $\xi = 0 = \eta$ будем писать $A^{\mathfrak{k}} = A^{(0, 0)}$. Из правого изоморфизма следует, что $A^{(\xi, \eta)} \simeq (\ker J_{\lambda, \xi}^+ \cap \ker J_{\lambda, \eta}^-)[\eta - \xi]$, и поэтому $(A^*)^{(\xi, \eta)} \simeq A^{(\eta, \xi)}$. В силу предложения 6.1 имеем квазиклассический изоморфизм $A^{(\xi, \eta)} \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{k}}(X^{\eta}, X^{\xi} \otimes A)$. Заметим, что $A_{\lambda, 0}^+ = \ker J_{\lambda, 0}^+$ представимо суммой $A^{(0, \xi)}$ по всем $\xi \in \Lambda(A_{\lambda, 0}^+)$, так как такие веса являются старшими для конечномерных $\mathfrak{k}$ -подмодулей V и потому $\mathfrak{k}$ -доминантными.

Лемма 6.1. Для каждой пары модулей $V, W \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ имеет место изоморфизм

$$(V \otimes W)^{\mathfrak{k}} \simeq \oplus_{\xi \in \Lambda(W_{\lambda, 0}^+)} W^{(0, \xi)} \otimes V^{(\xi, 0)}.$$

Доказательство. Утверждение немедленно следует из полной приводимости

$$\text{Hom}(M_{\lambda}, V \otimes W \otimes M_{\lambda}) \simeq \oplus_{\xi \in \Lambda(W_{\lambda, 0}^+)} W^{(0, \xi)} \otimes \text{Hom}(M_{\lambda}, V \otimes M_{\lambda, \xi}) \simeq \oplus_{\xi \in \Lambda(W_{\lambda, 0}^+)} W^{(0, \xi)} \otimes V^{(\xi, 0)}$$

и разложения $W_{\lambda, 0}^+ \simeq \oplus_{\xi \in \Lambda(W_{\lambda, 0}^+)} W^{(0, \xi)}$. $\square$

Теперь выберем в качестве A ассоциативную $U_q(\mathfrak{g})$ -модуль-алгебру с умножением $\cdot$. Определим умножение на $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(M_{\lambda}, A \otimes M_{\lambda}) \simeq A^{\mathfrak{k}}$ с помощью композиции отображений

$$f_2 \star f_1: M_{\lambda} \xrightarrow{f_1} A \otimes M_{\lambda} \xrightarrow{f_2} A \otimes (A \otimes M_{\lambda}) \xrightarrow{\cdot} A \otimes M_{\lambda}$$

для каждой пары морфизмов f_1, f_2 . Ясно, что операция $\star$ ассоциативна.

Это умножение продолжается до правого $A^\mathfrak{k}$ -действия на $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(M_\lambda, A \otimes M_{\lambda, \xi}) \simeq A^{(\xi, 0)}$ по правилу

$$h \blacktriangleleft f: M_\lambda \xrightarrow{f} A \otimes M_\lambda \xrightarrow{\text{id} \otimes h} A \otimes A \otimes M_{\lambda, \xi} \xrightarrow{\cdot} A \otimes M_{\lambda, \xi}$$

и левого $A^\mathfrak{k}$ -действия на $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(M_{\lambda, \xi}, A \otimes M_\lambda) \simeq A^{(0, \xi)}$ по правилу

$$f \blacktriangleright g: M_{\lambda, \xi} \xrightarrow{g} A \otimes M_\lambda \xrightarrow{f} A \otimes A \otimes M_\lambda \xrightarrow{\cdot} A \otimes M_\lambda.$$

Как и выше, ассоциативность следует из ассоциативности композиции и умножения $\cdot$.

Обозначим лифт обратной инвариантной формы неприводимого модуля старшего веса ν через $S^\nu \in U_q(\mathfrak{g}_+) \otimes U_q(\mathfrak{g}_-)$. Операции $\blacktriangleright$ и $\blacktriangleleft$ могут быть записаны с помощью обратных форм в виде

$$h \blacktriangleleft f = (S_1^\lambda \triangleright f) \cdot S_2^\lambda \triangleright h, \quad h \in A^{(\xi, 0)}, \quad f \in A^\mathfrak{k}, \quad (6.1)$$

$$f \blacktriangleright g = (S_1^\lambda \triangleright g) \cdot S_2^\lambda \triangleright f, \quad g \in A^{(0, \xi)}, \quad f \in A^\mathfrak{k}. \quad (6.2)$$

Явные выражения для S^ν неизвестны за исключением некоторых частных случаев, например, модулей Верма [15]. Используя связь между обратными контравариантными формами и экстремальным проектором (3.1), введенные выше операции могут быть выражены через последний в явном, хотя и несколько громоздком виде. Положив $\zeta = \lambda + \xi$, имеем

$$h \blacktriangleleft f = (\cdot \otimes \epsilon_\zeta) \left(p_{\mathfrak{g}}(0) \left(p_{\mathfrak{g}}^{-1}(\lambda) f \otimes p_{\mathfrak{g}}(0) (p_{\mathfrak{g}}^{-1}(\zeta) h \otimes 1_\zeta) \right) \right), \quad h \in A^{(\xi, 0)}, \quad f \in A^\mathfrak{k},$$

$$f \blacktriangleright g = (\cdot \otimes \epsilon_\lambda) \left(p_{\mathfrak{g}}(0) \left(p_{\mathfrak{g}}^{-1}(\lambda) g \otimes p_{\mathfrak{g}}(0) (p_{\mathfrak{g}}^{-1}(\lambda) f \otimes 1_\lambda) \right) \right), \quad g \in A^{(0, \xi)}, \quad f \in A^\mathfrak{k}.$$

Отображение ϵ_ζ является линейным функционалом на модуле старшего веса, возвращающим спаривание со старшим вектором посредством контравариантной формы.

На следующем шаге мы изучим классический предел введенных операций. Расширим $U_q(\mathfrak{g})$ над кольцом формальных рядов от $\hbar = \ln q$ до алгебры $U_\hbar(\mathfrak{g})$. Пусть $N_\hbar^\pm \subset U_\hbar(\mathfrak{g}_\pm)$ — $\mathbb{C}[[\hbar]]$ -подмодули, получаемые соответственно из M_λ и M'_λ посредством $U_\hbar(\mathfrak{h})$ -аффинного лифта. Рассмотрим регулярный $U_\hbar(\mathfrak{h})$ -подмодуль в $U_\hbar(\mathfrak{g})$, порожденный $\gamma^{-1}(N_\hbar^-)N_\hbar^+$. Он содержит универсальный экстремальный твист $\theta_\lambda = \gamma^{-1}(\mathcal{S}_2^\lambda)\mathcal{S}_1^\lambda$.

Предложение 6.2. *Классический предел $\mathcal{S}^\lambda$ равен $1 \otimes 1 \in U(\mathfrak{k}_+) \otimes U(\mathfrak{k}_-)$.*

Доказательство. Обозначим через $\theta_0 \in N_0^- N_0^+ \subset U(\mathfrak{g})$ классический предел универсального экстремального твиста θ_λ . Выберем модуль $V \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ и пару векторов $w, v \in \widehat{V}_\lambda^+$. В пределе $q \rightarrow 1$ получаем $\langle (\theta_\lambda)^{-1} v, w \rangle = \langle p_{\mathfrak{g}}(\lambda) v, w \rangle \rightarrow \langle p_{\mathfrak{k}} v, w \rangle$. Поэтому θ_λ стремится к тождественному оператору на $V^{\mathfrak{k}+}$ для каждого V . Отсюда $\theta_0 = 1$ по предложению A.1.

Теперь рассмотрим $\mathcal{S}_{21}^\lambda$ как элемент $N_\hbar^+ N_\hbar^-$ при линейном изоморфизме $M'_\lambda \otimes M_\lambda \rightarrow N_\hbar^+ N_\hbar^- \subset U_\hbar(\mathfrak{g})$, обеспеченном треугольным разложением $U_\hbar(\mathfrak{g})$. Определим линейный автоморфизм $U_\hbar(\mathfrak{g}) \rightarrow U_\hbar(\mathfrak{g})$ по правилу

$$h e f \mapsto h \gamma^{-1}(f) e, \quad f \in U_\hbar(\mathfrak{g}_-), \quad h \in U_\hbar(\mathfrak{h}), \quad e \in U_\hbar(\mathfrak{g}_+).$$

Это отображение переводит $\mathcal{S}_{21}^\lambda$ в $\theta_\lambda = \gamma^{-1}(\mathcal{S}_2^\lambda)\mathcal{S}_1^\lambda$. Следовательно, $\mathcal{S}^\lambda \rightarrow 1 \otimes 1$ в классическом пределе, что и требовалось доказать. $\square$

Предположим теперь, что A является плоской деформацией $U(\mathfrak{g})$ -модуль-алгебры A_0 . Тогда $A^\mathfrak{k}$ — плоская деформация (как векторное пространство) подпространства $\mathfrak{k}$ -инвариантов $A_0^\mathfrak{k}$.

Следствие 6.2. *Ассоциативная алгебра $A^\mathfrak{k}$ с коумножением $\star$ является плоской деформацией алгебры $A_0^\mathfrak{k}$ с противоположным умножением.*

Доказательство. Формула (6.1) для $h \in A^{0,0}$ превращается в $h \star f = \mathcal{S}_1^\lambda f \cdot \mathcal{S}_2^\lambda h$. В силу предложения 6.2 $\mathcal{S}^\lambda \rightarrow 1 \otimes 1$ в пределе $q \rightarrow 1$, что и доказывает утверждение. $\square$

В качестве модуль-алгебры A мы выберем $\mathcal{T}$ с $U_q(\mathfrak{g})$ -действием $\triangleright$. Снабдим двойственное векторное пространство V^* к $U_q(\mathfrak{g})$ -модулю V левым действием $x \diamond v^* = v^* \triangleleft \gamma(x)$. Применительно к $\mathcal{T}$ это дает левое действие, совместимое с противоположным умножением и коммутирующее с действием $\triangleright$.

Обратим внимание на то, что $\star$ -умножение может быть определено как противоположное к введенному выше. Эта версия будет эквивариантна по отношению к правым сдвигам $\triangleleft$, в то время как настоящая версия совместима с $\diamond$.

Теорема 6.1. (1) Ассоциативная алгебра $\mathcal{T}^\natural$ с умножением $\star$ является $U_q(\mathfrak{g})$ -эквивариантной плоской деформацией алгебры $\mathbb{C}[O]$.

(2) $\mathcal{T}^\natural$ -модули $\mathcal{T}^{(0,\xi)}$ и $\mathcal{T}^{(\xi,0)}$ дают $U_q(\mathfrak{g})$ -эквивариантную плоскую деформацию ассоциированных векторных расслоений на O со слоями X_ξ и X_ξ^* соответственно.

Доказательство. Вначале заметим, что $\cdot$ является локальным $\star$ -умножением, деформирующим классическое умножение $\mathbb{C}[G]$ [34]. В силу следствия 6.1 структура $U_q(\mathfrak{g})$ -модуля на $\mathcal{T}^{0,\xi}$ (соответственно на $\mathcal{T}^{\xi,0}$) относительно действия $\diamond$ такая же, как и структура $U(\mathfrak{g})$ -модуля на ассоциированном векторном расслоении со слоем X_ξ (соответственно, X_ξ^*). Поэтому $\mathcal{T}^{0,\xi}$ и $\mathcal{T}^{\xi,0}$ — плоские деформации $U_q(\mathfrak{g})$ -модулей. Утверждение (1) является частным случаем следствия 6.2 для $A = \mathcal{T}^\natural$, а утверждение (2) немедленно следует из леммы 6.2. $\square$

До сих пор мы рассматривали сечения квантовых расслоений как эквивариантные линейные отображения из $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(-, \mathcal{T} \otimes -)$. Мы дадим им альтернативную интерпретацию в терминах $\mathbb{C}$ -линейных отображений между объектами из $\mathcal{O}_q(t)$. Такие отображения являются $U_q(\mathfrak{g})$ -модулями, локально конечные части которых также имеют естественную алгебраическую структуру.

Снабдим векторное пространство $\text{Hom}(A, B)$ линейных отображений между двумя $U_q(\mathfrak{g})$ -модулями A и B левым $U_q(\mathfrak{g})$ -действием $(x \triangleright f)(a) = x^{(1)} f(\gamma(x^{(2)} a))$.

Предложение 6.3. При всех $q \in \Omega_t$ алгебра $\mathcal{T}^\natural$ изоморфна локально конечной части $\text{End}(M_\lambda)$. Этот изоморфизм коммутирует с действием $U_q(\mathfrak{g})$ и переводит $\mathcal{T}^\natural$ -действия $\blacktriangleright$ и $\blacktriangleleft$ в естественные $\text{End}(M_\lambda)$ -действия на $\text{Hom}(M_{\lambda,\xi}, M_\lambda)$ и $\text{Hom}(M_\lambda, M_{\lambda,\xi})$ соответственно.

Доказательство. Определим отображение $\mathcal{T}^{(0,\xi)} \rightarrow \text{Hom}(M_{\lambda,\xi}, M_\lambda)$ для каждого $\xi \in \Lambda_t^+$ следующим образом. Каждый матричный элемент $g = v^* \otimes v \in V^* \otimes V^{(0,\xi)} \subset \mathcal{T}^{(0,\xi)}$ переходит в линейное отображение

$$g: M_{\lambda,\xi} \supset x 1_{\lambda,\xi} \mapsto (v^*, x^{(1)} S_1^\lambda v) \otimes x^{(2)} S_2^\lambda 1_\lambda \in M_\lambda, \quad x \in U_q(\mathfrak{g}).$$

Это сопоставление эквивариантно, и его образ в $\text{Hom}(M_{\lambda,\xi}, M_\lambda)$ является изотипической V^* -компонентой. Поэтому оно является изоморфизмом по предложению 6.1. Для $f = w^* \otimes w \in W^* \otimes W^{(0,0)}$ имеем

$$\begin{array}{ccccc} M_\lambda & \xleftarrow{f \uparrow} & M_\lambda & \xleftarrow{g \uparrow} & M_{\lambda,\xi} \\ W^* & \otimes & V^* & = & (V \otimes W)^* \end{array}$$

Это равенство справедливо, так как морфизм на правой диаграмме есть $S^\lambda(g \otimes f)$, а тензорное произведение $f \otimes g$ — умножение $f \cdot g$ матричных элементов представлений, составляющих $\mathcal{T}$. Это доказывает утверждение относительно $\blacktriangleright$ (и $\star$ как частного случая). Случай $\blacktriangleleft$ доказывается аналогично. $\square$

Далее мы рассмотрим квантование векторных расслоений как проективных модулей над $\mathcal{T}^\natural$. Это моделирует локальную тривиальность классических векторных расслоений согласно теореме Серра — Свана [7, 8].

6.2. Квантовые векторные расслоения как проективные $\mathcal{T}^\natural$ -модули. В предыдущем разделе показано, что локально конечные части $U_q(\mathfrak{g})$ -модулей $\text{Hom}(M_\lambda, M_{\lambda,\xi})$ и $\text{Hom}(M_{\lambda,\xi}, M_\lambda)$ изоморфны $\mathcal{T}^{(\xi,0)}$ и, соответственно, $\mathcal{T}^{(0,\xi)}$. В частности, локально конечная часть $\text{End}(M_\lambda)$ образует $U_q(\mathfrak{g})$ -алгебру, изоморфную $\mathcal{T}^\natural$. Следующий результат получен в [3, теорема 5.6] для кватернионной проективной плоскости, но он верен и в общем случае.

Теорема 6.2. Категория $\text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ -модулей $\mathcal{O}_q(t)$ эквивалентна категории эквивариантных конечно порожденных правых $\mathcal{T}^\mathfrak{k}$ -модулей.

Теорема остается верной и после замены правых $\mathcal{T}^\mathfrak{k}$ -модулей на левые.

Каждые инвариантный проектор из $V \otimes M_\lambda$ на неприводимый подмодуль является матрицей с элементами из локально конечной части $\text{End}(M_\lambda)$, которая совпадает с $\mathcal{T}^\mathfrak{k}$, если мы допускаем деление на $q - 1$. Проблема сводится к вопросу о классическом пределе этого проектора. Мы не проверяли это для проективных пространств и четных сфер в [1, 2] и восполним этот пробел здесь.

Лемма 6.2. Для каждого $W \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$ имеется квазиклассический изоморфизм $U_q(\mathfrak{g})$ -модулей

$$W \otimes \mathcal{T}^\mathfrak{k} \simeq \oplus_{[V]} V^* \otimes (V \otimes W)^\mathfrak{k}.$$

Доказательство. Разложим левую часть на изотипические компоненты

$$\oplus_{[Z]} (W \otimes Z^*) \otimes Z^\mathfrak{k} \simeq \oplus_{[V]} V^* \otimes \left(\oplus_{[Z]} \text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(V^*, W \otimes Z^*) \otimes Z^\mathfrak{k} \right).$$

Заменяв $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(V^*, W \otimes Z^*)$ на $\text{Hom}_{U_q(\mathfrak{g})}(Z, V \otimes W)$, видим, что сумма в скобках равна $(V \otimes W)^\mathfrak{k}$ (как следствие полной приводимости $V \otimes W$), откуда следует искомым изоморфизм. Он очевидным образом квазиклассический. $\square$

Сформулируем главный результат этого раздела.

Теорема 6.3. Квантовые векторные расслоения $\mathcal{T}^{(\xi,0)}$ и $\mathcal{T}^{(0,\xi)}$ являются плоскими деформациями проективных $\mathcal{T}^\mathfrak{k}$ -модулей.

Доказательство. Достаточно представить $\mathcal{T}^{(\xi,0)}$ и $\mathcal{T}^{(0,\xi)}$ прямыми слагаемыми в свободном $\mathcal{T}^\mathfrak{k}$ -модуле и показать, что такое разложение деформирует классическое разложение соответствующего тривиального векторного расслоения. Мы сделаем это только для $\mathcal{T}^{(0,\xi)}$, для $\mathcal{T}^{(\xi,0)}$ рассуждения такие же.

Выберем модуль $W \in \text{Fin}_q(\mathfrak{g})$, для которого $\xi \in \Lambda(W_{\lambda,0}^+)$. Имеем эквивариантную диаграмму изоморфизмов $\mathcal{T}^\mathfrak{k}$ -модулей из предложения 6.3:

$$\begin{array}{ccc} \oplus_{\xi \in \Lambda(W_{\lambda,0}^+)} W^{(0,\xi)} \otimes \mathcal{T}^{(0,\xi)} & \dashrightarrow & W^* \otimes \mathcal{T}^\mathfrak{k} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \oplus_{\xi \in \Lambda(W_{\lambda,0}^+)} W^{(0,\xi)} \otimes \text{Hom}(M_{\lambda,\xi}, M_\lambda) & \longrightarrow & \text{Hom}(W \otimes M_\lambda, M_\lambda) \end{array}$$

где $\dashrightarrow$ определяется другими стрелками для почти всех $q \neq 1$. Перейдя к разложению Петера — Вейля $\mathcal{T}^{(0,\xi)} = \sum_{[V]} V^* \otimes V^{(0,\xi)}$, запишем это отображение как изоморфизм на Hom -ax

$$\oplus_{\xi \in \Lambda(W_{\lambda,0}^+)} W^{(0,\xi)} \otimes V^{(0,\xi)} \xrightarrow{\sim} (V^* \otimes W)^\mathfrak{k} \simeq (W^* \otimes V)^\mathfrak{k}$$

в каждой изотипической V^* -компоненте по лемме 6.2. Это вытекает из изоморфизма $V^{(0,\xi)} \simeq (V^*)^{(\xi,0)}$ и леммы 6.1.

Все члены здесь являются деформациями своих классических аналогов согласно предложению 5.2, изоморфизм осуществляется с помощью экстремальных проекторов, которые превращаются в классические проекторы подалгебры $U(\mathfrak{k})$ при $q \rightarrow 1$. В классическом пределе эти изоморфизмы переходят в прямое разложение тривиального векторного расслоения $W \otimes \mathcal{T}^\mathfrak{k}$. $\square$

В заключение параграфа предьявим прямую квазиклассическую конструкцию алгебры $U_q(\mathfrak{g})$ -инвариантных операторов, расщепляющих тривиальные векторные расслоения в прямую сумму подрасслоений. Выберем $V \in \text{Fin}_q(V)$ и обозначим с помощью π гомоморфизм представления $U_q(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(V)$. Для данного $U_q(\mathfrak{g})$ -модуля $\mathcal{A}$ с действием $x \otimes a \mapsto x.a$ будем называть тензор $A \in \text{End}(V) \otimes \mathcal{A}$ инвариантным, если $x.A = \pi(\gamma(x^{(1)}))A\pi(x^{(2)})$. В случае, когда $\mathcal{A}$ является модуль-алгеброй, инвариантные матрицы образуют подалгебру тензоров в $\text{End}(V) \otimes \mathcal{A} \rtimes U_q(\mathfrak{g})$, коммутирующих с $(\pi \otimes \text{id}) \circ \Delta(x)$ для всех $x \in U_q(\mathfrak{g})$.

