

Том 1 № 3 (2025)

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

СИРИУС

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТЕРРИТОРИЯ «СИРИУС»
МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР «СИРИУС»



ISSN 3034-3240 (print)

ISSN 3034-4654 (online)

Том 1 № 3 (2025)

СИРИУС

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТЕРРИТОРИЯ «СИРИУС»
МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР «СИРИУС»

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Председатель Научного совета Международного
математического центра «Сириус»

академик Шведской королевской академии наук
Европейской академии наук и Academia Europaea

Лаптев Арий Ариевич

НАУЧНЫЙ СОВЕТ МЕЖДУНАРОДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА «СИРИУС»

д.ф.-м.н. *Ландо Сергей Константинович* (ВШЭ)

чл.-корр. РАН *Миронов Андрей Евгеньевич* (ИМ СО РАН)

академик *Трещев Дмитрий Валерьевич* (МИАН)

д.ф.-м.н. *Цих Август Карлович* (СФУ)

к.ф.-м.н. *Щуплев Алексей Валерьевич* (ММЦ «Сириус»)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

академик *Аптекарев Александр Иванович* (ИПМ РАН)

академик *Безродных Сергей Игоревич* (ФИЦ ИУ РАН)

академик *Беклемишев Лев Дмитриевич* (МИАН)

академик *Гончаров Сергей Савостьянович* (ИМ СО РАН)

академик *Кашин Борис Сергеевич* (МИАН)

академик *Кисляков Сергей Витальевич* (ПОМИ РАН)

академик *Козлов Валерий Васильевич* (МИАН)

академик *Конягин Сергей Владимирович* (МИАН)

академик *Лукоянов Николай Юрьевич* (ИММ УрО РАН)

академик *Матиясевич Юрий Владимирович* (ПОМИ РАН)

академик *Романов Владимир Гаврилович* (ИМ СО РАН)

академик *Семенов Алексей Львович* (МГУ)

академик *Тыртыйшиков Евгений Евгеньевич* (ИВМ РАН)

академик *Черноустько Феликс Леонидович* (ИПМех РАН)

академик *Четверушкин Борис Николаевич* (ИПМ РАН)

академик *Шайдуров Владимир Викторович* (КНЦ СО РАН)

академик *Шананин Александр Алексеевич* (МФТИ)

чл.-корр. РАН *Болотин Сергей Владимирович* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Бухштабер Виктор Матвеевич* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Василевский Юрий Викторович* (ИВМ РАН)

чл.-корр. РАН *Васин Владимир Васильевич* (ИММ УрО РАН)

чл.-корр. РАН *Веснин Андрей Юрьевич* (ИМ СО РАН)

чл.-корр. РАН *Гайфуллин Александр Александрович* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Гасников Александр Владимирович* (ИУ)

чл.-корр. РАН *Гущин Валентин Анатольевич* (ИАП РАН)

чл.-корр. РАН *Давыдов Алексей Александрович* (МГУ)

чл.-корр. РАН *Кабанихин Сергей Игоревич* (ИМ СО РАН)

чл.-корр. РАН *Лазарева Галина Геннадьевна* (РУДН)

чл.-корр. РАН *Петров Игорь Борисович* (МФТИ)

чл.-корр. РАН *Попов Владимир Леонидович* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Протасов Владимир Юрьевич* (МГУ)

чл.-корр. РАН *Прохоров Юрий Геннадьевич* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Разборов Александр Александрович* (МИАН)

чл.-корр. РАН *Садовский Владимир Михайлович* (ИВМ СО РАН)

чл.-корр. РАН *Тишкин Владимир Федорович* (ИПМ РАН)

чл.-корр. РАН *Шкаликов Андрей Андреевич* (МГУ)

чл.-корр. РАН *Якобовский Михаил Владимирович* (ИПМ РАН)

МЕЖДУНАРОДНЫЙ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
«СИРИУС»

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

СИРИУС
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 1

2025

№ 3

Под редакцией

А. А. Лантева

Имперский колледж Лондона, Великобритания
Научно-технологический университет «Сириус», Россия

Федеральная территория «Сириус»
Международный математический центр «Сириус»
2025

Журнал учрежден в 2024 г. Образовательным фондом «Талант и успех»
Издается при финансовой поддержке Федеральной территории «Сириус»

УДК 51
ББК 22.1
С402

С402 Сириус. Математический журнал. Том 1, № 3 — Федеральная территория «Сириус» : Международный математический центр «Сириус», 2025 — 100 с.

Третий выпуск представляет новые результаты номинантов и лауреатов Премии молодым математикам России 2021 и 2024 гг., учрежденной Образовательным фондом «Талант и успех». В частности, изучены вопросы устойчивости многомерных автономных дифференциальных систем, исследована концентрация частиц внутри фронта распространения популяции в модели каталитического ветвящегося случайного блуждания, доказано выполнение условия Фокса — Милнора для полинома Александера в случае конкордантных узлов в ориентированной гомологической 3-сфере, установлена финитная аппроксимируемость предтранзитивных обобщений $K4$, $wK4$, GL и их расширений каноническими формулами, наследуемыми подшкалами, выведена оценка максимума модуля нормированных собственных функций задачи Зарембы для дивергентного эллиптического оператора второго порядка. Актуальные результаты, связанные со знаменитыми конгруэнциями Рамануджана, а также ряд новых гипотез представлены в обзорной статье лауреата 2024 г. Н. Е. Борозенца. Достижения молодежной группы по теории чисел и комбинаторике в Санкт-Петербургском государственном университете представлены научным руководителем группы Э. Т. Мортенсоном в кратком обзоре современных направлений, возникших, в частности, из «Потерянной тетради» Рамануджана. О поддержке молодых математиков Международным математическим центром «Сириус» рассказано в редакционной заметке директора центра А. В. Щуплева.

Для специалистов по теоретической и прикладной математике — научных работников, преподавателей вузов, а также аспирантов и студентов.

УДК 51
ББК 22.1

Редколлегия: А. И. Аптекарев, А. Д. Баранов, В. М. Бухштабер, Ю. В. Василевский, А. Ю. Веснин, С. С. Гончаров, С. И. Кабанихин, В. А. Калягин, А. А. Лаптев (гл. ред.), Т. Е. Панов, Ю. Л. Сачков, Т. М. Садыков, А. П. Солодов, В. Н. Темляков, К. Ю. Федоровский, С. Б. Шлосман.

Журнал публикует новые научные результаты по всем направлениям теоретической и прикладной математики. В качестве авторов приглашаются участники всех мероприятий, проводимых Международным математическим центром «Сириус» с 2020 г., а также номинанты и лауреаты Премии молодым математикам России, учрежденной Образовательным фондом «Талант и успех». Рукописи для публикации в «Сириус. Математическом журнале» принимаются через платформу EditFlow <https://ef.msp.org/submit/sirius>

Все статьи, прошедшие рецензирование через EditFlow и одобренные главным редактором, публикуются на английском языке издательством Springer в журнале-источнике «Sirius Mathematical Journal» отдельными выпусками «Journal of Mathematical Sciences. Series B».

Онлайн версия «Сириус. Математического журнала» на сайте
<https://siriusmathcenter.ru/SiriusMathJ>

Подписано в печать 01.10.2025. Формат 220х290 мм. Усл. печ. л. 12,5. Тираж 500 экз.

Адрес редакции: 354340, Федеральная территория «Сириус», Дельта Сириус, Триумфальный пер., 1, офис 9-047, тел.: +7 (862) 241-98-44, доб. 5824, email: rozhkovskaya.tn@talantiuspeh.ru.

ООО «Типография «Сочи пресс», 354000, Сочи, Виноградный пер., 15, тел.: 7 (862) 296-08-08.

Заказ №

ISSN 3034-3240 (print)
ISSN 3034-4654 (online)

© Международный математический центр «Сириус», 2025

СОДЕРЖАНИЕ

А. В. Щуплев

Международный математический центр «Сириус» для молодых математиков 8

А. А. Бондарев

Автономная дифференциальная система с контрастными сочетаниями глобальных
стабильностных свойств и мер 11

1. Введение 11

2. Основной результат 12

Литература 16

Н. Е. Борозенец

Девииции и арифметические свойства комбинаторных статистик Дайсона, Эндрюса
и Гарвана (обзор) 18

1. Введение 18

2. Разбиения и сравнения Рамануджана 19

3. Комбинаторное объяснение сравнений Рамануджана: рэнг и крэнг 19

4. Девииции рэнга и крэнга и их рассечения 20

5. 11-рассечения девиаций рэнга 23

6. Сад Рамануджана 24

7. Открытые вопросы 30

7.1. Девииции рэнга и крэнга для простых модулей больших 11 30

7.2. Логарифмическая субаддитивность девиаций рэнга и крэнга 31

Литература 31

Е. Вл. Булинская

Плотность популяции внутри фронта распространения каталитического ветвящегося
случайного блуждания 34

1. Введение 34

2. Описание модели и основные результаты 35

3. Вспомогательные результаты 38

4. Доказательства основных результатов 47

Литература 49

Х.-Б. Вьонг

Условие Фокса — Милнора для конкордантных узлов в гомологических 3-сферах 51

1. Введение 51

2. Узлы в ориентированной гомологической 3-сфере 52

3. Конкордантность узлов в ориентированной гомологической 3-сфере 53

4. Полином Александра, функции Александра и кручение Милнора 54

5. Доказательство теоремы 1.1 55

6. Доказательство теоремы 1.2.....	56
7. Приложение А.....	57
Литература.....	59

Л. В. Дворкин

Финитная аппроксимируемость предтранзитивных аналогов $(w)K4$ и GL	60
1. Введение	60
2. Основные понятия	62
2.1. Модальные формулы и логики	62
2.2. Шкалы и модели Крипке	62
2.3. Порожденные и селективные подшкалы и подмодели.....	63
2.4. Каноническая модель.....	63
2.5. Предтранзитивные логики.....	64
2.6. Кластеры, скелет, максимальные миры и лемма Цорна	66
2.7. Свойство максимальности	66
3. Предтранзитивные аналоги $K4$, $wK4$ и GL	67
3.1. Базовые связи между рассматриваемыми логиками	67
3.2. Логики, наследуемые подшкалами и полуподшкалами	70
3.3. Основные результаты.....	72
4. Пути в шкалах и моделях	72
4.1. Пути в шкалах	72
4.2. Размеченные пути в моделях	74
5. Финитная аппроксимируемость.....	75
5.1. Предтранзитивные аналоги $K4$ и $wK4$	75
5.2. Предтранзитивные аналоги GL	76
6. Предтранзитивные аналоги GL и правило Леба	77
7. Некоторые открытые проблемы	79
7.1. Сложность.....	79
7.2. Предтранзитивные аналоги GL , наследуемые подшкалами.....	79
7.3. Более слабые предтранзитивные логики, наследуемые подшкалами	79
Литература.....	79

А. Г. Чечкина

Об оценке максимума модуля собственных функций задачи Зарембы для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка	81
1. Введение	81
2. Оценка максимума модуля собственных функций. Случай $n > 2$	83
3. Оценка максимума модуля собственных функций. Случай $n = 2$	84
Литература.....	86

Э. Т. Мортенсон

Рамануджан, q -ряды и притворные тета-функции в СПбГУ	87
1. Введение	87
2. Предварительные сведения о Рамануджане, q -рядах и притворных тета-функциях.....	87
3. Наши исследования и новые результаты	90
3.1. Выражения сумм типа Гекке — Аппелля и двойных сумм типа Гекке	90
3.2. Тожества между притворными тета-функциями и частными тета-функций	91

Содержание

3.3. Струнные функции и новые притворные тета-тождества	91
3.4. Классическая теория чисел и разбиения.....	92
3.5. Бакалаврская дипломная работа Николая Борозенца	92
3.5.1. Часть 1	93
3.5.2. Часть 2	93
Литература.....	94
Аннотации	96
Сведения об авторах.....	100

А. В. Щуплев

МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР «СИРИУС» ДЛЯ МОЛОДЫХ МАТЕМАТИКОВ

Данный выпуск представляет научные статьи номинантов и лауреатов Премии молодым математикам России, учрежденной Образовательным фондом «Талант и успех».

Международный математический центр «Сириус» активно поддерживает молодых ученых. Начиная с 2020 г., центр организовал 16 школ для молодых исследователей по различным направлениям современной математики. Программы таких школ, длительностью от 5 до 8 дней, включают лекции ведущих специалистов и практические занятия. Студенты и аспиранты также регулярно приглашаются участвовать в математических конференциях, проводимых в Сириусе.

В 2021 и 2024 гг. Математическим центром были организованы конкурсы для молодых ученых. Премия молодым математикам России, учрежденная Образовательным фондом «Талант и успех», вместе с памятным знаком (см. изображение на обложке журнала) вручались победителям в торжественной обстановке на первой и четвертой конференциях математических центров в Сириусе (2021) [1, 2] и в Санкт-Петербурге (2024).

Лауреаты Премии молодым математикам России – 2024

Премия молодым ученым до 35 лет (по 750 000 руб.)

- **Гомоюнов Михаил Игоревич** за цикл научных работ о задачах управления системами дифференциальных уравнений дробного порядка
- **Логинов Константин Валерьевич** за цикл научных работ по геометрии многообразий Фано и их обобщений
- **Шафаревич Антон Андреевич** за научную статью *Euler–Symmetric Projective Toric Varieties and Additive Actions*

Премия аспирантам (по 400 000 руб.)

- **Зайцева Татьяна Ивановна** за диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук *Самоподобные замощения и многомерная аппроксимация*
- **Легкий Алексей Андреевич** за серию научных работ о математических моделях диастолического состояния аортального клапана
- **Пшеницын Тихон Григорьевич** за научную статью *Hyperarithmetical Complexity of Infinitary Action Logic with Multiplexing*

А. В. Щуплев: Образовательный фонд «Талант и успех», Федеральная территория «Сириус», Россия, schuplev.av@talantiuspeh.ru

Английский перевод (свободный доступ): *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 167–169 (2025).

Премия студентам (по 150 000 руб.)

- **Борозенец Николай Евгеньевич** за выпускную квалификационную работу *О q -рядах, комбинаторных характеристиках разбиений и некоторых вариантах модулярности*
- **Горбунов Сергей Михайлович** за научную статью *Speed of Convergence in the Central Limit Theorem for the Determinantal Point Process with the Bessel Kernel*
- **Дворкин Лев Вениаминович** за научную статью *О логиках доказуемости арифметики Нибергалля*



Директор Международного математического центра «Сириус» А. В. Щуплев с лауреатами Премии молодым математикам России 2024 г. после церемонии награждения в Санкт-Петербурге. Слева направо: М. И. Гомоюнов, А. А. Шафаревич, К. В. Логинов, А. А. Легкий, А. В. Щуплев, Т. Г. Пшеницын, Н. Е. Борозенец, Л. В. Дворкин, Т. И. Зайцева. Фотограф: Е. В. Фетисова.

С появлением своего математического журнала в 2024 г. Международный математический центр «Сириус» планирует публиковать новые научные результаты не только участников конференций в Сириусе, но также конкурсантов Премии молодых математиков России на русском языке в «Сириус. Математическом журнале» и на английском языке в «Sirius. Mathematical Journal» в сотрудничестве с международным издательством Шпрингер. Четыре статьи молодых ученых из этого выпуска уже опубликованы в «Journal of Mathematical Sciences. Series B» [3] в августе 2025 г.

Данный выпуск представляет новые результаты следующих номинантов и лауреатов 2021 и 2024 гг. в номинациях «студенты», «аспиранты», «молодые ученые до 35 лет»: А. А. Бондарева (МГУ), Е. Вл. Булинской (МГУ), Х.-Б. Выонга (ТГУ), Л. В. Дворкина (МГУ), А. Г. Чечкиной (МГУ), а также обзорную статью лауреата 2024 г. в номинации «студенты» Н. Е. Борозенца по результатам бакалаврской дипломной работы, которую научный руководитель Э. Т. Мортенсон охарактеризовал такими словами:

В своей работе Николай Борозенец детально исследовал комбинаторные характеристики разбиений чисел — так называемые статистики рэнг и крэнг, которые ввел Фримен Дайсон в 1940-х годах. Изучив, как эти статистики отклоняются от ожидаемых значений, Николай вывел замечательные представления этих функций. Он сумел

не только найти новые доказательства классических результатов, но и вдохнуть новую жизнь в эту тему, генерируя огромное многообразие новых результатов, доказанных им непосредственно или полученных как ответы на сформулированные Николаем гипотезы, которые уже привлекли внимание ведущих специалистов в этой области.

Действительно, гипотезы Н. Е. Борозенца, опубликованные в журнале «Ramanujan Journal» [4] в 2024 г., были решены ведущим специалистом по теории чисел К. Брингманн в соавторстве с постдоком в ее научной группе Б. Пандейем [5] в 2024 г. По просьбе нашего журнала в своем обзоре Н. Е. Борозенец поставил несколько новых гипотез, которые, возможно, также заинтересуют специалистов.

Завершает этот выпуск обзор доцента СПбГУ Э. Т. Мортенсона новых результатов по теории чисел и комбинаторике, полученных под его научным руководством группой студентов и аспирантов в Санкт-Петербургском университете.

Для популяризации математических достижений наших авторов Международный математический центр «Сириус» предполагает сотрудничество с научно-популярным журналом «Сириус. Журнал» (siriusmag.ru), начало которому положено опубликованным в 2025 г. интервью [6] с Николаем Борозенцом.

Литература

1. А. В. Щуплев (ред.), *Конференция международных математических центров мирового уровня: Материалы конференции. Сириус, 9–13 августа 2021 г.*, Сиб. федер. ун-т, Красноярск (2021).
2. A. Laptev, “Sirius Mathematics Center as a new center of mathematical conferences”, *J. Math. Sci.* **260**, No. 6, 711–714 (2022).
3. A. Laptev (Ed.) *Sirius Mathematical Journal. Vol. 2; J. Math. Sci.* **292**, No. 2 (2025).
4. N. Borozenets, “Deviation of the rank and crank modulo 11”, *Ramanujan J.* **64**, No. 4, 1357–1420 (2024).
5. K. Bringmann, B. Pandey, “Biases among classes of rank-crank partitions (mod 11)”, *J. Math. Anal. Appl.* **536**, No. 2, Article ID 128221 (2024).
6. А. Васильева, “Как российский студент получил математическую премию благодаря потерянной тетради”, *Сириус. Журнал* (siriusmag.ru), 30 апреля, 2025.

Статья поступила в редакцию 27 июля 2025 г.
принята к публикации 28 июля 2025 г.

А. А. Бондарев

АВТОНОМНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА С КОНТРАСТНЫМИ СОЧЕТАНИЯМИ ГЛОБАЛЬНЫХ СТАБИЛЬНОСТНЫХ СВОЙСТВ И МЕР

Построен пример многомерной автономной дифференциальной системы, все решения которой стремятся к нулю при неограниченном росте времени, тогда как относительная мера начальных значений тех решений, которые начинаются в шаре с центром в нуле и удаляются от него на достаточное расстояние с ростом времени, приближается сколь угодно близко к единице при стремлении радиуса шара к нулю. Построенная в работе нелинейная система обладает также нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения.

1. Введение

1.1. Мы исследуем реализуемость на дифференциальных системах сочетаний контрастирующих друг с другом свойств устойчивости и неустойчивости трех типов: по Ляпунову, по Перрону [1] и верхнепредельного типа [2]. Результаты по данной тематике можно найти в [3]–[7] (см. библиографию там же). В данной статье мы построим аналог второй системы из теоремы 2 [4] в автономном случае.

1.2. Для произвольного числа $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим систему

$$\dot{x} = f(t, x), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

в фазовом пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой $|\cdot|$, где $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f, f'_x \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n)$, $f(\cdot, 0) = 0$. При этих условиях существует единственное решение задачи Коши (в частности, допускается нулевое решение). Положим $\dot{B}_\rho \equiv \{x_0 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x_0| \leq \rho\}$, $\rho > 0$, и для каждого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ обозначим через $x(\cdot, x_0)$ непродолжаемое решение [5, теорема 22] системы (1.1) удовлетворяющее начальному условию $x(0, x_0) = x_0$.

Определение 1.1 ([1, 2, 6]). Система (1.1) (точнее, ее нулевое решение) обладает свойством *ляпуновской, перроновской или верхнепредельной* ($\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ соответственно)

1) *устойчивости*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что любое начальное значение $x_0 \in \dot{B}_\delta$ удовлетворяет соответственно условию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x(t, x_0)| \leq \varepsilon, \quad (1.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| \leq \varepsilon, \quad (1.3)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x(t, x_0)| \leq \varepsilon, \quad (1.4)$$

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект № 22-8-10-3-1).

А. А. Бондарев: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия;
albondarev1998@yandex.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 170–177 (2025).

2) *глобальной устойчивости*, если в *перроновском* или *верхнепредельном* случаях каждое начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет соответствующему условию (1.3) или (1.4) при $\varepsilon = 0$, а в *ляпуновском* случае система обладает устойчивостью по Ляпунову и верхнепредельной глобальной устойчивостью,

3) μ -устойчивости при данном значении $\mu \in [0, 1]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ относительная мера в шаре $\mathring{B}_\rho$ подмножества $M_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$ всех значений $x_0 \in \mathring{B}_\rho$, удовлетворяющих (1.2)–(1.4), не меньше μ , т.е.

$$\frac{\text{mes } M_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)}{\text{mes } \mathring{B}_\rho} \geq \mu,$$

4) ν -неустойчивости при данном значении $\nu \in [0, 1]$, если существуют $\varepsilon, \delta > 0$ такие, что при каждом $\rho \in (0, \delta)$ относительная мера в шаре $\mathring{B}_\rho$ его подмножества $N_\varkappa(f, \varepsilon, \rho)$ всех значений $x_0 \in \mathring{B}_\rho$, не удовлетворяющих (1.2)–(1.4), не меньше ν .

Из определения 1.1 следует, что если система обладает свойством μ -устойчивости при некотором значении $\mu \in [0, 1]$ (или ν -неустойчивости при некотором $\nu \in [0, 1]$), то она обладает этим же свойством при каждом $\mu_1 < \mu$ (соответственно, $\nu_1 < \nu$). Поэтому естественно возникает вопрос о поиске максимального значения, при котором имеет место указанное свойство.

Определение 1.2 ([6]). Для системы (1.1) при $\varkappa = \lambda, \pi, \sigma$ назовем *ляпуновской, перроновской* или *верхнепредельной*

а) *мерой устойчивости* число $\mu_\varkappa(f) \in [0, 1]$ такое, что для каждого $\mu \in [0, \mu_\varkappa(f))$ имеет место μ -устойчивость, а для $\mu \in (\mu_\varkappa(f), 1]$ — нет,

б) *мерой неустойчивости* число $\nu_\varkappa(f) \in [0, 1]$ такое, что для каждого $\nu \in [0, \nu_\varkappa(f))$ имеет место ν -неустойчивость, а для $\nu \in (\nu_\varkappa(f), 1]$ — нет.