Теперь рассмотрим инъективное линейное отображение

$$\mathrm{End}(V) \rightarrow \mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{T}, \quad A \mapsto \pi(\mathcal{R}_1) T A T^{-1} \pi(\gamma(\mathcal{R}_2) q^{2h_\rho})$$

(в свидлеровских обозначениях для R -матрицы). Образ A является инвариантной матрицей по отношению к действию $\diamond$ на матричных элементах. Исходя из соображений деформации, это отображение осуществляет линейный изоморфизм между $(\mathrm{End}(V))^{\mathfrak{k}}$ и $\mathrm{End}(V) \otimes \mathcal{T}^{\mathfrak{k}}$ при почти всех q , включая классическую точку. Относительно $\star$ -умножению на $\mathcal{T}^{\mathfrak{k}}$ образ $(\mathrm{End}(V))^{\mathfrak{k}}$ является алгеброй инвариантных матриц, разделяющей эквивариантные квантовые подрасслоения в $V \otimes \mathcal{T}^{\mathfrak{k}}$. Эта алгебра квазиклассическая по построению и изоморфна подалгебре классических $\mathfrak{k}$ -инвариантов в $\mathrm{End}(V)$ по предложению 6.1.

Приложение А. Двойственность для индуцированных модулей

Здесь мы устанавливаем некоторые факты, которые используются в доказательстве предложения 6.2. Мы полагаем, что они должны быть известны, но не смогли найти подходящих ссылок.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли линейной алгебраической группы G , а $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — подалгебра Ли ее связной замкнутой подгруппы. Обозначим через $e \in G$ единицу группы. Зададим эквивариантное спаривание $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}[G]^{\mathfrak{k}} \rightarrow \mathbb{C}$, индуцированное спариванием

$$U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[G]^{\mathfrak{k}} \rightarrow \mathbb{C}, \quad u \otimes \varphi \mapsto (u \cdot \varphi)(e)$$

для всех $u \in U(\mathfrak{g})$ и $\varphi \in \mathbb{C}[G]^{\mathfrak{k}}$. Представляя φ в виде матричного элемента $w^* \otimes w \in W^* \otimes W^{\mathfrak{k}}$, запишем это спаривание в виде $u \otimes (w^* \otimes w) \mapsto w^*(u \cdot w)$.

Предложение А. 1. *Предположим, что имеется конечномерный $\mathfrak{g}$ -модуль V с таким вектором $v_0 \in V^{\mathfrak{k}}$, что $\dim \mathfrak{g}v_0 = \dim \mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ и $v_0 \notin \mathfrak{g}v_0$. Тогда спаривание невырождено по отношению к каждому тензорному множителю.*

Доказательство. Легко видеть, что спаривание имеет нулевое ядро в правом множителе — это следствие невырожденности спаривания Хопфа между $U(\mathfrak{g})$ и $\mathbb{C}[G]$. Выберем базис в $\mathfrak{g}$ так, чтобы его первые m элементов $u_1, \dots, u_m$ порождали подпространство, трансверсальное к $\mathfrak{k}$, и положим $v_i = u_i \cdot v_0 \in V$. Определим мономы $u^{\vec{l}} = u_1^{l_1} \dots u_m^{l_m}$, где $\vec{l} = (l_1, \dots, l_m) \in \mathbb{Z}_+^m$, и обозначим $|\vec{l}| = \sum_{i=1}^m l_i$. Тогда упорядоченные мономы Пуанкаре — Биркгоффа — Витта $u^{\vec{l}}$ образуют базис в $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}$. Предположим, что линейная комбинация $u = \sum_{\vec{l}, j} c_{\vec{l}} u^{\vec{l}}$ с коэффициентами $c_{\vec{l}} \in \mathbb{C}$ лежит в ядре спаривания. Эта сумма конечна, поэтому пусть целое число n будет максимальной степенью $|\vec{l}|$ входящих в нее мономов $u^{\vec{l}}$. Выберем $w = v_0 \otimes \dots \otimes v_0 \in V^{\otimes n}$. Поскольку u по предположению лежит в ядре, должно выполняться равенство $\sum_{\vec{l}} c_{\vec{l}} u^{\vec{l}} \cdot w = 0$. Покажем, что это невозможно при u , отличном от нуля.

Обозначим через Sym симметризующий проектор тензорных степеней пространства V_0 . Каждый тензор степени $|\vec{l}| = n$ дает $n! \mathrm{Sym}(v_1^{\otimes l_1} \otimes \dots \otimes v_m^{\otimes l_m}) + \dots$, где пропущены члены, содержащие $\mathrm{Sym}(v_0 \otimes \dots)$, и такие же члены, приходящие из $u^{\vec{l}} \cdot w$ с $|\vec{l}| < n$. Но $\mathrm{Sym}(v_1^{\otimes l_1} \otimes \dots \otimes v_m^{\otimes l_m})$ линейно независимы и не зависят от пропущенных членов, поскольку $\{v_i\}_{i=0}^m$ независимы. Поэтому $c_{\vec{l}} = 0$ при $|\vec{l}| = n$. Нисходящая индукция по n доказывает, что спаривание не имеет ядра в $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{k}}^{\mathfrak{g}} \mathbb{C}$. $\square$

Геометрическая интерпретация условий предложения А.1 такова: локальное однородное пространство $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ представимо орбитой вектора $v_0 \in V$, причем v_0 трансверсален к орбите. Эти условия выполняются для полупростых классов сопряженности алгебраических групп. Такие классы можно представить как орбиты вектора v_0 в некотором представлении [32, теорема 11.1.13]. Поскольку подалгебра Картана лежит в стабилизаторе, вектор v_0 имеет нулевой вес и поэтому трансверсален к $\mathfrak{g}v_0$.

Литература

1. А. И. Мудров, “Эквивариантные векторные расслоения над квантовыми проективными пространствами”, *Теор. мат. физ.* **198**, No. 2, 326–340 (2019).
2. A. Mudrov, “Equivariant vector bundles over quantum spheres”, *J. Noncommut. Geom.* **15**, No. 1, 79–111 (2021).
3. G. Jones, A. Mudrov, “Pseudo-parabolic category over quaternionic projective plane”, *Algebr. Represent. Theor.* **26**, No. 6, 2361–2382 (2023).
4. A. Mudrov, “Contravariant form on tensor product of highest weight modules”, *SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **15**, Article ID 026 (2019).
5. A. Mudrov, “Contravariant forms and extremal projectors”, *J. Pure Appl. Algebra* **226**, No. 4, Article ID 106902 (2022).
6. T. A. Springer, “Conjugacy classes in algebraic groups”, In: *Group Theory*, pp. 175–209, Springer, Berlin etc. (1986).
7. J.-P. Serre, “Faisceaux algébriques cohérents”, *Ann. Math. (2)* **61**, No. 2, 197–278 (1955).
8. R. Swan, “Vector bundles and projective modules”, *Trans. Am. Math. Soc.* **105**, No. 2, 264–277 (1962).
9. M. A. Semenov-Tian-Shansky, “Poisson — Lie groups, quantum duality principle, and the quantum double”, In: *Mathematical Aspects of Conformal and Topological Field Theories and Quantum Groups*, pp. 219–248, Am. Math. Soc., Providence, RI (1994).
10. J. Donin, A. Mudrov, “Dynamical Yang — Baxter equation and quantum vector bundles”, *Commun. Math. Phys.* **254**, No. 3, 719–760 (2005).
11. B. Enriquez, P. Etingof, “Quantization of classical dynamical r -matrices with nonabelian base”, *Commun. Math. Phys.* **254**, No. 3, 603–650 (2005).
12. A. Alekseev, A. Lachowska, “Invariant $*$ -product on coadjoint orbits and the Shapovalov pairing”, *Comment. Math. Helv.* **80**, No. 4, 795–810 (2005).
13. T. Ashton, A. Mudrov, “On representations of quantum conjugacy classes of $GL(n)$ ”, *Lett. Math. Phys.* **103**, No. 9, 1029–1045 (2013).
14. Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантование групп Ли и алгебр Ли”, *Алгебра анал.* **1**, No. 1, 178–206 (1989).
15. A. Mudrov, “Star-product on complex sphere $\mathbb{S}^{2n}$ ”, *Lett. Math. Phys.* **108**, No. 6, 1443–1454 (2018).
16. A. Mudrov, “ R -matrix and inverse Shapovalov form”, *J. Math. Phys.* **57**, No. 5, Article ID 051706 (2016).
17. A. Mudrov, “Shapovalov elements for classical and quantum groups”, *J. Pure Appl. Algebra* **228**, No. 7, Article ID 107634 (2024).
18. B. Enriquez, P. Etingof, I. Marshall, “Quantization of some Poisson — Lie dynamical r -matrices and Poisson homogeneous spaces”, In: *Israel Mathematical Conference Proceedings. Quantum Groups*, pp. 135–176, Am. Math. Soc., Providence, RI (2007).
19. E. Karolinsky, A. Stolin, V. Tarasov, “Equivariant quantization of Poisson homogeneous spaces and Kostant’s problem”, *J. Algebra* **409**, 362–381 (2014).
20. V. Drinfeld, “Quantum groups”, In: *Proc. Int. Congr. Math.*, pp. 798–820, Am. Math. Soc., Providence, RI (1987).
21. V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1994).
22. M. Costantini, “A classification of spherical conjugacy classes”, *Pac. J. Math.* **285**, No. 1, 63–91 (2016).
23. В. Г. Дринфельд, “О пуассоновых однородных пространствах групп Пуассона — Ли”, *Теор. мат. физ.* **95**, No. 2, 226–227 (1993).
24. A. Alekseev, A. Malkin, “Symplectic structures associated to Lie — Poisson groups”, *Commun. Math. Phys.* **162**, No. 1, 147–173 (1994).

25. P. P. Kulish and E. K. Sklyanin, “Algebraic structure related to reflection equation”, *J. Phys. A, Math. Gen.* **25**, No. 22, 5963–5975 (1992).
26. A. Mudrov, “Quantum conjugacy classes of simple matrix groups”, *Commun. Math. Phys.* **272**, No. 3, 635–660 (2007).
27. C. De Concini, V. G. Кас, “Representations of quantum groups at roots of 1”, In: *Operator Algebras, Unitary Representations, Enveloping Algebras, and Invariant Theory, Proc. Colloq. in Honour of J. Dixmier*, pp. 471–506, Birkhäuser, Boston, MA etc. (1990).
28. Р. М. Ашерова, Ю. Ф. Смирнов, В. Н. Толстой, “Проекционные операторы для простых групп Ли”, *Теор. мат. физ.* **8**, No. 2, 255–271 (1971).
29. S. M. Khoroshkin, V. N. Tolstoy, “Extremal projector and universal R -matrix for quantized contragredient Lie (super)algebras”, In: *Quantum Groups and Related Topics*, pp. 23–32, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1992).
30. S. Khoroshkin, M. Nazarov, “Mickelsson algebras and representations of Yangians”, *Trans. Am. Math. Soc.* **364**, No. 3, 1293–1367 (2012).
31. J. Humphreys, *Conjugacy Classes in Semisimple Algebraic Groups*, Am. Math. Soc., Providence, RI (1995).
32. R. Goodman, N. R. Wallach, *Symmetries, Representations, and Invariants*, Springer, New York, NY (2009).
33. В. Г. Дринфельд, “Квазихопфовы алгебры”, *Алгебра анал.* **1**, No. 6, 114–148 (1989).
34. L. A. Takhtajan, “Introduction to quantum groups”, In: *Quantum Groups*, pp. 3–28, Springer, Berlin etc. (1990).
35. P. Etingof, D. Kazhdan, “Quantization of Lie bialgebras”, *Sel. Math., New Ser.* **2**, No. 1, 1–41 (1996).

Статья поступила в редакцию 9 июля 2024 г.

Е. А. Проценко, С. В. Проценко, В. В. Сидорякина

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ОСАДКОНАКОПЛЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ РЕЛЬЕФА ПРИБРЕЖНОЙ ЗОНЫ АБРАЗИОННОГО ТИПА

Представлены результаты численных экспериментов, полученные на основе комплексной модели для расчета осадконакопления и изменения рельефа донной поверхности, проведена оценка интенсивности абразии для прибрежных зон Цимлянского водохранилища с наиболее напряженной геоэкологической ситуацией. Комплексная модель объединяет пространственно-двумерную модель транспорта донных материалов, трехмерную модель транспорта взвеси и трехмерную модель гидродинамики. На основе разработанного комплекса программ выполнены расчеты процессов эрозии берега и изменения рельефа дна, учитывающие пространственно-временную изменчивость рельефообразования.

1. Введение

В настоящее время прибрежные зоны привлекают все большее внимание исследователей в области охраны окружающей среды и управления природопользованием водных ресурсов. Прибрежные акватории являются местом соприкосновения множества процессов, включая природные, антропогенные и климатические, что делает их особенно уязвимыми к различным формам изменений. В связи с этим возникает необходимость разработки инновационных методов и инструментов для анализа и прогнозирования состояния прибрежных зон.

В статье выведена и адаптирована к природно-климатическим условиям и географическим особенностям Цимлянского водохранилища комплексная модель осадконакопления и изменения рельефа донной поверхности, позволяющая строить различные сценарии эволюции участков прибрежной линии, подверженных абразии. Модель позволяет предсказывать изменение гидродинамических характеристик, динамику транспорта взвешенных частиц и перемещение твердых частиц по дну с большей точностью и учитывает взаимодействия между различными компонентами системы.

Статья организована следующим образом. В § 2 изложены материалы и методы исследования. Дана характеристика побережья Цимлянского водохранилища с точки зрения значимых для моделирования факторов, а именно, интенсивности проявления экзогенных геологических процессов на берегах, уровня воды по данным спутниковой альтиметрии, ветро-волнового режима. Описана комплексная математическая модель, включающая трехмерную модель транспорта взвешенных частиц, трехмерную модель гидродинамики и двумерную модель движения твердых частиц по дну. В § 3 проанализирована серия численных экспериментов моделирования динамики изменения

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00509, <https://rscf.ru/project/23-21-00509/>

Е. А. Проценко: Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета, Таганрог, Россия, eargos@rambler.ru.

С. В. Проценко: Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета, Таганрог, Россия, gab55555@rambler.ru.

В. В. Сидорякина: Таганрогский институт им. А.П. Чехова (филиал) Ростовского государственного экономического университета, Таганрог, Россия, cvv9@mail.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **284**, No. 1, 126–139 (2024).

рельефа берегов различных типов: абразионно-обвального, абразионно-осыпного и абразионно-оползневого, характерных для участков Цимлянского водохранилища с наиболее напряженной геоэкологической ситуацией. Полученные результаты обобщены, и дана оценка интенсивности абразии в прибрежной зоне Цимлянского водохранилища.

2. Материалы и методы

2.1. Характеристика объекта исследования. Наиболее интенсивные природные и антропогенные процессы наблюдаются на участке берега от города Цимлянска до южного входа в Терновской залив. Длина этого участка составляет 27 км. Несмотря на относительно стабилизированное состояние с момента создания водохранилища, процессы изменения береговой линии продолжают идти и в настоящее время. Неблагоприятная экологическая обстановка в этом районе обусловлена эрозийной деятельностью и процессами абразии [1].

Уровень воды в Цимлянском водохранилище играет ключевую роль в формировании интенсивности эрозийных процессов на берегах. Максимальное значение уровня воды, наблюдавшееся в Цимлянском водохранилище с 2019 г., составляло 35.9 м, минимальное — 32.5 м. Повышение уровня воды в водохранилище приводит к максимальным деформациям берегов абразионного типа и сопровождается значительными потерями земельного фонда и перемещением материала в акваторию водохранилища. Снижение уровня воды в периоды низкого уровня приводит к снижению интенсивности геологических процессов. На участках с крутыми берегами появляются трещины, отрываются блоки горных пород, разрушаются обвалы и образуются оплывины. Уменьшение активности абразионных процессов в современный период обусловлено снижением интенсивности береговых процессов из-за понижения уровня воды в водохранилище и недостатка атмосферных осадков.

Для моделирования был выбран участок от города Цимлянска до станицы Хорошевской, который по данным официального сайта анализа и проверки возможностей систем наблюдения (OSCAR) характеризуется крутым, обрывистым берегом. По данным сайта системы анализа данных наблюдения Земли (EOSDA) его высота — от 3–5 до 20–35 м. Деформируется по типу абразионных, абразионно-оползневых и абразионно-обвальных процессов [1].

Ветровой режим водохранилища зависит от циркуляционных процессов. Среднегодовая скорость ветра на западе бассейна составляет 5–5.5 м/с, на востоке — до 4 м/с; максимальная скорость, зарегистрированная на метеостанции Цимлянск, — 28 м/с [2]. При скорости ветра 5 м/с высота волн на глубоком участке достигает 0.65 м, при скорости 10 м/с — 1–1.4 м. Максимальная высота волн, наблюдаемая у города Цимлянска, достигала 3.5 м [3].

2.2. Комплексная математическая модель для расчета осадконакопления и изменения рельефа донной поверхности. Используем декартовую систему координат в горизонтальной плоскости, где ось Ox проходит по невозмущенной водной поверхности и направлена в сторону моря, ось Oy совмещена с поверхностью невозмущенной жидкости и направлена вдоль берега, ось Oz направлена вертикально вниз и описывает изменение глубины расположения наносов, начало оси располагается на невозмущенной поверхности водоема [4]. Расстояние от свободной поверхности до дна обозначим через H :

$$H = h + \eta, \quad H = H(x, y, t),$$

где h — глубина при невозмущенной поверхности водохранилища, $\eta = \eta(x, y, t)$ — возвышение свободной поверхности относительно уровня моря.

Условие невырожденности области

$$H(x, y, t) \geq H_0 \equiv \text{const} > 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

задаем для всех (x, y, t) , при которых далее ставится начально-краевая задача.

2.2.1. Моделирование транспорта взвешенных частиц. Уравнение для описания транспорта взвешенных частиц

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} + (w - w_s) \frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial C}{\partial z} \right) + F \quad (2.1)$$

задано на области $(x, y, z) \in M$, $t \in (0, T)$,

$$M = \{(x, y, z) : 0 < x < L_x, 0 < y < L_y, 0 < z < H(x, y, t)\}$$

(см. рис. 1), где находятся частицы взвеси, имеющие концентрацию $C = C(x, y, z, t)$ в точке (x, y, z) в момент времени t , $0 < t < T$. Используются следующие обозначения: $\vec{V}(x, y, z, t) = (u, v, w)$ — вектор скорости движения водной среды, w_s — гидравлическая крупность частиц или скорость осаждения взвеси в вертикальном направлении, μ, ν — заданные коэффициенты турбулентной диффузии в горизонтальном и вертикальном направлениях, $F(x, y, z)$ — заданная функция, описывающая интенсивность распределения источников взвеси. Здесь и всюду далее все величины, у которых явно не указана зависимость от каких-либо переменных, считаются постоянными.

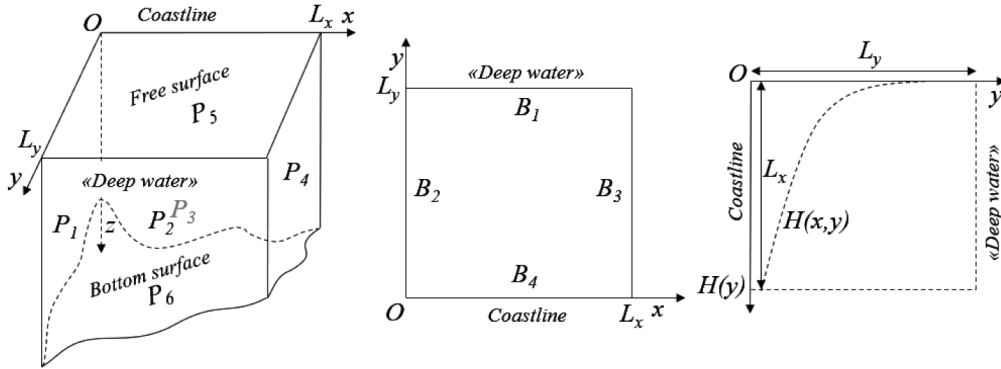


Рис. 1. Расчетные области M и D .

Граница области M является кусочно-гладкой поверхностью $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup P_4 \cup P_5 \cup P_6$,

$$P_1 = \{(x, y, z) : x = 0, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq h(0, y, t)\},$$

$$P_2 = \{(x, y, z) : y = L_y, 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq z \leq h(x, L_y, t)\},$$

$$P_3 = \{(x, y, z) : y = 0, 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq z \leq h(x, 0, t)\},$$

$$P_4 = \{(x, y, z) : x = L_x, 0 \leq y \leq L_y, 0 \leq z \leq h(L_x, y, t)\},$$

$$P_5 = \{(x, y, z) : z = 0, 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\},$$

$$P_6 = \{(x, y, z) : z = h(x, y, t), 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\}.$$

Уравнение (2.1) описывает изменение концентрации взвешенных частиц с учетом адвективного переноса, обусловленного инерционным движением водной среды, осаждения под действием силы тяжести, горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии и физических характеристик частиц взвеси.

Дополним уравнение (2.1) начальными и граничными условиями. Начальные условия задаем при $t = 0$:

$$C(x, y, z, 0) \equiv C_0(x, y, z), \quad H(x, y, 0) = H_0(x, y).$$

В качестве граничных условий задаем потоки взвеси на боковых гранях P_1, P_2, P_3, P_4

$$\frac{\partial C}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = \begin{cases} 0, & (\vec{V}_b, \vec{n}) \geq 0, \\ -\frac{v_b}{\mu} C(x, y, z, t), & (\vec{V}_b, \vec{n}) < 0, \end{cases}$$

на поверхности воды P_5

$$\frac{\partial C}{\partial z}(x, y, z, t) = 0,$$

на поверхности дна P_6

$$\frac{\partial C}{\partial z}(x, y, z, t) = -\frac{w_s}{\mu} C(x, y, z, t),$$

где $\vec{n}$ — вектор нормали, направленный внутрь расчетной области, $\vec{V}_b = \vec{V}_b(x, y, z, t)$ — вектор скорости движения жидкости на границе P , v_b — проекция вектора скорости $\vec{V}_b$ на направление нормали $\vec{n}$ на границе области P .

2.2.2. *Моделирование транспорта наносов.* Уравнения, описывающие транспорт наносов в направлении движения жидкости, вызванного поверхностными волнами, могут быть записаны в виде [5, 6]

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

$$\vec{Q} = \begin{cases} A\varpi d |\vec{\psi}|^{\beta-1} \vec{\psi}, & |\tau| \geq \tau_{bc}, \\ 0, & |\tau| < \tau_{bc}, \end{cases} \quad \vec{\psi} = \frac{\vec{\tau}}{(\rho_s - \rho)gd}, \quad (2.3)$$

где ε — пористость донных материалов, $\vec{Q} = (Q_x, Q_y)$ — расход наносов, $|\vec{Q}| = Q(x, y, t)$, τ_{bc} — критическое значение тангенциального напряжения, при котором начинается транспорт донных материалов, $\vec{\psi}(x, y, t)$ — параметр Шильдса, ϖ — частота волны, $A = 19.5$, $\beta = 3$, ρ — плотность жидкости, ρ_s — плотность твердых частиц, d — характерные размеры частиц грунта. Касательное напряжение для наклонной поверхности дна водоема имеет вид

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_b - \alpha \sin S \vec{n},$$

где τ_b — касательное тангенциальное напряжение на дне водоема, n — орт вектор, направленный в сторону градиента глубины, $\alpha \sin S$ — тангенциальное напряжение, вызываемое гравитационными силами, $S = S(x, y, t)$ — острый угол между вектором силы гравитации в момент времени t и вектором нормали к поверхности дна. При $|\vec{\tau}_b| = 0$, $|\vec{\tau}| = \tau_{bc}$ справедливо равенство $\tau_{bc} = \alpha \sin \varphi_0$, где φ_0 — угол естественного откоса грунта в водоеме. Параметр Шильдса для наклонного дна имеет вид

$$\vec{\psi} = \frac{\vec{\tau}_b - \frac{\sin S}{\sin \varphi_0} \tau_{bc} \vec{n}}{(\rho_s - \rho)gd}, \quad \vec{n} \operatorname{tg} S = \operatorname{grad} H.$$

Формула для расчета расхода наносов

$$Q = A\varpi d \frac{|\vec{\tau}_b - \frac{\sin S}{\sin \varphi_0} \tau_{bc} \vec{n}|^{\beta-1}}{((\rho_s - \rho)gd)^\beta} \left(\vec{\tau}_b - \frac{\sin S}{\sin \varphi_0} \tau_{bc} \vec{n} \right)$$

при следующем допущении в решении задачи о переформировании берегов:

$$\sin S \approx \operatorname{tg} S = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2}$$

принимает вид

$$Q = A\varpi d \frac{|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H|^{\beta-1}}{((\rho_s - \rho)gd)^\beta} \left(\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right). \quad (2.4)$$

Уравнение транспорта наносов (2.2) с учетом (2.4) преобразуется к виду

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{A\varpi d}{((\rho_s - \rho)gd)^\beta} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H|^{\beta-1} \left(\tau_{b,x} - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \frac{\partial H}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H|^{\beta-1} \left(\tau_{b,y} - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right) \right] = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение (2.5) применимо для относительно ровной донной поверхности, его можно записать в виде

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{A\varpi d}{((\rho_s - \rho)gd)^\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc} \operatorname{grad} H}{\sin \varphi_0}|^{\beta-1} \tau_{b,x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(|\vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc} \operatorname{grad} H}{\sin \varphi_0}|^{\beta-1} \tau_{b,y} \right) \right)$$

$$= \frac{A\varpi d}{((\rho_s - \rho)gd)^\beta} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc} \operatorname{grad} H}{\sin \varphi_0} \right|^{\beta-1} \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc} \operatorname{grad} H}{\sin \varphi_0} \right|^{\beta-1} \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right)$$

и в дивергентной форме

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{A\varpi d}{((\rho_s - \rho)gd)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1} \vec{\tau}_b \right) \\ = \operatorname{div} \left(\frac{A\varpi d}{((\rho_s - \rho)gd)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1} \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right). \end{aligned}$$

При отсутствии движения водной среды, т.е. при нулевой скорости $|\vec{\tau}_b| = 0$ на дне расчетной области, уравнение имеет вид

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} = A\varpi d \left(\frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0 (\rho_s - \rho)gd} \right)^\beta \operatorname{div} (|\operatorname{grad} H|^{\beta-1} \operatorname{grad} H).$$

Введем функцию $k = k(\operatorname{grad} H, x, y, t)$, нелинейным образом зависящую от частных производных по пространственным переменным функции $H = H(x, y, t)$, с учетом ограничений на тангенциальное напряжения на дне водоема

$$k = \frac{A\varpi d}{((\rho_s - \rho)gd)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1} \theta \left(\left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right| - \tau_{bc} \right), \quad \theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Вводится условие невырожденности оператора задачи:

$$k \equiv \frac{A\varpi d}{((\rho_s - \rho)gd)^\beta} \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right|^{\beta-1} \geq k_0 = \operatorname{const} > 0 \quad \forall (x, y) \in D, \quad 0 < t \leq T.$$

Запишем уравнение транспорта наносов в дивергентном виде с учетом введенных обозначений

$$(1 - \varepsilon) \frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div} (k \vec{\tau}_b) = \operatorname{div} \left(k \frac{\tau_{bc}}{\sin \varphi_0} \operatorname{grad} H \right). \quad (2.6)$$

Это уравнение задается в $D \times (0, T)$, где $D = \{(x, y) : 0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$ (см. рис. 1). Граница области D является кусочно-гладкой линией $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$,

$$B_1 = \{(x, y) : y = L_y, 0 \leq x \leq L_x\},$$

$$B_2 = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq L_y\},$$

$$B_3 = \{(x, y) : x = L_x, 0 \leq y \leq L_y\},$$

$$B_4 = \{(x, y) : y = 0, 0 \leq x \leq L_x\}.$$

Дополним уравнение (2.6) начальным условием

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Граничные условия задаем на участке границы, совпадающей с береговой линией B_4 ,

$$H(x, 0, t) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x,$$

на боковых участках границы B_2 и B_3

$$H(0, y, t) = H_1(y, t), \quad 0 \leq y \leq L_y,$$

$$H(L_x, y, t) = H_2(y, t), \quad 0 \leq y \leq L_y,$$

на участке границы расчетной области B_1 (глубокой воды)

$$H(x, L_y, t) = H_3(x), \quad 0 \leq x \leq L_x,$$

и на участке границы B_1 , вблизи дна, где влиянием ветрового волнения можно пренебречь,

$$|\vec{\tau}_b| = 0, \quad \tau_{by}|_y = 0, \quad \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{y=0} = 0.$$

Будем считать пренебрежимо малыми величины уклона дна на боковых участках границы в направлении оси Ox

$$\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{x=L_x} = 0, \quad 0 \leq y \leq L_y.$$

Требование достаточной гладкости приводит к следующим условиям сопряжения в угловых точках $(0, L_y)$ и (L_x, L_y) границы глубокой воды B_1 :

$$H_1(L_y, t) = H_3(0), \quad 0 < t \leq T,$$

$$H_2(L_y, t) = H_3(L_x), \quad 0 < t \leq T.$$

Предполагаем согласованность граничных и начальных условий

$$H_0(x, 0) = H_3(x), \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x,$$

$$H_0(0, y) = H_1(y), \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq L_y,$$

$$H_0(L_x, y) = H_2(y), \quad x = L_x, \quad 0 \leq y \leq L_y,$$

$$H_0(x, 0) = 0, \quad y = L_y, \quad 0 \leq x \leq L_x.$$

Вектор тангенциального напряжения на дне выражается с использованием единичных ортов

$$\vec{\tau}_b = \vec{i}\tau_{bx} + \vec{j}\tau_{by}, \quad \tau_{bx} = \tau_{bx}(x, y, t), \quad \tau_{by} = \tau_{by}(x, y, t).$$

2.2.3. Моделирование гидродинамических характеристик. Мы используем трехмерную математическую модель гидродинамики [3, 7]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial w}{\partial z} \right) + g, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (2.10)$$

в введенной ранее области $(x, y, z) \in M$, $t \in (0, T)$. Добавим к этой системе начальное условие при $t = 0$

$$V(x, y, z, t) = V_0(x, y, z),$$

граничные условия на поверхности воды P_5

$$\rho \mu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = -\tau_x(t), \quad \rho \mu \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = -\tau_y(t),$$

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = 0, \quad w(x, y, z, t) = -\omega(t) - \frac{1}{\rho g} \frac{\partial P}{\partial t}(x, y, z, t),$$

на дне P_6 и на береговой границе P_3

$$\rho \mu \frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = -\tau_x(t), \quad \rho \mu \frac{\partial v}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = -\tau_y(t),$$

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = 0, \quad \vec{V}_n(x, y, z, t) = 0,$$

на входе — границе глубокой воды P_2

$$u(x, y, z, t) = u(t), \quad v(x, y, z, t) = v(t), \quad \frac{\partial P}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = 0,$$

на боковых границах P_1, P_4

$$\frac{\partial P}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = 0, \quad \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{n}}(x, y, z, t) = 0,$$

где τ_x, τ_y — составляющие касательного тангенциального напряжения. Составляющие тангенциального ветрового напряжения для свободной поверхности задаются следующим образом: $\tau_x = \rho_a C_p w_x |\vec{w}|$, $\tau_y = \rho_a C_p w_y |\vec{w}|$, где $\vec{w}$ — вектор скорости ветра, ρ_a — плотность воздушной среды, $C_p(x)$ — безразмерный коэффициент, $C_p(x) = 0.0088$ при $x < 6.6$, $C_p(x) = 0.0026$ при $x \geq 6.6$. Составляющие касательного тангенциального напряжения на дне с учетом введенных обозначений имеют вид $\tau_x = \rho_s C_p u |V|$, $\tau_y = \rho_s C_p v |V|$.

Для дискретизации модели применим метод поправки к давлению, который на дискретном уровне гарантирует выполнение закона сохранения массы на каждом временном слое. Согласно данному методу процесс численного моделирования предполагает на каждом временном шаге расчет поля вектора скорости жидкости без учета давления и вычисление значений давления в каждом узле расчетной области. В качестве начального приближения для данной задачи используется упрощенная гидростатическая модель движения водной среды, а компоненты вектора скорости водной среды корректируются с учетом распределения давлений.

Данная комплексная трехмерная модель учитывает процессы диффузии–конвекции, движение водной среды, поднятие, транспортировку и осаждение донного материала, а также турбулентный обмен по вертикальному и горизонтальному направлениям.

Пространственно–двумерная математическая модель транспорта донных материалов позволяет предсказывать динамику изменения рельефа дна за счет движения воды и твердых частиц, учитывает пористость грунта, критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов, турбулентный обмен, динамически изменяемую геометрию дна, ветровые течения и трение о дно.

Трехмерная математическая модель транспорта наносов позволяет моделировать перенос взвеси и донных материалов в условиях сложной, динамически изменяемой геометрии дна и функции возвышения уровня.

Математическая модель гидродинамики включает описывает поведение функции возвышения уровня, затопление–осушение прибрежной территории и учитывает изменение глубины дна водного объекта. Далее представлены результаты численных экспериментов, полученных на основе проблемно–ориентированного комплекса программ [7], реализующего описанную комплексную модель.

3. Результаты исследования

Выполнена серия численных экспериментов моделирования динамики изменения рельефа берегов различных типов, характерных для участков Цимлянского водохранилища с наиболее напряженной геоэкологической ситуацией: (а) абразионно–обвального, (б) абразионно–осыпного, (в) абразионно–оползневого. Были выбраны три участка побережья: в районе станицы Хорошевской, поселка Саркел и города Цимлянск. Данные участки имеют ярко выраженный тип абразионных процессов берега.

Участки моделирования имеют размеры 100 м на 150 м по горизонтальным направлениям, глубина обусловлена текущим уровнем воды по данным спутниковой альтиметрии на апрель 2024 г. и в среднем составляет 35 м, высота клифа не превышала 20 м. Использовалась сетка $200 \times 200 \times 100$ ячеек. При моделировании в начальный момент времени жидкость находилась в покое. Шаг по пространственным переменным — 0.05 м, шаг по времени — 0.01 с, скорость движения ветра — 4.4 м/с, направление выбрано исходя из типичного для данных участков направления ветра — З–ЮЗ.

(а) Первый участок моделирования имеет абразионно–обвальный профиль (см. рис. 2). Данный тип берега развивается под воздействием ветрового волнения [8].

В результате моделирования ветрового воздействия уступ стал более крутым, появились характерные следы обвала грунта (см. рис. 3, 4). Средняя крутизна уклона составляла 50.55° , в результате волнового воздействия средняя крутизна уступа стала 52.21° . Следует отметить, что свойственное для абразионно–обвального берега наличие бровок подтверждается результатами моделирования, и хотя нижняя бровка подвержена размыву, у вершины клифа формируется новая. Высота клифа практически не изменилась и составила 19.2 м, а ширина абразионной ступени увеличилась с 15 м до 17.2 м. При этом глубина увеличилась незначительно (в среднем на 4.6 см),

что позволяет говорить о глубинной эрозии. Участки, которые ранее были сглаженными, вследствие попадания на них донного материала становятся более неоднородными и шероховатыми. Для донной поверхности характерно образование наносов.

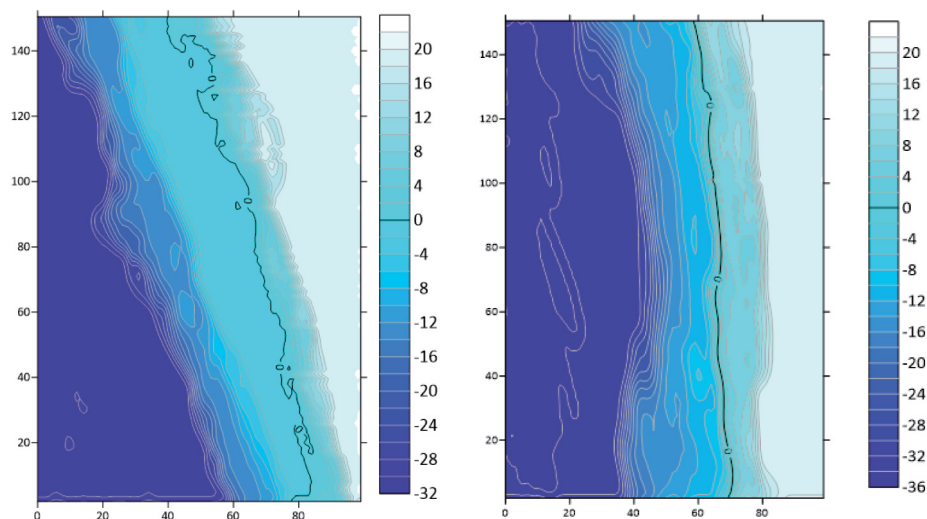


Рис. 2. Изолинии глубин берега с абразионно-обвальным профилем до (слева) и после (справа) моделирования.

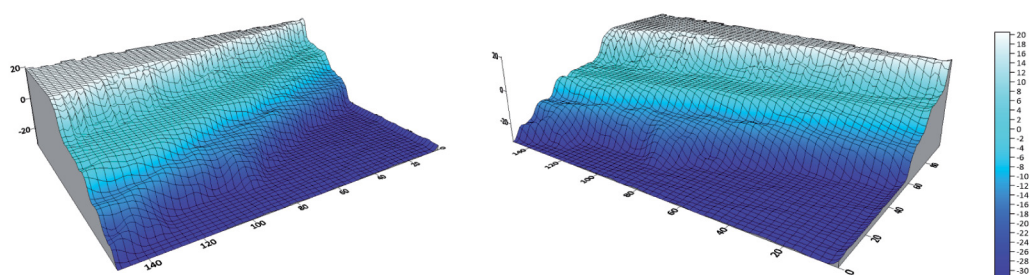


Рис. 3. Исходная геометрия берега с абразионно-обвальным профилем.

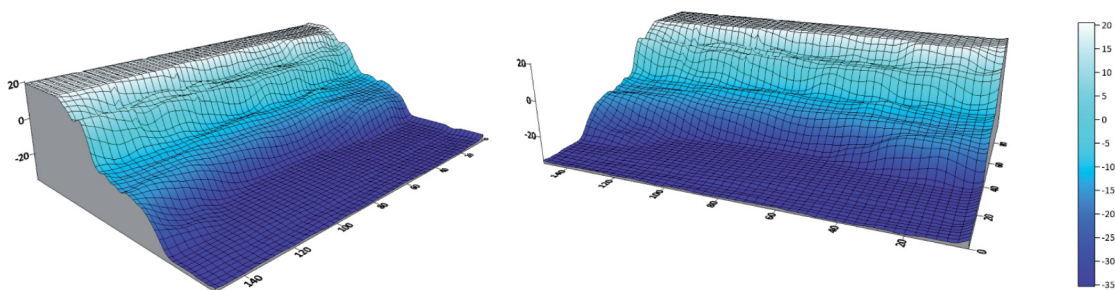


Рис. 4. Результаты моделирования изменения рельефа дна и берега с абразионно-обвальным профилем.

(б) Второй тип берега, выбранный для моделирования, имеет абразионно-осыпной профиль [8] (см. рис. 5). Типичные осыпные берега зафиксированы на правом берегу возле поселка Саркел. Абразионно-осыпной тип берега формируется на участках, сложенных песками, супесями, суглинками.

При моделировании бровка берега отступает вследствие размыва осыпи волнением и выносом материала вдольбереговыми течениями в места его аккумуляции. Часть материала отлагается на прибрежной отмели (см. рис. 6, 7). Подтверждено, что ветро-волновое воздействие не изменило типичную для морфологически осыпных берегов выпуклую форму и значительную крутизну

склонов. Результаты моделирования демонстрируют увеличение крутизны уклона с 31.8° до 33.2° . В результате ветро-волнового воздействия ширина абразионной ступени увеличилась с 26.5 м до 31 м, при этом высота клифа практически не изменилась и составила 19.2 м, глубина не изменилась, на данном участке дна отсутствуют признаки донной эрозии. Размывание берегов сопровождалось образованием осыпей.

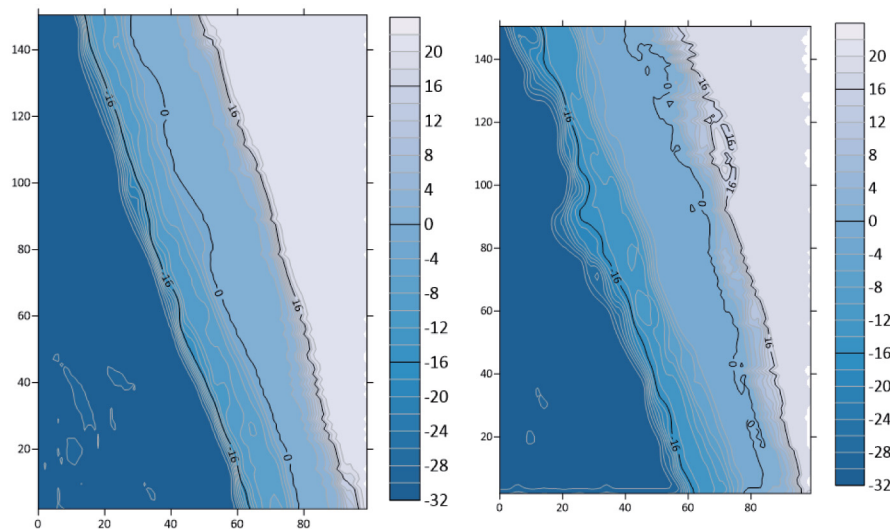


Рис. 5. Изолинии глубин берега с абразионно-осыпным профилем до и после моделирования.