2. Основной результат

Теорема 2.1. Для каждого $n > 1$ существует автономная система вида (1.1) с правой частью $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ такой, что $f'(0) = 0$, которая обладает следующими двумя свойствами:

- (1) каждое начальное значение $x_0 \in \mathbb{R}^n$ удовлетворяет (1.4) при $\varepsilon = 0$,
- (2) для мер устойчивости и неустойчивости системы выполнены равенства

$$\begin{aligned} 0 = \mu_\lambda(f) < \mu_\pi(f) = \mu_\sigma(f) = 1, \\ 0 = \nu_\pi(f) = \nu_\sigma(f) < \nu_\lambda(f) = 1. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Доказательство. 1. На декартовой плоскости с координатами (x_1, x_2) рассмотрим двумерную автономную систему (ее фазовый портрет представлен на рис.)

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}, \quad f \equiv (f_1, f_2)^T, \quad x \equiv (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \tag{2.2}$$

где

$$f_1(x_1, x_2) \equiv \begin{cases} x_1^2 + x_2^{12}, & x_1 < 0, \\ x_1^3(2x_2^2 - x_1^4) + g^2(x_1, x_2)(x_1^2 - 1)^2, & 0 \leq x_1 \leq 1, \quad |x_2| \geq x_1^2, \\ x_1^3(2x_2^2 - x_1^4) & g(x_1, x_2) \geq 0, \\ & \text{иначе,} \end{cases} \tag{2.3}$$

$$f_2(x_1, x_2) \equiv \begin{cases} 0, & x_1 < 0, \\ 3x_1^2x_2(x_2^2 - x_1^4) & \text{иначе,} \end{cases} \quad g(x_1, x_2) \equiv (x_1^4 + x_2^2)^3 - 10x_1^6x_2^2. \tag{2.4}$$

Функции f_1 и f_2 принадлежат классу $C^1(\mathbb{R}^2)$, так как они являются полиномами в областях

$$U_1^\pm \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0, \pm x_2 > 0\}, \tag{2.5}$$

$$U_2^\pm \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \pm x_2 > 0\} \setminus (U_1^\pm \sqcup \overline{U_3^\pm}), \quad (2.6)$$

$$U_3^\pm \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 < 1, \pm x_2 > x_1^2, g(x_1, x_2) > 0\}, \quad (2.7)$$

где $\overline{U}$ означает замыкание множества U , и непрерывно дифференцируемыми функциями на кривых

$$\Gamma_i \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = i\}, \quad i = 0, 1,$$

$$\Gamma_2^\pm \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, \pm x_2 > 0, g(x_1, x_2) = 0\}.$$

Действительно, члены $g^2(x_1, x_2)(x_1^2 - 1)^2$ и $3x_1^2 x_2(x_2^2 - x_1^4)$ в (2.3) и (2.4) обращаются в нуль вместе со своими производными первого порядка на кривых Γ_1 , $\Gamma_2^\pm$ и на кривой Γ_0 соответственно. С другой стороны, f_1 представима в виде

$$f_1(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2 + x_2^{12}, & (x_1, x_2) \in U_1^- \sqcup U_1^+, \\ x_1^2 h(x_1, x_2) + x_2^{12}, & (x_1, x_2) \in U_3^- \sqcup U_3^+, \end{cases} \quad (2.8)$$

где h — полином. Кроме того, первые члены в правых частях (2.8) обращаются в нуль вместе со своими частными производными первого порядка на кривой Γ_0 . Поскольку $f_i(0, 0) = 0$, $i = 1, 2$, дифференциальная система (2.2) автономна и записывается в виде (1.1).

Заметим, что система (2.2) обладает нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения, поскольку для областей (2.5)–(2.7) имеем

$$\mathbb{R}^2 = \overline{\left(\bigsqcup_{i=1}^3 U_i^- \right) \sqcup \left(\bigsqcup_{j=1}^3 U_j^+ \right)}$$

и в каждой области (2.5)–(2.7) обе функции f_1 и f_2 являются многочленами от двух переменных (x_1, x_2) степени не ниже 2.

Векторное поле, определенное правой частью системы (2.2), симметрично относительно оси Ox_1 в силу четности функции $x_2 \mapsto f_1(x_1, x_2)$ (вытекающей, в свою очередь, из четности функции $x_2 \mapsto g(x_1, x_2)$ и равенств (2.3), (2.4), а также нечетности функции $x_2 \mapsto f_2(x_1, x_2)$ при каждом фиксированном значении $x_1 \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим ненулевые решения x системы (2.2), удовлетворяющие начальному условию $x_2(0) = 0$. Все такие решения стремятся к нулю при неограниченном росте времени, и их фазовые кривые целиком лежат на координатной оси Ox_1 в силу оценок

$$f_1(x_1, 0) = \begin{cases} x_1^2 > 0, & x_1 < 0, \\ -x_1^7 < 0, & x_1 > 0, \end{cases} \quad f_2(x_1, 0) = 0, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим решения, начинающиеся в областях $U_1^\pm$, где система (2.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^{12} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Фазовые кривые таких решений лежат на прямых, параллельных координатной оси Ox_1 , и движение на них происходит в направлении роста координаты x_1 (вправо), так как $\dot{x}_1 > 0$.

Рассмотрим решения, начинающиеся в областях $U_2^\pm$, где система (2.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3 (2x_2^2 - x_1^4) \\ 3x_1^2 x_2 (x_2^2 - x_1^4) \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Качественное поведение таких решений в точности такое же, как поведение соответствующих (т.е. начинающихся в тех же точках) решений системы

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 (2x_2^2 - x_1^4) \\ 3x_2 (x_2^2 - x_1^4) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

поскольку ось координат Ox_2 не имеет общих точек с областями $U_2^\pm$.

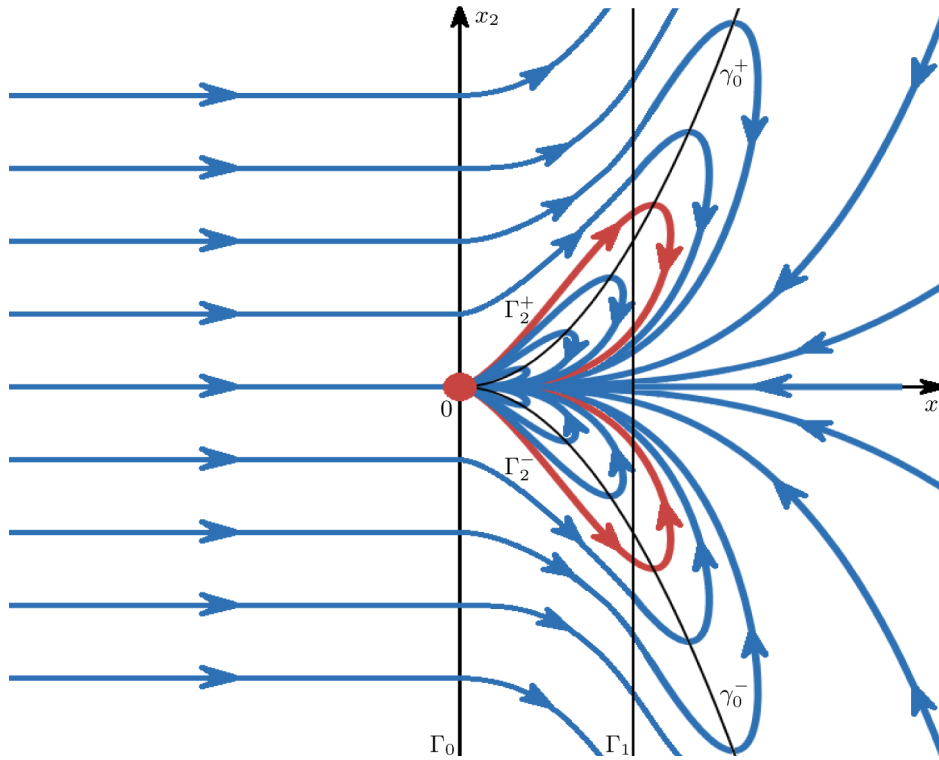


Рис.

При помощи деления одного уравнения системы (2.10) на другое, замены переменной $y_1 = x_2/x_1^2$ и интегрирования находим, что в этих областях все фазовые кривые системы (2.2) задаются неявными уравнениями вида

$$(x_1^4 + x_2^2)^3 = Cx_1^6x_2^2, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (2.11)$$

Рассматривая кривые (2.11) во всей плоскости $\mathbb{R}^2$, мы видим, что каждая из них представляет собой четырехлепестковую кривую [7], проходящую через начало координат и состоящую из четырех частей, каждая из которых замкнута, целиком лежит в соответствующей (ровно в одной) координатной четверти и касается в нуле координатной оси Ox_1 .

Рассмотрим решения x с начальными значениями $x(0) \in \gamma^- \sqcup \gamma^+$, где

$$\gamma^\pm \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x_1 \leq 1, \pm x_2 > 0, g(x_1, x_2) = 0\} \subset \Gamma_2^\pm.$$

На кривых $\gamma^\pm$ система (2.2) имеет вид (2.9). Поэтому из (2.11) и (2.4) следует, что фазовые кривые рассматриваемых решений представляют собой дуги кривых (2.11) при значении константы $C = 10$.

Наконец, рассмотрим решения x с начальными значениями $x(0) \in D$, где

$$D \equiv \overline{U_3^- \sqcup U_3^+} \setminus (\gamma^- \sqcup \gamma^+ \sqcup \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0\}), \quad \text{Int } D \equiv U_3^- \sqcup U_3^+,$$

где $\text{Int } D$ обозначает внутренность D . На множестве D система (2.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^3(2x_2^2 - x_1^4) + g^2(x_1, x_2)(x_1^2 - 1)^2 \\ 3x_1^2x_2(x_2^2 - x_1^4) \end{pmatrix}; \quad (2.12)$$

причем там же выполнено неравенство $|x_2| > x_1^2$; см. рис., где кривые, обращающие это неравенство в равенство, обозначены

$$\gamma_0^\pm \equiv \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, \pm x_2 = x_1^2\}.$$

Ввиду этого неравенства и равенств (2.12) в каждой точке $(x_1, x_2) \in \text{Int } D$ справедливы оценки

$$\dot{x}_1 > x_1^3 (x_2^2 - x_1^4) > 0, \quad \text{sgn}(\dot{x}_2) = \text{sgn}(3x_1^2 x_2 (x_2^2 - x_1^4)) = \text{sgn}(x_2) = \begin{cases} 1, & x_2 > 0, \\ -1, & x_2 < 0, \end{cases}$$

из которых вытекает, что координата x_1 каждого рассматриваемого решения монотонно возрастает во всей внутренности $\text{Int } D$, а координата x_2 либо также монотонно возрастает, если $x(0) \in U_3^+$, либо монотонно убывает, если $x(0) \in U_3^-$.

Поделив первое уравнение в (2.12) на второе, получим

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{3x_1^2 x_2 (x_2^2 - x_1^4)} &= \frac{dx_1}{x_1^3 (2x_2^2 - x_1^4) + g^2(x_1, x_2) (x_1^2 - 1)^2} \\ &< \frac{dx_1}{x_1^3 (x_2^2 - x_1^4)}, \quad (x_1, x_2) \in \text{Int } D. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Умножив (2.13) на положительный множитель $x_1^2 (x_2^2 - x_1^4)$ и проинтегрировав от точки $x(0) = (x_1(0), x_2(0)) \in \text{Int } D$ до точки $x(t) = (x_1(t), x_2(t)) \in \text{Int } D$ при произвольном значении $t \in \mathbb{R}_+$, обеспечивающем лишь включение $x(t) \in \text{Int } D$, получим

$$|x_2(t)| < |x_2(0)| \left| \frac{x_1(t)}{x_1(0)} \right|^3. \quad (2.14)$$

Наконец, из неравенства (2.14) а также монотонности обеих координат (x_1, x_2) каждого рассматриваемого решения следует, что все такие решения ограничены на множестве D и фазовая кривая каждого из них в некоторый момент $t \in \mathbb{R}_+$ (зависящий, вообще говоря, лишь от самого решения) выйдет в одну из областей $U_2^\pm$, в которых система (2.2) задается равенствами (2.9) и фазовые кривые имеют вид (2.11).

Из вышесказанного следует, что система (2.2) обладает как перроновской, так и верхнепределной глобальной устойчивостью, поскольку все ее решения стремятся к нулю при неограниченном росте времени. С другой стороны, мера ляпуновской неустойчивости $\nu_\lambda(f)$ для этой системы равна единице, поскольку фазовая кривая каждого решения x с начальным значением $x(0) \in U_1^- \sqcup U_1^+$ в некоторый момент $t_1 \in \mathbb{R}_+$ входит в одну из областей $U_3^\pm$, а затем в другой момент $\mathbb{R}_+ \ni t_2 > t_1$ — в одну из областей $U_2^\pm$, где стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$ вдоль кривых вида (2.11). Кроме того, каждая кривая (2.11) касается в нуле координатной оси Ox_1 . Следовательно, относительная мера начальных значений $x(0)$ в шаре $\dot{B}_\rho$ тех решений, которые хотя бы однажды покинули 1-окрестность нуля (в смысле первого неравенства (1.2) при $\varepsilon = 1$, причем уже в момент пересечения кривой Γ_1), стремится к единице при стремлении радиуса шара к нулю:

$$\frac{\text{mes } N_\lambda(f, 1, \rho)}{\text{mes } \dot{B}_\rho} \rightarrow 1, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Таким образом, построенная автономная дифференциальная система (2.2) является искомой для случая размерности $n = 2$.

2. Рассмотрим теперь для каждого натурального $n > 1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с декартовыми координатами $(u_1, \dots, u_n)$ дифференциальную систему

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = f_1(u_1, \sqrt{u_2^2 + \dots + u_n^2}), \\ \dot{u}_i = u_i f_2(u_1, \sqrt{u_2^2 + \dots + u_n^2}) / \sqrt{u_2^2 + \dots + u_n^2}, \end{cases} \quad i = \overline{2, n}, \quad u \equiv (u_1, \dots, u_n)^T, \quad (2.15)$$

которая является системой вида (1.1) и обладает нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения, поскольку такими свойствами обладает система (2.2) и существуют непрерывно дифференцируемые функции $w_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, для которых справедливы равенства

$$f_1(v_1, v_2) = w_1(v_1, v_2^2), \quad f_2(v_1, v_2) = v_2 w_2(v_1, v_2^2), \quad (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Существование функций w_1 и w_2 с указанными свойствами вытекает из определений (2.3) и (2.4) функций f_1 и f_2 .

Рассмотрим ненулевые решения u системы (2.15), удовлетворяющие начальному условию

$$u_3^2(0) + \dots + u_n^2(0) = 0.$$

В двумерной плоскости

$$\Pi_0 \equiv \{u \in \mathbb{R}^n \mid u_3 = \dots = u_n = 0\} \quad (2.16)$$

система (2.15) имеет такой же вид, как и система (2.2) (с точностью до переобозначения u , u_1 , u_2 на x , x_1 , x_2 соответственно). Отсюда следует, что фазовые кривые таких решений целиком лежат в плоскости Π_0 . Следовательно, их качественное поведение в точности такое же, как и поведение соответствующих решений системы (2.2).

Далее, рассмотрим решения u , удовлетворяющие условию $u_3^2(0) + \dots + u_n^2(0) \neq 0$, которое эквивалентно существованию i_0 такого, что $u_{i_0}(0) \neq 0$ и $3 \leq i_0 \leq n$.

Интегрируя, находим, что функции

$$\Psi_j(u) \equiv u_j/u_{i_0}, \quad j = 2, \dots, n, \quad j \neq i_0,$$

постоянны вдоль решений u системы (2.15), т.е.

$$u_j = C_j u_{i_0}, \quad C_j \in \mathbb{R}, \quad j = 2, \dots, n, \quad j \neq i_0.$$

Подставив эти равенства в систему (2.15) и сделав замену переменных

$$z_j = u_j, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq i_0, \quad z_{i_0} = C_0 u_{i_0}, \quad C_0^2 \equiv 1 + \sum_{\substack{j=2, \\ j \neq i_0}}^n C_j^2, \quad C_0 > 0,$$

получим в двумерной плоскости

$$\Pi_{i_0} \equiv \{z \in \mathbb{R}^n \mid C_0 z_j = C_j z_{i_0}, j = 2, \dots, n, j \neq i_0\}$$

дифференциальную систему такого же вида, что и система (2.2).

Итак, из вышесказанного следует полное описание качественного поведения всех решений u системы (2.15):

- фазовая кривая каждого решения является плоской и лежит либо в плоскости Π_0 , либо в некоторой плоскости вида Π_{i_0} , либо во всех таких плоскостях сразу (для решений, удовлетворяющих начальному условию $u_3^2(0) + \dots + u_n^2(0) = 0$),
- в каждой такой плоскости качественное поведение решений в точности совпадает с поведением соответствующих решений системы (2.2).

Отсюда следует утверждение теоремы для системы (2.15) в случае произвольной размерности $n > 1$. Теорема доказана. $\square$

Благодарности

Автор приносит благодарность профессору И. Н. Сергееву за ценные замечания, способствовавшие значительному улучшению текста работы.

Литература

1. И. Н. Сергеев, “Определение и некоторые свойства устойчивости по Перрону”, *Дифференц. уравнения* **55**, No. 5, 636–646 (2019).
2. И. Н. Сергеев, “Определение верхнепредельной устойчивости и ее связь с устойчивостью по Ляпунову и устойчивостью по Перрону”, *Дифференц. уравнения* **56**, No. 11, 1556–1557 (2020).
3. А. А. Бондарев, “Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями радиальной устойчивости и неустойчивости”, *Вестн. Моск. ун-та, Мат. Мех.* No. 2, 36–43 (2025).
4. А. А. Бондарев, “Два контрастных примера многомерных дифференциальных систем с ляпуновской крайней неустойчивостью”, *Мат. заметки* **115**, No. 1, 24–42 (2024).

5. И. Н. Сергеев, *Лекции по дифференциальным уравнениям*, Изд-во МГУ, М. (2019).
6. И. Н. Сергеев, “Примеры автономных дифференциальных систем с контрастными сочетаниями мер ляпуновской, перроновской и верхнепредельной устойчивости”, *Вестн. Моск. ун-та, Мат. Мех.* No. 1, 50–54 (2024).
7. А. А. Бондарев, “Пример многомерной автономной дифференциальной системы, обладающей единичной мерой неустойчивости, но массивной частной устойчивостью”, *Дифференц. уравнения* **60**, No. 8, 1011–1020 (2024).

Статья поступила в редакцию 26 марта 2025 г.
принята к публикации 24 мая 2025 г.

Н. Е. Борозенец

ДЕВИАЦИИ И АРИФМЕТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОМБИНАТОРНЫХ СТАТИСТИК ДАЙСОНА, ЭНДРЮСА И ГАРВАНА (ОБЗОР)

Рассматриваются знаменитые сравнения Рамануджана по модулю 5, 7 и 11 для функции числа разбиений и связанные с ними классические комбинаторные статистики рэнг и крэнг, введенные Дайсоном, Эндрюсом и Гарваном. Представлены новые результаты по явному вычислению элементов рассечений девиаций рэнга и крэнга, и показано, как они помогают выявить неожиданные арифметические свойства данных комбинаторных статистик. Сформулированы несколько гипотез о рэнгах и крэнгах.

1. Введение

Целью данной обзорной статьи является введение читателя в теоретико-числовой и комбинаторный анализ, связанный с функцией числа разбиений, у истоков которого в начале двадцатого века стоял знаменитый индийский математик-самоучка Сриниваса Рамануджан, работы которого уже более 100 лет привлекали и продолжают привлекать внимание многих математиков (краткий исторический обзор см. в [1]).

Фримен Дайсон, известный физик-теоретик, исследовал загадочные сравнения Рамануджана и поставил вопрос об их комбинаторной интерпретации. Он определил *рэнг*, комбинаторную статистику на разбиениях, которая гипотетически объясняла два из трех сравнения Рамануджана [2]. Для третьего сравнения Дайсон поставил вопрос о существовании другой комбинаторной статистики, названной им *крэнг*. Джордж Эндрюс и Фрэнк Гарван открыли крэнг в 1988 г. [3].

Многие известные математики продолжили исследование функции числа разбиений, рэнга и крэнга. Удивительно, но многие факты про производящие функции рэнга и крэнга были выведены еще Рамануджаном в его знаменитой «Потерянной тетради» [4], собрании рукописей, содержащем математические заметки за последний год (1919–1920) его жизни, которое оставалось неизвестным до тех пор, пока не было переоткрыто Эндрюсом в 1976 г. [5]. Тем не менее данное открытие стало лишь началом новой эры в теории чисел и комбинаторике. Как точно заметил Дайсон [6],

Это было самое замечательное в Рамануджане: он сделал много открытий, но еще больше оставил в своем саду для других.

Статья организована следующим образом. В § 2 мы рассмотрим функцию числа разбиений и сравнения Рамануджана. В § 3 показано, каким образом с помощью понятий рэнга и крэнга доказываются сравнения Рамануджана. В § 4 мы введем производящие функции рэнга и крэнга,

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Соглашение № 075-15-2025-013).

Н. Е. Борозенец: Центр перспективных исследований им. И. М. Кричевера, Сколковский институт науки и технологий, Москва; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва; Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; nikolayborozenets.spbumcs@gmail.com.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 178–196 (2025).

изученные Рамануджаном в его «Потерянной тетради» и обозначения Хикерсона — Мортенсона девиаций рэнга и крэнга, а также представим результаты вычисления элементов рассечений данных девиаций. В § 5 приведены результаты вычисления элементов рассечений девиаций рэнга по модулю 11. В § 6 рассматриваются как классические, так и недавно установленные арифметические следствия вычислений элементов рассечений девиаций. В § 7 сформулируем некоторые открытые вопросы и гипотезы.

2. Разбиения и сравнения Рамануджана

Разбиение положительного целого числа n — это неубывающая последовательность положительных целых чисел, сумма которых равна n . Например, разбиения числа 4 суть последовательности (4) , $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1, 1)$, $(1, 1, 1, 1)$. Введем функцию $p(n)$ числа разбиений n . Для примера приведем некоторые значения функции $p(n)$:

$$\begin{array}{lllll} p(0) = 1, & p(1) = 1, & p(2) = 2, & p(3) = 3, & p(4) = 5, \\ p(5) = 7, & p(6) = 11, & p(7) = 15, & p(8) = 22, & p(9) = 30, \\ p(10) = 42, & p(11) = 56, & p(12) = 77, & p(13) = 101, & p(14) = 135, \\ p(15) = 176, & p(16) = 231, & p(17) = 297, & p(18) = 385, & p(19) = 490, \\ p(20) = 627, & p(21) = 792, & p(22) = 1002, & p(23) = 1255, & p(24) = 1575, \\ p(25) = 1958, & p(26) = 2436, & p(27) = 3010, & p(28) = 3718, & p(29) = 4565, \\ p(30) = 5604, & p(31) = 6842, & p(32) = 8349, & p(33) = 10143, & p(34) = 12310, \\ p(35) = 14883, & p(36) = 17977, & p(37) = 21637, & p(38) = 26015, & p(39) = 31185, \\ p(40) = 37338, & p(41) = 44583, & p(42) = 53174, & p(43) = 63261, & p(44) = 75175, \\ p(45) = 89134, & p(46) = 105558, & p(47) = 124754, & p(48) = 147273, & p(49) = 173525. \end{array}$$

Первым, кто вычислил большое количество значений функции числа разбиений, был П. А. Мак-Махон. Рамануджан нашел в его таблицах определенные нетривиальные закономерности, сформулированные им как набор из трех сравнений

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5}, \quad (2.1)$$

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7}, \quad (2.2)$$

$$p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11} \quad (2.3)$$

для $n \geq 0$. Эти удивительные сравнения были первоначально доказаны самим Рамануджаном, его работа является ярким примером элегантных вычислений с производящими рядами [7]. Стоит отметить, что существует множество других увлекательных способов доказать сравнения Рамануджана, самыми последними доказательствами являются [8] и [9]. Кроме того, как первоначально предположил сам Рамануджан, данные сравнения являются уникальными, т.е. для других простых модулей подобных сравнений не существует (см. [10]).