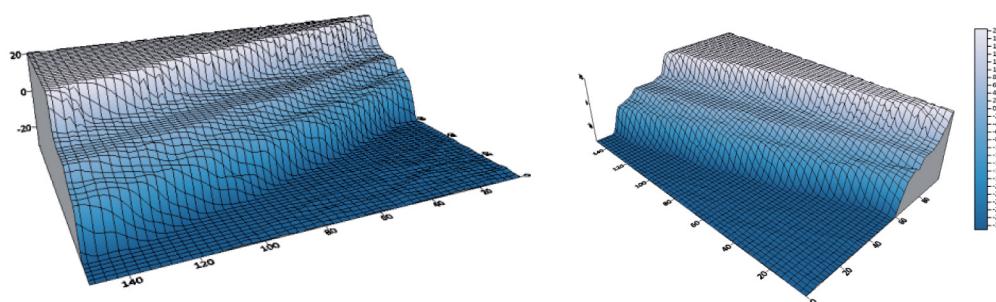


Рис. 6. Исходная геометрия берега с абразионно-осыпным профилем.

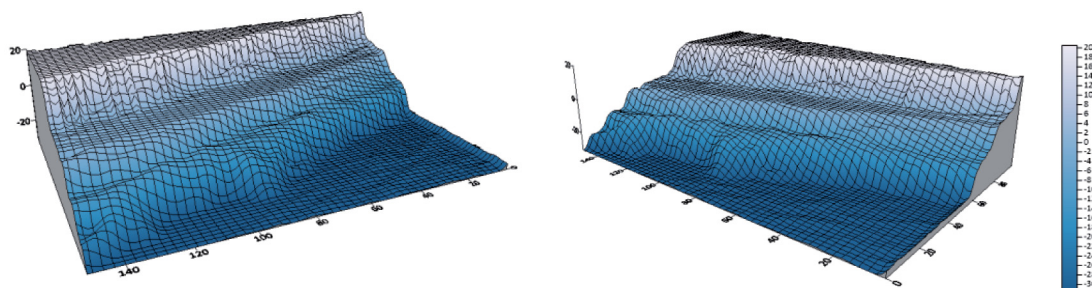


Рис. 7. Результаты моделирования изменения рельефа дна и берега с абразионно-осыпным профилем.

(в) Третий тип берега — абразионно-оползневый [8] — характерен для участков Цимлянского водохранилища в районе города Цимлянск (см. рис. 8). Оползневые явления связаны с выходом на дневную поверхность глин и суглинков в обнажениях берегов. Оползень возникает при нарушении равновесия, которое происходит при поднятии уровня грунтовых вод и повышения влажности глинистых грунтов по линии смещения.

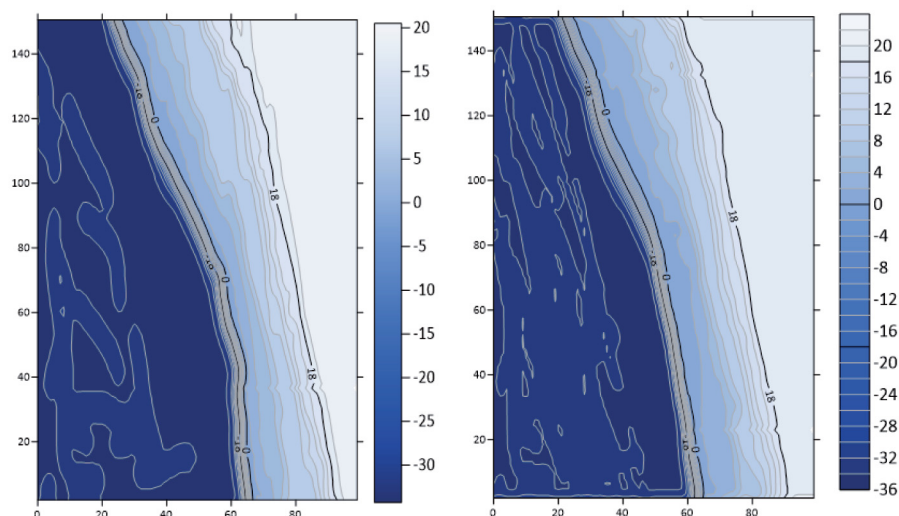


Рис. 8. Изолинии глубин берега с абразионно–оползневым профилем до и после моделирования.

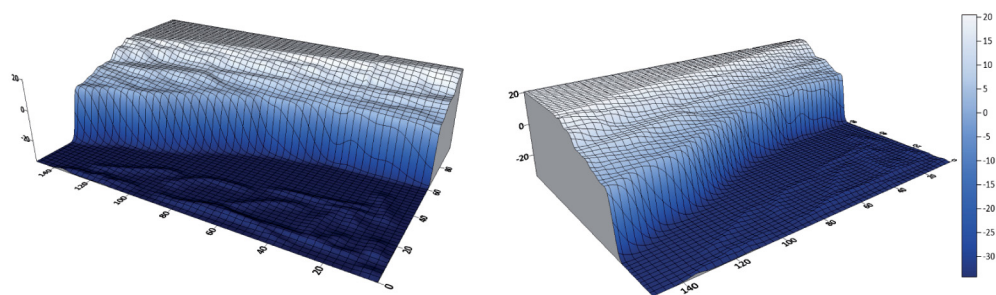


Рис. 9. Исходная геометрия берега с абразионно–оползневым профилем.

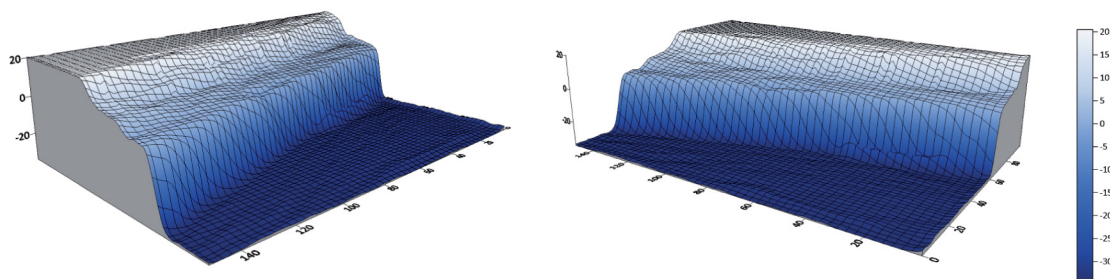


Рис. 10. Результаты моделирования изменения рельефа дна и берега с абразионно–оползневым профилем.

Результаты моделирования демонстрируют, что ширина захвата оползня увеличивается с 32 м до 35 м при несущественном изменении крутизны на 1.2° . Высота стенки отрыва главного уступа в результате моделирования не изменилась и составила 18.6 м. Происходит сглаживание неровностей на поверхности тела оползня (см. рис. 9, 10).

Результаты моделирования позволяют судить об общей тенденции изменения различных типов рельефа берега Цимлянского водохранилища при типичных для данной области направлении и скорости ветра. При времени моделирования 6 часов результаты демонстрируют изменение береговой линии, которое произойдет через 14 дней при неизменных скорости и направлении ветра. В данном случае можно утверждать, что данные изменения не являются критичными, ожидаемые изменения лежат в рамках допустимых для берега подобного типа. Предлагаемая модель может быть использована для оперативных прогнозов в ускоренном масштабе времени при штормовом ветре.

Моделирование может быть направлено на предотвращение катастрофических и неблагоприятных явлений, модель позволяет осуществлять прогноз развития подобных явлений и принятие решений в течение десятков минут — единиц часов.

В настоящее время процессы абразии низких берегов Цимлянского водохранилища заметно ослабились в связи с образованием достаточно широких аккумулятивных и абразионно-аккумулятивных подводных отмелей. Это вызвано тем, что при низких уровнях воды подходы к берегам становятся мелководными и волны уже не разрушают защитную отмель, сформировавшуюся во время волновой абразии при более высоких уровнях воды. Но на высоких обрывистых берегах, выбранных для моделирования, размеры волновой абразии ярко выражены. Во время весенних паводков абразионные процессы, вызванные волновой деятельностью, активизируются. Моделирование данных процессов необходимо для адекватных и своевременных мер для предотвращения или ликвидации последствий подобного рода явлений.

Литература

1. Г. И. Скрипка и др. “Анализ динамики абразионных берегов Цимлянского водохранилища с использованием беспилотных летательных аппаратов”, *Вестн. Моск. унив. сер. V*. No. 3, 42–49 (2022).
2. А. Е. Косолапов и др. “Районирование берегов Цимлянского водохранилища по степени проявления опасных экзогенных геологических процессов”, *Естеств. тех. науки* No. 10 (112), 59–68 (2017).
3. А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина, Е. А. Проценко, С. В. Проценко, “Численное моделирование воздействия ветровых течений на прибрежную зону крупных водохранилищ”, *Мат. физ. комп. модел.* **23**, No. 3, 15–30 (2022).
4. А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко, “Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов”, *Мат. модел.* **25**, No. 12, 65–82 (2013).
5. А. И. Сухинов и др. “Параллельные алгоритмы решения задачи динамики изменения рельефа дна в прибрежных системах”, *Вычисл. методы програм.* **21**, No. 3, 196–206 (2020).
6. А. А. Сухинов, С. В. Проценко, “Уточненная пространственно-двумерная линеаризованная модель транспорта наносов в прибрежной зоне”, *Вестн. Таган. инст.* No. 1, 365–369 (2016).
7. А. И. Сухинов и др. “Комплекс объединенных моделей транспорта наносов и взвесей с учетом трехмерных гидродинамических процессов в прибрежной зоне”, *Мат. модел.* **32**, No. 2, 3–23 (2020).
8. Л. Б. Иконников, *Формирование берегов водохранилища*, Наука, М. (1972).

Статья поступила в редакцию 30 апреля 2024 г.

А. Г. Чечкина

НЕРАВЕНСТВО БОЯРСКОГО — МЕЙЕРСА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ С КОНВЕКЦИЕЙ И КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ПЕРЕМЕННОГО ТИПА

Доказана повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы в ограниченной строго липшицевой области для неоднородного p -эллиптического уравнения с линейными членами младшего порядка.

Вопрос о повышенной суммируемости градиента решений эллиптических уравнений восходит к работе [1], в которой рассмотрен случай линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми коэффициентами. В многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле в области с достаточно регулярной границей установил Мейерс [2]. В настоящее время оценки повышенной суммируемости градиента решений принято называть *оценками типа Мейерса*. Для решения задачи Дирихле в области с липшицевой границей для уравнения p -Лапласа с переменным показателем p , обладающим логарифмическим модулем непрерывности, оценка типа Мейерса впервые получена в [3] (см. аналогичные оценки для задачи Зарембы в [4]–[6]). В [7] и [8] этот результат был усилен и распространен на системы эллиптических уравнений с переменным показателем суммируемости. Для задачи Зарембы в области с липшицевой границей оценки повышенной суммируемости градиента решения получены в [9, 10].

1. Постановка задачи

В настоящей статье исследуются интегральные свойства обобщенных решений задачи Зарембы для неоднородного p -эллиптического уравнения, где $2 < p < n$, в ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$.

Введем пространство Соболева функций $W_p^1(D, F)$, где $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, $W_p^1(D, F)$ — пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F , по норме пространства $W_p^1(D)$

$$\|u\|_{W_p^1(D, F)} = \left(\int_D |v|^p dx + \int_D |\nabla v|^p dx \right)^{1/p}.$$

Для функций $v \in W_p^1(D, F)$ требуется выполнение неравенство Фридрихса — Мазы

$$\int_D |v|^p dx \leq C \int_D |\nabla v|^p dx. \quad (1.1)$$

А. Г. Чечкина: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва; Институт математики с компьютерным центром УФИЦ РАН, Уфа, Россия, chechkina@gmail.com

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 226–238 (2025).

Полагая

$$\mathcal{L}_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} A \nabla u) + \vec{b} \nabla u, \quad 2 < p < n,$$

рассмотрим задачу Зарембы для p -эллиптического уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_p u &= l \text{ в } D, \\ u &= 0 \text{ на } F, \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} &= 0 \text{ на } G, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\frac{\partial u}{\partial \gamma}$ означает внешнюю конормальную производную функции u , т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} := \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i,$$

где ν_i — компоненты единичного вектора внешней нормали к границе области,

$$\begin{aligned} \vec{b}(x) &= (b_1(x), \dots, b_n(x)), \quad b_j(x) \in L_t(D), \\ t &> \begin{cases} \frac{np}{p(n+1)-2n}, & p \leq 2n/(n-1), \\ n/2, & p > 2n/(n-1), \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3}$$

l — линейный функционал в пространстве, сопряженном к $W_p^1(D, F)$. Здесь матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$ с измеримыми элементами предполагается симметрической и равномерно положительно определенной, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$ и

$$\alpha^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha |\xi|^2 \tag{1.4}$$

для почти всех $x \in D$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$, где α — положительная постоянная.

Под *решением задачи* (1.2) понимается функция $u \in W_p^1(D, F)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int_D |\nabla u|^{p-2} A \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_D (\vec{b} \cdot \nabla u) \varphi \, dx = -l(\varphi) \quad \forall \varphi \in W_p^1(D, F). \tag{1.5}$$

В силу неравенства (1.1) пространство $W_p^1(D, F)$ можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. В этом случае существует взаимно-однозначное изометрическое соответствие, сопоставляющее каждому элементу пространства Соболева его градиент, т.е. элемент пространства $(L_p(D))^n$. По теореме Хана — Банаха функционал l можно записать в виде

$$l(\varphi) = - \sum_{i=1}^n \int_D f_i \varphi_{x_i} \, dx, \tag{1.6}$$

где $f_i \in L_{p'}(D)$, $p' = p/(p-1)$. Поэтому в силу (1.5) для каждого конкретного функционала решение задачи (1.2) понимается в смысле интегрального соотношения

$$\int_D |\nabla u|^{p-2} A \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_D (\vec{b} \cdot \nabla u) \varphi \, dx = \int_D f \cdot \nabla \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in W_p^1(D, F), \tag{1.7}$$

где компоненты вектор-функции $f = (f_1, \dots, f_n)$ принадлежат $L_{p'}(D)$.

Цель данной статьи — доказательство повышенной суммируемости градиента решений задачи (1.2) при условии $f \in L_{p'+\delta}(D)$, $\delta > 0$. Ключевую роль играет условие на структуру множества носителя данных Дирихле F .

Для компактного множества $K \subset \mathbb{R}^n$ определим *емкость* $C_q(K)$, $1 < q < n$, по формуле

$$C_q(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi|^q \, dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}. \tag{1.8}$$

Показатель q определяется формулой

$$q = \frac{ntp}{nt(p-1) - pn + tp}, \quad (1.9)$$

где t определено в (1.3).

Обозначим через $B_r^{x_0}$ открытый шар радиуса r с центром x_0 . Сформулируем ограничение на множество F , предполагая выполненным следующее неравенство для произвольной точки $x_0 \in F$ при $r \leq r_0$:

$$C_q(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{n-q}, \quad (1.10)$$

где положительная постоянная c_0 не зависит от x_0 и r , $1 < q < n$.

При условии (1.10) выполнено неравенство (1.1). Действительно, обозначим через $\mathcal{Q}_d$ открытый куб с длиной ребра d и гранями, параллельными координатным осям. Предположим, что липшицева область D имеет диаметр d и $D \subset \mathcal{Q}_d$. Определим емкость $C_p(K, \mathcal{Q}_{2d})$ компактного множества $K \subset \overline{\mathcal{Q}}_d$ по отношению к кубу $\mathcal{Q}_{2d}$ равенством

$$C_p(K, \mathcal{Q}_{2d}) = \inf \left\{ \int_{\mathcal{Q}_{2d}} |\nabla \varphi|^p dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{Q}_{2d}), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

При $1 < p \leq n$ для функций $v \in W_p^1(D, F)$ справедливо неравенство [11]

$$\int_D |v|^p dx \leq \frac{C(n, p, D) d^n}{C_p(F, \mathcal{Q}_{2d})} \int |\nabla v|^p dx \quad (1.11)$$

с точной константой в правой части.

Далее полагаем $1 < q < p \leq n$ в (1.10). В силу определения емкости $C_p(K, \mathcal{Q}_{2d})$ и неравенства Гёльдера

$$C_q(K, \mathcal{Q}_{2d}) \leq |\mathcal{Q}_{2d}|^{(p-q)/p} C_p^{q/p}(K, \mathcal{Q}_{2d}), \quad (1.12)$$

где $|\mathcal{Q}_{2d}|$ — n -мерная мера куба $\mathcal{Q}_{2d}$. Так как при $1 < q < n$ существует [12, предложение 4] положительная постоянная $\gamma(n, q) \geq 1$ такая, что

$$C_q(K) \leq C_q(K, \mathcal{Q}_{2d}) \leq \gamma C_q(K),$$

из (1.12) и (1.10) при $1 < q < n$ следует, что $C_p(F, \mathcal{Q}_{2d}) > 0$ и (1.11) влечет (1.1). Поскольку емкость положительна, справедливо неравенство [11]

$$\int_D |v|^{\frac{pn}{n-p}} dx \leq C \int |\nabla v|^p dx. \quad (1.13)$$

Обозначим через $\text{mes}_{n-1}(E)$ $(n-1)$ -мерную меру Лебега множества $E \subset \partial D$. Заметим, что из условия

$$\text{mes}_{n-1}(F \cap \overline{B}_r^{x_0}) \geq c_0 r^{n-1}$$

вытекает (1.10) (см. [11]).

2. Основной результат

Будем называть область D (строго) липшицевой, если для каждой точки $x_0 \in \partial D$ существует открытый куб Q с центром в x_0 , грани которого параллельны координатным осям, длина ребра не зависит от x_0 и в некоторой декартовой системе координат с началом в x_0 множество $Q \cap \partial D$ есть график липшицевой функции $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ с постоянной Липшица, не зависящей от x_0 . Длину ребра таких кубов будем считать равной $2R_0$, а постоянную Липшица соответствующих функций g обозначим через L . Для определенности считаем, что множество $Q \cap D$ расположено выше графика функции g .

В следующем утверждении постоянная r_0 из условия (1.10) не превосходит константы R_0 .

Теорема 2.1. Если $f \in L_{p'+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, $p' = p/(p-1)$ и выполнены условия (1.4), (1.3) и (1.10), то существует положительная постоянная $\delta(n, p, \delta_0) < \delta_0$ такая, что для решений задачи (1.2) справедлива оценка

$$\int_D |\nabla u|^{p+\delta} dx \leq C \left(\|\tilde{b}\|_{L_t(D)}^{\frac{p}{p-2}} + \int_D |f|^{p'(1+\frac{\delta}{p})} dx + 1 \right), \quad (2.1)$$

где константа C зависит только от α , p , δ_0 , n , c_0 из (1.10) и области D .

Доказательство. Сначала установим оценку повышенной суммируемости градиента решения задачи (1.2) в окрестности границы области D , используя локальное распрямление границы ∂D . Полагая $Q_{R_0} = \{x : |x_i| < R_0, i = 1, \dots, n\}$, для произвольной граничной точки $x_0 \in \partial D$ рассмотрим локальную декартову систему координат с началом в x_0 такую, что часть границы ∂D , попадающая в куб Q_{R_0} , задается в этой системе координат уравнением $x_n = g(x')$, где $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, а g — липшицева функция с показателем Липшица L . Предполагается, что область $D_{R_0} = Q_{R_0} \cap D$ расположена в множестве тех точек, где $x_n > g(x')$. Перейдем в Q_{R_0} к новой системе координат с помощью невырожденного преобразования переменных

$$y' = x', \quad y_n = x_n - g(x'). \quad (2.2)$$

Ясно, что часть границы $Q_{R_0} \cap \partial D$ преобразуется в часть гиперплоскости

$$P_{R_0} = \{y : |y_i| < R_0, i = 1, \dots, n-1, y_n = 0\}.$$

Шаг 1. Покажем, что образ области Q_{R_0} содержит куб

$$K_{R_0} = \{y : |y_i| < (1 + \sqrt{n-1}L)^{-1}R_0, i = 1, \dots, n\}. \quad (2.3)$$

Действительно, если $y \in \tilde{Q}_{R_0}$ и $|y_i| < \delta R_0$ для некоторого $\delta \in (0, 1)$ и $i = 1, \dots, n-1$, то $y_n \in (-R_0 - g(y'), R_0 - g(y'))$. Поскольку g липшицева и $g(0) = 0$, имеем

$$|g(y')| \leq L|y'| < \sqrt{n-1}L\delta R_0,$$

откуда следует

$$(-R_0(1 - \sqrt{n-1}L\delta), R_0(1 - \sqrt{n-1}L\delta)) \subset (-R_0 - g(y'), R_0 - g(y')).$$

Выбирая δ из равенства $\delta = 1 - \sqrt{n-1}L\delta$, получаем $K_{R_0} \subset \tilde{Q}_{R_0}$.