3. Комбинаторное объяснение сравнений Рамануджана: рэнг и крэнг

В 1944 г. Дайсон [2] сформулировал гипотезы о комбинаторном объяснении сравнений Рамануджана по модулям 5 и 7. Для разбиения π , обозначим через $\lambda(\pi)$ наибольшую часть и через $\ell(\pi)$ число частей разбиения. Дайсон определил рэнг разбиения как

$$\text{rank}(\pi) := \lambda(\pi) - \ell(\pi).$$

Также введем следующую считающую функцию:

$$N(a, c, n) := |\{\text{разбиение } \pi \text{ с суммой частей } n \mid \text{rank}(\pi) \equiv a \pmod{c}\}|.$$

Заметим, что рэнг обладает свойством симметрии $N(a, r, n) = N(r - a, r, n)$. Дайсон предположил следующее:

$$\begin{aligned} N(a, 5, 5n + 4) &= \frac{p(5n + 4)}{5}, \quad 0 \leq a \leq 4, \\ N(a, 7, 7n + 5) &= \frac{p(7n + 5)}{7}, \quad 0 \leq a \leq 6. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Например, пять разбиений числа 4 имеют рэнги 3, 1, 0, -1 , -3 соответственно, взяв которые по модулю 5, мы получим одинаковое число появлений каждого вычета по модулю 5. Гипотезы Дайсона (3.1) впоследствии доказали Аткин и Свиннертон-Дайер [11].

Хотя рэнг не объясняет третье сравнение Рамануджана, Дайсон предположил существование другой комбинаторной статистики, названной им крэнг, которая бы разделила множество разбиений числа $11n + 6$ на 11 равномошных подмножеств. Эндрюс и Гарван позже открыли крэнг [3].

Для разбиения π , обозначим число единиц в нем как $\sigma(\pi)$ и число частей больших $\sigma(\pi)$ как $\mu(\pi)$. Крэнг разбиения π определяется как

$$\text{crank}(\pi) := \begin{cases} \lambda(\pi), & \sigma(\pi) = 0, \\ \mu(\pi) - \sigma(\pi) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Аналогично введем считающую функцию

$$M(a, c, n) := |\{\text{разбиение } \pi \text{ с суммой частей } n \mid \text{crank}(\pi) \equiv a \pmod{c}\}|.$$

Как и рэнг, крэнг обладает свойством симметрии $M(a, r, n) = M(r - a, r, n)$. Эндрюс и Гарван [3] показали

$$\begin{aligned} M(a, 5, 5n + 4) &= \frac{p(5n + 4)}{5}, \quad 0 \leq a \leq 4, \\ M(a, 7, 7n + 5) &= \frac{p(7n + 5)}{7}, \quad 0 \leq a \leq 6, \\ M(a, 11, 11n + 6) &= \frac{p(11n + 6)}{11}, \quad 0 \leq a \leq 10. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Например, пять разбиений числа 4 имеют крэнги 4, 0, 2, -2 , -4 соответственно, взяв которые по модулю 5, получим одинаковое число появлений каждого вычета по модулю 5.

4. Девиации рэнга и крэнга и их рассечения

В этом параграфе мы объясним идею доказательства сравнений Рамануджана (2.1), представленную в «Потерянной тетради». Пусть q — комплексное число такое, что $|q| < 1$, а x — ненулевое комплексное число. Будем использовать q -символы Похгаммера

$$(x)_n = (x; q)_n := \prod_{i=0}^{n-1} (1 - xq^i), \quad (x)_\infty = (x; q)_\infty := \prod_{i \geq 0} (1 - xq^i).$$

Одним из наиболее известных результатов в комбинаторике является выражение для производящей функции числа разбиений через бесконечное произведение

$$P(q) := \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n = \frac{1}{(q; q)_\infty}. \quad (4.1)$$

Введем считающие функции

$$N(m, n) := |\{\text{разбиение } \pi \text{ с суммой частей } n \mid \text{rank}(\pi) = m\}|,$$

и

$$M(m, n) := |\{\text{разбиение } \pi \text{ с суммой частей } n \mid \text{crank}(\pi) = m\}|.$$

Результаты в «Потерянной тетради» основаны на изучении производящих функций двух переменных для рэнга и крэнга,

$$F(x; q) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} N(m, n) x^m q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(xq; q)_n (x^{-1}q; q)_n}$$

и

$$G(x; q) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} M(m, n) x^m q^n = \frac{(q; q)_{\infty}}{(xq; q)_{\infty} (x^{-1}q; q)_{\infty}}.$$

Для доказательства (2.1) необходимо явно вычислить элементы рассечений рядов $F(x; q)$ и $G(x; q)$. Пусть $A(q)$ — произвольный ряд от переменной q . Будем называть t -рассечением ряда $A(q)$ следующее представление:

$$A(q) =: \sum_{k=0}^{t-1} q^k A_k^{(t)}(q^t).$$

С помощью разложения

$$A(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n$$

можно записать элементы t -рассечения в виде

$$A_k^{(t)}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} a(tn + k) q^n.$$

Рамануджан получил явные формулы для элементов t -рассечений рядов $F(\zeta_t; q)$, $t \in \{5, 7\}$, и $G(\zeta_t; q)$, $t \in \{5, 7, 11\}$, где ζ_t — первообразный корень из единицы порядка t [4], из которых и вывел свои знаменитые сравнения. Все вычисления Рамануджан проводил в терминах степенных рядов с коэффициентами из $\mathbb{Z}[\zeta_t]$. Здесь мы применим более наглядную систему обозначений Хикерсона — Мортенсона для девиаций рэнга и крэнга, в которой фигурируют ряды с коэффициентами из $\mathbb{Q}$ и получим в качестве следствия те же результаты Рамануджана, но в более компактном виде.

В духе равенств (3.1) и (3.2) Хикерсон и Мортенсон [12] ввели девиации рэнга как

$$D(a, c) = D(a, c; q) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(N(a, c, n) - \frac{p(n)}{c} \right) q^n.$$

Аналогично девиации крэнга определяются как

$$D_C(a, c) = D_C(a, c; q) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(M(a, c, n) - \frac{p(n)}{c} \right) q^n.$$

Девиации можно записать в терминах производящих функции рэнга и крэнга следующим образом:

$$D(a, c) = \frac{1}{c} \sum_{j=0}^{c-1} \zeta_c^{-aj} F(\zeta_c^j; q) \quad (4.2)$$

и

$$D_C(a, c) = \frac{1}{c} \sum_{j=0}^{c-1} \zeta_c^{-aj} G(\zeta_c^j; q). \quad (4.3)$$

Сейчас мы обратимся к вычислениям элементов рассечения девиаций рэнга и крэнга. Напомним определение тета-функции

$$j(x; q) := (x)_{\infty} (q/x)_{\infty} (q)_{\infty} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\binom{k}{2}} x^k,$$

где равенство следует из тройного тождества Якоби, и определим универсальную притворную тета-функцию

$$g(x; q) := x^{-1} \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(x)_{n+1} (q/x)_n} \right) = x^{-1} (-1 + (1-x)^{-1} F(x; q)). \quad (4.4)$$

Эта функция является примером так называемой притворной модулярной формы. Такие формы преобразуются нестандартно относительно модулярной группы, а также они «притворяются» классическими модулярными формами в смысле асимптотических свойств, как впервые заметил Рамануджан (см. подробности в [13]). Пусть a и m — целые числа, причем m положительно. Введем обозначение для специализаций

$$J_{a,m} := j(q^a; q^m), \quad J_m := J_{m,3m} = (q^m; q^m)_\infty.$$

Мортенсон вычислил 5-рассечение и 7-рассечение девиаций ранга и крэнга [14].

Теорема 4.1 ([14, теорема 10.1]). *Имеем следующие 5-рассечения:*

$$D(0, 5) = 2 \cdot \vartheta_5(2, 2, -1, 1) + 2 \cdot G_5(-1, 0),$$

$$D(1, 5) = D(4, 5) = \vartheta_5(-1, -1, 3, -3) + G_5(1, -1),$$

$$D(2, 5) = D(3, 5) = \vartheta_5(-1, -1, -2, 2) + G_5(0, 1),$$

и

$$D_C(0, 5) = 2 \cdot \vartheta_5(2, -3, -1, 1),$$

$$D_C(1, 5) = D_C(4, 5) = \vartheta_5(-1, 4, -2, -3),$$

$$D_C(2, 5) = D_C(3, 5) = \vartheta_5(-1, -1, 3, 2),$$

где

$$\vartheta_5(a_0, a_1, a_2, a_3) := \frac{1}{5J_5^2} \left[a_0 \cdot J_{10,25}^3 + a_1 \cdot qJ_{5,25}J_{10,25}^2 + a_2 \cdot q^2J_{5,25}^2J_{10,25} + a_3 \cdot q^3J_{5,25}^3 \right],$$

и

$$G_5(b_0, b_3) := b_0 \cdot q^5g(q^5; q^{25}) + b_3 \cdot q^8g(q^{10}; q^{25}).$$

Теорема 4.2 ([14, теорема 10.2]). *Справедливы следующие 7-рассечения:*

$$D(0, 7) = 2 \cdot \vartheta_7(-4, 3, -1, 2, 1, -2) + 2 \cdot G_7(1, 0, 0),$$

$$D(1, 7) = D(6, 7) = \vartheta_7(6, -1, 5, -3, 2, 3) + G_7(-1, 1, 0),$$

$$D(2, 7) = D(5, 7) = \vartheta_7(-1, -1, -2, 4, -5, 3) + G_7(0, -1, 1),$$

$$D(3, 7) = D(4, 7) = \vartheta_7(-1, -1, -2, -3, 2, -4) + G_7(0, 0, -1)$$

и

$$D_C(0, 7) = 2 \cdot \vartheta_7(3, -4, -1, 2, 1, -2),$$

$$D_C(1, 7) = D_C(6, 7) = \vartheta_7(-1, 6, -2, -3, -5, 3),$$

$$D_C(2, 7) = D_C(5, 7) = \vartheta_7(-1, -1, 5, -3, 2, -4),$$

$$D_C(3, 7) = D_C(4, 7) = \vartheta_7(-1, -1, -2, 4, 2, 3),$$

где

$$\begin{aligned} \vartheta_7(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_6) := \frac{1}{7J_7} & \left[a_0 \cdot J_{21,49}^2 + a_1 \cdot qJ_{14,49}J_{21,49} + a_2 \cdot q^2J_{14,49}^2 \right. \\ & \left. + a_3 \cdot q^3J_{7,49}J_{21,49} + a_4 \cdot q^4J_{7,49}J_{14,49} + a_6 \cdot q^6J_{7,49}^2 \right] \end{aligned}$$

и

$$G_7(b_0, b_2, b_6) := b_0 \cdot (1 + q^7g(q^7; q^{49})) + b_2 \cdot q^{16}g(q^{21}; q^{49}) + b_6 \cdot q^{13}g(q^{14}; q^{49}).$$

Замечание 4.1. Теоремы 4.1 и 4.2 можно легко вывести из «Потерянной тетради» Рамануджана, используя формулы (4.2) и (4.3). Однако Мортенсон использовал другие методы для вычисления рассечений [14].

На основе результатов «Потерянной тетради» автор вывел следующие 11-рассечения для девиаций крэнга.

Теорема 4.3 ([15, теорема 1.2]). *Справедливы следующие 11-рассечения:*

$$D_C(0, 11) = v_{11}(10, -12, -2, 8, 6, 4, -4, -6, -8, 2),$$

$$D_C(1, 11) = v_{11}(-1, 10, -2, -3, -5, 4, 7, 5, 3, 2),$$

$$D_C(2, 11) = v_{11}(-1, -1, 9, -3, 6, -7, -4, -6, 3, 2),$$

$$D_C(3, 11) = v_{11}(-1, -1, -2, 8, -5, 4, -4, 5, 3, -9),$$

$$D_C(4, 11) = v_{11}(-1, -1, -2, -3, 6, -7, 7, 5, -8, 2),$$

$$D_C(5, 11) = v_{11}(-1, -1, -2, -3, -5, 4, -4, -6, 3, 2),$$

где использованы обозначения $X_i := J_{11i,121}$ и

$$v_{11}(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8, a_9, a_{10})$$

$$\begin{aligned} &:= \frac{J_{121}^2}{11} \left(a_0 \frac{1}{X_1} + a_1 q \frac{X_5}{X_2 X_3} + a_2 q^2 \frac{X_3}{X_1 X_4} + a_3 q^3 \frac{X_2}{X_1 X_3} + a_4 q^4 \frac{1}{X_2} \right. \\ &\quad \left. + a_5 q^5 \frac{X_4}{X_2 X_5} + a_7 q^7 \frac{1}{X_3} + a_8 q^{19} \frac{X_1}{X_4 X_5} + a_9 q^9 \frac{1}{X_4} + a_{10} q^{10} \frac{1}{X_5} \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Замечание 4.2. Из теорем 4.1, 4.2 и 4.3 следуют сравнения Рамануджана.

5. 11-рассечения девиаций рэнга

Рассечения $F(\zeta_{11}; q)$ не были изучены в «Потерянной тетради». Гарван и Сарма в серии работ [16, 17] рассмотрели модулярные преобразования элементов p -рассечений $F_k^{(11)}(\zeta_p; q)$ для $F(\zeta_p; q)$ в случае простых чисел $p > 3$, которые обладают определенными симметриями для квадратичных и неквадратичных вычетов k по модулю p . Как следствие, Гарван и Сарма вычислили элементы 11-рассечения $F_k^{(11)}(\zeta_{11}; q)$ для $F(\zeta_{11}; q)$ явно в терминах тета-функций и универсальных притворных тета-функций. Используя вычисления Гарвана и Сармы [16, 17], а также результаты диссертации О'Брайена [18], автор вычислил элементы 11-рассечения девиаций рэнга. Положим $P_i := J_{i,11}$,

$$\begin{aligned} G_{11}(b_0, b_4, b_7, b_9, b_{10}) &:= b_0 q^{22} g(q^{22}; q^{121}) + b_4 q^{37} g(q^{44}; q^{121}) \\ &\quad + b_7 q^{40} g(q^{55}; q^{121}) + b_9 q^{31} g(q^{33}; q^{121}) + b_{10} [q^{-1} + q^{10} g(q^{11}; q^{121})], \end{aligned}$$

и

$$\Theta(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) := \frac{J_{11}^6}{J_1^2} \left[a_1 \frac{q^2}{P_4 P_5^2} + a_2 \frac{1}{P_1^2 P_3} + a_3 \frac{q}{P_1 P_4^2} + a_4 \frac{q}{P_2^2 P_5} + a_5 \frac{q}{P_2 P_3^2} \right].$$

Теорема 5.1 ([15, теорема 1.3]). *Справедливы следующие 11-рассечения:*

$$D(0, 11) = G_{11}(-2, 0, 0, 0, 0) + v_{11}(10, -12, -2, 8, 6, 4, 18, -6, -8, 2) + \sum_{m=0}^{10} \Theta_{0,m}(q^{11}) q^m,$$

$$D(1, 11) = G_{11}(1, 0, -1, 0, 0) + v_{11}(-1, 10, -2, -3, -5, 4, -4, -6, 3, 2) + \sum_{m=0}^{10} \Theta_{1,m}(q^{11}) q^m,$$

$$D(2, 11) = G_{11}(0, 0, 1, 0, -1) + v_{11}(-1, -1, 9, -3, 6, -7, -4, 5, 3, 2) + \sum_{m=0}^{10} \Theta_{2,m}(q^{11}) q^m,$$

$$D(3, 11) = G_{11}(0, 0, 0, 1, 1) + v_{11}(-1, -1, -2, -3, 17, -7, -4, 5, 3, -9) + \sum_{m=0}^{10} \Theta_{3,m}(q^{11}) q^m,$$

$$D(4, 11) = G_{11}(0, 1, 0, -1, 0) + v_{11}(-1, -1, -2, -3, 6, 4, -4, 5, -8, 13) + \sum_{m=0}^{10} \Theta_{4,m}(q^{11}) q^m,$$

$$D(5, 11) = G_{11}(0, -1, 0, 0, 0) + v_{11}(-1, -1, -2, -3, -5, 4, -4, -6, 3, -9) + \sum_{m=0}^{10} \Theta_{5,m}(q^{11})q^m,$$

где $v_{11}(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_7, a_8, a_9, a_{10})$ определено в (4.5),

$$\Theta_{0,6}(q) = \Theta(0, 0, 2, 2, -2),$$

$$\Theta_{1,6}(q) = \Theta(-1, 1, -1, -2, 1),$$

$$\Theta_{2,6}(q) = \Theta(1, 0, -1, 2, 0),$$

$$\Theta_{3,6}(q) = \Theta(1, 0, 1, -1, -1),$$

$$\Theta_{4,6}(q) = \Theta(0, -1, 1, 0, 2),$$

$$\Theta_{5,6}(q) = \Theta(-1, 0, -1, 0, -1),$$

а остальные $\Theta_{a,m}(q)$ определены в [15, § 4].

Замечание 5.1. Заметим, в теореме 4.3 даны явные выражения в терминах тета-функций, показывающие, почему через рэнг не удастся объяснить сравнения Рамануджана по модулю 11.

Рассечения рэнга и крэнга для других модулей были изучены в литературе. Например, Мортенсон вычислил элементы 4-рассечения и 8-рассечения девиаций рэнга и крэнга [14], Лавджой и др. вычислили элементы 3-рассечения и 9-рассечения рэнга и крэнга [19].

6. Сад Рамануджана

Изучение рассечений позволяет получить множество неожиданных, как классических, так и новых арифметических свойств функции числа разбиений, рэнга и крэнга, образуя разрастающийся сад Рамануджана, предсказанный Дайсоном. Одним из замечательных примеров таких свойств являются следующие сравнения для функции числа разбиений, открытые Аткиным и Свиннертон-Дайером [11]. Эти сравнения непосредственно вытекают из теорем 4.1, 4.2, 4.3 и 5.1.

Теорема 6.1 ([11, теорема 1]).

$$P_0^{(5)}(q) \equiv \frac{J_{2,5}^3}{J_1^2} \pmod{5},$$

$$P_1^{(5)}(q) \equiv \frac{J_{1,5}J_{2,5}^2}{J_1^2} \pmod{5},$$

$$P_2^{(5)}(q) \equiv \frac{2J_{1,5}^2J_{2,5}}{J_1^2} \pmod{5},$$

$$P_3^{(5)}(q) \equiv \frac{3J_{1,5}^3}{J_1^2} \pmod{5},$$

$$P_4^{(5)}(q) \equiv 0 \pmod{5},$$

где $P_i^{(5)}(q)$, $0 \leq i \leq 4$, — элементы 5-рассечения функции числа разбиений (4.1).

Теорема 6.2 ([11, теорема 2]).

$$P_0^{(7)}(q) \equiv \frac{J_{3,7}^2}{J_7} \pmod{7},$$

$$P_1^{(7)}(q) \equiv \frac{J_{2,7}J_{3,7}}{J_7} \pmod{7},$$

$$P_2^{(7)}(q) \equiv \frac{2J_{2,7}^2}{J_7} \pmod{7},$$

$$P_3^{(7)}(q) \equiv \frac{3J_{1,7}J_{3,7}}{J_7} \pmod{7},$$

$$P_4^{(7)}(q) \equiv \frac{5J_{1,7}J_{2,7}}{J_7} \pmod{7},$$

$$P_5^{(7)}(q) \equiv 0 \pmod{7},$$

$$P_6^{(7)}(q) \equiv \frac{4J_{1,7}^2}{J_7} \pmod{7},$$

где $P_i^{(7)}(q)$, $0 \leq i \leq 6$, — элементы 7-рассечения функции числа разбиений (4.1).

Теорема 6.3 ([11, теорема 3]).

$$P_0^{(11)}(q) \equiv \frac{J_{11}^2}{P_1} \pmod{11},$$

$$P_1^{(11)}(q) \equiv \frac{J_{11}^2 P_5}{P_2 P_3} \pmod{11},$$

$$P_2^{(11)}(q) \equiv \frac{2J_{11}^2 P_3}{P_1 P_4} \pmod{11},$$

$$P_3^{(11)}(q) \equiv \frac{3J_{11}^2 P_2}{P_1 P_3} \pmod{11},$$

$$P_4^{(11)}(q) \equiv \frac{5J_{11}^2}{P_2} \pmod{11},$$

$$P_5^{(11)}(q) \equiv \frac{7J_{11}^2 P_4}{P_2 P_5} \pmod{11}$$

$$P_6^{(11)}(q) \equiv 0 \pmod{11},$$

$$P_7^{(11)}(q) \equiv \frac{4J_{11}^2}{P_3} \pmod{11},$$

$$P_8^{(11)}(q) \equiv \frac{6J_{11}^2 q P_1}{P_4 P_5} \pmod{11},$$

$$P_9^{(11)}(q) \equiv \frac{8J_{11}^2}{P_4} \pmod{11},$$

$$P_{10}^{(11)}(q) \equiv \frac{9J_{11}^2}{P_5} \pmod{11}.$$

где $P_i := J_{i,11}$ и $P_i^{(11)}(q)$, $0 \leq i \leq 10$, — элементы 11-рассечения функции числа разбиений (4.1).

Для следующего примера мы собрали результаты о равенствах между рэнгами и крэнгами по модулю 5 и 7 полученные Гарваном, Аткином и Свиннертон-Дайером [11, 20]. Они являются прямыми следствиями теорем 4.1 и 4.2.

Теорема 6.4. Пусть $n \geq 0$. Обозначим $N_{i,r} := N(i, 5, 5n + r)$ и $M_{i,r} := M(i, 5, 5n + r)$. Для вычета $r = 0$

$$N_{2,0} = M_{1,0} = M_{2,0}.$$

Для вычета $r = 1$

$$N_{1,1} = N_{2,1} = M_{2,1}, \quad N_{0,1} = M_{1,1}, \quad N_{0,1} + N_{1,1} = 2N_{2,1}.$$

Для вычета $r = 2$

$$N_{0,2} = N_{2,2} = M_{0,2} = M_{1,2}, \quad N_{1,2} = M_{2,2}.$$

Для вычета $r = 3$

$$N_{0,3} = M_{0,3} = M_{2,3}.$$

Для вычета $r = 4$

$$N_{0,4} = N_{1,4} = N_{2,4} = M_{0,4} = M_{1,4} = M_{2,4}.$$

Теорема 6.5. Пусть $n \geq 0$. Обозначим $N_{i,r} := N(i, 7, 7n + r)$ и $M_{i,r} := M(i, 7, 7n + r)$. Для вычета $r = 0$

$$N_{2,0} = N_{3,0} = M_{1,0} = M_{2,0} = M_{3,0}.$$

Для вычета $r = 1$

$$N_{1,1} = N_{2,1} = N_{3,1} = M_{2,1} = M_{3,1}, \quad N_{0,1} = M_{1,1}, \quad N_{0,1} + N_{1,1} = 2N_{2,1}.$$

Для вычета $r = 2$

$$N_{0,2} = N_{3,2} = M_{0,2} = M_{1,2} = M_{3,2}.$$

Для вычета $r = 3$

$$N_{1,3} = N_{3,3} = M_{1,3} = M_{2,3}, \quad N_{0,3} = N_{2,3} = M_{0,3} = M_{3,3}.$$

Для вычета $r = 4$

$$N_{2,4} = M_{1,4}, \quad N_{0,4} = N_{1,4} = N_{3,4} = M_{0,4} = M_{2,4} = M_{3,4}.$$

Для вычета $r = 5$

$$N_{0,5} = N_{1,5} = N_{2,5} = N_{3,5} = M_{0,5} = M_{1,5} = M_{2,5} = M_{3,5}.$$

Для вычета $r = 6$

$$N_{0,6} = M_{0,6} = M_{2,6}, \quad N_{1,6} = M_{1,6} = M_{3,6}.$$

Гарван [20] также нашел равенства между крэнгами по модулю 11. Они являются прямым следствием теоремы 4.3.

Теорема 6.6 ([20, формулы (1.51)–(1.67)]). Пусть $n \geq 0$. Обозначим $M_{i,r} := M(i, 11, 11n + r)$. Для вычета $r = 0$

$$M_{1,0} = M_{2,0} = M_{3,0} = M_{4,0} = M_{5,0}.$$

Для вычета $r = 1$

$$M_{0,1} + M_{1,1} = 2M_{2,1}, \quad M_{2,1} = M_{3,1} = M_{4,1} = M_{5,1}.$$

Для вычета $r = 2$

$$M_{0,2} = M_{1,2} = M_{3,2} = M_{4,2} = M_{5,2}.$$

Для вычета $r = 3$

$$M_{0,3} = M_{3,3}, \quad M_{1,3} = M_{2,3} = M_{4,3} = M_{5,3}.$$

Для вычета $r = 4$

$$M_{0,4} = M_{2,4} = M_{4,4}, \quad M_{1,4} = M_{3,4} = M_{5,4}.$$

Для вычета $r = 5$

$$M_{0,5} = M_{1,5} = M_{3,5} = M_{5,5}, \quad M_{2,5} = M_{4,5}.$$

Для вычета $r = 6$

$$M_{0,6} = M_{1,6} = M_{2,6} = M_{3,6} = M_{4,6} = M_{5,6}.$$

Для вычета $r = 7$

$$M_{0,7} = M_{2,7} = M_{3,7} = M_{5,7}, \quad M_{1,7} = M_{4,7}.$$

Для вычета $r = 8$

$$M_{0,8} = M_{2,8} = M_{5,8}, \quad M_{1,8} = M_{3,8} = M_{4,8}.$$

Для вычета $r = 9$

$$M_{0,9} = M_{4,9}, \quad M_{1,9} = M_{2,9} = M_{3,9} = M_{5,9}.$$

Для вычета $r = 10$

$$M_{0,10} = M_{1,10} = M_{2,10} = M_{4,10} = M_{5,10}.$$

Тем не менее не существует линейных равенств для рангов по модулю 11. Аткин и Хуссейн [21] получили следующие линейные сравнения. Они являются прямым следствием теоремы 5.1.

Теорема 6.7 ([21, формула (9.16)]). Рассмотрим $n \geq 0$. Обозначим $N_{i,r} := N(i, 11, 11n + r)$. Для вычета $r = 0$

$$N_{2,0} - 5N_{3,0} - 2N_{4,0} + 6N_{5,0} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для вычета $r = 1$

$$N_{1,1} - 6N_{2,1} + 4N_{3,1} + 3N_{4,1} - 2N_{5,1} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для вычета $r = 2$

$$N_{0,2} + 4N_{2,2} - 6N_{4,2} + N_{5,2} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для вычета $r = 3$

$$N_{0,3} + 3N_{1,3} - N_{2,3} + 2N_{3,3} - N_{4,3} - 4N_{5,3} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для вычета $r = 4$

$$N_{0,4} + 3N_{1,4} - 2N_{2,4} - 4N_{3,4} + N_{4,4} + N_{5,4} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для вычета $r = 5$

$$N_{0,5} - 5N_{1,5} - N_{2,5} + N_{3,5} + 5N_{4,5} - N_{5,5} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для вычета $r = 6$

$$N_{1,6} - 5N_{2,6} - N_{3,6} + N_{4,6} + 4N_{5,6} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для вычета $r = 7$

$$N_{0,7} - 2N_{1,7} - 2N_{2,7} + 5N_{3,7} + 2N_{4,7} - 4N_{5,7} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для вычета $r = 8$

$$N_{0,8} + 5N_{1,8} + 2N_{2,8} + N_{3,8} - 3N_{4,8} - 6N_{5,8} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для вычета $r = 9$

$$N_{0,9} - 4N_{1,9} + 3N_{2,9} - N_{3,9} - N_{4,9} + 2N_{5,9} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Для вычета $r = 10$

$$N_{0,10} - 6N_{1,10} + N_{4,10} + 4N_{5,10} \equiv 0 \pmod{11}.$$

Не только равенства и сравнения между рэнгами и крэнгами встречаются в литературе. Большое количество неравенств между рэнгами и крэнгами было получено Гарваном [20] для модулей 5 и 7, а также Экином и автором [15, 22] для модуля 11. Введем обозначения:

$A_n \leq B_n$ (соответственно, $A_n \geq B_n$), если $A_n \leq B_n$ (соответственно, $A_n \geq B_n$) для всех $n \geq 0$,

$A_n \leq_m B_n$ (соответственно, $A_n \geq_m B_n$), если $A_n \leq B_n$ (соответственно, $A_n \geq B_n$) для всех $n \geq m$.

Теорема 6.8 ([20]). Обозначим $N_{i,r} := N(i, 5, 5n + r)$ и $M_{i,r} := M(i, 5, 5n + r)$. Для вычета $r = 0$

$$N_{1,0} \geq_1 N_{2,0}.$$

Для вычета $r = 1$

$$N_{0,1} \geq N_{1,1}, \quad M_{1,1} \geq M_{2,1} \geq M_{0,1}.$$

Для вычета $r = 2$

$$N_{1,2} \geq N_{2,2}, \quad M_{2,2} \geq M_{1,2}.$$

Для вычета $r = 3$

$$N_{2,3} \geq_3 N_{0,3}.$$

Теорема 6.9 ([20]). Обозначим $N_{i,r} := N(i, 7, 7n + r)$ и $M_{i,r} := M(i, 7, 7n + r)$. Для вычета $r = 0$

$$N_{0,0} + N_{1,0} \geq 2N_{2,0}.$$

Для вычета $r = 1$

$$N_{0,1} \geq N_{1,1}, \quad M_{1,1} \geq M_{2,1} \geq M_{0,1}.$$

Для вычета $r = 2$

$$N_{3,2} \geq 8N_{2,2}.$$

Для вычета $r = 3$

$$N_{0,3} \geq N_{1,3}, \quad M_{0,3} \geq M_{1,3}.$$

Для вычета $r = 4$

$$N_{1,4} \geq N_{2,4}, \quad M_{0,4} \geq M_{1,4}.$$

Для вычета $r = 6$

$$N_{0,6} \geq 5N_{3,6}.$$

Теорема 6.10 ([15, следствие 2.2]). Обозначим $N_{i,r} := N(i, 11, 11n + r)$ и $M_{i,r} := M(i, 11, 11n + r)$. Для вычета $r = 0$

$$M_{1,0} \geq N_{4,0},$$

$$N_{2,0} + N_{3,0} \geq N_{4,0} + M_{1,0}.$$

Для вычета $r = 1$

$$N_{2,1} \geq M_{2,1},$$

$$M_{2,1} \geq N_{4,1},$$

$$N_{2,1} + N_{4,1} \geq N_{3,1} + N_{5,1}.$$

Для вычета $r = 2$

$$N_{1,2} \geq M_{2,2},$$

$$M_{0,2} \geq N_{5,2},$$

$$2M_{0,2} \geq N_{2,2} + N_{5,2},$$

$$N_{2,2} + M_{0,2} \geq N_{0,2} + N_{5,2},$$

$$N_{1,2} + N_{3,2} \geq M_{0,2} + M_{2,2},$$

$$N_{1,2} + N_{5,2} \geq N_{4,2} + M_{2,2}.$$

Для вычета $r = 3$

$$N_{0,3} \geq M_{0,3},$$

$$M_{1,3} \geq N_{4,3},$$

$$N_{0,3} + M_{0,3} \geq 2N_{2,3},$$

$$N_{2,3} + M_{1,3} \geq N_{4,3} + M_{0,3},$$

$$N_{0,3} + N_{3,3} \geq N_{2,3} + M_{1,3}.$$

Для вычета $r = 4$

$$N_{1,4} \geq M_{0,4},$$

$$2N_{1,4} \geq N_{0,4} + M_{0,4},$$

$$N_{1,4} + M_{1,4} \geq N_{2,4} + M_{0,4},$$

$$N_{1,4} + N_{3,4} \geq 2M_{0,4}.$$

Для вычета $r = 5$

$$N_{2,5} \geq M_{0,5},$$

$$M_{2,5} \geq N_{5,5},$$

$$N_{2,5} + N_{3,5} \geq M_{0,5} + M_{2,5},$$

$$N_{2,5} + M_{2,5} \geq N_{0,5} + N_{5,5},$$

$$N_{0,5} + M_{0,5} \geq N_{1,5} + N_{4,5},$$

$$N_{2,5} + N_{3,5} \geq N_{1,5} + N_{5,5},$$

$$N_{0,5} + N_{2,5} \geq N_{1,5} + M_{0,5}.$$

Для вычета $r = 7$

$$N_{0,7} \geq M_{1,7},$$

$$M_{0,7} \geq N_{4,7},$$

$$N_{3,7} + N_{4,7} \geq N_{5,7} + M_{0,7}.$$

Для вычета $r = 8$

$$N_{2,8} \geq M_{1,8},$$

$$M_{0,8} \geq N_{3,8},$$

$$M_{0,8} + M_{1,8} \geq N_{2,8} + N_{4,8},$$

$$N_{1,8} + N_{5,8} \geq 2N_{3,8},$$

$$N_{0,8} + M_{0,8} \geq 2N_{2,8},$$

$$N_{3,8} + M_{0,8} \geq N_{4,8} + M_{1,8},$$

$$N_{2,8} + N_{3,8} \geq 2M_{1,8},$$

$$2M_{0,8} \geq N_{1,8} + N_{5,8}.$$

Для вычета $r = 9$

$$N_{2,9} \geq M_{1,9},$$

$$M_{0,9} \geq N_{5,9},$$

$$M_{1,9} + M_{0,9} \geq N_{2,9} + N_{5,9},$$

$$N_{0,9} + M_{0,9} \geq N_{2,9} + M_{1,9},$$

$$N_{2,9} + N_{5,9} \geq N_{3,9} + N_{4,9}.$$

Для вычета $r = 10$

$$N_{1,10} \geq M_{0,10},$$

$$M_{3,10} \geq N_{4,10},$$

$$N_{0,10} + M_{0,10} \geq N_{1,10} + N_{4,10},$$

$$N_{2,10} + N_{3,10} \geq 2M_{0,10},$$

$$N_{1,10} + N_{4,10} \geq 2M_{0,10},$$

$$N_{1,10} + M_{3,10} \geq N_{2,10} + N_{3,10}.$$

Тем не менее некоторые неравенства не удастся доказать методами Гарвана, Экина и автора [15, 22, 20], основанными на изучении положительности коэффициентов Фурье некоторых произведений тета-функций. Известными примерами неравенств такого рода являются гипотезы Эндрюса — Льюиса о рэнгах по модулю 3 [23], которые доказала Брингманн [24], используя притворные модулярные свойства производящей функции рэнга в комбинации с так называемым круговым методом, мощной аналитической техникой, первоначально разработанной Харди и Рамануджаном для работы с функцией числа разбиений. Автор в [15] выдвинул гипотезы о некоторых неравенствах между рэнгом и крэнгом по модулю 11, которые впоследствии доказали Брингманн и Пандей [25], используя аналитические формулы для рэнга и крэнга, открытые Брингманн, Кейном и Ролоном [24, 26, 27], некоторые из которых недавно были значительно усилены Саном [28].

Теорема 6.11 ([25, теорема 1.2]). *Имеем*

$$\begin{aligned}
 N_{5,0} &\leq N_{4,0} \leq_2 N_{3,0} \leq M_{1,0} \leq \frac{p(11n)}{11} \leq M_{0,0} \leq_1 N_{2,0} \leq N_{1,0} \leq_3 N_{0,0}, \\
 N_{5,1} &\leq N_{4,1} \leq N_{3,1} \leq_1 M_{0,1} \leq M_{2,1} \leq \frac{p(11n+1)}{11} \leq M_{1,1} \leq_1 N_{2,1} \leq N_{1,1} \leq N_{0,1}, \\
 N_{5,2} &\leq N_{4,2} \leq N_{3,2} \leq M_{0,2} \leq \frac{p(11n+2)}{11} \leq M_{2,2} \leq_1 N_{2,2} \leq N_{1,2} \leq_3 N_{0,2}, \\
 N_{5,3} &\leq N_{4,3} \leq N_{3,3} \leq M_{1,3} \leq \frac{p(11n+3)}{11} \leq M_{0,3} \leq N_{2,3} \leq_1 N_{1,3} \leq_2 N_{0,3}, \\
 N_{5,4} &\leq_3 N_{4,4} \leq N_{3,4} \leq_1 M_{1,4} \leq \frac{p(11n+4)}{11} \leq M_{0,4} \leq_1 N_{2,4} \leq N_{1,4} \leq_3 N_{0,4}, \\
 N_{5,5} &\leq N_{4,5} \leq_1 N_{3,5} \leq M_{2,5} \leq \frac{p(11n+5)}{11} \leq M_{0,5} \leq N_{2,5} \leq N_{1,5} \leq N_{0,5}, \\
 N_{5,6} &\leq_1 N_{4,6} \leq N_{3,6} \leq \frac{p(11n+6)}{11} \leq N_{2,6} \leq N_{1,6} \leq_1 N_{0,6}, \\
 N_{5,7} &\leq N_{4,7} \leq N_{3,7} \leq M_{0,7} \leq \frac{p(11n+7)}{11} \leq M_{1,7} \leq N_{2,7} \leq_1 N_{1,7} \leq N_{0,7}, \\
 N_{5,8} &\leq N_{4,8} \leq N_{3,8} \leq M_{0,8} \leq_3 \frac{p(11n+8)}{11} \leq_3 M_{1,8} \leq N_{2,8} \leq N_{1,8} \leq_3 N_{0,8}, \\
 N_{5,9} &\leq N_{4,9} \leq N_{3,9} \leq_1 M_{0,9} \leq \frac{p(11n+9)}{11} \leq M_{1,9} \leq N_{2,9} \leq N_{1,9} \leq_2 N_{0,9}, \\
 N_{5,10} &\leq N_{4,10} \leq N_{3,10} \leq_1 M_{3,10} \leq \frac{p(11n+10)}{11} \leq M_{0,10} \leq N_{2,10} \leq N_{1,10} \leq_3 N_{0,10}.
 \end{aligned}$$

Рэнги и крэнги для других модулей изучались многими исследователями (обзор литературы по этой части сада Рамануджана содержится в [4]).

7. Открытые вопросы

В заключение нашего обзора мы хотели бы представить заинтересованному читателю несколько открытых задач о девиациях рэнга и крэнга.

7.1. Девиации рэнга и крэнга для простых модулей, больших 11. Гарван и Сарма [16, 17] нашли элементы p -рассечения для $F(\zeta_p; q)$, $p \in \{13, 17, 19\}$. В духе результатов [15] мы хотели бы задаться следующими вопросами:

- (1) Как элементы c -рассечения $D(a, c)$, $c \in \{13, 17, 19\}$ могут быть найдены в терминах тета-функций и притворных тета-функций? Что мы можем сказать о $D_C(a, c)$ для данных простых модулей?

- (2) Как вычисления элементов c -рассечений может быть использовано для доказательства результатов О’Брайена и Бильгичи [31, 18]?
- (3) Как элементы c -рассечения моментов рэнга, моментов крэнга и spt -функции Эндрюса [29, 30] для $c \in \{13, 17, 19\}$ могут быть найдены по модулю c в терминах тета-функций и притворных тета-функций?

7.2. Логарифмическая субаддитивность девиаций рэнга и крэнга. Бессенродт и Оно [32] установили строгую $\log$ -субаддитивность функции числа разбиений.

Теорема 7.1 ([32, теорема 2.1]). Для $b_1, b_2 > 1$ и $b_1 + b_2 > 9$ имеем

$$p(b_1 + b_2) < p(b_1)p(b_2).$$

В [33] Хоу и Джагадисан доказали строгую логарифмическую субаддитивность для $N(a, 3, n)$ для всех a, b больше некоторой константы и выдвинули гипотезу, что данное свойство верно для $N(a, c, n)$ с произвольным c . Майелс [34] доказал их предположение, но его методы не давали явных оценок на аргументы, при которых выполняется строгая логарифмическая субаддитивность. Хамакиотес и др. в [35] установили строгую логарифмическую субаддитивность для $M(a, c, n)$ с нечетным c и предъявили явные оценки на аргументы когда данное свойство выполнено. Результаты Чезаны, Крейга и Майелса [36] доказывали строгую логарифмическую субаддитивность для $N(a, c, n)$ и $M(a, c, n)$ для всех c . Было бы интересно продолжить вышеупомянутые исследования. Таким образом, мы выдвигаем следующую гипотезу о логарифмической субаддитивности девиаций рэнга и крэнга для нечетных модулей.

Гипотеза 7.1. Для нечетного $c \geq 11$ и $0 \leq a \leq \frac{c-1}{2}$ при $b_1, b_2 \gg 0$ имеем

$$N(a, c, b_1 + b_2) - \frac{p(b_1 + b_2)}{c} \leq \left(N(a, c, b_1) - \frac{p(b_1)}{c} \right) \left(N(a, c, b_2) - \frac{p(b_2)}{c} \right)$$

и для нечетного $c \geq 13$ и $0 \leq a \leq \frac{c-1}{2}$ при $b_1, b_2 \gg 0$ имеем

$$M(a, c, b_1 + b_2) - \frac{p(b_1 + b_2)}{c} \leq \left(M(a, c, b_1) - \frac{p(b_1)}{c} \right) \left(M(a, c, b_2) - \frac{p(b_2)}{c} \right).$$

Также было бы желательно обобщить эту гипотезу на случай четных модулей, на случай малых модулей, а также получить точные нижние оценки на аргументы, для которых выполняется логарифмическая субаддитивность.

Благодарности

Я хотел бы поблагодарить моего учителя, профессора Э. Т. Мортенсона за чуткое и внимательное научное руководство, а также Глеба Савельева за помощь с переводом данного обзора.

Литература

1. Э. Т. Мортенсон, “Рамануджан, q -ряды и притворные тета-функции в СПбГУ”, *Сипиус. Мат. ж.* **1**, No. 3, 87–95 (2025).
2. F. J. Dyson, “Some guesses in the theory of partitions”, *Eureka (Cambridge)* **8**, 10–15 (1944).
3. G. E. Andrews, F. G. Garvan, “Dyson’s crank of a partition”, *Bull. Am. Math. Soc.* **18**, No. 2, 167–171 (1988).
4. G. E. Andrews, B. C. Berndt, *Ramanujan’s Lost Notebook. Part III*, Springer, New York (2012).
5. S. Ramanujan, *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*, Narosa, New Delhi (1988).
6. F. J. Dyson, “A walk through Ramanujan’s garden”, In: *Ramanujan: Essays and Surveys*, 261–276 pp. Am. Math. Soc., Providence, RI (2001).
7. S. Ramanujan, “Some properties of $p(n)$, the number of partitions of n ”, In: *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **19**, 207–210 (1919).

8. K. Bringmann, W. Craig, K. Ono, *Ramanujan's Partition Generating Functions Modulo l* , Preprint, arXiv:2506.06101 (2025).
9. Q. Sun, "Vanishing properties of Kloosterman sums and Dyson's conjectures", *Ramanujan J.* **66**, No. 3, 50 (2025).
10. S. Ahlgren, M. Boylan, "Arithmetic properties of the partition function", *Invent. Math.* **153**, No. 3 (2003).
11. A. O. L. Atkin, P. Swinnerton-Dyer, "Some properties of partitions", *Proc. Lond. Math. Soc.* **3**, No. 1, 84–106 (1954).
12. D. Hickerson, E. T. Mortenson, "Dyson's ranks and Appell–Lerch sums", *Math. Ann.* **367**, 373–395 (2017).
13. K. Bringmann, A. Folsom, K. Ono, L. Rolin, *Harmonic Maass Forms and Mock Modular Forms: Theory and Applications*, Am. Math. Soc., Providence, RI (2017).
14. E. T. Mortenson, "On ranks and cranks of partitions modulo 4 and 8", *J. Combin. Theory, Ser. A* **161**, 51–80 (2019).
15. N. Borozenets, "Deviation of the rank and crank modulo 11", *Ramanujan J.* **64**, No. 4, 1357–1420 (2024).
16. F. G. Garvan, "Transformation properties for Dyson's rank function", *Trans. Am. Math. Soc.* **371**, No. 1, 199–248 (2019).
17. F. G. Garvan and R. Sarma, "New symmetries for Dyson's rank function", *Ramanujan J.* **65**, No. 4, 1883–1939 (2024).
18. J. N. O'Brien, *Some Properties of Partitions with Special Reference to Primes Other than 5, 7 and 11*, PhD Thesis, University College, Durham (1965).
19. S. H. Chan, N. Hong, Jerry, J. Lovejoy, "A mock theta function identity related to the partition rank modulo 3 and 9", *Int. J. Number Theory*, **17**, No. 2, 311–327 (2021).
20. F. G. Garvan, "New combinatorial interpretations of Ramanujan's partition congruences mod 5, 7 and 11", *Trans. Am. Math. Soc.* **305**, No. 1, 47–77 (1988).
21. A. O. L. Atkin, S. Hussain, "Some properties of partitions. II", *Trans. Am. Math. Soc.* **89**, No. 1, 184–200 (1958).
22. A. B. Ekin, "Inequalities for the crank", *J. Combin. Theory, Ser. A* **83**, No. 2, 283–289 (1998).
23. G. E. Andrews, R. Lewis, "The ranks and cranks of partitions moduli 2, 3, and 4", *J. Number Theory* **85**, No. 1, 74–84 (2000).
24. K. Bringmann, "Asymptotics for rank partition functions", *Trans. Am. Math. Soc.* **361**, No. 7, 3483–3500 (2009).
25. K. Bringmann, B. V. Pandey, "Biases among classes of rank-crank partitions (mod 11)", *J. Math. Anal. Appl.* **536**, No. 2, Article ID 128221 (2024).
26. K. Bringmann, B. Kane, "Inequalities for differences of Dyson's rank for all odd moduli", *Math. Res. Lett.* **17**, No. 5, 927–942 (2010).
27. J. M. Zapata Rolon, "Asymptotics of crank generating functions and Ramanujan congruences", *Ramanujan J.* **38**, 147–178 (2015).
28. Q. Sun, *Exact Formulae for Ranks of Partitions*, Preprint, arXiv:2406.06294 (2024).
29. G. E. Andrews, "The number of smallest parts in the partitions of n ", *J. Reine Angew. Math.* **624**, 133–142 (2008).
30. A. O. L. Atkin, F. G. Garvan, "Relations between the ranks and cranks of partitions", *Ramanujan J.* **7**, No. 1–3, 343–366 (2003).
31. G. Bilgici, "The crank of partitions mod 13", *Ramanujan J.* **30**, 403–424 (2013).
32. C. Bessenrodt, K. Ono, "Maximal multiplicative properties of partitions", *Ann. Comb.* **20**, 59–64 (2016).