Шаг 2. В полукубе $K_{R_0}^+ = K_{R_0} \cap \{y : y_n > 0\}$, который содержится в образе области $D \cap Q_{R_0}$, задача (1.2), принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 u &= \tilde{l} \text{ в } K_{R_0}^+, \\ u &= 0 \text{ на } \tilde{F}_{R_0}, \\ \frac{\partial u}{\partial \tilde{\gamma}} &= 0 \text{ на } \tilde{G}_{R_0}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\mathcal{L}_1 u := \operatorname{div}(|\nabla_y u + u_{y_n} \nabla_y g|^{p-2} \tilde{A}(y) \nabla_y u) + \tilde{b} \nabla u,$$

причем

$$\begin{aligned} \tilde{b}(y) &= (\tilde{b}_1(y), \dots, \tilde{b}_n(y)), \\ \tilde{b}_i(y) &= b_i(y', y_n + g(y')), \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

матрица $\tilde{A}(y) = (\tilde{a}_{kl}(y))_{k,l=1}^n$ симметричная, равномерно положительно определенная и удовлетворяет условию

$$\tilde{\alpha}^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij}(y) \xi_i \xi_j \leq \tilde{\alpha}|\xi|^2$$

для почти всех $y \in K_{R_0}^+$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ с постоянной $\tilde{\alpha} = \alpha(L+1)^2$, а вектор-функция f , участвующая в записи функционала (1.6), преобразуется в вектор-функцию $\tilde{f}$. Чтобы убедиться

в этом, достаточно в интегральном тождестве (1.7) перейти к новым переменным, учитывая, что якобиан такой замены равен единице, и воспользоваться липшицевостью функции g . После этой замены получаем положительную определенность матрицы и явный вид функций в правой части преобразованного функционала $\tilde{l}$ (подробнее см. [13]). Множества $\tilde{F}_{R_0}$ и $\tilde{G}_{R_0}$ таковы, что $\tilde{F}_{R_0} = \tilde{F} \cap P_{R_0} \cap K_{R_0}$ и $\tilde{G}_{R_0} = \tilde{G} \cap P_{R_0} \cap K_{R_0}$, где $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ — образы множеств $F \cap \mathcal{Q}_{2R_0}$ и $G \cap \mathcal{Q}_{2R_0}$ соответственно, а $\frac{\partial u}{\partial \tilde{\gamma}}$ — внешняя конормальная производная функции u , порожденная матрицей $\tilde{A}$ и связанная с оператором из (2.4). Нетрудно видеть (см. [13]), что

$$C_1(L)|\nabla_y u| \leq |\nabla_y u + u_{y_n} \nabla_y g| \leq C_2(L)|\nabla_y u|.$$

Продолжим функцию u , удовлетворяющую (2.4), чётно относительно гиперплоскости $\{y : y_n = 0\}$. Продолженная функция, за которой сохраним обозначение, удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 u &= l_h \text{ в } K_{R_0} \setminus \tilde{F}_{R_0}, \\ u &= 0 \text{ на } \tilde{F}_{R_0}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\mathcal{L}_2 u := \operatorname{div}(|\tilde{\nabla} u|^{p-2} B(y) \nabla u) + \vec{k} \nabla u.$$

Здесь $\tilde{\nabla} u$ совпадает с $\nabla u + u_{y_n} \nabla g$ при $y_n > 0$, а при $y_n < 0$ — с таким же выражением, поскольку частная производная u_{y_n} продолжается как нечетная функция. Положительно определенная матрица $B(y) = \{b_{ij}(y)\}$ такова, что $b_{jn}(y) = b_{nj}(y)$ при $j \neq n$ суть нечетные продолжения $\tilde{a}_{jn}(y)$ из (2.4), а все остальные элементы $b_{ij}(y)$ — четные продолжения $\tilde{a}_{ij}(y)$.

Аналогично компоненты вектор-функции $k = (k_1, \dots, k_n)$ в (2.5) определяются следующим образом: $k_i(y)$ при $i = 1, \dots, n-1$ суть четные продолжения компонент $\tilde{b}_i(y)$ из (2.4), а $k_n(y)$ — нечетное продолжение $\tilde{b}_n(y)$. Легко видеть, что матрица B удовлетворяет условию эллиптичности

$$\beta^{-1}|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(y) \xi_i \xi_j \leq \beta |\xi|^2 \quad (2.6)$$

для почти всех $y \in K_{R_0}^+$ и всех $\xi \in \mathbb{R}^n$, где β зависит от $\tilde{\alpha}$. Компоненты вектор-функции $h = (h_1, \dots, h_n)$ в (2.5), участвующей в представлении функционала l_h , определяются следующим образом: компоненты $h_i(y)$ при $i = 1, \dots, n-1$ суть четные продолжения компонент $\tilde{f}_i(y)$ из (2.4), а $h_n(y)$ — нечетное продолжение $\tilde{f}_n(y)$.

Отметим также, что

$$C_1(L)|\nabla u| \leq |\tilde{\nabla} u| \leq C_2(L)|\nabla u|. \quad (2.7)$$

Решением (2.5) является функция $u \in W_p^1(K_{R_0})$, для которой выполнено интегральное тождество (см. (1.7))

$$\int_{K_{R_0}} |\tilde{\nabla} u|^{p-2} B \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dy - \int_{K_{R_0}} (\vec{k} \cdot \nabla u) \varphi \, dy = \int_{K_{R_0}} h \cdot \nabla \varphi \, dy \quad (2.8)$$

для всех пробных функций $\varphi \in W_2^1(K_{R_0}, F_{R_0})$ из пополнения множества бесконечно дифференцируемых в замыкании K_{R_0} функций, равных нулю в окрестности ∂K_{R_0} и F_{R_0} по норме пространства $W_p^1(K_{R_0})$.

Обозначим через $Q_R^{y_0}$ открытый куб с центром в точке y_0 с ребрами длиной $2R$, параллельными координатным осям. Пусть $y_0 \in K_{R_0/2} \setminus \partial K_{R_0/2}$, где

$$R \leq \frac{1}{2} \operatorname{dist}(y_0, \partial K_{R_0/2}),$$

$$\int_{Q_R^{y_0}} f \, dx = \frac{1}{|Q_R^{y_0}|} \int_{Q_R^{y_0}} f \, dx;$$

здесь $|Q_R^{y_0}|$ — n -мерная мера куба $Q_R^{y_0}$.

Сначала рассмотрим случай $Q_{3R/2}^{y_0} \subset K_{R_0} \setminus \tilde{F}_{R_0}$ и выберем в интегральном тождестве (2.8) пробную функцию $\varphi = (u - \lambda)\eta^p$, где

$$\lambda = \oint_{Q_{3R/2}^{y_0}} u, \, dy,$$

а срезающая функция $\eta \in C_0^\infty(Q_{3R/2}^{y_0})$ такова, что

$$0 < \eta \leq 1, \quad \eta = 1 \text{ в } Q_R^{y_0}, \quad |\nabla \eta| \leq \frac{C}{R}. \quad (2.9)$$

Выбирая в (2.8) пробную функцию $\varphi = (u - \lambda)\eta^p$, где η определена в (2.9), получаем

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} |\tilde{\nabla} u|^{p-2} B \nabla u \cdot \nabla u \eta^p \, dy &= \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} (\vec{k} \cdot \nabla u) (u - \lambda) \eta^p \, dy \\ &- p \int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^{p-1} (u - \lambda) |\tilde{\nabla} u|^{p-1} B \nabla u \cdot \nabla \eta \, dy + \int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^p h \cdot \nabla u \, dy + p \int_{Q_{\frac{3R}{4}}^{x_0}} \eta^{p-1} (u - \lambda) h \cdot \nabla \eta \, dy. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Оценим сначала первое слагаемое в правой части (2.10). Поскольку $p < n$, имеем $p/(p-1) < np/(p(n+1)-2n)$. По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \sum_{j=1}^n k_j u_{x_j} (u - \lambda) \eta^p \, dy &\leq R \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^p \eta^p \, dy \right)^{1/p} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |k|^{\frac{p}{p-1}} \eta^{\frac{p}{p-1}} \left| \frac{u - \lambda}{R} \right|^{\frac{p}{p-1}} \, dy \right)^{\frac{p-1}{p}} \\ &\leq R \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^p \eta^p \, dy \right)^{1/p} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |k|^t \eta^t \, dy \right)^{\frac{1}{t}} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \left| \frac{u - \lambda}{R} \right|^{\frac{tp}{t(p-1)-p}} \, dy \right)^{\frac{t(p-1)-p}{tp}}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ясно, что

$$\frac{tp}{t(p-1)-p} < \frac{\frac{np}{p(n+1)-2n} p}{\frac{np}{p(n+1)-2n} (p-1) - p} = \frac{np}{n-p}.$$

По неравенству Пуанкаре — Соболева

$$\left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \left| \frac{u - \lambda}{R} \right|^{\frac{tp}{t(p-1)-p}} \, dy \right)^{\frac{t(p-1)-p}{tp}} \leq C(n, p) \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q \, dy \right)^{1/q}, \quad (2.12)$$

где

$$q = \frac{ntp}{nt(p-1) - pn + tp} \in (1, p).$$

Из (2.11) и (2.12), учитывая $0 \leq \eta \leq 1$, найдем

$$\begin{aligned} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \sum_{j=1}^n k_j u_{x_j} (u - \lambda) \eta^p \, dy &\leq C(n, p) R \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^p \eta^p \, dy \right)^{1/p} \\ &\times \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |k|^t \, dy \right)^{1/t} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q \, dy \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

и по неравенству Коши с $\varepsilon > 0$

$$\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} \sum_{j=1}^n k_j u_{x_j} (u - \lambda) \eta^p \, dy \leq \varepsilon \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^p \eta^p \, dy$$

$$+ C(\varepsilon, n, p) R^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |k|^t dy \right)^{p/t(p-1)} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q dy \right)^{p/q(p-1)}. \quad (2.13)$$

Оценим оставшиеся интегралы в правой части (2.10). Поскольку

$$C_1(L)\beta^{-1}|\nabla u|^{p-1}|\nabla u|^2 \leq |\tilde{\nabla} u|^{p-1}|B\nabla u \cdot \nabla u| \leq C_2(L)\beta|\nabla u|^{p-1}|\nabla u|^2$$

(см. (2.6) и (2.7)) и $0 \leq \eta \leq 1$, с помощью неравенства Юнга получаем

$$\begin{aligned} p|\eta^{p-1}(u-\lambda)|\tilde{\nabla} u|^{p-1}B\nabla u \cdot \nabla \eta| &\leq C(\beta, L)p\eta^{p-1}(u-\lambda)|\nabla u|^{p-1}|\nabla u||\nabla \eta| \\ &\leq \varepsilon_1|\nabla u|^p\eta^p + C(\varepsilon_1, \beta)|u-\lambda|^p|\nabla \eta|^p, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$|\eta^p h \cdot \nabla u| \leq \varepsilon_2|\nabla u|^p\eta^p + C(\varepsilon_2)|h|^{p'},$$

$$p|\eta^{p-1}(u-\lambda)h \cdot \nabla \eta| \leq \varepsilon_3|h|^{p'} + C(\varepsilon_3, p)|u-\lambda|^p|\nabla \eta|^p.$$

Выбирая соответствующим образом ε , ε_1 , ε_2 и ε_3 с помощью равенства (2.10), неравенств (2.14), (2.13) и эллиптичности оператора задачи (2.5), приходим к оценке

$$\begin{aligned} \int_{Q_{\frac{3R}{2}}^{y_0}} |\nabla u|^p \eta^p dx &\leq C \left[\int_{Q_{\frac{3R}{2}}^{y_0}} |u-\lambda|^p |\nabla \eta|^p dx + \int_{Q_{\frac{3R}{2}}^{y_0}} |h|^{p'} dx \right. \\ &\quad \left. + C(\varepsilon, n, p) R^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |k|^t dy \right)^{p/t(p-1)} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q dy \right)^{p/q(p-1)} \right]. \end{aligned}$$

Вспомогая, что $\eta = 1$ в $Q_R^{y_0}$ и $|\nabla \eta| \leq C/R$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^p dx &\leq C \left[\frac{1}{R^p} \int_{Q_{\frac{3R}{2}}^{y_0}} |u-\lambda|^p dx + \int_{Q_{\frac{3R}{2}}^{y_0}} |h|^{p'} dx \right. \\ &\quad \left. + C(n, p) R^{\frac{p}{p-1}} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |k|^t dy \right)^{p/t(p-1)} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q dy \right)^{p/q(p-1)} \right]. \end{aligned}$$

Переходим к усреднениям и, учитывая (1.3), (2.12) и неравенство

$$-n + \frac{p}{p-1} + \frac{np}{q(p-1)} \geq 0, \quad (2.15)$$

получаем

$$\begin{aligned} \oint_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^p dx &\leq C \left[\frac{1}{R^p} \oint_{Q_{\frac{3R}{2}}^{y_0}} |u-\lambda|^p dx + \oint_{Q_{\frac{3R}{2}}^{y_0}} |h|^{p'} dx \right. \\ &\quad \left. + C(n, p) \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |k|^t dy \right)^{p/t(p-1)} \left(\oint_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q dy \right)^{p/q(p-1)} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

В силу неравенства Пуанкаре — Соболева

$$\left(\oint_{Q_{\frac{3R}{2}}^{y_0}} |u-\lambda|^p dx \right)^{1/p} \leq C(n, p) R \left(\oint_{Q_{\frac{3R}{2}}^{y_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q},$$

где q при $2 < p < n$ имеет тот же смысл, что и в (1.8), найдем

$$\left(\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^p dy \right)^{1/p} \leq C(k, n, p, \alpha, L) \left[\left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |\nabla u|^q dy \right)^{1/q(p-1)} + \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q} + \left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |h|^{p'} dy \right)^{1/p'} \right].$$

Поскольку $p > 2$, используя неравенство Юнга, получаем

$$\left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |\nabla u|^q dy \right)^{1/q(p-1)} \leq \left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |\nabla u|^q dy \right)^{1/q} + 1, \quad (2.17)$$

и в итоге приходим к оценке

$$\left(\int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^p dy \right)^{1/p} \leq C(k, n, p, \alpha, L) \left[\left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q} + \left(\int_{Q_{2R}^{y_0}} |h|^{p'} dy \right)^{1/p'} + 1 \right]. \quad (2.18)$$

Рассмотрим случай $Q_{3R/2}^{y_0} \cap \tilde{F}_{R_0} \neq \emptyset$. Выбирая в (2.8) пробную функцию $\varphi = u\eta^p$ с той же срезающей функцией η , что и выше, приходим к оценке (2.16) с $\lambda = 0$, в силу которой

$$\begin{aligned} \int_{Q_R^{y_0}} |\nabla u|^p dx &\leq C \left[\frac{1}{R^p} \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |u|^p dx + \int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |h|^{p'} dx \right. \\ &\quad \left. + C(n, p) \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |k|^t dy \right)^{p/t(p-1)} \left(\int_{Q_{3R/2}^{y_0}} |\nabla u|^q dy \right)^{p/q(p-1)} \right]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Перейдем к оценке первого интеграла в правой части (2.19). Поскольку $Q_{3R/2}^{y_0} \cap \tilde{F}_{R_0} \neq \emptyset$, найдется точка $z_0 \in Q_{3R/2}^{y_0} \cap \tilde{F}_{R_0}$ такая, что $\overline{Q}_{R/2}^{z_0} \subset \overline{Q}_{2R}^{y_0}$. Обозначим через $z \in F \cap Q_{R_0}$ прообраз точки z_0 при преобразовании (2.2). Нетрудно видеть, что прообраз замкнутого куба $\overline{Q}_{R/2}^{z_0}$ содержит замкнутый шар $\overline{B}_{cR}^z$, где $c = c(L, n) > 0$. Если $2 < p < n$ и выполнено условие (1.10), то справедливо неравенство [11]

$$\left(\int_{Q_R^{x_0}} |u|^p dx \right)^{1/p} \leq C(n, p, c_0) R \left(\int_{Q_R^{x_0}} |\nabla u|^q dx \right)^{1/q}, \quad (2.20)$$

где постоянная q имеет тот же смысл, что и в (2.12). Из приведенных неравенств опять приходим к (2.18).

Далее нам потребуется обобщенная лемма Геринга [14, 15]. Пусть $g(x)$ и $f(x)$ — неотрицательные функции в $\mathcal{Q}_6$ такие, что $g \in L_\xi(\mathcal{Q}_6)$, $\xi > 1$, $f \in L_\zeta(\mathcal{Q}_6)$, $\zeta > \xi$.

Лемма 2.1 (обобщенная лемма Геринга). *Предположим, что для каждой точки $x_0 \in \mathcal{Q}_6 \setminus \partial\mathcal{Q}_6$ и $R \leq \frac{1}{2} \text{dist}(x_0, \partial\mathcal{Q}_6)$ выполнено неравенство*

$$\int_{\mathcal{Q}_{2R}^{x_0}} g^\xi(x) dx \leq b \left[\left(\int_{\mathcal{Q}_{4R}^{x_0}} g(x) dx \right)^\xi + \int_{\mathcal{Q}_{4R}^{x_0}} f^\xi(x) dx \right], \quad b > 1.$$

Тогда существуют положительные постоянные c , $\xi < p_1 < \zeta$, зависящие только от ξ , ζ , n , такие, что при $g \in L_{\tau, \text{loc}}(\mathcal{Q}_6)$ для $\tau \in [\xi, p_1]$ и $0 < \sigma < 3$

$$\int_{\mathcal{Q}_{6-\sigma}} g^\tau(x) dx \leq c \delta^{-n\tau/\xi} \left[\left(\int_{\mathcal{Q}_6} g^\xi(x) dx \right)^{\tau/\xi} + b \int_{\mathcal{Q}_6} f^\tau(x) dx \right].$$

Из оценки (2.18), справедливой для всех рассматриваемых кубов $Q_R^{y_0}$, и обобщенной леммы Геринга с учетом длины ребра куба K_{R_0} (см. (2.3)) в предположении, что $h \in L_{2+\delta_0}(K_{R_0})$, где $\delta_0 > 0$, имеем

$$\| \nabla u \|_{L_{p+\delta}(K_{R_0/4})} \leq C (\| \nabla u \|_{L_p(K_{R_0/2})} + \| |h|^{p'/p} \|_{L_{p+\delta}(K_{R_0/2})} + 1)$$

с положительной постоянной $\delta = \delta(n, p, \delta_0)$ и дополнительной зависимостью C от R_0 . В силу четности функции u относительно гиперплоскости $\{y : y_n = 0\}$ это неравенство можно записать в виде (см. (2.4))

$$\| \nabla u \|_{L_{p+\delta}(K_{R_0/4}^+)} \leq C (\| \nabla u \|_{L_p(K_{R_0/2}^+)} + \| |\tilde{f}|^{p'/p} \|_{L_{p+\delta}(K_{R_0/2}^+)} + 1). \quad (2.21)$$

При обратном преобразовании (2.2) прообраз полукуба $K_{R_0/2}^+$ содержится в множестве D_{R_0} , а прообраз полукуба $K_{R_0/4}^+$ содержит множество $D_{\theta R_0}$, где $\theta = \theta(n, L) > 0$. В силу (2.21)

$$\| \nabla u \|_{L_{p+\delta}(D_{\theta R_0})} \leq C (\| \nabla u \|_{L_p(D_{R_0})} + \| |f|^{p'/p} \|_{L_{p+\delta}(D_{R_0})} + 1).$$

Перейдя к исходной декартовой системе координат с началом $x_0 \in \partial D$, получим

$$\| \nabla u \|_{L_{p+\delta}(D \cap Q_{\theta R_0}^{x_0})} \leq C (\| \nabla u \|_{L_p(D \cap Q_{R_0}^{x_0})} + \| |f|^{p'/p} \|_{L_{p+\delta}(D \cap Q_{R_0}^{x_0})} + 1).$$

Поскольку $x_0 \in \partial D$ — произвольная граничная точка, а граница ∂D компактна, можно найти конечное покрытие ∂D такое, что замкнутое множество

$$\mathcal{D}_{\theta_1 R_0} = \{x \in D : \text{dist}(x, \partial D) \leq \theta_1 R_0\}, \quad \theta_1 = \theta_1(n, L) > 0,$$

содержится в объединении множеств $D \cap Q_{\theta R_0}^{x_i}$, где $x_i \in \partial D$. Суммируя неравенства

$$\| \nabla u \|_{L_{p+\delta}(D \cap Q_{\theta R_0}^{x_i})} \leq C (\| \nabla u \|_{L_p(D \cap Q_{R_0}^{x_i})} + \| |f|^{p'/p} \|_{L_{p+\delta}(D \cap Q_{R_0}^{x_i})} + 1),$$