33. E. Hou, M. Jagadeesan, “Dyson’s partition ranks and their multiplicative extensions”, *Ramanujan J.* **45**, 817–839 (2018).
34. J. Males, “Asymptotic equidistribution and convexity for partition ranks”, *Ramanujan J.* **54**, No. 2, 397–413 (2021).
35. A. Hamakiotes, A. Kriegman, W.-L. Tsai, “Asymptotic distribution of the partition crank”, *Ramanujan J.* **56**, No. 3, 803–820 (2021).
36. G. Cesana, W. Craig, J. Males, “Asymptotic equidistribution for partition statistics and topological invariants”, *J. Number Theory* **256**, 373–396 (2024).

Статья поступила в редакцию 15 июня 2025 г.
принята к публикации 18 июня 2025 г.

Е. Вл. Булинская

ПЛОТНОСТЬ ПОПУЛЯЦИИ ВНУТРИ ФРОНТА РАСПРОСТРАНЕНИЯ КАТАЛИТИЧЕСКОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ

В модели каталитического ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ исследуется, как концентрируются частицы внутри фронта распространения популяции, когда время неограниченно растет. Предполагается, что режим надкритический (мальтусовский параметр положителен), а хвосты скачка блуждания легкие, т.е. выполнено условие Крамера. Поскольку, как известно, в таком случае фронт растет асимптотически линейно по времени, то нами рассматриваются слои частиц внутри фронта, которые тоже растут линейно со временем, но с меньшей скоростью. Нами установлено, что число частиц в слое растет экспоненциально быстро, хотя и с показателем меньшим, чем мальтусовский параметр.

1. Введение

Ветвящееся случайное блуждание (ВСБ) как вероятностная модель, сочетающая случайные процессы размножения частиц и их перемещения в пространстве, возникла уже более полувека назад (см., например, [1, гл. 6, § 1]). С тех пор интерес к различным вариантам ВСБ не ослабевает, о чем свидетельствуют недавние публикации, например, [2]–[5]. Особое место в ряду моделей ВСБ занимают каталитические ВСБ (КВСБ), в которых размножение и гибель частиц могут происходить только в фиксированных точках пространства, содержащих «катализаторы», а вне их частицы совершают случайное блуждание без ветвления. В последние десятилетия целый ряд публикаций посвящен исследованию КВСБ по d -мерной целочисленной решетке $\mathbb{Z}^d$. Достаточно упомянуть работы [6]–[11] (см. библиографию там же).

В процессе исследования КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с конечным числом источников размножения и гибели частиц (источников ветвления) выяснилось (см., например, [12]), что асимптотическое по времени поведение как общего числа частиц, так и их локальных численностей существенно зависит от «пропорции» между характеристиками размножения, гибели и блуждания частиц. В результате в последней работе была предложена классификация КВСБ на надкритический, критический и докритический процессы в зависимости от значения перронова корня определенной матрицы. Оказалось, что только в надкритическом случае с положительной вероятностью наблюдается как общее, так и локальное выживание популяции (см., например, [13]), причем соответствующие численности частиц растут экспоненциально быстро с течением времени (скорость экспоненциального роста популяции традиционно называется мальтусовским параметром). Поэтому именно для надкритического КВСБ автором была поставлена и решена задача о скорости пространственного распространения популяции частиц, когда время неограниченно растет (см., например, [14]).

Работа выполнена в Математическом институте им. В. А. Стеклова при поддержке Российского научного фонда (грант № 24-11-00037).

Е. Вл. Булинская: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; bulinskaya@yandex.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 197–217 (2025).

Оказалось, что скорость и предельная форма фронта распространения популяции определяются тем, имеет ли скачок блуждания легкие хвосты распределения, умеренно тяжелые или тяжелые. В частности, в случае легких хвостов популяция частиц распространяется асимптотически линейно со временем (см. [15, 9] и [16]), и после линейной нормировки положений всех частиц их облако в пределе по времени представляет собой выпуклое множество в $\mathbb{R}^d$, поверхность которого называется предельной формой фронта распространения популяции.

Цель данной работы — изучить, как концентрируются частицы внутри фронта, т.е. исследовать численности частиц в точках решетки, координаты которых растут линейно со временем, но с меньшей скоростью, чем у частиц, образующих фронт популяции. Нам удалось найти, как асимптотическое поведение средних численностей таких частиц, так и доказать предельные теоремы об их распределении. Полученные результаты дополняют и обобщают результаты статьи [17], в которой рассматривается КВСБ с симметричным блужданием и бинарным делением частиц. Для некаталитического (однородного в пространстве) ВСБ такого рода результаты были установлены ранее в статье [18, теорема 2.4].

Данная статья имеет следующую структуру. В § 2 дается описание КВСБ, вводятся необходимые обозначения и формулируются основные результаты. Параграф 3 посвящен формулировкам и доказательствам вспомогательных результатов. Последний параграф содержит доказательства основных результатов.

2. Описание модели и основные результаты

Дадим описание рассматриваемой модели КВСБ по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, с произвольным конечным множеством катализаторов $W = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N\} \subset \mathbb{Z}^d$. Предполагаем, что все рассматриваемые случайные элементы заданы на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где Ω — пространство элементарных исходов ω . В зависимости от контекста, индекс $\mathbf{x}$ вероятности $\mathbb{P}_{\mathbf{x}}$ и математического ожидания $\mathbb{E}_{\mathbf{x}}$ обозначает стартовую точку $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$ процесса КВСБ или случайного блуждания (жирный шрифт у $\mathbf{x}$ подчеркивает, что величина $\mathbf{x}$, вообще говоря, векторнозначная).

Пусть в момент времени $t = 0$ имеется одна частица на решетке, расположенная в точке $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$. Если $\mathbf{z} \notin W$, то перемещение частицы до момента первого попадания во множество катализаторов W задается марковской цепью $\mathbf{S} = \{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ с состояниями из $\mathbb{Z}^d$. Мы рассматриваем пространственно-однородное случайное блуждание $\mathbf{S}$. Оно определяется инфинитезимальной матрицей $Q = (q(\mathbf{x}, \mathbf{y}))_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d}$, которая предполагается неразложимой и консервативной, т.е.

$$q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = q(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0}) = q(\mathbf{0}, \mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \sum_{\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d} q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (2.1)$$

где $q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ и $q := -q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in (0, +\infty)$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$. Если $\mathbf{z} \in W$ или частица впервые попала во множество W , например, в катализатор $\mathbf{w}_k$, $k = 1, \dots, N$, то частица проводит там случайное время, экспоненциально распределенное с параметром $\beta_k > 0$. Затем она мгновенно с вероятностью $\alpha_k \in [0, 1]$ производит случайное число ξ_k потомков, расположенных также в $\mathbf{w}_k$, и погибает. Иначе частица совершает скачок в точку $\mathbf{y}$ с вероятностью $-(1 - \alpha_k)q(\mathbf{w}_k, \mathbf{y})/q(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_k)$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{w}_k$, и продолжает случайное блуждание до очередного попадания во множество катализаторов. Новые частицы ведут себя как независимые копии родительской частицы. Все имеющиеся частицы эволюционируют независимо друг от друга.

Обозначим $f_k(s) := \mathbb{E} s^{\xi_k}$, $s \in [0, 1]$, вероятностную производящую функцию случайной величины ξ_k , и пусть $m_k := \mathbb{E} \xi_k = f'_k(1) < \infty$, $k = 1, \dots, N$.

В [12] предложена классификация, согласно которой КВСБ называется надкритическим, критическим или докритическим, если соответственно перронов корень, т.е. наибольшее положительное собственное значение матрицы

$$D = (\delta_{i,j} \alpha_i m_i + (1 - \alpha_i) F_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j}(\infty))_{i,j=1}^N \quad (2.2)$$

больше 1, равен 1 или меньше 1. Здесь символ Кронекера $\delta_{i,j} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{i,j} = 0$ иначе. Число $F_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j}(\infty)$ есть вероятность попадания случайного блуждания в точку $\mathbf{w}_j$ при старте из точки $\mathbf{w}_i$, причем без посещения по пути множества $W_j := W \setminus \{\mathbf{w}_j\}$, где $i, j = 1, \dots, N$ (см.,

например, статью [19] или § 3 далее). В [13] установлено, что только в надкритическом КВСБ общие и локальные численности частиц растут экспоненциально быстро, когда время стремится к бесконечности (скорость экспоненциального роста задается мальтусовским параметром $\nu > 0$), а вероятности глобального и локального выживания положительны.

В данной статье мы рассматриваем случай легких хвостов распределения скачка блуждания, т.е. считаем выполненным условие Крамера, состоящее в том, что функция

$$\Psi(\mathbf{s}) := \sum_{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d} e^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle} q(\mathbf{0}, \mathbf{x}) = q(\mathbb{E} e^{\langle \mathbf{s}, \mathbf{Y} \rangle} - 1) < \infty \quad (2.3)$$

принимает конечные значения при всех $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$, скалярное произведение в $\mathbb{R}^d$ обозначается $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Здесь и далее случайная величина $\mathbf{Y}$ имеет такое же распределение, как величина одного скачка блуждания $\mathbf{S}$. А именно, $P(\mathbf{Y} = \mathbf{y}) = q(\mathbf{0}, \mathbf{y})/q$, $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$.

Введем также множество

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^d : \Psi(\mathbf{r}) = \nu\}.$$

В статье [16] установлено, что популяция частиц в надкритическом КВСБ с мальтусовским параметром ν и легкими хвостами скачка блуждания распространяется в пространстве асимптотически линейно по времени, причем предельная форма фронта распространения популяции есть выпуклое множество

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle = \nu \text{ для одного } \mathbf{r} \in \mathcal{R}, \text{ и } \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle < \nu \text{ для остальных } \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}.$$

Его также можно задать следующим образом: $\mathcal{P} = \{\mathbf{z}(\mathbf{r}) : \mathbf{r} \in \mathcal{R}\}$, где

$$\mathbf{z}(\mathbf{r}) = \frac{\nu}{\langle \nabla \Psi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \rangle} \nabla \Psi(\mathbf{r})$$

и ∇ , как обычно, обозначает градиент. Другими словами, для почти всех $\omega \in \Omega$ лишь конечное число частиц, координаты которых линейно нормированы, лежит вне любой внешней ε -окрестности множества $\mathcal{P}$, и, наоборот, при условии невырождения популяции бесконечно много частиц с линейно нормированными координатами лежит вне любой внутренней ε -окрестности множества $\mathcal{P}$. В этом смысле уместна аналогия с классическим законом повторного логарифма в форме Штрассена.

Как и в [20, 16, 9], мы дополнительно предполагаем, что параметры экспоненциального распределения времен ожидания до блуждания, т.е. времен пребывания частицами в различных точках до совершения скачков (см., например, [21]), одинаковы во всех точках $\mathbb{Z}^d$, в том числе и в катализаторах, поэтому

$$q = \beta_k(1 - \alpha_k), \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.4)$$

Кроме того, мы будем использовать предположение, известное как $L \log L$ -условие (см., например, [22, гл. 5, теорема 4]), которое в наших обозначениях записывается следующим образом:

$$\mathbb{E} \xi_k \ln(\xi_k + 1) < \infty, \quad k = 1, \dots, N. \quad (2.5)$$

Пусть $Z(t)$ — это случайное множество частиц, существующих в КВСБ в момент времени $t \geq 0$. Для частицы $v \in Z(t)$ обозначим $\mathbf{X}^v(t) = (X_1^v(t), \dots, X_d^v(t))$ ее положение в момент $t \geq 0$.

Положим $\mu(t; B) = \sharp\{v \in Z(t) : \mathbf{X}^v(t) \in B\}$, т.е. $\mu(t; B)$ — число частиц, существующих в КВСБ в момент времени t и расположенных в это время во множестве $B \subset \mathbb{R}^d$.

Напомним определение функции $\varphi(\lambda; \mathbf{x})$, $\lambda \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, возникавшей ранее в теореме 4 статьи [13] в качестве преобразования Лапласа предельного распределения нормированных локальных и общих численностей частиц, совершающих КВСБ по $\mathbb{Z}^d$. При $\mathbf{x} \in W$ эта функция задается как решение системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda; \mathbf{w}_j) = & \alpha_j \int_0^\infty f_j(\varphi(\lambda e^{-\nu u}; \mathbf{w}_j)) dG_j(u) + (1 - \alpha_j) \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \varphi(\lambda e^{-\nu u}; \mathbf{w}_k) dG_{j,k}(u) \\ & + (1 - \alpha_j) \left(1 - \sum_{k=1}^N w_k F_{\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k}(\infty) \right), \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (2.6)$$

а при $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d \setminus W$ функция $\varphi(\lambda; \mathbf{x})$, $\lambda \geq 0$, имеет вид

$$\varphi(\lambda; \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N \int_0^\infty \varphi(\lambda e^{-\nu u}; \mathbf{w}_k) d_{W_k} F_{\mathbf{x}, \mathbf{w}_k}(u) + 1 - \sum_{k=1}^N w_k F_{\mathbf{x}, \mathbf{w}_k}(\infty). \quad (2.7)$$

Здесь $G_j(t) := 1 - e^{-\beta_j t}$, $t \geq 0$, и $G_{j,k}(t) := G_j * w_k \bar{F}_{\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k}(t)$, $t \geq 0$, $j, k = 1, \dots, N$, где символ $*$ обозначает операцию свертки. В свою очередь, $w_k \bar{F}_{\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k}(t)$, $t \geq 0$, является функцией распределения времени первого достижения точки $\mathbf{w}_k$ случайным блужданием $\mathbf{S}$ после выхода из стартовой точки $\mathbf{w}_j$ при запрете на посещение состояний W_k , а $w_k F_{\mathbf{x}, \mathbf{w}_k}(t)$, $t \geq 0$, — функция распределения времени первого достижения точки $\mathbf{w}_k$ случайным блужданием $\mathbf{S}$, когда стартовая точка блуждания $\mathbf{S}$ есть $\mathbf{x}$, при запрете на посещение состояний W_k (про времена достижения с запретами см. § 3, а также, например, [19]).

В силу [23, лемма 7] при выполнении условий (2.1) и (2.3) система (2.6) имеет единственное решение $\varphi(\cdot; \mathbf{w}_j)$, $j = 1, \dots, N$, в классе функций $\mathcal{C}_\theta$ для каждого $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$, $\theta_i > 0$, $i = 1, \dots, N$, где

$$\mathcal{C}_\theta := \left\{ (\varphi(\cdot; \mathbf{w}_1), \dots, \varphi(\cdot; \mathbf{w}_N)) : \varphi(\cdot; \mathbf{w}_i) \text{ отображает } [0, \infty) \text{ на } (0, 1], \right. \\ \left. \varphi(0; \mathbf{w}_i) = 1 \text{ и } \lim_{\lambda \rightarrow 0+} \frac{1 - \varphi(\lambda; \mathbf{w}_i)}{\lambda} = \theta_i, i = 1, \dots, N \right\}.$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат данной работы, описывающий предельное распределение числа частиц во множестве $B_{\mathbf{r}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle > ct\}$. Здесь параметр $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ есть нормаль к полупространству в $\mathbb{R}^d$, число частиц в котором нас интересует. При этом параметр $c \in (0, \nu]$ характеризует удаленность рассматриваемого слоя частиц с линейно нормированными координатами от начала координат. Заметим, что в случае $c < \nu$ множества $B_{\mathbf{r}}$ и $t\mathcal{P}$ имеют непустое пересечение. Если же $c = \nu$, то полупространство $B_{\mathbf{r}}$ касается множества $t\mathcal{P}$ в точке $t\mathbf{z}(\mathbf{r})$. Если $c > \nu$, то для почти всех $\omega \in \Omega$ во множестве $B_{\mathbf{r}}$ не окажется частиц, начиная с некоторого момента времени, зависящего от ω .

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия (2.1), (2.3)–(2.5) и $\mathbf{E}\mathbf{Y} = \mathbf{0}$ для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ с мальтусовским параметром ν и со стартовой точкой $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Тогда для фиксированных значений $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$ и $c \in (0, \nu]$, а также для каждого $\lambda > 0$ имеет место соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{x}} \exp \left\{ -\lambda \frac{\mu(t; B_{\mathbf{r}})}{e^{\nu t - [ct]}} \right\} = \varphi(\lambda; \mathbf{x}),$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть числа.

Таким образом, из теоремы 2.1 следует, что число частиц во множестве $B_{\mathbf{r}}$, нормированное экспоненциальной функцией $e^{\nu t - [ct]}$, при $c < \nu$ имеет нетривиальное предельное распределение, преобразование Лапласа которого есть функция φ , задаваемая формулами (2.6) и (2.7). Обратим внимание, что при $c = \nu$ нормировочная функция $e^{\nu t - [ct]}$ принимает значения от 1 до e при $t \rightarrow \infty$. Следует отметить, что согласно теореме 4 статьи [13] число частиц, находящихся в произвольной фиксированной точке $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$ в момент времени t , нормированное функцией порядка $e^{\nu t}$, также имеет предельное распределение с преобразованием Лапласа φ . Тем самым делаем вывод, что асимптотически по времени число частиц в точках внутри фронта есть экспоненциальная функция времени с показателем, соответственно линейно меняющимся от ν в начале координат к 0 на границе предельной формы фронта $\mathcal{P}$.

В виде следствия теоремы 2.1 выделим случай $d = 1$, когда в качестве множества $B_{\mathbf{r}}$ выступает полупрямая $B = (ct, +\infty)$, параметр $c \in (0, \nu/r]$, а значение $r \in \mathcal{R}$ таково, что $r > 0$.

Следствие 2.1. Если справедливы условия (2.1), (2.3)–(2.5) и $\mathbf{E}\mathbf{Y} = 0$ для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}$ с мальтусовским параметром ν и со стартовой точкой $x \in \mathbb{Z}$, то для фиксированного значения $c \in (0, \nu/r]$ и для каждого $\lambda > 0$ верна формула

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_x \exp \left\{ -\lambda \frac{\mu(t; (ct, +\infty))}{e^{\nu t - r[ct]}} \right\} = \varphi(\lambda; x).$$

Следует отметить, что далее в лемме 3.10 и ее многомерном аналоге находится значение

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - \mathbf{E}_{\mathbf{w}_j} \exp\{-\lambda \frac{\mu(t; B_{\mathbf{r}})}{e^{\nu t - [ct]}}\})/\lambda,$$

которое мы обозначим $\theta_j > 0$, $j = 1, \dots, N$, где $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$. Поэтому в силу теоремы 2.1 предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_{\mathbf{w}_j} \exp\{-\lambda \frac{\mu(t; B_{\mathbf{r}})}{e^{\nu t - [ct]}}\}$$

однозначно определен как j -я компонента, $j = 1, \dots, N$, решения $(\varphi(\cdot; \mathbf{w}_1), \dots, \varphi(\cdot; \mathbf{w}_N))$ системы (2.6) в классе $\mathcal{C}_\theta$.

Доказательства основных результатов опираются на анализ выведенных нами систем нелинейных интегральных уравнений типа свертки и теорию больших уклонений для случайных блужданий, а также используют преобразования Лапласа и Лежандра — Фенхеля, времена достижения с запретами и многомерную теорию восстановления. Вначале проводится доказательство следствия 2.1, аргументы которого затем переносятся на общий случай $d \in \mathbb{N}$, и тем самым устанавливается теорема 2.1. На этом пути приходится рассматривать вместо множества $B = (ct, +\infty)$ множества более общего вида $(ct + y, +\infty)$, $y \geq 0$. Поэтому следствие 2.1 может быть переформулировано в более общей постановке, когда $B = (ct + y, +\infty)$. При этом промежуточным результатом доказательства является важное, представляющее самостоятельный интерес утверждение, что асимптотически по времени среднее число частиц в множестве $B = (ct + y, +\infty)$ растёт экспоненциально быстро с показателем $\nu - rc$ (см. далее лемму 3.6). Те же замечания относятся к формулировке теоремы 2.1 и ее промежуточным результатам.

3. Вспомогательные результаты

Прежде всего напомним определение (см., например, [19]) времен достижения с запретами, которые нам понадобятся в дальнейшем для вывода основных уравнений. Положим

$$\tau_{\mathbf{x}} := \inf\{t > 0 : \mathbf{S}(t) \neq \mathbf{S}(0)\} \mathbb{I}(\mathbf{S}(0) = \mathbf{x}),$$

т.е. введем момент выхода случайного блуждания $\mathbf{S}$ из стартовой точки $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Как обычно, $\mathbb{I}(A)$ — индикатор события $A \in \mathcal{F}$. Обозначим

$${}_H\tau_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} := \inf\{t \geq \tau_{\mathbf{x}} : \mathbf{S}(t) = \mathbf{y}, \mathbf{S}(u) \notin H, \tau_{\mathbf{x}} < u < t\} \mathbb{I}(\mathbf{S}(0) = \mathbf{x})$$

время (первого) достижения случайным блужданием $\mathbf{S}$ точки $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^d$ при запрете на посещение множества $H \subset \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{y} \notin H$, когда блуждание стартует в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$. Если траектория случайного блуждания $\mathbf{S}(\cdot, \omega)$ после старта из точки $\mathbf{x}$ проходит через множество H , прежде чем достигнет точки $\mathbf{y}$, то естественным образом полагаем ${}_H\tau_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\omega) = \infty$. Отметим, что ${}_{W_j}F_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j}(\infty) = P_{\mathbf{w}_i}(W_j \tau_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j} < \infty)$. Аналогично пусть

$${}_H\bar{\tau}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} := \inf\{t \geq 0 : \mathbf{S}(t + \tau_{\mathbf{x}}) = \mathbf{y}, \mathbf{S}(u) \notin H, \tau_{\mathbf{x}} < u < t + \tau_{\mathbf{x}}\} \mathbb{I}(\mathbf{S}(0) = \mathbf{x})$$

есть время, прошедшее после выхода случайного блуждания из стартовой точки $\mathbf{x}$ до момента первого попадания в точку $\mathbf{y}$, для траекторий случайного блуждания, не посетивших за это время множество $H \subset \mathbb{Z}^d$. Иначе положим ${}_H\bar{\tau}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \infty$. Расширенная случайная величина ${}_H\bar{\tau}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}$ называется *временем достижения* точки $\mathbf{y}$ после выхода из стартовой точки $\mathbf{x}$ при запрете на посещение множества $H \subset \mathbb{Z}^d$ (см., например, [19]). Пусть ${}_H\bar{F}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(t)$, $t \geq 0$, — несобственная функция распределения этой расширенной случайной величины, и ${}_H\bar{F}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(\infty) := \lim_{t \rightarrow \infty} {}_H\bar{F}_{\mathbf{x}, \mathbf{y}}(t)$. Если множество запретов H представляет собой пустое множество, то соответствующий индекс у случайных величин и их функций распределения опускается, а времена достижения с запретами называются просто временами достижения (без запретов).

Введем функцию $G_0(t) := 1 - e^{-qt}$, которая в силу условия (2.1) совпадает с вероятностью $P_{\mathbf{x}}(\tau_{\mathbf{x}} \leq t)$ для каждого $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, $t \geq 0$. Напомним, что $G_j(t) = 1 - e^{-\beta_j t}$, $t \geq 0$. Положим также $\delta_{\mathbf{x}}(B) = 1$ при $\mathbf{x} \in B$, и пусть $\delta_{\mathbf{x}}(B) = 0$ в ином случае.

Определим $m(t; \mathbf{x}, B) := \mathbf{E}_{\mathbf{x}} \mu(t; B)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, $t \geq 0$, $B \subset \mathbb{R}^d$. Иначе говоря, рассматриваем среднее число частиц, находящихся в КВСБ в момент времени t во множестве B . Предполагаем,

что $B \cap W = \emptyset$. В следующей лемме с помощью времен достижения с запретами выводится система линейных интегральных уравнений относительно $m(\cdot; \mathbf{w}_i, B)$, $i = 1, \dots, N$.

Лемма 3.1. Пусть для КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ справедливо соотношение (2.1). Тогда исследование функции $m(\cdot; \mathbf{x}, B)$ при $\mathbf{x} \notin W$ можно свести к изучению N функций $m(\cdot; \mathbf{w}_j, B)$, $j = 1, \dots, N$, с помощью следующего соотношения:

$$m(t; \mathbf{x}, B) = \delta_{\mathbf{x}}(B)(1 - G_0(t)) + \sum_{j=1}^N \int_0^t m(t-u; \mathbf{w}_j, B) d_{W_j} F_{\mathbf{x}, \mathbf{w}_j}(u) + P_{\mathbf{x}}(\mathbf{S}(t) \in B, t \geq \tau_{\mathbf{x}}, \mathbf{S}(u) \notin W, 0 \leq u \leq t). \quad (3.1)$$

Более того, для функций $m(\cdot; \mathbf{w}_j, B)$, $j = 1, \dots, N$, справедлива система уравнений

$$m(t; \mathbf{w}_j, B) = \alpha_j m_j \int_0^t m(t-u; \mathbf{w}_j, B) dG_j(u) + (1 - \alpha_j) \sum_{k=1}^N \int_0^t m(t-u; \mathbf{w}_k, B) d(G_j *_{W_k} \bar{F}_{\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k}(u)) + (1 - \alpha_j) \sum_{\mathbf{y} \notin W} \frac{q(\mathbf{w}_j, \mathbf{y})}{q} \int_0^t P_{\mathbf{y}}(\mathbf{S}(t-u) \in B, \mathbf{S}(v) \notin W, 0 \leq v \leq t-u) dG_j(u). \quad (3.2)$$

В частном случае, когда $N = 1$ и $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, имеем одно уравнение

$$m(t; \mathbf{0}, B) = \alpha_1 m_1 \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, B) dG_1(u) + (1 - \alpha_1) \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, B) d(G_1 * \bar{F}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(u)) + (1 - \alpha_1) \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \frac{q(\mathbf{0}, \mathbf{y})}{q} \int_0^t P_{\mathbf{y}}(\mathbf{S}(t-u) \in B, \mathbf{S}(v) \neq \mathbf{0}, 0 \leq v \leq t-u) dG_1(u). \quad (3.3)$$

Доказательство. Для вывода уравнения (3.1) рассмотрим все возможные эволюции начальной частицы в КВСБ. Если до момента t частица не покинула стартовую точку $\mathbf{x}$, что соответствует первому слагаемому в правой части (3.1) и происходит с вероятностью $P(\tau_{\mathbf{x}} > t) = 1 - G_0(t)$, то $\mu(\omega, t; B)$ есть 1 в случае, если $\mathbf{x} \in B$, и равняется 0 иначе. Если же начальная частица до момента t покинула стартовую точку $\mathbf{x}$, то возникают два взаимоисключающих варианта дальнейшего развития событий: либо в момент $u \leq t$ частица попадает в один из катализаторов, например, $\mathbf{w}_j$, $j = 1, \dots, N$, (второе слагаемое в (3.1)), либо продолжает блуждание до момента t , не посещая катализаторы (третье слагаемое в (3.1)). В первом случае после попадания в катализатор $\mathbf{w}_j$ частица ведет себя так же, как если бы отсчет времени начался с момента, когда частица оказалась в точке $\mathbf{w}_j$. При этом ее дальнейшая эволюция не зависела бы от того, как она блуждала ранее. Второй случай вносит ненулевой вклад в рассматриваемую функцию $m(t; \mathbf{x}, B)$, только если в момент времени t блуждающая частица оказалась во множестве B , т.е. $\mathbf{S}(t) \in B$.

Когда стартовая точка $\mathbf{x}$ совпадает с одним из катализаторов, например, $\mathbf{w}_j$, $j = 1, \dots, N$, то возникает больше вариантов эволюции начальной частицы. Во-первых, после случайного времени ожидания с функцией распределения $G_j(\cdot)$ начальная частица может выбрать ветвление и поделиться в среднем на m_j потомков. Напомним, что новые частицы ведут себя как независимые копии родительской частицы. Во-вторых, после времени ожидания начальная частица может выбрать блуждание и с вероятностью $(1 - \alpha_j)$ покинуть катализатор $\mathbf{w}_j$ и затем снова попасть в катализатор, например, $\mathbf{w}_k$ через время $_{W_k} \bar{\tau}_{\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k}$. Дальнейшее ее поведение происходит так же, как если бы частица стартовала в $\mathbf{w}_k$, вне зависимости от блуждания до этого момента. В-третьих, после времени ожидания начальная частица может выбрать блуждание и с вероятностью $(1 - \alpha_j)q(\mathbf{w}_j, \mathbf{y})/q$ совершить скачок в точку $\mathbf{y} \neq \mathbf{w}_j$, $\mathbf{y} \notin W$, после чего уже не возвращаться во множество катализаторов до момента t . Три перечисленных случая объясняют соответственно три основных слагаемых в правой части соотношения (3.2).

Уравнение (3.3) вытекает непосредственно из установленного соотношения (3.2). Лемма 3.1 полностью доказана. $\square$

Обозначим последнее слагаемое в соотношении (3.2) функцией $J_j^{(N)}(t; B)$, $j = 1, \dots, N$, $t \geq 0$, $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_N \notin B$, а в соотношении (3.3) — функцией $J(t; B)$, $t \geq 0$. Заметим, что введенная функция $J(t; B)$, $t \geq 0$, совпадает с функцией $I(t; u)$, $t \geq 0$, из леммы 1 статьи [23] с точностью до замены события $\mathbf{S}(t) \in B$ в определении функции J на событие $S(t) > u$. Другими словами, определение функции J покрывает определение функции I , причем две функции совпадают при $B = (u, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Анализ вывода альтернативного представления для функции I , полученного в [23, лемма 2] (в общем случае, когда $N \geq 1$, см. доказательство теоремы 1 статьи [23]), показывает, что для функции J имеет место аналогичная формула

$$\begin{aligned} \frac{qJ(t; B)}{(1 - \alpha_1)\beta_1} &= P_0(\mathbf{S}(t) \in B) - \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t - s) \in B) dF_{0,0}(s) \\ &\quad - \frac{\beta_1 - q}{\beta_1} \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t - s) \in B) d(G_1(s) - G_1 * F_{0,0}(s)). \end{aligned}$$

Более того, при выполнении условия (2.4) это представление может быть оформлено в рамках следующей леммы.

Лемма 3.2. *Если для КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ справедливы условия (2.1) и (2.4), то*

$$\begin{aligned} J(t; B) &= P_0(\mathbf{S}(t) \in B) - \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t - s) \in B) dF_{0,0}(s) \\ &\quad - \alpha_1 \int_0^t P_0(\mathbf{S}(t - s) \in B) d(G_1(s) - G_1 * F_{0,0}(s)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

В общем случае, когда $N \geq 1$, при тех же условиях верно, что

$$\begin{aligned} J_j^{(N)}(t; B) &= P_{\mathbf{w}_j}(\mathbf{S}(t) \in B) - \sum_{k=1}^N \int_0^t P_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{S}(t - u) \in B) d_{W_k} F_{\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k}(u) \\ &\quad - \alpha_j \int_0^t P_{\mathbf{w}_j}(\mathbf{S}(t - u) \in B) dG_j(s) + \alpha_j \sum_{k=1}^N \int_0^t P_{\mathbf{w}_k}(\mathbf{S}(t - u) \in B) dG_j *_{W_k} F_{\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_k}(u). \end{aligned}$$

Теперь мы выведем нелинейные интегральные уравнения относительно производящих функций $F(s, t; \mathbf{x}, B) := E_{\mathbf{x}} s^{\mu(t; B)}$, $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, численностей $\mu(t; B)$ частиц во множестве B в момент времени t . После этого перепишем данные уравнения в терминах функций $Q(s, t; \mathbf{x}, B) := 1 - F(s, t; \mathbf{x}, B)$, $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$.

Лемма 3.3. *Пусть для КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ выполнено предположение (2.1). Тогда для всех $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x} \notin W$, справедливо представление*

$$\begin{aligned} Q(s, t; \mathbf{x}, B) &= \delta_{\mathbf{x}}(B)(1 - s)(1 - G_0(t)) + \sum_{j=1}^N \int_0^t Q(s, t - u; \mathbf{w}_j, B) d(G_0 *_{W_j} \bar{F}_{\mathbf{x}, \mathbf{w}_j}(u)) \\ &\quad + (1 - s)P_{\mathbf{x}}(\mathbf{S}(t) \in B, t \geq \tau_{\mathbf{x}}, \mathbf{S}(u) \notin W, 0 \leq u \leq t). \end{aligned}$$

Если же $\mathbf{x} \in W$, то при $i = 1, \dots, N$ имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} Q(s, t; \mathbf{w}_i, B) &= \alpha_i \int_0^t (1 - f_i(1 - Q(s, t - u; \mathbf{w}_i, B))) dG_i(u) \\ &\quad + (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^N \int_0^t Q(s, t - u; \mathbf{w}_j, B) d(G_i *_{W_j} \bar{F}_{\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j}(u)) + J_i^{(N)}(t; B)(1 - s). \end{aligned} \quad (3.5)$$

В частности, когда $N = 1$ и $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$, система уравнений сводится к одному уравнению

$$\begin{aligned} Q(s, t; \mathbf{0}, B) &= \alpha_1 \int_0^t (1 - f_1(1 - Q(s, t - u; \mathbf{0}, B))) dG_1(u) \\ &+ (1 - \alpha_1) \int_0^t Q(s, t - u; \mathbf{0}, B) d(G_1 * \bar{F}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(u)) + J(t; B)(1 - s). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Доказательство. Выведем только уравнение (3.6), поскольку остальные утверждения леммы 3.3 устанавливаются по той же схеме. Аналогично выводу уравнения (3.3) можно получить следующее уравнение относительно функции $F(s, t; \mathbf{0}, B)$, $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} F(s, t; \mathbf{0}, B) &= 1 - G_1(t) + \alpha_1 \int_0^t f_1(F(s, t - u; \mathbf{0}, B)) dG_1(u) \\ &+ (1 - \alpha_1) \int_0^t F(s, t - u; \mathbf{0}, B) d(G_1 * \bar{F}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(u)) + J(t; B)s \\ &+ (1 - \alpha_1) \sum_{\mathbf{y} \neq \mathbf{0}} \frac{q(\mathbf{0}, \mathbf{y})}{q} \int_0^t P_{\mathbf{y}}(\mathbf{S}(t - u) \notin B, \mathbf{S}(v) \neq \mathbf{0}, 0 \leq v \leq t - u) dG_1(u). \end{aligned}$$

Перепишем последнее равенство в терминах функции $Q(s, t; \mathbf{0}, B)$, $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} Q(s, t; \mathbf{0}, B) &= (1 - \alpha_1)G_1(t) + \alpha_1 \int_0^t (1 - f_1(1 - Q(s, t - u; \mathbf{0}, B))) dG_1(u) \\ &- (1 - \alpha_1)G_1 * \bar{F}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(t) + (1 - \alpha_1) \int_0^t Q(s, t - u; \mathbf{0}, B) d(G_1 * \bar{F}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(u)) - J(t; B)s - J(t; \mathbb{R}^d \setminus B). \end{aligned}$$

Последнее соотношение влечет справедливость требуемого уравнения (3.6) в силу очевидного тождества

$$(1 - \alpha_1) \int_0^t (1 - \bar{F}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(t - u)) dG_1(u) = J(t; B) + J(t; \mathbb{R}^d \setminus B), \quad t \geq 0.$$

Лемма 3.3 доказана. □

В силу лемм 3.1 и 3.3 далее достаточно рассматривать случай $\mathbf{x} \in W$ и, следовательно, $\mathbf{x} \notin B$. Более того, временно сосредоточимся на ситуации, когда имеется один катализатор, расположенный в начале координат, т.е. $N = 1$ и $\mathbf{w}_1 = \mathbf{0}$.

Как было отмечено ранее, знак $*$ означает операцию свертки двух функций распределения. В дальнейшем, будем считать, что F^{*k} есть k -я свертка функции распределения F , $k \in \mathbb{Z}_+$. Кроме того, положим $G(t) := \alpha_1 m_1 G_1(t) + (1 - \alpha_1) G_1 * \bar{F}_{\mathbf{0}, \mathbf{0}}(t)$, $t \geq 0$.

Лемма 3.4. Пусть для КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ справедливо соотношение (2.1). Тогда для всех $t \geq 0$ имеет место следующее равенство:

$$m(t; \mathbf{0}, B) = \int_0^t J(t - u; B) d\left(\sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u)\right). \quad (3.7)$$

Доказательство. С помощью функций G и J уравнение (3.3) можно переписать в виде

$$m(t; \mathbf{0}, B) = \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, B) dG(u) + J(t; B).$$

Производя n раз итерацию полученного соотношения, приходим к формуле

$$m(t; \mathbf{0}, B) = \int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, B) dG^{*(n+1)}(u) + \int_0^t J(t-u; B) d \sum_{k=0}^n G^{*k}(u).$$

Для каждого фиксированного t имеем $G^{*n}(t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, например, в силу леммы 22 из [24]. Отсюда следует, что слагаемое $\int_0^t m(t-u; \mathbf{0}, B) dG^{*(n+1)}(u)$ пренебрежимо мало при $n \rightarrow \infty$. Поэтому последнее тождество можно переписать в требуемом виде (3.7). Лемма 3.4 доказана. $\square$

Из выведенного при доказательстве леммы 3.3 уравнения вытекает полезное неравенство, содержащееся в следующем утверждении.

Лемма 3.5. Если для КВСБ по $\mathbb{Z}^d$ выполнено соотношение (2.1), то при всех $t \geq 0$ и $s \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$Q(s, t; \mathbf{0}, B) \leq (1-s) \int_0^t J(t-u; B) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u).$$

Доказательство. В силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях, примененной к функции f_1 , имеет место соотношение $1 - f_1(1-s) \leq m_1 s$ для любого $s \in [0, 1]$. Поэтому с помощью уравнения (3.6) получаем, что

$$Q(s, t; \mathbf{0}, B) \leq \int_0^t Q(s, t-u; \mathbf{0}, B) dG(u) + (1-s)J(t; B).$$

Итерируя это неравенство k раз, приходим к оценке

$$Q(s, t; \mathbf{0}, B) \leq \int_0^t Q(s, t-u; \mathbf{0}, B) dG^{*(k+1)}(u) + (1-s) \int_0^t J(t-u; B) d \sum_{j=0}^k G^{*j}(u).$$

Снова обращаясь к лемме 22 из [24], заключаем, что $G^{*k}(t) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ и, следовательно, слагаемое $\int_0^t Q(s, t-u; \mathbf{0}, B) dG^{*(k+1)}(u)$ пренебрежимо мало при больших значениях k . Таким образом, лемма 3.5 доказана. $\square$

Следствием лемм 3.4 и 3.5 является важное соотношение

$$Q(s, t; \mathbf{0}, B) \leq (1-s)m(t; \mathbf{0}, B), \quad s \in [0, 1], \quad t \geq 0. \quad (3.8)$$

Теперь сосредоточимся на случае $d = 1$, после чего обобщим полученные результаты на многомерную решетку $\mathbb{Z}^d$ при $d > 1$. Напомним, что согласно [9] в надкритическом КВСБ по целочисленной прямой максимум популяции в момент времени t , нормированный множителем t^{-1} , сходится при $t \rightarrow \infty$ почти наверное к постоянной ν/r , где значение $r > 0$ таково, что $\Psi(r) = \nu$. Пока не оговорено иное, будем рассматривать множества $B = B(t, y) \subset \mathbb{R}$ вида $(ct + y, +\infty)$, где параметр $c \in (0, \nu/r]$, а $y \in \mathbb{R}$.

Лемма 3.6. Пусть для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}$ с мальтусовским параметром ν выполнены условия (2.1), (2.3) и (2.4), а также считаем, что $EY = 0$. Тогда при каждом фиксированном $c \in (0, \nu/r]$ и $y \in \mathbb{R}$ справедлива формула:

$$m(t; \mathbf{0}, B(t, y)) \sim C_0 e^{\nu t - r \lceil ct + y \rceil}, \quad t \rightarrow \infty,$$

где $[x]$ обозначает ближайшее целое число, строго большее числа $x \in \mathbb{R}$, а постоянная C_0 имеет вид

$$C_0 := \frac{(1 - F_{0,0}^*(\nu))(1 - \alpha_1 G_1^*(\nu))}{(1 - e^{-r})\Psi'(r) \int_0^\infty s e^{-\nu s} dG(s)}.$$

Доказательство. Представление (3.7) позволяет использовать схему доказательства леммы 3 статьи [20] для получения леммы 3.6. Поскольку в упомянутой лемме 3 рассматривался лишь пограничный случай $c = \nu/r$, мы обсудим только основные этапы доказательства для более общего случая $c \in (0, \nu/r]$.

Во-первых, аналогичным образом мы доказываем, что для каждого фиксированного $c \in (0, \nu/r)$ и $y \in \mathbb{R}$, а также для любого $\varepsilon \in (0, \theta_0 - c)$, где $\theta_0 := \Psi'(r) > \nu/r$, справедливо соотношение

$$\int_{\Gamma(t)} J(t - u; B(t, y)) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) = e^{(\nu - cr)t} o(1), \quad t \rightarrow \infty.$$

Здесь $\Gamma(t) := [0, t] \setminus [t - tc(\theta_0 - \varepsilon)^{-1}, t - tc(\theta_0 + \varepsilon)^{-1}] \subset \mathbb{R}$, $t \geq 0$. Для этого мы также вводим неотрицательную функцию

$$V(t, u) := \Lambda\left(\frac{ct + y}{t - u}\right) - r \frac{ct + y}{t - u} + \nu, \quad t > u, \quad u \geq 0,$$

где $\Lambda(\vartheta) := \sup_{s \in \mathbb{R}} (\vartheta s - \Psi(s))$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, называется *преобразованием Лежандра — Фенхеля* (см., например, [25, гл. 6, § 1]) функции $\Psi(s)$, $s \in \mathbb{R}$, и, как несложно проверить, является функцией уклонений случайной величины $S(1)$, т.е.

$$\Lambda(\vartheta) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (\vartheta s - \ln E_0 e^{sS(1)}), \quad \vartheta \in \mathbb{R}.$$

Во-вторых, как в [20, лемма 3], проверяем, что интеграл

$$\int_{t - ct(\theta_0 - \varepsilon)^{-1}}^{t - ct(\theta_0 + \varepsilon)^{-1}} J(t - u; B(t, y)) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u)$$

асимптотически эквивалентен интегралу Лапласа

$$t(1 - F_{0,0}^*(\nu))(1 - \alpha_1 G_1^*(\nu)) \int_{c/(\theta_0 + \varepsilon)}^{c/(\theta_0 - \varepsilon)} \frac{C_1 e^{-t(v\Lambda(c/v + \rho/v) - \nu(1 - v))}}{(1 - e^{-\lambda(c/v + \rho/v)}) \sqrt{2\pi v D(c/v + \rho/v)}} dv,$$

чье асимптотическое поведение далее исследуем с помощью теоремы 2.1 из [26, гл. 2, § 2]. Здесь

$$(C_1)^{-1} := \int_0^\infty s e^{-\nu s} dG(s),$$

$\rho = \rho(t) := (y + 1 - \{ct + y\})/t$ — дополнительный параметр в интеграле Лапласа, $\lambda(\vartheta) = \Lambda'(\vartheta) > 0$, когда $\vartheta > ES(1) = qEY$, а $D(\vartheta) := \Psi''(s)|_{s=\lambda(\vartheta)}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, — дисперсия некоторой случайной величины. Функция $H^*(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, является преобразованием Лапласа функции распределения $H(t)$, $t \geq 0$, с носителем на неотрицательной полуоси, т.е.

$$H^*(\lambda) := \int_{0-}^\infty e^{-\lambda t} dH(t).$$

При этом заметим, что $G_1^*(\nu) = \beta_1/(\nu + \beta_1)$.