придем к оценке

$$\| \nabla u \|_{L_{p+\delta}(\mathcal{D}_{\theta_1 R_0})} \leq C (\| \nabla u \|_{L_p(D)} + \| |f|^{p'/p} \|_{L_{p+\delta}(D)} + 1).$$

Внутренняя оценка

$$\| \nabla u \|_{L_{p+\delta}(D \setminus \mathcal{D}_{\theta_1 R_0})} \leq C (\| \nabla u \|_{L_p(D)} + \| |f|^{p'/p} \|_{L_{p+\delta}(D)} + 1) \quad (2.22)$$

не учитывает граничных условий и доказывается намного проще. Действительно, пусть $D_\varpi \subset D$ — строго внутренняя подобласть D , отстоящая от границы ∂D на расстоянии ϖ . Покроем замыкание $\overline{D_\varpi}$ конечным количеством кубов $\mathcal{Q}^i$, ребра которых параллельны координатным осям и имеют длину $\varpi/4$, таким образом, чтобы произвольный замкнутый концентрический к $\mathcal{Q}^i$ куб с удвоенной длиной ребра принадлежал области D . Далее используем неравенство (см. (2.18))

$$\left(\int_{\mathcal{Q}_{\varpi/2}^i} |\nabla u|^p dy \right)^{1/p} \leq C \left[\left(\int_{\mathcal{Q}_\varpi^i} |\nabla u|^q dy \right)^{1/q} + \left(\int_{\mathcal{Q}_\varpi^i} |f|^{p'} dy \right)^{1/p} + 1 \right]. \quad (2.23)$$

Вновь используя лемму Геринга и суммируя полученные оценки по i , при соответствующем выборе ϖ приходим к внутренней оценке (2.22). Комбинируя с оценкой, полученной выше, находим

$$\| \nabla u \|_{L_{p+\delta}(D)} \leq C (\| \nabla u \|_{L_p(D)} + \| |f|^{p'/p} \|_{L_{p+\delta}(D)} + 1). \quad (2.24)$$

Докажем энергетическую оценку. Подставим в (1.7) пробную функцию $\varphi = u$. Используя условие эллиптичности (1.4), найдем

$$\int_D |\nabla u|^p dx \leq C(\alpha) \left[\left| \int_D u(\vec{b} \cdot \nabla u) dx \right| + \left| \int_D f \cdot \nabla u dx \right| \right]. \quad (2.25)$$

Оценим слагаемые в правой части (2.25). В силу неравенства Гёльдера и (1.13)

$$\left| \int_D u(\vec{b} \cdot \nabla u) dx \right| \leq \|\vec{b}\|_{L_t(D)} \|\nabla u\|_{L_p(D)} \|u\|_{L_{\frac{pn}{n-p}}(D)} \leq C(n, p, F) \|\vec{b}\|_{L_t(D)} \|\nabla u\|_{L_p(D)}^2.$$

Отсюда по неравенству Юнга

$$\left| \int_D u(\vec{b} \cdot \nabla u) dx \right| \leq \varepsilon \int_D |\nabla u|^p dx + C(\varepsilon, n, p, F) \|\vec{b}\|_{L_t(D)}^{\frac{p}{p-2}}.$$

Далее, по неравенству Юнга

$$\left| \int_D f \cdot \nabla u dx \right| \leq \varepsilon \int_D |\nabla u|^p dx + C(\varepsilon) \int_D |f|^{p'} dx.$$

Учитывая два последних неравенства в (2.25), после соответствующего выбора ε находим

$$\int_D |\nabla u|^p dx \leq C(\alpha, n, p, F) \left(\|\vec{b}\|_{L_t(D)}^{\frac{p}{p-2}} + \int_D |f|^{p'} dx \right). \quad (2.26)$$

Комбинируя (2.24) и (2.26), приходим к (2.1). Теорема 2.1 доказана. $\square$

Благодарности

Автор выражает благодарность Ю. А. Алхутову и М. Д. Сурначеву за полезные советы.

Литература

1. Б. В. Боярский, “Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами”, *Мат. сб.* **43**, No 4, 451–503 (1957).
2. N. G. Meyers, “An L^p -estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations”, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., III* **17**, No 3, 189–206 (1963).
3. V. V. Zhikov, “On some variational problems”, *Russ. J. Math. Phys.* **5**, No 1, 105–116 (1997).
4. Yu. A. Alkhutov, G. A. Chechkin, “The Bojarsky–Meyers inequality for the Zaremba problem for $p(\cdot)$ -Laplacian”, *J. Math. Sci.* **274**, No 4, 423–441 (2023).
5. Yu. A. Alkhutov, G. A. Chechkin, “On higher integrability of the gradient of a solution to the Zaremba problem for $p(\cdot)$ -Laplace equation in a plane domain”, *Lobachevskii J. Math.* **44**, No 8, 3197–3206 (2023).
6. Ю. А. Алхутов, Г. А. Чечкин, “Многомерная задача Зарембы для уравнения $p(\cdot)$ -Лапласа. Оценка Боярского — Мейерса”, *Теор. мат. физ.* **218**, No 1, 3–22 (2024).
7. E. Acerbi, G. Mingione, “Gradient estimates for the $p(x)$ -Laplacian system”, *J. Reine Angew. Math.* **584**, 117–148 (2005).
8. L. Diening, S. Schwarzacher, “Global gradient estimates for the $p(\cdot)$ -Laplacian”, *Nonlinear Anal.* **106**, 70–85 (2014).
9. Ю. А. Алхутов, Г. А. Чечкин, “Повышенная суммируемость градиента решения задачи Зарембы для уравнения Пуассона”, *Докл. РАН* **497**, No 2, 3–6 (2021).
10. Yu. A. Alkhutov, G. A. Chechkin, V. G. Maz’ya, “On the Bojarski–Meyers Estimate of a Solution to the Zaremba Problem”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **245**, No 2, 1197–1211 (2022).
11. В. Г. Мазья, *Пространства С.Л. Соболева*, ЛГУ (1985).
12. В. Г. Мазья, “О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений”, *Вестн. ЛГУ* **13**, 42–55 (1970).

13. А. Г. Чечкина, “О задаче Зарембы для p -эллиптического уравнения”, *Мат. сб.* **214**, No 9, 144–160 (2023).
14. F. W. Gehring, “The L^p —integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping”, *Acta Math. V.* **130**, 265–277 (1973).
15. И. В. Скрыпник, *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, Наука, М. (1990).

Статья поступила в редакцию 25 декабря 2024 г.

М. М. Ямалеев

ИЗОЛИРОВАННОСТЬ СО СТОРОНЫ И ИЗБЕГАНИЕ КОНУСОВ В 2–ВЫЧИСЛИМО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ wtt –СТЕПЕНЯХ

Исследуется свойство изолированности со стороны в структуре 2–вычислимо перечислимых wtt –степеней. Доказано, что каждая собственная 2–вычислимо перечислимая wtt –степень изолирована со стороны некоторой вычислимо перечислимой wtt –степенью. Показано, как это свойство может быть скомбинировано с таким структурным свойством, как избегание конусов.

1. Введение

Основные результаты этой статьи с идеями доказательств были опубликованы в [1]. В настоящей статье приводятся более общие результаты с полными доказательствами. Статья посвящена исследованию структурных свойств вычислимо перечислимых (далее в.п.) и 2–в.п. степеней неразрешимости. В работе рассматриваются wtt –степени и изучается свойство *изолированности со стороны*, которое является вариацией свойства изолированности, хорошо исследованного для 2–в.п. тьюринговых степеней. Изолированные 2–в.п. тьюринговые степени впервые были введены и рассмотрены в препринте Купера [Cooper] и Йи [Yi] университета Лидса в 1995 г., где было доказано существование изолированных 2–в.п. тьюринговых степеней. Напомним, что 2–в.п. тьюринговая степень $\mathbf{d}$ изолирована, если существует в.п. степень $\mathbf{c} < \mathbf{d}$ такая, что строго между $\mathbf{d}$ и $\mathbf{c}$ не найдется никакой в.п. степени. Нетрудно видеть, что это эквивалентно тому, что степень $\mathbf{c}$ является наибольшей в.п. степенью под степенью $\mathbf{d}$ (именно в таком виде определение было сформулировано в препринте Купера и Йи). Заметим, что согласно теореме Сакса о плотности [2] понятие изолированности имеет смысл рассматривать лишь для собственных 2–в.п. степеней (т.е. для 2–в.п. степеней, которые не содержат в.п. множеств).

Изолированные 2–в.п. тьюринговые степени оказались полезными в ряде конструкций [3] и позволили изящно использовать собственность рассматриваемых 2–в.п. степеней. Однако оказалось, что в структуре 2–в.п. тьюринговых степеней неизоллированные собственные 2–в.п. степени также существуют и встречаются так же часто, как и изолированные степени [4]–[6]. Таким образом, свойство изолированности не может охарактеризовать собственные 2–в.п. тьюринговые степени. При этом важность такой характеристики обусловлена необходимостью проинтерпретировать в.п. тьюринговые степени в структуре 2–в.п. тьюринговых степеней на языке частичного порядка, что позволило бы естественным образом решить известную проблему определимости в.п. тьюринговых степеней в частичном порядке 2–в.п. тьюринговых степеней (проблема была сформулирована в ряде работ, например, в [7] и [8]). Поиск характеристических свойств собственных 2–в.п. тьюринговых степеней и является одной из отправных точек данной работы. Следуя программе, сформулированной в [9], исследуем 2–в.п. wtt –степени. В качестве основного

Работа поддержана грантом Российского научного фонда и Кабинета Министров Республики Татарстан (проект № 22-21-20024, <https://rscf.ru/project/22-21-20024/>) и выполнена в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение № 075-02-2023-944).

М. М. Ямалеев: Казанский федеральный университет, Казань, Россия, mars.yamaleev@kpfu.ru.

Перевод с англ.: *J. Math. Sci.* **275**, No. 1, 54–65 (2023).

результата статьи докажем, что свойство изолированности со стороны выполняется для произвольной собственной 2-в.п. wtt -степени, более того, изложенные идеи с небольшими изменениями, вероятно, могут быть применимы и к низким 2-в.п. тьюринговым степеням.

Изолированность со стороны была неявным образом использована в [10, 11]. Позднее это свойство было выделено в работе [12], где определение было дано для тьюринговых степеней. Ниже рассмотрим это понятие и для случая wtt -степеней.

Определение 1.1. 2-в.п. степень $\mathbf{d}$ *изолирована со стороны*, если существует 2-в.п. степень $\mathbf{c}$ такая, что $\mathbf{d}$ и $\mathbf{c}$ несравнимы и для любой в.п. степени $\mathbf{w} < \mathbf{d}$ выполнено $\mathbf{w} < \mathbf{c}$.

Определение изолированности приведем в виде, слегка отличающимся от определения из упомянутого выше препринта Купера и Йи.

Определение 1.2. 2-в.п. степень $\mathbf{d}$ *изолирована*, если существует в.п. степень $\mathbf{c}$ такая, что $\mathbf{c} < \mathbf{d}$ и для любой в.п. степени $\mathbf{w} < \mathbf{d}$ (отличной от $\mathbf{c}$) выполнено $\mathbf{w} < \mathbf{c}$. Степень $\mathbf{c}$ назовем *изолирующей степенью*.

Для полноты картины напомним также понятие псевдо-изолированности, введенное в [13].

Определение 1.3. 2-в.п. степень $\mathbf{d}$ *псевдо-изолирована*, если она не является изолированной и существует 2-в.п. степень $\mathbf{b}$ такая, что $\mathbf{b} < \mathbf{d}$ и для любой в.п. степени $\mathbf{w} < \mathbf{d}$ выполнено $\mathbf{w} < \mathbf{b}$.

Нетрудно видеть, что каждая изолированная 2-в.п. тьюринговая степень изолирована со стороны. В частности, это можно вывести из достаточно известного утверждения [14, гл. VIII, § 4, упражнение 4.7]. Таким образом, изолированность со стороны является более общим свойством, нежели изолированность. Для удобства введем следующее определение.

Определение 1.4. 2-в.п. степень $\mathbf{d}$ *обобщенно изолирована*, если она изолирована со стороны, изолирована, или псевдо-изолирована.

Статья организована следующим образом. В § 2 докажем основной результат работы, который утверждает, что каждая собственная 2-в.п. wtt -степень является обобщенно изолированной. В § 3 докажем вспомогательный результат о плотности и избегании конусов в 2-в.п. wtt -степенях. Наконец, в § 4 покажем как изолированность со стороны может быть легко получена из обобщенной изолированности при помощи теоремы 3.1.

2. Обобщенная изолированность

Этот параграф посвящен доказательству основной теоремы статьи. Под степенью подразумеваем wtt -степень.

Теорема 2.1. Пусть даны в.п. степень $\mathbf{e}$ и собственная 2-в.п. степень $\mathbf{d}$ такие, что $\mathbf{e} \not\leq \mathbf{d}$. Тогда $\mathbf{d}$ обобщенно изолирована посредством некоторой в.п. степени $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{e} \not\leq \mathbf{c}$.

Дальнейшая часть параграфа посвящена доказательству теоремы, которое будем проводить при помощи метода приоритета с бесконечными нарушениями. Пусть D является некоторым 2-в.п. множеством из степени $\mathbf{d}$, также пусть E является некоторым в.п. множеством из $\mathbf{e}$. Для доказательства теоремы достаточно построить в.п. множество C , удовлетворяя следующие требования при $e \in \omega$:

$$\mathcal{R}_e : W_e = \Phi_e^D \Rightarrow W_e = \Gamma_e^C,$$

$$\mathcal{N}_e : D = \Psi_e^C \Rightarrow \exists I_e (D = \Theta_e^{I_e} \wedge (I_e = \Delta_e^D)),$$

$$\mathcal{S}_e : E = \Xi_e^C \Rightarrow E = \Lambda_e^D.$$

Здесь $\{W_e, \Phi_e\}_{e \in \omega}$ является некоторым эффективным перечислением всех пар в.п. множеств и частично вычислимых (ч.в.) wtt -функционалов, также $\{\Psi_e\}_{e \in \omega}$ и $\{\Xi_e\}_{e \in \omega}$ являются эффективными перечислениями всех ч.в. wtt -функционалов. Более того, каждая стратегия $\mathcal{R}_e$ строит свой собственный wtt -функционал Γ_e^C , каждая стратегия $\mathcal{N}_e$ строит свое в.п. множество I_e и wtt -функционалы $\Theta_e^{I_e}$ и Δ_e^D , каждая стратегия $\mathcal{S}_e$ строит свой wtt -функционал Λ_e^D .

Напомним, что wtt -сводимость является тьюринговой сводимостью с эффективно ограниченной use -функцией. Слегка перегружая обозначения, для обозначения wtt -функционалов будем использовать заглавные греческие буквы, которые обычно используются для тьюринговых функционалов. Строчные греческие буквы будем использовать для обозначения эффективного ограничения соответствующих use -функций. Для удобства работаем с ними как с тьюринговыми функционалами, у которых use -функция для каждого x определена раз и навсегда (если вообще определена). Таким образом, для use -функций шаги использовать не будем. Здесь и далее под функционалом подразумеваем wtt -функционал.

Будем использовать устоявшуюся терминологию и обозначения для метода приоритета с конструкцией, использующей дерево стратегий, часть обозначений может быть найдена в [14]. В частности, $\Phi_e^D(x)[s]$ означает, что функционал и множество рассматриваются на шаге s , т.е. $\Phi_e^D(x)[s] = \Phi_{e,s}^{D_s}(x)$. Следуем соглашению, что use -функция каждого функционала возрастает по аргументу; более того, если оракул меняется на шаге s на элемент, ограниченный use -функцией, то функционал также становится неопределенным на шаге s . Иногда будем опускать индексы или шаги, когда они очевидны из контекста. Под $D[\varphi_e(x)]$ подразумеваем все $y \in D$ такие, что $y \leq \varphi_e(x)$. Таким образом, если $\varphi_e(x)$ является use -функцией вычисления $\Phi_e^D(x)$, то $D[\varphi_e(x)]$ является use -блоком. Без ограничения общности будем считать, что $\varphi_e(x)$ является наибольшим числом, которое может изменить вычисление $\Phi_e^D(x)$.

2.1. Стратегии и их взаимодействия.

Стратегия для требования $\mathcal{R}_e$. На каждом шаге s при равенстве $W_e(x)[s] = \Phi_e^D(x)[s]$ (включая равенства для всех $< x$) определяем $\Gamma_e^C(x)[s] = W_e(x)[s]$ с $\gamma_e(x) = s$. Далее, если вычисление $\Phi_e^D(x)$ меняется (из-за некоторого изменения $D[\varphi_e(x)]$) без изменения $W_e(x)$, то ничего не делаем и ожидаем восстановления $W_e(x)[t] = \Phi_e^D(x)[t]$ на некотором шаге $t > s$. Если $W_e(x)$ изменяется одновременно с $\Phi_e^D(x)$ (и при этом нет изменений для $y < x$), то перечисляем $\gamma_e(x)$ в C , поправляем $\Gamma_e^C(x)[t+1] = W_e(x)[t+1]$ и заканчиваем работу с x . Ясно, что если $W_e = \Phi_e^D$, то равенство $\Gamma_e^C(x) = W_e(x)$ будет корректным для всех x . Заметим, что $\gamma_e(x)$ определяется раз и навсегда. Каждая $\mathcal{R}$ -стратегия имеет выходы ∞ и fin .

Стратегия для требования $\mathcal{N}_e$. Если для некоторого z на шаге s имеем равенство $D(z)[s] = \Psi_e^C(z)[s]$ (включая равенства для всех $< z$), то определяем $\Theta_e^{I_e}(z)[s] = D(z)[s]$ с $\theta_e(z) = 2z + 1$, в частности, перечисления $2z$ и $2z + 1$ в I_e будут последовательно кодировать изменения $D(z)$, которое может измениться максимум два раза. Также определяем $\Delta_e^D(2z)[s] = \Delta_e^D(2z+1)[s] = I_e(2z)[s] = I_e(2z+1)[s] = 0$ с use -функцией $\delta_e(2z) = \delta_e(2z+1)$, которая должна будет иметь свежий use -блок $D[\delta_e(2z)]$, когда z перечисляется в D , а также когда z покидает D позднее. Значение $\delta_e(2z)$ будет зависеть от стратегий более высокого приоритета, и вскоре его рассмотрим. Так как D является собственной 2-в.п. степенью, корректное построение $\Theta_e^{I_e}$ и Δ_e^D приведет к противоречию. Таким образом, для некоторого z неравенство $D(z) \neq \Psi_e^C(z)$ возникнет автоматически. Каждая $\mathcal{N}$ -стратегия имеет единственный выход fin .

Стратегия для требования $\mathcal{S}_e$. Если для некоторого u на шаге s имеем равенство $E(u)[s] = \Xi_e^C(u)[s]$ (включая равенства для всех $< u$), то определяем $\Lambda_e^D(u)[s] = E(u)[s]$ с $\lambda_e(u)$, значение которого будет зависеть от стратегий более высокого приоритета аналогично значению $\delta_e(2z)$. Если $E(u)$ изменится, то $D[\lambda_e(u)]$ должно будет иметь свежий use -блок и никогда не вернуться к одному из прежних use -блоков. Ниже увидим, что это может быть достигнуто, если $\lambda_e(u)$ определенным образом опирается на use -функции $\mathcal{R}$ -стратегий более высокого приоритета. Так как $E \not\leq_{wtt} D$, корректность Λ_e^D приведет к противоречию. Таким образом, для некоторого u неравенство $D(u) \neq \Xi_e^C(u)$ будет выполнено автоматически. Каждая $\mathcal{S}$ -стратегия имеет единственный выход fin .

Совместная работа нескольких стратегий. Сначала заметим, что $\mathcal{R}$ -стратегии не должны инициализировать другие стратегии (под своими бесконечными выходами), однако они могут перечислять бесконечно много элементов в C , потенциально нарушая упомянутые стратегии более низкого приоритета. Тем временем $\mathcal{N}$ - и $\mathcal{S}$ -стратегии под бесконечными выходами $\mathcal{R}$ -стратегий стараются запретить перечисление элементов в C . Также $\mathcal{N}$ - и $\mathcal{S}$ -стратегии после каждого своего действия инициализируют стратегии более низкого приоритета. Таким образом, возникает конфликт, когда $\mathcal{N}$ - и $\mathcal{S}$ -стратегии имеют более низкие приоритеты, нежели $\mathcal{R}$ -стратегии.

Для демонстрации преодоления трудностей рассмотрим случай $\rho_0 \subset \rho_1 \subset \eta$, где ρ_0 и ρ_1 являются $\mathcal{R}$ -стратегиями, строящими Γ_0^C и Γ_1^C , соответственно (отметим также, что $\mathcal{R}$ -стратегии не конфликтуют между собой), а η является $\mathcal{N}$ -стратегией. Работа стратегий ρ_0 и ρ_1 не отличается от работы базового модуля $\mathcal{R}$ -стратегии, описанного выше. При этом стратегия η требует доработки следующим образом: для каждого z значение use -функции $\delta(2z)$ должно быть определено по крайней мере как $\max\{\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1) \mid x_i = \max\{y_i \mid \gamma_i(y_i) \leq \psi(z)\}, i = 0, 1\}$. Интуитивно это такое максимальное значение, относящееся к элементам x , что их перечисление в W_i вынуждает перечислиться $\gamma_i(x) < \psi(z)$ в C (что в свою очередь может привести к одновременному изменению $\Psi^C(z)$ и $D(z)$). Таким образом, перечисление x в W_i вынуждает $D[\varphi_i(x)]$ измениться навсегда. Поэтому, если перечисление $\gamma_i(x)$ в C портит вычисление $\Psi^C(z)$, имеем совершенно новый use -блок $D[\delta(2z)]$, так как $\delta(2z) \geq \varphi_i(x)$. Это означает, что $2z$ и $2z + 1$ могут быть при необходимости перечислены в I , и при этом функционал Δ^D корректно вычислит I .

Аналогичным образом преодолеваются трудности для случая, когда $\rho_0 \subset \rho_1 \subset \sigma$, где σ является $\mathcal{S}$ -стратегией. Перейдем к формальной конструкции, которая использует дерево стратегий и довольно простую версию метода приоритета с бесконечными нарушениями.

2.2. Выходы и дерево стратегий. Сначала определим длину соглашения для разных стратегий следующим образом.

- Если ρ является $\mathcal{R}$ -стратегией, то $l(\rho, s) = \max\{x_0 \mid \forall x \leq x_0 \ W_\rho(x)[s] = \Phi_\rho^D(x)[s]\}$.
- Если η является $\mathcal{N}$ -стратегией, то $l(\eta, s) = \max\{z_0 \mid \forall z \leq z_0 \ D(z)[s] = \Psi_\eta^C(z)[s]\}$.
- Если σ является $\mathcal{S}$ -стратегией, то $l(\sigma, s) = \max\{u_0 \mid \forall u \leq u_0 \ E(u)[s] = \Xi_\sigma^C(u)[s]\}$.

Шаг s является ρ -расширяющим, если ρ посещается на шаге s и $l(\rho, s) > s_\rho^-[s - 1]$, где s_ρ^- является предыдущим ρ -расширяющим шагом. На таком шаге s этот параметр автоматически обновляется как $s_\rho^-[s] = s$. Для удобства считаем, что $s = 0$ также является ρ -расширяющим шагом. Аналогичные определения используем для η - и σ -расширяющих шагов. Выходы стратегий следующие.

- Каждая $\mathcal{R}$ -стратегия ρ имеет выходы $\infty < \text{fin}$, где ∞ означает бесконечное количество ρ -расширяющих шагов и успешное построение Γ_ρ^C .
- Каждая $\mathcal{N}$ -стратегия η имеет единственный выход fin , на каждом η -расширяющем шаге стратегия η инициализирует все стратегии с меньшими приоритетами.
- Каждая $\mathcal{S}$ -стратегия σ имеет единственный выход fin , на каждом η -расширяющем шаге стратегия η инициализирует все стратегии с меньшими приоритетами.

Дерево стратегий определяем как поддерево $\{\infty, \text{fin}\}^{<\omega}$. На уровне $3e$ вершины соответствуют различным версиям стратегии $\mathcal{R}_e$, на уровне $3e + 1$ вершины соответствуют различным версиям стратегии $\mathcal{N}_e$, на уровне $3e + 2$ вершины соответствуют различным версиям стратегии $\mathcal{S}_e$. Для удобства используем следующее обозначение: если $\mathcal{R}_e$ соответствует ρ , то Φ_ρ^D означает Φ_e^D . Аналогичные обозначения используем для других стратегий и функционалов. Инициализируя некоторую стратегию, все ее функционалы и параметры делаем неопределенными или нулевыми, строящиеся множества полагаем пустыми и т.д. В частности,

- ◊ Инициализируя $\mathcal{R}$ -стратегию ρ , делаем неопределенным функционал Γ_ρ^C и полагаем s_ρ^- равным 0.
- ◊ Инициализируя $\mathcal{N}$ -стратегию η , полагаем пустым I_η , делаем неопределенными функционалы $\Theta_\eta^{I_\eta}$ и Δ_η^D , полагаем s_η^- равным 0.
- ◊ Инициализируя $\mathcal{S}$ -стратегию σ , делаем неопределенным функционал Λ_σ^D и полагаем s_σ^- равным 0.

Для множества C на каждом шаге s рассматриваем также вспомогательное конечное множество C^s . Это множество будет использовано для отслеживания $\mathcal{R}$ -стратегий, желающих перечислить элементы в C . Таким образом, перечисление элементов в C будет происходить не сразу, а после анализа пожеланий $\mathcal{R}$ -стратегий, возникших в ходе построения аппроксимации истинного

пути на шаге s . Посредством $C^{s,t}$ обозначаем аппроксимацию C^s на подшаге $t \leq s$. Также используем $C_s = C[s]$ как аппроксимацию C на шаге s . Это позволит различать такие вычисления, как $\Gamma_{\rho^s}^{C^s}(x)[s+1] = \Gamma_{\rho,s+1}^{C^s}(x)$ и $\Gamma_{\rho}^C(x)[s+1] = \Gamma_{\rho,s+1}^{C^{s+1}}(x)$.

2.3. Конструкция.

Шаг $s = 0$. Определяем $C[0] = \emptyset$ и инициализируем все стратегии.

Шаг $s + 1$. Имеем $C[s]$, необходимо определить $C[s+1]$. Строим вычислимую аппроксимацию TP_{s+1} истинного пути TP . Строим как предел $TP_{s+1,t+1}$, используя подшаги $t+1 < s+1$. Когда $TP_{s+1,s+1}$ найдено, определяем $TP_{s+1} = TP_{s+1,s+1}$, инициализируем все стратегии $\alpha \not\leq TP_{s+1}$ и переходим к следующему шагу. В некоторых случаях можем сразу определить TP_{s+1} и перейти к следующему шагу. Множество $C[s+1]$ определяется как $C[s+1] = C[s] \cup C^{s+1}$, где $C^{s+1} = \bigcup_{t \leq |TP_{s+1}|} C^{s+1,t}$. Отметим также, что все объекты сохраняют свои значения, если не были явно переопределены на текущем шаге.

Изначально имеем $TP_{s+1,0} = \lambda$, т.е. корень дерева. На подшаге $t+1 < s+1$ рассматриваем следующие три случая.

◊ $T_{s+1,t} = \rho$ является $\mathcal{R}$ -стратегией. Рассмотрим следующие подслучаи и выберем первый, условия которого выполнены:

($\rho 1$) Если шаг $s+1$ не является ρ -расширяющим, то определяем $TP_{s+1,t+1} = \rho \frown \text{fin}$ и переходим к следующему подшагу.

($\rho 2$) Иначе, определяем функционал Γ_{ρ}^C следующим образом. Для всех $x \leq l(\rho, s+1)$ таких, что $\gamma_{\rho}(x)$ не определено, определяем $\Gamma_{\rho}^{C^s}(x)[s+1] = W_{\rho}(x)[s+1]$ с $\gamma_{\rho}(x) = s+1$. Для всех $x \leq l(\rho, s+1)$ таких, что $\gamma_{\rho}(x)$ определено, но $\Gamma_{\rho}^C(x)[s]$ не определено, переопределяем $\Gamma_{\rho}^{C^s}(x)[s+1] = W_{\rho}(x)[s+1]$. Для всех $x \leq l(\rho, s+1)$ таких, что $W_{\rho}(x)[s+1] \neq \Gamma_{\rho}^C(x)[s]$, но $\gamma_{\rho}(x) \notin C[s]$, определяем $C^{s+1,t+1} = C^{s+1,t} \cup \{\gamma_{\rho}(x)\}$ (таким образом $\Gamma_{\rho}^C(x)[s+1]$ становится неопределенным). Далее определяем $TP_{s+1,t+1} = \rho \frown \infty$ и переходим к следующему подшагу.

◊ $T_{s+1,t} = \eta$ является $\mathcal{N}$ -стратегией. Рассмотрим следующие подслучаи и выберем первый, условия которого выполнены:

($\eta 1$) Если шаг $s+1$ не является η -расширяющим, то определяем $TP_{s+1,t+1} = \eta \frown \text{fin}$ и переходим к следующему подшагу.

($\eta 2$) Иначе, определяем функционалы следующим образом. Для всех $z \leq l(\eta, s+1)$ таких, что $\theta_{\eta}(z)$ не определено (в частности, $\delta_{\eta}(2z)$ и $\delta_{\eta}(2z+1)$ также не определены), определяем $\Theta_{\eta}^{I_{\eta}}(z)[s+1] = D(z)[s+1]$ с $\theta_{\eta}(z) = 2z+1$, определяем $\Delta_{\eta}^D(2z)[s+1] = I_{\eta}(2z)[s+1]$ и $\Delta_{\eta}^D(2z+1)[s+1] = I_{\eta}(2z+1)[s+1]$ с $\delta_{\eta}(2z) = \delta_{\eta}(2z+1) = \max\{\varphi_{\rho}(x) \mid \text{для всех } \rho \frown \infty \subset \eta \text{ и } x \leq l(\rho, s+1)\}$. Для всех $z \leq l(\eta, s+1)$ таких, что $\Theta_{\eta}^{I_{\eta}}(z)[s] \not\downarrow D(z)[s+1]$ и $2z \notin I_{\eta}[s]$, определяем $I_{\eta}[s+1] = I_{\eta}[s] \cup \{2z\}$ и переопределяем $\Theta_{\eta}^{I_{\eta}}(z)[s+1] = D(z)[s+1]$. Для всех $z \leq l(\eta, s+1)$ таких, что $\Theta_{\eta}^{I_{\eta}}(z)[s] \not\downarrow D(z)[s+1]$ и $2z \in I_{\eta}[s]$, но $2z+1 \notin I_{\eta}[s]$, определяем $I_{\eta}[s+1] = I_{\eta}[s] \cup \{2z+1\}$ и переопределяем $\Theta_{\eta}^{I_{\eta}}(z)[s+1] = D(z)[s+1]$. Для всех $z \leq l(\eta, s+1)$ таких, что $\theta_{\eta}(z)$ определено (в частности, $\delta_{\eta}(2z)$ и $\delta_{\eta}(2z+1)$ также определены), но $\Delta_{\eta}^D(2z)[s+1]$ не определено, переопределяем $\Delta_{\eta}^D(2z)[s+1] = I_{\eta}(2z)[s+1]$ и $\Delta_{\eta}^D(2z+1)[s+1] = I_{\eta}(2z+1)[s+1]$. Далее определяем $TP_{s+1} = \eta$, инициализируем все стратегии $\alpha \not\leq \eta$ и переходим к следующему шагу.

◊ $T_{s+1,t} = \sigma$ является $\mathcal{S}$ -стратегией. Рассмотрим следующие подслучаи и выберем первый, условия которого выполнены:

($\sigma 1$) Если шаг $s+1$ не является σ -расширяющим, то определяем $TP_{s+1,t+1} = \sigma \frown \text{fin}$ и переходим к следующему подшагу.

($\sigma 2$) Иначе, определяем функционал Λ_{σ}^D следующим образом. Для всех $u \leq l(\sigma, s+1)$ таких, что $\lambda_{\sigma}(u)$ не определено, определяем $\Lambda_{\sigma}^D(u)[s+1] = E(u)[s+1]$ с $\lambda_{\sigma}(u) = \max\{\varphi_{\rho}(x) \mid \text{для всех } \rho \frown \infty \subset \sigma \text{ и } x \leq l(\rho, s+1)\}$. Для всех $u \leq l(\sigma, s+1)$ таких, что $\lambda_{\sigma}(u)$ определено, но

$\Lambda_\sigma^D(u)[s+1]$ не определено, переопределяем $\Lambda_\sigma^D(u)[s+1] = E(u)[s+1]$. Далее определяем $TP_{s+1} = \sigma$, инициализируем все стратегии $\alpha \not\leq \sigma$ и переходим к следующему шагу.

2.4. Верификация. Определяем истинный путь как $TP = \liminf_s TP_s$. В лемме 2.4 покажем существование истинного пути. Далее докажем, что каждое требование удовлетворено. Рассуждения будем проводить индуктивно при помощи лемм 2.1–2.3. С одной стороны леммы 2.1–2.3 необходимы для леммы 2.4, а с другой стороны они показывают, что любая вершина на истинном пути удовлетворяет соответствующее требование (при условии, что сама с некоторого момента не инициализируется).

Лемма 2.1. Пусть ρ соответствует $\mathcal{R}_e$. Если ρ не инициализируется после шага s_0 и посещается бесконечно часто, то $\mathcal{R}_e$ удовлетворено. Более того, после некоторого шага $s_1 > s_0$ стратегия ρ не инициализирует $\rho \hat{\cap} \mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ является истинным выходом ρ .

Доказательство. Зафиксируем шаг s_0 и заметим, что $\mathcal{O} = \infty$ тогда и только тогда, когда ρ имеет бесконечно много ρ -расширяющих шагов. Если ρ имеет конечное число ρ -расширяющих шагов, то стратегия удовлетворяется тривиальным образом и после некоторого шага $s_1 > s_0$ не инициализирует $\rho \hat{\cap} \text{fin}$. Если ρ имеет бесконечно много ρ -расширяющих шагов, то она никогда не инициализирует $\rho \hat{\cap} \infty$. В этом случае $W_\rho = \Phi_\rho^D$, покажем также, что $\Gamma_\rho^C = W_\rho$ (далее все шаги подразумеваем ρ -расширяющими). Пусть x произвольно, предположим, что на шаге $s_1 > s_0$ имеем впервые $x \leq l(\rho, s_1)$. Тогда $\Gamma_\rho^{C_{s_1-1}}(x)[s_1] = W_\rho(x)[s_1]$ с $\gamma_\rho(x) = s_1$. Если позднее $W_\rho(x)$ не поменяется, то $\Gamma_\rho^C(x) = \Gamma_\rho^{C_{s_1-1}}(x)[s_1] = W_\rho(x)[s_1] = W_\rho(x)$ (заметим, что $\Gamma_\rho^C(x)$ может быть переопределено лишь конечное число раз из-за перечисления $\gamma_{\rho'}(x')$ для различных x' и ρ' , однако это не сказывается на вычислении $\Gamma_\rho^C(x)$). С другой стороны, если x перечислится в W_ρ после шага s_1 , то на некотором шаге $s_2 > s_1$ согласно случаю ($\rho 2$) перечисляем $\gamma_\rho(x)$ в C . Таким образом, $\Gamma_\rho^C(x) = \Gamma_\rho^{C_{s_2}}(x)[s_2] = W_\rho(x)[s_2] = W_\rho(x)$, где $s_2 > s_1$ является следующим ρ -расширяющим шагом. $\square$

Лемма 2.2. Пусть η соответствует $\mathcal{N}_e$. Если η не инициализируется после шага s_0 и посещается бесконечно часто, то $\mathcal{N}_e$ удовлетворено. Более того, после некоторого шага $s_1 > s_0$ стратегия η не инициализирует $\eta \hat{\cap} \text{fin}$.

Доказательство. Зафиксируем шаг s_0 и предположим, что на бесконечном числе шагов после s_0 имеем случай ($\eta 2$). Тогда докажем, что корректно строим в.п. множество I_η и функционалы $\Theta_\eta^{I_\eta}$ и Δ_η^D . Так как это приводит к противоречию с собственностью степени множества D , стратегия η имеет лишь конечное число η -расширяющих шагов и не инициализирует $\eta \hat{\cap} \text{fin}$ после некоторого шага $s_1 > s_0$.

Перейдем к функционалам $\Theta_\eta^{I_\eta}$ и Δ_η^D . Фиксируем некоторый z и ждем первого η -расширяющего шага $s_2 > s_0$ такого, что $z \leq l(\eta, s_2)$. Тогда согласно случаю ($\eta 2$) определяем $\Theta_\eta^{I_\eta}(z)[s_2] = D(z)[s_2]$ с $\theta_\eta(z) = 2z + 1$, определяем $\Delta_\eta^D(2z)[s_2] = I_\eta(2z)[s_2]$ и $\Delta_\eta^D(2z+1)[s_2] = I_\eta(2z+1)[s_2]$ с $\delta_\eta(2z) = \delta_\eta(2z+1) = \max\{\varphi_\rho(x) \mid \text{для всех } \rho \hat{\cap} \infty \subset \eta \text{ и } x \leq l(\rho, s_2)\}$. Теперь предположим, что $D(z)$ меняется после шага s_2 . Пусть $s_3 > s_2$ является следующим η -расширяющим шагом. Это означает, что вычисление $\Psi_\eta^C(z)$ также поменялось. Это может произойти, только тогда, когда $C[\psi_\eta(z)[s_2] \neq C[\psi_\eta(z)[s_3]$, т.е. если некоторый $y < \psi_\eta(z)$ перечислился в C после шага s_2 . Таким элементом может быть только элемент вида $\gamma_\rho(x) = y$, где $\rho \hat{\cap} \infty \subset \eta$. Так как s_2 является и ρ -расширяющим шагом, имеем $x \leq l(\rho, s_2)$ (иначе было бы $\gamma_\rho(x) > s_2 > \psi_\eta(z)$). Таким образом, x должен перечислиться в W_ρ после шага s_2 . Так как $W_\rho(x)[s_3] = \Phi_\rho^D(x)[s_3]$, имеем $D[\varphi_\rho(x)[s_3] \neq D[\varphi_\rho(x)[s_2]$, и это выполнено на любом ρ -расширяющем шаге после s_3 . Подытоживая сказанное выше, согласно случаю ($\eta 2$) перечисляем $2z$ в I_η и поправляем функционалы. Если $D(z)$ и $\Psi_\eta^C(z)$ изменятся опять позднее, то причиной может быть другой x' , который перечислился в $W_{\rho'}$, но это даст свежий use -блок для $2z$ и $2z+1$. Таким образом, $2z+1$ может быть перечислен в I_η , и функционал Δ_η^D корректно вычисляет $I_\eta(2z)$ и $I_\eta(2z+1)$. После этого может быть лишь конечное число переопределений $\Delta_\eta^D(2z)$ и $\Delta_\eta^D(2z+1)$. Это означает, что Δ_η^D корректно определено, а $\Theta_\eta^{I_\eta}$ изменяется максимум дважды для каждого z . $\square$

Лемма 2.3. Пусть σ соответствует S_e . Если σ не инициализируется после шага s_0 и посещается бесконечно часто, то S_e удовлетворено. Более того, после некоторого шага $s_1 > s_0$ стратегия σ не инициализирует $\sigma^\wedge \text{fin}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 2.2. Зафиксируем шаг s_0 и предположим, что на бесконечном числе шагов после s_0 имеем случай $(\sigma 2)$. Тогда доказываем, что корректно строим функционал $\Lambda_\sigma^D = E$ и получаем противоречие. Следовательно, стратегия σ имеет лишь конечное число σ -расширяющих шагов и не инициализирует $\sigma^\wedge \text{fin}$ после некоторого шага $s_1 > s_0$.

Перейдем к Λ_σ^D . Фиксируем некоторый u и ждем первого σ -расширяющего шага $s_2 > s_0$ такого, что $u \leq l(\sigma, s_2)$. Тогда согласно случаю $(\sigma 2)$ определяем $\Lambda_\sigma^D(u)[s_2] = E(u)[s_2]$. Если $E(u)$ изменяется после шага s_2 , то пусть $s_3 > s_2$ является следующим σ -расширяющим шагом. Это означает, что вычисление $\Xi_\sigma^C(u)$ также изменилось. Это могло произойти, только тогда, когда некоторый $y = \gamma_\rho(x) < \xi_\sigma(u)$, где $\rho^\wedge \infty \subset \sigma$, был перечислен в C после шага s_2 . Таким образом, x должен был перечислиться в W_ρ после шага s_2 . Так как $W_\rho(x)[s_3] = \Phi_\rho^D(x)[s_3]$, имеем $D[\varphi_\rho(x)[s_3] \neq D[\varphi_\rho(x)[s_2]]$, и это выполнено на любом ρ -расширяющем шаге после s_3 . Тогда при необходимости $\Lambda^D(u) = E(u)$ всегда может быть корректно поправлено. $\square$

Лемма 2.4. Истинный путь $TP = \liminf_s TP_s$ существует.

Доказательство. Так как дерево конечно ветвящееся, для каждого n существует $\liminf_s TP_s(n)$. Поэтому достаточно доказать, что для каждого n существует $\liminf_s TP_s \upharpoonright n$. В частности, это означает, что самая левая бесконечно посещаемая ветвь не может быть конечной.