Важно также подчеркнуть, что в процессе доказательства мы применяем результаты о больших отклонениях для случайного блуждания, которые представляет, например, [20, лемма 2]. В

частности, если $\theta = x/t > qEY$, $x \in \mathbb{Z}$, $t > 0$, то для всех таких $x, t \rightarrow \infty$, равномерно по $\theta \in [qEY + \varepsilon_1, \Theta]$ при каждом $\varepsilon_1 > 0$ и $\Theta > qEY + \varepsilon_1$ имеет место соотношение

$$P_0(S(t) \geq x) \sim \frac{e^{-t\Lambda(\theta)}}{(1 - e^{-\lambda(\theta)})\sqrt{2\pi t D(\theta)}}. \quad (3.9)$$

В применении к нашим исследованиям последнее утверждение справедливо при больших значениях t и $x = \lceil ct + y \rceil$, удовлетворяющих неравенству $\lceil ct + y \rceil / t > qEY$. Таким образом, на этом этапе существенно используется предположение о центрированности скачка блуждания, т.е. $EY = 0$. Лемма 3.6 полностью доказана. $\square$

В лемме 3.6 найдено асимптотическое поведение функции $m(t; 0, B(t, y))$, когда $t \rightarrow \infty$, при фиксированных $c \in (0, \nu/r]$ и $y \in \mathbb{R}$. Следующая лемма дает оценку сверху для этой функции $m(t; 0, B(t, y))$ при фиксированном $c \in (0, \nu/r]$ и сразу для всех $t, y \geq 0$, причем доказательство в значительной мере повторяет доказательства леммы 4 статьи [20] и леммы 3.6 данной работы, потому оно опускается.

Лемма 3.7. Пусть для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}$ с мальтусовским параметром ν справедливы условия (2.1), (2.3) и (2.4), а также $EY = 0$. Тогда для всех $t, y \geq 0$ имеет место неравенство

$$m(t; 0, B(t, y)) \leq C_2 e^{(\nu - rc)t - ry},$$

где C_2 — положительная постоянная.

Цепочка очевидных равенств $B(t + \tilde{t}, y) = (c(t + \tilde{t}) + y, +\infty) = (ct + (c\tilde{t} + y), +\infty) = B(t, c\tilde{t} + y)$ лежит в основе вывода следующей леммы.

Лемма 3.8. Пусть для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}$ с мальтусовским параметром ν выполнены условия (2.1), (2.3), (2.4) и $EY = 0$. Тогда для всех $t, \tilde{t}, y \geq 0$ справедливо соотношение

$$Q(s, t; 0, B(t + \tilde{t}, y)) \leq C_2(1 - s)e^{(\nu - rc)t - rc\tilde{t} - ry}. \quad (3.10)$$

Доказательство. Мы получим утверждение леммы 3.8, если воспользуемся неравенством (3.8) и леммой 3.7, в которой рассмотрим в качестве y значение $c\tilde{t} + y$. Лемма 3.8 доказана. $\square$

Чтобы оценки (3.8) и (3.10) были нетривиальными, согласно лемме 3.6 следует рассмотреть, например, $s = s(t, \lambda) = \exp\{-\lambda e^{-\nu t + rct}\}$, $\lambda \geq 0$. В таком случае для каждого $\lambda \geq 0$ и $c \in (0, \nu/r)$ имеем

$$\begin{aligned} 1 - s(t, \lambda) &\sim \lambda e^{-\nu t + rct}, \quad t \rightarrow \infty, \\ 1 - s(t, \lambda) &\leq \lambda e^{-\nu t + r\lceil ct \rceil}, \quad t \geq 0, \end{aligned} \quad (3.11)$$

в силу очевидных соотношений $1 - e^{-x} \sim x$, $x \rightarrow 0+$, и $1 - e^{-x} \leq x$, $x \geq 0$. Тогда из неравенства (3.10) следует оценка

$$Q(s(t + \tilde{t}, \lambda), t; 0, B(t + \tilde{t}, y)) \leq \lambda C_2 e^{-\nu \tilde{t} - ry}, \quad \lambda \geq 0, \quad t, \tilde{t} \geq 0, \quad y \geq 0. \quad (3.12)$$

При $t \geq 0$, $s \in [0, 1]$ и $B \subset \mathbb{R}$ положим

$$I(s, t; B) := m_1 \int_0^t Q(s, t - u; 0, B) dG_1(u) - \int_0^t (1 - f_1(1 - Q(s, t - u; 0, B))) dG_1(u).$$

Лемма 3.9. Если для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}$ с мальтусовским параметром ν выполнены условия (2.1), (2.3)–(2.5) и $EY = 0$, то

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow +\infty}} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{ry - r\{ct+y\}}}{\lambda} \int_0^t I(s(t, \lambda), t - u; B(t, y)) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) = 0.$$

Доказательство. Согласно теореме Лагранжа о конечных приращениях и неравенству (3.12), применяемому, когда $\lambda C_2 e^{-ry} < 1$, получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{e^{ry-r\{ct+y\}}}{\lambda} \int_0^t I(s(t, \lambda), t-u; B(t, y)) d \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u) \\ &\leq C_2 e^{-r\{ct+y\}} \int_0^t e^{-\nu u} (m_1 - f'_1(1 - \lambda C_2 e^{-\nu u - ry})) d(G_1 * \sum_{k=0}^{\infty} G^{*k}(u)). \end{aligned}$$

Далее доказательство леммы 3.9 опускается, поскольку воспроизводит доказательство леммы 6 статьи [20] с той лишь разницей, что теперь рассматривается двойной предел при $\lambda \rightarrow 0+$ и $y \rightarrow +\infty$ вместо только $y \rightarrow +\infty$. $\square$

Из неравенства (3.12) вытекают следующие соотношения: $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow +\infty}} Q(s(t, \lambda), t; 0, B(t, y)) = 0$ и

$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow +\infty}} e^{ry-r\{ct+y\}} \lambda^{-1} Q(s(t, \lambda), t; 0, B(t, y)) \leq C_2$. Лемма 3.10 дополняет последний результат с помощью леммы 3.9, когда вначале устремляем t к бесконечности, а затем исследуем двойной предел по $\lambda \rightarrow 0+$ и $y \rightarrow +\infty$.

Лемма 3.10. Пусть для надкритического КВСБ по $\mathbb{Z}$ с мальтусовским параметром ν справедливы условия (2.1), (2.3)–(2.5) и $EY = 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow +\infty}} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{ry-r\{ct+y\}}}{\lambda} Q(s(t, \lambda), t; 0, B(t, y)) = C_0 e^{-r},$$

где $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x \geq 0$.

Доказательство. С учетом новых обозначений уравнение (3.6) можно переписать в виде

$$Q(s, t; 0, B) = \int_0^t Q(s, t-u; 0, B) dG(u) + J(t; B)(1-s) - \alpha_1 I(s, t; B).$$

Итерируя это уравнение k раз, получим

$$\begin{aligned} Q(s, t; 0, B) &= \int_0^t Q(s, t-u; 0, B) dG^{*(k+1)}(u) + (1-s) \int_0^t J(t-u; B) d \sum_{j=0}^k G^{*j}(u) \\ &\quad - \alpha_1 \int_0^t I(s, t-u; B) d \sum_{j=0}^k G^{*j}(u). \end{aligned}$$

Устремляя k к бесконечности, получаем (см., например, рассуждения, используемые при доказательстве леммы 3.4)

$$Q(s, t; 0, B) = (1-s) \int_0^t J(t-u; B) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(u) - \alpha_1 \int_0^t I(s, t-u; B) d \sum_{j=0}^{\infty} G^{*j}(u).$$

Подставим вместо s функцию $s(t, \lambda)$, $t, \lambda \geq 0$, а вместо B — множество $B(t, y)$. Умножим обе части последнего равенства на $e^{ry-r\{ct+y\}}/\lambda$ и устремим вначале t к бесконечности, а затем рассмотрим двойной предел по $\lambda \rightarrow 0+$ и $y \rightarrow +\infty$. Тогда приходим к утверждению леммы 3.10 в силу лемм 3.4, 3.6 и 3.9. Лемма 3.10 полностью доказана. $\square$

Лемма 3.11. Пусть выполнены условия (2.1), (2.3)–(2.5) и $EY = 0$. Тогда для каждого $\lambda > 0$ справедливо следующее соотношение:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{ry-r\{ct+y\}}}{\lambda} (1 - Q(s(t, \lambda), t; 0, B(t, y)) - \varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}}; 0)) = 0,$$

где $\varphi(\cdot; 0) \in \mathcal{C}_\theta$ и $\theta = C_0 e^{-r}$.

Доказательство. Аргументы леммы 3.11 в основном повторяют доказательство леммы 8 статьи [20] и леммы 9 статьи [23]. Однако для полноты доказательства приведем рассуждения без сокращений.

Обозначим

$$K(t; \lambda, y) = \frac{e^{ry-r\{ct+y\}}}{\lambda} (1 - Q(s(t, \lambda), t; 0, B(t, y)) - \varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}}; 0)).$$

Добавляя и вычитая внутри скобок постоянную $\theta = C_0 e^{-r}$, а затем применяя неравенство треугольника, определение класса $\mathcal{C}_\theta$ и лемму 3.10, приходим к выводу, что

$$\limsup_{\substack{\lambda \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow +\infty}} \limsup_{t \rightarrow \infty} |K(t; \lambda, y)| = 0. \quad (3.13)$$

Для доказательства леммы 3.11 достаточно проверить, что $K(\lambda, y) := \lim_{T \rightarrow \infty} K_T(\lambda, y) = 0$, где $K_T(\lambda, y) := \sup_{t \geq T} |K(t; \lambda, y)|$.

Уравнения (2.6) (при $N = 1$ и $w_1 = 0$) и (3.6) влекут

$$A(Q(s(t, \lambda), t; 0, B(t, y)) - 1 + \varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}}; 0)) = I_{11}(t, T; \lambda) + I_{12}(t, T; \lambda) + I_2(t; \lambda), \quad (3.14)$$

где $A := \lambda^{-1} e^{ry-r\{ct+y\}}$, а для $T < t$ мы положили функцию $I_{11}(t, T; \lambda)$ равной

$$\begin{aligned} & \alpha_1 A \int_0^{t-T} (f_1(\varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}} e^{-\nu u}; 0)) - f_1(1 - Q(s(t, \lambda), t - u; 0, B(t, y)))) dG_1(u) \\ & + (1 - \alpha_1) A \int_0^{t-T} (Q(s(t, \lambda), t - u; 0, B(t, y)) - 1 + \varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}} e^{-\nu u}; 0)) d(G_1 * \bar{F}_{0,0}(u)). \end{aligned}$$

Интеграл $I_{12}(t, T; \lambda)$ отличается от $I_{11}(t, T; \lambda)$ только пределами интегрирования, т.е. возникает $\int_{t-T}^t$ вместо $\int_0^{t-T}$. Наконец, функцией $I_2(t; \lambda)$ мы обозначили следующее выражение

$$\begin{aligned} & A(1 - s(t, \lambda))J(t; B(t, y)) - \alpha_1 \frac{e^{ry-r\{ct+y\}}}{\lambda} \int_t^\infty (1 - f_1(\varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}} e^{-\nu u}; 0))) dG_1(u) \\ & - (1 - \alpha_1) A \int_t^\infty (1 - \varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}} e^{-\nu u}; 0)) d(G_1 * \bar{F}_{0,0}(u)). \end{aligned}$$

Из соотношений (3.4) и (3.11), а также [20, формула (16)] следует, что для каждого $y \geq 0$ верно неравенство

$$A(1 - s(t, \lambda))J(t; B(t, y)) \leq C_3(y) e^{-\nu t + r[ct] - t\Lambda(c)}$$

для некоторой положительной функции $C_3(y)$, $y \geq 0$, где $\Lambda(c) > 0$. Поэтому вновь с учетом теоремы Лагранжа, примененной к f_1 , и ограниченности функции $(1 - \varphi(\lambda; 0))/\lambda$ некоторой константой $C_4 \geq \theta = C_0 e^{-r}$ при $\lambda \geq 0$, имеем

$$\begin{aligned} |I_2(t; \lambda)| & \leq C_3(y) e^{-\nu t + r[ct] - t\Lambda(c)} + \alpha_1 m_1 \int_t^\infty \frac{1 - \varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}} e^{-\nu u}; 0)}{\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}} e^{-\nu u}} e^{-\nu u} dG_1(u) \\ & + (1 - \alpha_1) \int_t^\infty \frac{1 - \varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}} e^{-\nu u}; 0)}{\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}} e^{-\nu u}} e^{-\nu u} d(G_1 * \bar{F}_{0,0}(u)) \\ & \leq C_3(y) e^{-\nu t + r[ct] - t\Lambda(c)} + C_4(1 - \tilde{G}(t)). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Здесь $\tilde{G}$ — функция распределения такая, что $d\tilde{G}(u) = e^{-\nu u} dG(u)$, $u \geq 0$.

Пусть $t > 2T$. Тогда в силу (3.13), теоремы Лагранжа, примененной к функции f_1 , и леммы 3.8, получаем (для некоторой положительной постоянной C_5) следующее соотношение:

$$\begin{aligned} |I_{12}(t, T; \lambda)| &\leq A \int_{t-T}^t |Q(s(t, \lambda), t-u; 0, B(t, y)) - 1 + \varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}} e^{-\nu u}; 0)| dG(u) \\ &= \int_{t-T}^t |K(t-u; \lambda e^{-(\nu-r)c}u, y+cu)| e^{-\nu u} dG(u) \leq C_5(1 - \tilde{G}(T)). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Вновь применяя теорему Лагранжа для f_1 , для любого $t > T$ приходим к соотношению

$$\begin{aligned} |I_{11}(t, T; \lambda)| &\leq A \int_0^{t-T} |Q(s(t, \lambda), t-u; 0, B(t, y)) - 1 + \varphi(\lambda e^{-ry+r\{ct+y\}} e^{-\nu u}; 0)| dG(u) \\ &= \int_0^{t-T} |K(t-u; \lambda e^{-(\nu-r)c}u, y+cu)| e^{-\nu u} dG(u) \\ &\leq \int_0^{t-T} K_T(\lambda e^{-(\nu-r)c}u, y+cu) d\tilde{G}(u) \leq \mathbf{E}K_T(\lambda e^{-(\nu-r)c}\zeta, y+c\zeta), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где ζ — случайная величина, имеющая функцию распределения $\tilde{G}$.

Сочетание формул (3.14)–(3.17) при $t > 2T$ приводит к тому, что функция $|K(t; \lambda, y)|$ допускает верхнюю оценку

$$C_3(y)e^{-\nu t+r[ct]-t\Lambda(c)} + C_4(1 - \tilde{G}(t)) + C_5(1 - \tilde{G}(T)) + \mathbf{E}K_T(\lambda e^{-(\nu-r)c}\zeta, y+c\zeta).$$

Это означает, что

$$K_{2T}(\lambda, y) \leq \mathbf{E}K_T(\lambda e^{-(\nu-r)c}\zeta, y+c\zeta) + C_3(y)e^{-T\Lambda(c)} + (C_4 + C_5)(1 - \tilde{G}(T)).$$

Согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости, при $T \rightarrow \infty$ последняя формула влечет соотношение $K(\lambda, y) \leq \mathbf{E}K(\lambda e^{-(\nu-r)c}\zeta, y+c\zeta)$. Итерация этой формулы дает следующее неравенство:

$$K(\lambda, y) \leq \mathbf{E}K(\lambda e^{-(\nu-r)c}Z_n, y+cZ_n), \quad (3.18)$$

где $Z_n := \sum_{k=1}^n \zeta_k$ и ζ_k , $k \in \mathbb{Z}^+$, — это независимые одинаково распределенные случайные величины с таким же распределением, как у ζ . С учетом усиленного закона больших чисел и теоремы Лебега о мажорируемой сходимости, неравенство (3.18) влечет $0 \leq K(\lambda, y) \leq K(0, +\infty)$. Однако $K(0, +\infty) = 0$ в силу (3.13). Поэтому лемма 3.11 доказана. $\square$

4. Доказательства основных результатов

Доказательство следствия 2.1. При $N = 1$ и $x = w_1 = 0$ утверждение следствия 2.1 вытекает из леммы 3.11. Теперь мы имеем дело с $N > 1$ и $x \in W$, скажем, $x = w_i$. Обсудим здесь основные различия в случаях единственного катализатора и нескольких катализаторов, а также дадим дальнейшее доказательство, опуская громоздкие детали. В постановке задачи с несколькими катализаторами, аналогом уравнения (3.3) в лемме 3.1 является система интегральных уравнений (3.2).

Следующий шаг в случае нескольких катализаторов — ввести аналог функции G , возникающей в лемме 3.4, а именно, матрицу $\mathcal{G}(t) = (G_{i,j}^{(N)}(t))_{i,j=1}^N$, где

$$G_{i,j}^{(N)}(t) := \delta_{i,j} \alpha_i m_i G_i(t) + (1 - \alpha_i) G_i * w_j \bar{F}_{w_i, w_j}(t), \quad t \geq 0,$$

и $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Заметим, что элемент $d_{i,j}(\lambda)$ матрицы $D(\lambda)$, $\lambda \geq 0$, фигурирующей в определении (2.2) надкритического режима КВСБ, есть преобразование Лапласа функции $G_{i,j}^{(N)}$.

Систему уравнений (3.2) можно переписать в векторном виде следующим образом:

$$\mathcal{M}(t; B) = \mathcal{G} * \mathcal{M}(t; B) + \mathcal{J}(t; B), \quad (4.1)$$

где $\mathcal{M}(t; B) := (m(t; w_1, B), \dots, m(t; w_N, B))^\top$ и $\mathcal{J}(t; B) := (J_1^{(N)}(t; B), \dots, J_N^{(N)}(t; B))^\top$, а символ $\top$ обозначает транспонирование матрицы. Напомним, что операция $*$ свертки матриц определяется так же, как и умножение матриц, за исключением того, что мы производим свертку ее элементов, а не умножаем их. Выполняя k раз итерацию равенства (4.1), устремляя k к бесконечности и применяя лемму 1.1 статьи [27], как и при доказательстве формулы (3.7), мы приходим к аналогу леммы 3.4, утверждающему, что

$$\mathcal{M}(t; B) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{J}(t; B). \quad (4.2)$$

Согласно теореме Лагранжа, примененной к функциям $f_1, \dots, f_N$, система уравнений (3.5) влечет следующее векторное неравенство, справедливое по-координатно,

$$\mathcal{Q}(s, t; B) \leq \mathcal{G} * \mathcal{Q}(s, t; B) + (1 - s)\mathcal{J}(t; B),$$

где $\mathcal{Q}(s, t; B) := (Q(s, t; w_1, B), \dots, Q(s, t; w_N, B))^\top$. Отсюда, как и при доказательстве формулы (4.2), мы выводим аналог леммы 3.5 в случае нескольких катализаторов:

$$\mathcal{Q}(s, t; B) \leq (1 - s) \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{J}(t; B).$$

Из последнего неравенства и соотношения (4.2) вытекает важное неравенство

$$\mathcal{Q}(s, t; B) \leq (1 - s)\mathcal{M}(t; B).$$

Как и в лемме 3.6 при $N = 1$, в случае $N > 1$ мы исследуем асимптотическое поведение функции $\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{J}(t; B)$, когда $B = B(t, y)$ и $t \rightarrow \infty$. Полностью аналогично лемме 3.6, используя следствие 3.1, пункт (i), статьи [27] (вместо теоремы 25 в [24], стр. 30, и результатов на стр. 55 в [28]), приходим к выводу, что

$$\mathcal{M}(t; B(t, y)) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{J}(t; B(t, y)) \sim e^{\nu t - r[ct+y]} (K_1^{(N)}, \dots, K_N^{(N)})^\top, \quad t \rightarrow \infty.$$

Постоянные $K_i^{(N)} > 0$, $i = 1, \dots, N$, могут быть выписаны в явном виде, который является громоздким и лишним, а потому опускается. Более того, леммы 3.7 и 3.8 также остаются неизменными в случае $N > 1$ (с, возможно, другой постоянной вместо C_2).

Обобщение функции $I(s, t; B)$, $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$, на случай $N > 1$ есть вектор-функция $\mathcal{I}(s, t; B)$, $s \in [0, 1]$, $t \geq 0$, с координатами $I_i^{(N)}(s, t; B)$, $i = 1, \dots, N$, вида

$$m_i \int_0^t Q(s, t - u; w_i, B) dG_i(u) - \int_0^t (1 - f_i(1 - Q(s, t - u; w_i, B))) dG_i(u).$$

Аналог леммы 3.9 в случае нескольких катализаторов утверждает, что при тех же условиях имеем

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0+ \\ y \rightarrow +\infty}} \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{ry - r\{ct+y\}}}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{G}^{*k} * \mathcal{I}(s(t, \lambda), t; B(t, y)) = (0, \dots, 0)^\top.$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 3.9, однако теперь мы применяем следствие 3.1, пункт (i), статьи [27] вместо теоремы 25 книги [24], стр. 30.

Между утверждениями лемм 3.10, 3.11 и их соответствующих аналогов в случае нескольких катализаторов различия небольшие. Поэтому мы только отметим, что доказательство аналога леммы 3.11 следует доказательству теоремы 3.3 статьи [29], в то время как доказательство самой леммы 3.11 основывается на работе [30]. Таким образом, следствие 2.1 получается и в случае $N \geq 1$ при стартовой точке $x \in W$.

Остается доказать следствие 2.1 в случае $N \geq 1$ и $x \notin W$. Случай стартовой точки $x \notin W$ сводится к случаю $N + 1$ катализатора благодаря тому, что мы полагаем $w_{N+1} = x$, $\alpha_{N+1} = 0$, $m_{N+1} = 0$, $G_{N+1}(t) = 1 - e^{-qt}$, $t \geq 0$. Согласно лемме 3 статьи [12] новое КВСБ со множеством катализаторов $\{w_1, \dots, w_{N+1}\}$ является надкритическим, если первоначальное КВСБ надкритическое, и мальтусовские параметры в этих КВСБ совпадают. Поэтому мы можем воспользоваться доказанной частью следствия 2.1 для случая $N + 1$ катализатора и стартовой точки из множества W . Следствие 2.1 полностью доказано. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. При $d = 1$ и $N \in \mathbb{N}$ утверждение теоремы 2.1 совпадает с утверждением следствия 2.1. Рассмотрим случай $d > 1$ и $N \in \mathbb{N}$. Основные черты доказательства теоремы 2.1 такие же, как у следствия 2.1. Поэтому обсудим лишь главные различия. Во-первых, в качестве множества B в леммах 3.6–3.11 вместо $(ct + y, +\infty) \subset \mathbb{R}$ теперь рассматривается множество $B_{\mathbf{r}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{x}, \mathbf{r} \rangle > ct + y\} \subset \mathbb{R}^d$, $\mathbf{r} \in \mathcal{R}$.