Рассуждаем индукцией по n , доказывая следующий переход. Если $TP \upharpoonright n$ существует и не инициализируется после некоторого шага, то же выполняется для $TP \upharpoonright (n+1)$. База индукции для случая $n = 0$ и корневой вершины λ очевидна. Таким образом, предположим, что $TP \upharpoonright n = \liminf_s TP_s \upharpoonright n$ существует, но тогда эта ветвь посещается бесконечно часто. Зафиксируем шаг s_0 такой, что $TP \upharpoonright n$ не инициализируется после шага s_0 .

Рассмотрим следующие случаи.

Если $TP \upharpoonright n = \rho$ является $\mathcal{R}$ -стратегией, то $TP \upharpoonright (n+1)$ существует, так как на каждом шаге стратегия ρ имеет некоторый выход. Если истинный выход $\mathcal{O} = \infty$, то $\rho^\wedge \mathcal{O}$ не инициализируется. Если истинный выход $\mathcal{O} = \text{fin}$, то после некоторого шага $s_1 > s_0$ выход ∞ не посещается. Тогда $\rho^\wedge \mathcal{O}$ также не инициализируется.

Если $TP \upharpoonright n = \eta$ является $\mathcal{N}$ -стратегией, то η посещается бесконечно часто и не инициализируется после шага s_0 . По лемме 2.2 стратегия η не инициализирует $\eta^\wedge \text{fin}$ после некоторого шага $s_1 > s_0$, в частности, с тех пор она имеет случай $(\eta 1)$ и выход fin . Тогда $TP \upharpoonright (n+1)$ существует и не инициализируется после шага s_1 .

Если $TP \upharpoonright n = \sigma$ является $\mathcal{S}$ -стратегией, то проводим рассуждения, аналогичные случаю $\mathcal{N}$ -стратегии. $\square$

Ясно, что каждая вершина на TP посещается бесконечно часто. Чтобы закончить верификацию, фиксируем истинный путь по лемме 2.4. Для каждого требования имеется стратегия, отвечающая ей и расположенная на TP . По определению истинного пути TP фиксируем шаг s_0 такой, что эта стратегия не инициализируется после s_0 . Осталось применить леммы 2.1–2.3 в зависимости от типа стратегии.

3. Вспомогательная структурная теорема

В этом параграфе рассмотрим более простой аналог утверждения [14, гл. VIII, § 4, упражнение 4.7], которое необходимо в некоторых случаях для установления плотности и избегания конусов в тьюринговых степенях. Несмотря на то, что это утверждение вполне ожидаемо для wtt -степеней, оно не может быть автоматически перенесено на них, поэтому приведем доказательство ниже. Напомним, что далее под степенью подразумеваем wtt -степень.

Теорема 3.1. Пусть даны в.п. степень $\mathbf{a}$ и 2-в.п. степени $\mathbf{d}$ и $\mathbf{e}$ такие, что $\mathbf{d} \not\leq \mathbf{a}$, $\mathbf{e} \not\leq \mathbf{a}$ и $\mathbf{d}$ является неполной. Тогда существует в.п. степень $\mathbf{c}$ такая, что $\mathbf{a} \leq \mathbf{c}$, $\mathbf{e} \not\leq \mathbf{c}$ и $\mathbf{c}$ несравнима с $\mathbf{d}$.

Дальнейшая часть параграфа посвящена доказательству теоремы, которое будем проводить при помощи приоритетных рассуждений. Пусть A является некоторой в.п. степенью из $\mathbf{a}$, E является некоторой 2-в.п. степенью из $\mathbf{e}$, и D является некоторой 2-в.п. степенью из $\mathbf{d}$. Для доказательства теоремы достаточно построить в.п. множество C , удовлетворяя следующие требования при $e \in \omega$. Искомая степень $\mathbf{c}$ является степенью $A \oplus C$.

$$\mathcal{R}_e : D = \Phi_e^{A,C} \Rightarrow D = \Gamma_e^A.$$

$$\mathcal{N}_e : E = \Psi_e^{A,C} \Rightarrow E = \Delta_e^A.$$

$$\mathcal{S}_e : C = \Xi_e^D \Rightarrow K = \Lambda_e^D.$$

Здесь $\{\Phi_e\}_{e \in \omega}$, $\{\Psi_e\}_{e \in \omega}$ и $\{\Xi_e\}_{e \in \omega}$ являются эффективными перечислениями всех ч.в. wtt -функционалов. Более того, каждая стратегия $\mathcal{R}_e$ строит свой wtt -функционал Γ_e^A , каждая стратегия $\mathcal{N}_e$ строит свой wtt -функционал Δ_e^A , и каждая стратегия $\mathcal{S}_e$ строит свой wtt -функционал Λ_e^D . Обозначения и соглашения такие же, как в теореме 2.1.

3.1. Стратегии и их взаимодействия.

Стратегия для требования $\mathcal{R}_e$. Для каждого x ждем $\mathcal{R}_e$ -расширяющего шага s такого, что $x \leq l(\mathcal{R}_e, s)$, затем определяем $\Gamma_e^A(x)[s] = D(x)[s]$ с $\gamma_e(x) = \varphi_e(x)$ и инициализируем все стратегии с более низкими приоритетами. Таким образом, $D(x)$ может поменяться позднее только в том случае, если поменяется $A \upharpoonright \varphi_e(x)$. Если $\mathcal{R}_e$ имеет бесконечно много $\mathcal{R}_e$ -расширяющих шагов, то Γ_e^A корректно определено и верно вычисляет D , что приводит к противоречию. Таким образом, $\mathcal{R}_e$ имеет конечное число расширяющих шагов и автоматически имеет неравенство в некоторой точке, а значит удовлетворено.

Стратегия для требования $\mathcal{N}_e$. Стратегия аналогична $\mathcal{R}$ -стратегии с функционалами Ψ и Δ вместо Φ и Γ соответственно.

Стратегия для требования $\mathcal{S}_e$. Стратегия $\mathcal{S}_e$ использует циклы. В каждом цикле k выбираем свидетеля x_k и ожидаем шага s такого, что $C(x_k)[s] = \Xi_e^D(x_k)[s]$, затем определяем $\Lambda_e^D(k)[s] = K(k)[s]$ с $\lambda_e(k) = \xi_e(x_k)$. Если позднее k перечислится в K , то перечисляем x_k в C и вынуждаем D измениться навсегда на элементе, меньшем $\xi(x_k) = \lambda(k)$. Таким образом, если стратегия открывает бесконечно много циклов, то Λ_e^D корректно определено и верно вычисляет K , что противоречит условию теоремы. Таким образом, $\mathcal{S}_e$ имеет конечное число открытых циклов и автоматически имеет неравенство в некоторой точке, а значит удовлетворено.

Из работы базовых модулей стратегий нетрудно видеть, что оставшая часть доказательства проводится при помощи стандартного метода приоритета с конечными нарушениями.

3.2. Предварительные сведения. Упорядочим требования следующим образом: $\mathcal{R}_0 < \mathcal{N}_0 < \mathcal{S}_0 < \mathcal{R}_1 \dots$. Так, $\mathcal{R}_0$ имеет наиболее высокий приоритет. Длины соглашений определим следующим образом:

- Для $\mathcal{R}$ -стратегии определяем $l(\mathcal{R}_e, s) = \max\{x_0 \mid \forall x \leq x_0 \ D(x)[s] = \Phi_e^{A,C}(x)[s]\}$.
- Для $\mathcal{N}$ -стратегии определяем $l(\mathcal{N}_e, s) = \max\{z_0 \mid \forall z \leq z_0 \ E(z)[s] = \Psi_e^{A,C}(z)[s]\}$.

Расширяющие шаги определяем следующим образом. Шаг s является $\mathcal{R}_e$ -расширяющим, если $l(\mathcal{R}_e, s) > s_{\mathcal{R}_e}^-[s-1]$, где $s_{\mathcal{R}_e}^-$ является предыдущим $\mathcal{R}_e$ -расширяющим шагом. Также на таком шаге s этот параметр автоматически обновляется как $s_{\mathcal{R}_e}^-[s] = s$. Для удобства считаем, что $s = 0$ является $\mathcal{R}_e$ -расширяющим шагом. Аналогичного определения придерживаемся и для $\mathcal{N}_e$ -расширяющих шагов.

Скажем, что $\mathcal{R}_e$ *требует внимания на шаге s* , если шаг s является $\mathcal{R}_e$ -расширяющим.

Скажем, что $\mathcal{N}_e$ *требует внимания на шаге s* , если шаг s является $\mathcal{N}_e$ -расширяющим.

Скажем, что $\mathcal{S}_e$ *требует внимания на шаге s* , если выполнено одно из следующих условий (которые проверяются в указанном порядке).

($\sigma 1$) Стратегия $\mathcal{S}_e$ не имеет ни одного открытого цикла.

- (σ2) Существует открытый цикл k без свидетеля x_k .
- (σ3) Существует открытый цикл k такой, что $C(x_k)[s-1] = \Xi_e^D(x_k)[s]$, но $\lambda_e(k)$ не определено.
- (σ4) Существует открытый цикл k такой, что $C(x_k)[s-1] = \Xi_e^D(x_k)[s]$, но $\Lambda_e^D(k)[s-1]$ не определено.
- (σ5) Существует открытый цикл k такой, что $C(x_k)[s-1] = \Xi_e^D(x_k)[s]$, но $\Lambda_e^D(k)[s-1] \neq K(k)[s]$.
- (σ6) Для всех открытых циклов выполнено $C(x_k)[s-1] = \Xi_e^D(x_k)[s]$ (заметим, что так как это последний случай, вычисление $\Lambda_e^D(k)$ будет определено).

Отметим, что случай (σ3) означает, что $\Lambda_e^D(k)$ нужно определить впервые, случай (σ4) означает, что нужно переопределить $\Lambda_e^D(k)$ с новым *use*-блоком, а случай (σ5) означает, что нужно сделать $\Lambda_e^D(k)$ неопределенным, чтобы позднее корректно определить его.

3.3. Конструкция.

3.3.1. Шаг $s = 0$. Определяем $C[0] = \emptyset$ и инициализируем все стратегии.

3.3.2. Шаг $s + 1$. Находим стратегию с наибольшим приоритетом, которая требует внимания на шаге $s + 1$. Инициализируем все стратегии с меньшими приоритетами.

Если такой стратегией оказалась $\mathcal{R}_e$, то для всех $x \leq l(\mathcal{R}_e, s + 1)$ таких, что $\gamma_e(x)$ не определено, определяем $\Gamma_e^A(x)[s + 1] = D_e(x)[s + 1]$ с $\gamma_e(x) = \varphi_e(x)$. Для всех $x \leq l(\mathcal{R}_e, s + 1)$ таких, что $\gamma_e(x)$ определено, но $\Gamma_e^A(x)[s]$ не определено, переопределяем $\Gamma_e^A(x)[s + 1] = D(x)[s + 1]$.

Если такой стратегией оказалась $\mathcal{N}_e$, то для всех $z \leq l(\mathcal{N}_e, s + 1)$ таких, что $\delta_e(z)$ не определено, определяем $\Delta_e^A(z)[s + 1] = D_e(z)[s + 1]$ с $\delta_e(z) = \psi_e(z)$. Для всех $z \leq l(\mathcal{N}_e, s + 1)$ таких, что $\delta_e(z)$ определено, но $\Delta_e^A(z)[s]$ не определено, переопределяем $\Delta_e^A(z)[s + 1] = D(z)[s + 1]$.

Если такой стратегией оказалась $\mathcal{S}_e$, тогда находим условие, из-за которого $\mathcal{S}_e$ требовала внимания, и выполняем соответствующие действия.

- (σ1) Открываем цикл 0.
- (σ2) Для наименьшего такого цикла k назначаем большого свидетеля x_k .
- (σ3) Для наименьшего такого цикла k определяем $\Lambda_e^D(k)[s + 1] = K(k)[s + 1]$ с $\lambda_e(k) = \xi_e(x_k)$.
- (σ4) Для наименьшего такого цикла k переопределяем $\Lambda_e^D(k)[s + 1] = K(k)[s + 1]$.
- (σ5) Для наименьшего такого цикла k определяем $C[s + 1] = C[s] \cup \{x_k\}$.
- (σ6) Пусть k является наибольшим открытым циклом стратегии. Открываем цикл $k + 1$.

3.4. Верификация. Используем индукционные рассуждения. База индукции является более простой версией индукционного шага, поэтому опустим ее. Рассмотрим произвольную стратегию и предположим, что все стратегии с более высокими приоритетами выполнены и требуют внимания конечное число раз. Зафиксируем шаг s_0 , после которого эта стратегия больше не инициализируется.

Если такой стратегией является $\mathcal{R}_e$, то предположим, что она имеет бесконечно много $\mathcal{R}_e$ -расширяющих шагов. Тогда для каждого x существует первый шаг $s_1 > s_0$ такой, что $\mathcal{R}_e$ требует внимания на шаге s_1 и $x \leq l(\mathcal{R}_e, s_1)$. Тогда $\Gamma_e^A(x) = D(x)$. Действительно, $C[\varphi_e(x)]$ не изменится после s_1 (иначе $\mathcal{R}_e$ была бы инициализирована, так как все $\mathcal{S}$ -стратегии с более низкими приоритетами имели бы свидетелей $> \varphi_e(x)$). Поэтому, если $D(x)$ изменится после s_1 , то либо $D(x)$ меняется обратно до шага $s_2 > s_1$, где $\mathcal{R}_e$ требует внимания на шаге s_2 , либо $A[\varphi_e(x)] = A[\gamma_e(x)]$ также меняется. Но это означает, что на шаге s_2 имеем $\Gamma_e^A(x)[s_2] = D(x)[s_2]$. Если на шаге $s_3 > s_2$ имеем $D(x) = D(x)[s_3]$, то $D(x) = \Gamma_e^A(x)[s_3] = \Gamma_e^A(x)$ (A является в.п. и $A[\gamma_e(x)]$ может измениться лишь конечное число раз). Тогда Γ_e^A верно вычисляет D , что приводит к противоречию. Это означает, что $\mathcal{R}_e$ имеет конечное число расширяющих шагов (в частности, оно удовлетворено) и стратегия требует внимания лишь конечное число раз.

Если такой стратегией является $\mathcal{N}_e$, то доказательство повторяет рассуждения выше, но с E вместо D , Ψ_e вместо Φ_e , и Δ_e^A вместо Γ_e^A .

Если такой стратегией является $\mathcal{S}_e$, то предположим, что она открывает бесконечное число циклов. Нетрудно видеть, что для каждого k выполнено $\Lambda_e^D(k) = K(k)$. Действительно, предположим, что на шаге $s_1 > s_0$ стратегия $\mathcal{S}_e$ требует внимания и определяет $\lambda_e(k)$. Если позднее $K(k)$ не изменится, то очевидно, что $\Lambda_e^D(k) = K(k)$. Тогда предположим, что k перечисляется в K на шаге $s_2 > s_1$. Тогда либо после нескольких случаев ($\sigma 4$) определяем $\Lambda_e^D(k) = \Lambda_e^D(k)[s_3] = 1$, где $D[\xi_e(x_k)[s_3] = D[\xi_e(x_k)]$ и $s_3 > s_2$, либо происходит случай ($\sigma 5$). При случае ($\sigma 5$) перечисляем x_k в C . Это означает, что если открыто бесконечное число циклов, то на некотором шаге $s_4 > s_2$ имеем $D[\xi_e(x_k)[s_4] = D[\xi_e(x_k)]$ и $\Lambda_e^D(k) = \Lambda_e^D(k)[s_4] = 1$. Тогда случай ($\sigma 6$) не может происходить бесконечно часто, так как иначе получаем противоречие с неполнотой D . Однако случаи ($\sigma 1$)–($\sigma 3$) и ($\sigma 5$) могут произойти максимум один раз для каждого цикла, а случай ($\sigma 4$) может произойти конечное число раз для каждого k . Тогда $\mathcal{S}_e$ требует внимания лишь конечное число раз. Отметим, что если $\mathcal{S}_e$ не требует внимания на шаге s , то $C(x_k)[s] \neq \Xi_e^D(x_k)[s]$ для некоторого открытого цикла k . Теперь предположим, что $s_5 > s_2$ является шагом, после которого $\mathcal{S}_e$ не потребует внимания. Тогда для некоторого цикла k_0 и шага $s_6 > s_5$ имеем $D[\xi_e(x_{k_0})[s_6] = D[\xi_e(x_{k_0})]$ и $C(x_{k_0}) = C(x_{k_0})[s_6] \neq \Xi_e^D(x_{k_0})[s_6] = \Xi_e^D(x_{k_0})$. Это завершает верификацию и доказательство теоремы.

4. Изолированность со стороны

В качестве следствия предыдущих параграфов получим искомое свойство изолированности со стороны. В частности, для каждой собственной 2–в.п. wtt –степени получим (дважды применяя следствие 4.1) пару несравнимых в.п. степеней, которые изолируют со стороны эту 2–в.п. степень.

Следствие 4.1. Пусть даны неполная в.п. степень e и собственная 2–в.п. степень d такие, что $e \not\leq d$. Тогда d изолируется со стороны некоторой в.п. степень c такой, что e и c являются несравнимыми.

Доказательство. Пусть даны d и e , тогда по теореме 2.1 найдем в.п. степень c_0 такую, что d обобщенно изолирована при помощи c_0 и при этом $e \not\leq c_0$. Если $c_0 \leq d$, то применяем теорему 3.1 (заметим, что d и e являются неполными) с $c_0 = a$ и получим в.п. степень $c_1 > c_0$, несравнимую с d . Более того, если c_0 обобщенно изолирует d , то c_1 также ее обобщенно изолирует. В любом случае получаем в.п. степень c_1 , которая изолирует со стороны d и при этом $e \not\leq c_1$. Если c_1 несравнима с e , то искомая степень $c = c_1$. Иначе, применяем теорему 3.1, меняя местами d и e и полагая $a = c_1$. Тогда искомой степенью c является $c_2 > c_1$, которая изолирует со стороны d и несравнима с e . $\square$

Оставляем открытым вопрос о возможности доказать аналогичное свойство, комбинирующее изолированность со стороны и избегание конусов, в 2–в.п. тьюринговых степенях.

Литература

1. М. М. Ямалеев, “Изолированность со стороны в 2–вычислимо перечислимых степенях”, *Изв. высш. учебн. завед. Мат.*, No. 8, 81–86 (2020).
2. G. E. Sacks, “The recursively enumerable degrees are dense”, *Ann. Math. (2)* **80**, No. 2, 300–312 (1964).
3. G. Wu, “Isolation and lattice embedding”, *J. Symb. Log.* **67**, No. 3, 1055–1064 (2002).
4. D. Ding, L. Qian, “Isolated d.r.e. degrees are dense in r.e. degree structure”, *Arch. Math. Logic* **36**, No. 1, 1–10 (1996).
5. G. LaForte, “The isolated d.r.e. degrees are dense in the r.e. degrees”, *Math. Log. Q.* **42**, No. 1, 83–103 (1996).
6. М. М. Arslanov, S. Lempp, R. A. Shore, “On isolating r.e. and isolated d–r.e. degrees”, In: *Computability, Enumerability, Unsolvability. Directions in Recursion Theory*, pp. 61–80, Cambridge University Press, Cambridge (1996).
7. B. Cooper, A. Li, “Turing definability in the Ershov hierarchy”, *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **66**, No. 3, 513–528 (2002).

8. M. M. Arslanov, “Definability and elementary equivalence in the Ershov difference hierarchy”, In: *Logic Colloquium 2006. Proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL)*, pp. 1–17, Cambridge University Press, Cambridge (2009).
9. M. M. Arslanov, M. M. Yamaleev, “On the problem of definability of the computably enumerable degrees in the difference hierarchy”, *Lobachevskii J. Math.* **39**, No. 5, 634–638 (2018).
10. Y. Yang, L. Yu, “On Σ_1 -structural differences among finite levels of the Ershov hierarchy”, *J. Symb. Log.* **71**, No. 4, 1223–1236 (2006).
11. M. Cai, R. A. Shore, T. A. Slaman, “The n -r.e. degrees: undecidability and Σ_1 -substructures”, *J. Math. Log.* **12**, Article ID 1250005 (2012).
12. G. Wu, M. M. Yamaleev, “Isolation: Motivations and applications”, *Уч. зап. Казан. унив., Сер. Физ.-мат. науки* **154**, No. 2, 204–217 (2012).
13. G. Wu, “On the density of the pseudo-isolated degrees”, *Proc. Lond. Math. Soc., III. Ser.* **88**, No. 2, 273–288 (2004).
14. R. I. Soare, *Recursively Enumerable Sets and Degrees. A Study of Computable Functions and Computably Generated Sets*, Springer, Berlin etc. (1987).

Статья поступила в редакцию 1 июня 2024 г.