Во-вторых, в аналоге леммы 3.6 вместо случайного блуждания $\{S(t), t \geq 0\}$ теперь рассматривается случайное блуждание $\{\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle, t \geq 0\}$. Напомним, что случайные величины $S(t)$ имеют решетчатое (арифметическое) распределение при каждом $t \geq 0$, в то время как все случайные величины в наборе $\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle$, $t \geq 0$, могут иметь как решетчатое, так и нерешетчатое распределение. Поэтому вместо формулы (6.1.17) из следствия 6.1.7 книги [25], гл. 6, раздел 1, для нерешетчатых распределений мы используем формулу (6.1.16) из того же следствия. А именно, аналогом соотношения (3.9) в лемме 3.6 в случае нерешетчатого распределения при $d > 1$ и $N \in \mathbb{N}$ является, как и при доказательстве теоремы 1 статьи [20], следующее соотношение:

$$P_0(\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle \geq x) \sim \frac{e^{-t\Lambda_{\mathbf{r}}(\theta)}}{\lambda_{\mathbf{r}}(\theta)\sqrt{2\pi t D_{\mathbf{r}}(\theta)}}$$

при $x, t \rightarrow \infty$, равномерно по $\theta = x/t \in [q\langle \mathbf{E}\mathbf{Y}^1, \mathbf{r} \rangle + \varepsilon_1, \Theta_1]$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Здесь

$$\Lambda_{\mathbf{r}}(\vartheta) := \sup_{s \in \mathbb{R}} (\vartheta s - \ln E e^{s\langle \mathbf{S}(1), \mathbf{r} \rangle}) = \sup_{s \in \mathbb{R}} (\vartheta s - \Psi_{\mathbf{r}}(s)),$$

$\lambda_{\mathbf{r}}(\vartheta) := \Lambda'_{\mathbf{r}}(\vartheta)$, $D_{\mathbf{r}}(\vartheta) := \Psi''_{\mathbf{r}}(s)|_{s=\lambda_{\mathbf{r}}(\vartheta)}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, а $\Psi_{\mathbf{r}}(s) := \Psi(s\mathbf{r})$, $s \in \mathbb{R}$. Далее аргументация доказательства следствия 1 легко переносится на общий случай, если дополнительно заменить μ на s и r на 1. Очевидно, теперь $E e^{s\langle \mathbf{S}(t), \mathbf{r} \rangle} = e^{t\Psi_{\mathbf{r}}(s)}$, $\theta_0 = \Psi'_{\mathbf{r}}(1)$, $\theta_0 > \Psi_{\mathbf{r}}(1) = \nu$. Дальнейшие подробности можно опустить.

Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана. $\square$

Благодарности

Автор признателен рецензенту за замечания, направленные на улучшение текста статьи.

Литература

1. K. B. Athreya, P. E. Ney, *Branching Processes*, Springer, Berlin etc. (1972).
2. J. Bertoin, H. Yang, “Scaling limits of branching random walks and branching-stable processes”, *J. Appl. Probab.* **59**, No. 4, 1009–1025 (2022).
3. Н. В. Смородина, Е. Б. Яровая, “Об одной предельной теореме для ветвящихся случайных блужданий”, *Теория вероятн. примен.* **68**, No. 4, 779–795 (2023).
4. P. Maillard, S. Penington, “Branching random walk with nonlocal competition”, *J. London Math. Soc.* **109**, No. 6, Article ID e12919 (2024).
5. R. Roy, “A branching random walk in the presence of a hard wall”, *J. Appl. Probab.* **61**, No. 1, 1–17 (2024).
6. S. Alberverio, L. V. Bogachev, E. B. Yarovaya, “Asymptotics of branching symmetric random walk on the lattice with a single source”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **326**, No. 9, 975–980 (1998).
7. В. А. Ватутин, В. А. Топчий, “Каталитические ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbb{Z}^d$ с ветвлением в нуле”, *Мат. тр.* **14**, No. 2, 48–72 (2011).

8. L. Döring, M. Roberts, “Catalytic branching processes via spine techniques and renewal theory”, *Lect. Notes Math.* **2078**, 305–322 (2013).
9. Ph. Carmona, Y. Hu, “The spread of a catalytic branching random walk”, *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **50**, No. 2, 327–351 (2014).
10. М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, “Об асимптотическом поведении средних значений некоторых функционалов от ветвящегося случайного блуждания”, *Зап. научн. сем. ПОМИ* **505**, 185–206 (2021).
11. R. Liu, “The spread speed of multiple catalytic branching random walks”, *Acta Math. Appl. Sin., Eng. Ser.* **39**, No. 2, 262–292 (2023).
12. Е. Вл. Булинская, “Полная классификация каталитических ветвящихся процессов”, *Теория вероятн. примен.* **59**, No. 4, 639–666 (2014).
13. Е. Вл. Булинская, “Сильная и слабая сходимости размера популяции в надкритическом каталитическом ветвящемся процессе”, *Докл. РАН* **465**, No. 4, 398–402 (2015).
14. Е. Вл. Булинская, “Максимум каталитического ветвящегося случайного блуждания”, *Успехи мат. наук* **74**, No. 3, 187–188 (2019).
15. С.А. Молчанов, Е.Б. Яровая, “Ветвящиеся процессы с решетчатой пространственной динамикой и конечным множеством центров генерации частиц”, *Докл. РАН.* **446**, No. 3, 259–262 (2012).
16. Е. Вл. Bulinskaya, “Spread of a catalytic branching random walk on a multidimensional lattice”, *Stoch. Proc. Appl.* **128**, No. 7, 2325–2340 (2018).
17. С.А. Молчанов, Е.Б. Яровая, “Структура популяции внутри распространяющегося фронта ветвящегося случайного блуждания с конечным числом центров генерации частиц”, *Докл. РАН* **447**, No. 3, 265–268 (2012).
18. J. D. Biggins, “How fast does a general branching random walk spread?”, *IMA Vol. Math. Appl.* **84**, 19–39 (1997).
19. Е. Вл. Bulinskaya, “Finiteness of hitting times under taboo”, *Statist. Probab. Lett.* **85**, No. 1, 15–19 (2014).
20. Е. Вл. Булинская, “Флуктуации фронта распространения каталитического ветвящегося блуждания”, *Теория вероятн. примен.* **64**, No. 4, 642–670 (2019).
21. Е. Б. Яровая, “Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий”, *Теория вероятн. примен.* **55**, No. 4, 705–731 (2010).
22. В. А. Ватутин, *Ветвящиеся процессы и их применения*, МИАН, М. (2008).
23. Е. Вл. Bulinskaya, “Maximum of catalytic branching random walk with regularly varying tails”, *J. Theoret. Probab.* **34**, No. 1, 141–161 (2021).
24. В. А. Ватутин, *Ветвящиеся процессы Беллмана — Харриса*, МИАН, М. (2009).
25. А. А. Боровков, К. А. Боровков, *Асимптотический анализ случайных блужданий. Т.1. Медленно убывающие распределения скачков*, Физматлит, М. (2008).
26. М. В. Федорюк, *Асимптотика: интегралы и ряды*, Наука, М. (1987).
27. K. S. Crump, “On systems of renewal equations”, *J. Math. Anal. Appl.* **30**, No. 2, 425–434 (1970).
28. D. R. Cox, *Renewal Theory*, Wiley, New York (1962).
29. N. Kaplan, “The supercritical multitype age-dependent branching process”, *J. Math. Anal. Appl.* **50**, No. 1, 164–182 (1975).
30. K. B. Athreya, “On the supercritical one-dimensional age-dependent branching process”, *Ann. Math. Stat.* **40**, No. 3, 743–763 (1969).

Статья поступила в редакцию 5 апреля 2025 г.
принята к публикации 19 мая 2025 г.

Х.-Б. Вьонг

УСЛОВИЕ ФОКСА — МИЛНОРА ДЛЯ КОНКОРДАНТНЫХ УЗЛОВ В ГОМОЛОГИЧЕСКИХ 3-СФЕРАХ

Показано, что полином Александера узла, срезанного в ориентированной гомологической 3-сфере, удовлетворяет условию Фокса — Милнора. Установлено соотношение между полиномами Александера конкордантных узлов в ориентированной гомологической 3-сфере.

1. Введение

В классической теории узлов исследуется вопрос о размещении окружности в трехмерной сфере, т.е. проблема классификации топологических вложений с точностью до объемлющей изотопии. Важным вопросом также является классификация узлов с точностью до кобордизма. Эта проблема приводит к исследованию и построению кобордизм-инвариантов. Один из таких инвариантов был исследован Фоксом и Милнором в [1], где выявлено характерное свойство полинома Александера для узла срезанного типа. В данной статье рассматриваются узлы в ориентированной гомологической 3-сфере. Для таких узлов существуют инварианты Александера, связанные с узлом аналогично классическим узлам [2]. С геометрической точки зрения инварианты Александера для узлов в ориентированной гомологической 3-сфере определяются через бесконечное циклическое накрытие дополнения узла. В частности, для каждого узла в ориентированной гомологической 3-сфере существует полином Александера, связанный с этим узлом, который является инвариантом с точностью до объемлющей изотопии узлов в ориентированной гомологической 3-сфере. Более подробные сведения о полиномах Александера узлов в ориентированной гомологической 3-сфере содержатся в [3].

Естественно возникает вопрос, выполняется ли условие Фокса — Милнора для полинома Александера в случае конкордантных узлов в ориентированной гомологической 3-сфере. В данной статье мы дадим утвердительный ответ. Основной результат сформулирован в следующих теоремах.

Теорема 1.1. Пусть k_0 и k_1 — конкордантные узлы в ориентированной гомологической 3-сфере M . Тогда полиномы Александера этих узлов связаны равенством

$$\Delta_{k_0}(t) \doteq p(t)p(1/t)\Delta_{k_1}(t),$$

где $\Delta_{k_0}(t)$ и $\Delta_{k_1}(t)$ — полиномы Александера по t для узлов k_0 и k_1 соответственно, а $p(t)$ — многочлен с целочисленными коэффициентами.

Здесь $\Delta_1 \doteq \Delta_2$ означает $\Delta_1 = \pm t^n \Delta_2$ для некоторого целого n .

Теорема 1.2. Пусть M и M' — гомологические сферы, $\mathcal{W}$ — кобордизм между M и M' , граница $\mathcal{W}$ — дизъюнктивное объединение $\partial\mathcal{W} = M \cup M'$. Предположим, что вложения $M \hookrightarrow \mathcal{W}$ и $M' \hookrightarrow \mathcal{W}$ индуцируют изоморфизмы на гомологиях. Пусть k и k' — узлы в M и M'

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-02-2025-1728/2).

Х.-Б. Вьонг: Томский государственный университет, Томск, Россия; baovuong2024@gmail.com

соответственно. Если существует конкорданс $g : S^1 \times I \rightarrow \mathcal{W}$ между k и k' , то полиномы Александера узлов k и k' связаны соотношением

$$\Delta_k(t) \doteq p(t)p(1/t)\Delta_{k'}(t),$$

где $\Delta_k(t)$ и $\Delta_{k'}(t)$ — полиномы Александера по t узлов k и k' соответственно, а $p(t)$ — многочлен с целочисленными коэффициентами.

При доказательстве теоремы 1.1 мы следуем стратегии Фокса и Милнора [1], изложенной в [4] и [6]. Сначала приведем некоторые факты о дополнении узла и соответствующем дополнении конкорданса в гомологической 3-сфере M . Отметим, что теорема 1.2 является естественным обобщением теоремы 1.1.

2. Узлы в ориентированной гомологической 3-сфере

Узел k в ориентированной гомологической 3-сфере M — это гладкое вложение $k : S^1 \rightarrow M$. Два узла k_1 и k_2 в гомологической 3-сфере M называются *эквивалентными*, если существует объемлющая изотопия, переводящая один узел в другой. Узел называется *тривиальным*, если он ограничивает гладко вложенный диск в M .

Следующее утверждение было сформулировано без доказательства в [2].

Лемма 2.1. Пусть k — узел в ориентированной гомологической 3-сфере M . Тогда дополнение к узлу $M - k$ имеет гомологии, изоморфные гомологиям окружности, т.е.

$$H_*(M - k) = H_*(S^1).$$

Доказательство. Воспользуемся последовательностью Майера — Вьеториса. Пусть $\nu(k)$ — трубчатая окрестность узла k в гомологической 3-сфере M . Гомологическая 3-сфера M представима в виде объединения $(M - k) \cup \nu(k)$, где $M - k$ — дополнение к узлу, а $\nu(k)$ — трубчатая окрестность. Пересечение $\nu(k) \cap (M - k)$ гомотопно тору T^2 . Трубчатая окрестность $\nu(k)$ гомотопна ее центральной окружности S^1 , а ее граница $\partial\nu(k)$ гомеоморфна тору. Заметим, что пространство $M - k$ деформационно ретрактируется на замыкание X_k дополнения $M - \nu(k)$. Следовательно,

$$H_*(M - k) \cong H_*(M - \nu(k)).$$

Поскольку $M - \nu(k)$ — связное 3-многообразие с краем, можно свести $M - k$ к 2-мерному подкомплексу, сдвигая все 3-клетки к краю. Такая свертка не влияет на гомологию. Следовательно, теорема верна для всех $* \neq 1, 2$.

Рассмотрим следующую часть последовательности Майера — Вьеториса:

$$\begin{aligned} H_3(T^2) \rightarrow H_3(\nu(k)) \oplus H_3(M - k) \rightarrow H_3(M) \rightarrow H_2(T^2) \rightarrow H_2(\nu(k)) \oplus H_2(M - k) \\ \rightarrow H_2(M) \rightarrow H_1(T^2) \rightarrow H_1(\nu(k)) \oplus H_1(M - k) \rightarrow H_1(M) \end{aligned}$$

Отображение $\mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z} \oplus H_1(M - k)$ является изоморфизмом в силу точности последовательности, откуда следует, что $H_1(M - k) = \mathbb{Z}$. Этот факт можно получить сразу из двойственности Александера [3].

Рассмотрим часть последовательности, содержащую $H_2(M - k)$:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{инъективное}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{сюръективное}} H_2(M - k) \rightarrow 0.$$

Из этой короткой точной последовательности следует, что $H_2(M - k)$ — конечная циклическая группа. По двойственности Пуанкаре — Лефшеца и универсальной теореме о коэффициентах

$$H_2(M - k) \cong H_2(X_k) \cong H^1(X_k, \partial X_k) \cong \text{Hom}(H_1(X_k, \partial X_k), \mathbb{Z}).$$

Поскольку $\text{Hom}(H_1(X_k, \partial X_k), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\beta_1(X_k, \partial X_k)}$, где β_1 — первое число Бетти, заключаем, что $H_2(M - k)$ — свободная абелева группа. Следовательно, $H_2(M - k) = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

3. Конкордантность узлов в ориентированной гомологической 3-сфере

В классической теории узлов два ручных узла (гладкие узлы, р.л. узлы) k_0 и k_1 в 3-сфере называются *конкордантными* [7], если эти узлы являются границами гладкого вложения цилиндра $S^1 \times [0, 1]$ в $S^3 \times [0, 1]$, т.е. $k_0 \subset S^3 \times \{0\}$, $k_1 \subset S^3 \times \{1\}$. Узел называется *срезанным*, если он конкордантен тривиальному узлу (сравн. с определением Фокса — Милнора [1, с. 258]). Аналогичное определение можно дать для конкордантных узлов в ориентированной гомологической сфере.

Определение 3.1. Пусть k_0 и k_1 — узлы в ориентированной гомологической 3-сфере M . Два узла называются *гладко конкордантными*, если существует гладкое вложение f цилиндра $S^1 \times [0, 1]$ в $M \times [0, 1]$ такое, что

$$f(S^1 \times \{0\}) = k_0 \times \{0\} \subset M \times \{0\},$$

$$f(S^1 \times \{1\}) = k_1 \times \{1\} \subset M \times \{1\},$$

т.е. k_0 и k_1 ограничивают гладко вложенный цилиндр в $M \times I$, где $I = [0, 1]$. Узел k в гомологической 3-сфере M называется *шлицевым*, если он конкордантен тривиальному узлу

Вычислим гомологии дополнения конкорданса и определим его границу. Пусть C — вложенный цилиндр, образ $S^1 \times I$ при конкордансе f . Пусть $N(C)$ — трубчатая окрестность цилиндра C в $M \times I$.

Лемма 3.1. Пусть k_0 и k_1 — конкордантные узлы в ориентированной гомологической 3-сфере M , и C , $N(C)$ определены выше. Узлы k_0 и k_1 ограничивают цилиндр C . Тогда дополнение конкорданса $(M \times I - N(C))$ имеет гомологию окружности S^1 , т.е.

$$H_*(M \times I - N(C)) = H_*(S^1).$$

Лемма 3.1 является частным случаем леммы A.1, доказанной ниже.

Рассмотрим границу дополнения конкорданса. Сначала отметим, что трубчатая окрестность $N(C)$ цилиндра C в $M \times I$ имеет¹⁾ вид $C \times I^2$, где I^2 обозначает 2-клетку и $N(C)$ гомотопна окружности S^1 , причем S^1 представляет класс узла k_0 или k_1 . Пусть $Q = \overline{M \times I - N(C)}$ — замыкание $M \times I - N(C)$ в $M \times I$. Пересечение $N(C)$ и Q есть $C \times \partial I^2$, которое гомотопно $S^1 \times S^1$. Первая копия S^1 соответствует узлу k_0 (или k_1), а вторая — меридиану соответствующего узла k_1 (или k_2).

Граница ∂Q представляет собой объединение $C \times \partial I^2$ и замыканий Y_0, Y_1 множеств $M \times 0 - N(C)$ и $M \times 1 - N(C)$, склеенных вдоль торий $k_0 \times \partial I^2$ и $k_1 \times \partial I^2$ с помощью нулевых хирургий h_0 и h_1 соответственно:

$$\partial Q = Y_0 \cup_{h_0} C \times \partial I^2 \cup_{h_1} Y_1$$

Отметим, что Y_0 и Y_1 — это замыкания дополнений узлов в гомологической 3-сфере M для k_0 и k_1 , т.е.

$$Y_0 = M - \text{Int } N(k_0),$$

$$Y_1 = M - \text{Int } N(k_1),$$

где $N(k_0)$ и $N(k_1)$ — трубчатые окрестности узлов k_0 и k_1 в M .

Часть $C \times \partial I^2$ можно представить как произведение кольца и окружности, поэтому она выглядит как полноторие с торическим туннелем вдоль осевой окружности. Следовательно, граница $C \times \partial I^2$ имеет два компонента, т.е. два тора.

Нулевые хирургии h_0 и h_1 , с помощью которых соединяются Y_0, Y_1 и $C \times \partial I^2$, описываются следующим образом: меридиан $\partial N(k_0)$ склеивается вдоль долготы одного торического компонента $S^1 \times 0 \times \partial I^2$ из $C \times \partial I^2$, а меридиан $\partial N(k_1)$ — вдоль долготы другого торического компонента $S^1 \times 1 \times \partial I^2$.

Пусть $W_0 = Y_0 \cup_{h_0} S^1 \times 0 \times \partial I^2$ и $W_1 = Y_1 \cup_{h_1} C \times \partial I^2$. Тогда $\partial Q = W_0 \cup W_1$.

Нам потребуется следующая лемма, которая доказывается так же, как лемма 3.6 в [4].

¹⁾ Фокс и Милнор ссылаются на статью Ногучи [5] о поверхностях в четырехмерном пространстве.

Лемма 3.2. Пусть k — узел в ориентированной гомологической 3-сфере M и $N(k)$ — трубчатая окрестность узла k в M . Пусть $Y = M - \text{Int } N(k)$ — замыкание дополнения $N(k)$ в M и $W = Y \cup_h S^1 \times S^1$ — пространство, полученное с помощью нулевой хирургии h на Y вдоль его границы с тором, причем отображение $h : S^1 \times S^1 \rightarrow \partial N(k)$ является гомеоморфизмом, преобразующим долготу $S^1 \times S^1$ в меридиан на $\partial N(k)$. Тогда гомологии пространств Y и W совпадают во всех размерностях.

Доказательство. Имеем $Y - \text{Int } (Y) = \partial N(k)$ и $W - \text{Int } (Y) = Z$, где $Z = \partial N(k) \cup_h S^1 \times S^1$. По аксиоме вырезания

$$H_*(Y, W) \cong H_*(\partial N(k), Z).$$

В длинной точной последовательности пары $(\partial N(k), Z)$ гомоморфизм

$$H_*(\partial N(k)) \rightarrow H_*(Z)$$

является изоморфизмом, который переводит фундаментальный класс $\partial N(k)$ в фундаментальный класс Z . Следовательно,

$$H_*(\partial N(k), Z) \cong 0.$$

Отсюда следует, что $H_*(Y, W) \cong 0$. Это означает, что отображение

$$H_*(Y) \rightarrow H_*(W)$$

в длинной точной последовательности пары (Y, W) является изоморфизмом, что и требовалось доказать. $\square$

В силу леммы 3.2 пространства Y_0 и W_0 имеют одинаковые гомологии, индуцированные включением $Y_0 \hookrightarrow W_0$. Аналогично доказывается такое утверждение для Y_1 и W_1 .

4. Полином Александера, функции Александера и кручение Милнора

Пусть k — узел в ориентированной гомологической 3-сфере M . Существует отображение $g : M - k \rightarrow S^1$, являющееся расширением отображения $\bar{g} : \partial(M - k) \rightarrow S^1$ (см. [3, с. 259], [2, с. 92]). Тогда для регулярного значения $p \in S^1$ замыкание $\overline{g^{-1}(p)}$ является ориентированной поверхностью F , для которой k — граница ∂F . Класс гомотопии $[g]$ в $[M - k, S^1] \cong H^1(M - k) \cong \mathbb{Z}^2$ является образующим модуля $H^1(M - k)$. Имеется индуцированное расслоение

$$\begin{array}{ccc} Y_\infty & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ M - k & \longrightarrow & S^1 \end{array}$$

где Y_∞ — бесконечное циклическое накрытие дополнения $M - k$, определенное через ядро гомоморфизма Гуревича $\pi_1(M - k) \rightarrow \mathbb{Z} \cong H_1(M - k)$. Первая группа гомологий $H_1(M - k)$ действует на Y_∞ как группа листовых преобразований. Обозначим через $t : Y_\infty \rightarrow Y_\infty$ образующую $H_1(M - k)$. Тогда первая группа гомологий накрытия Y_∞ обладает структурой модуля, называемого *модулем Александера*, над кольцом $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ (см. [9]). Порядок $\Delta_0(H_1(Y_\infty))$ данного модуля представляет собой полином Александера $\Delta_k(t)$ узла k , где $\Delta_k(t)$ определяется в кольце $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ с точностью до обратимого элемента.

Модуль Александера можно эквивалентно описать через гомологии с локальными коэффициентами (см. подробности в [10, гл. 5]). Тогда модуль Александера узла k является гомологией

$$H_1(M - k; \mathbb{Z}[H_1(M - k)])$$

с локальными коэффициентами в $\mathbb{Z}[H_1(M - k)]$. Полином Александера узла k является порядком модуля

$$\Delta_k(t) = \Delta_0(H_1(M - k; \mathbb{Z}[H_1(M - k)])) = \Delta_0(H_1(Y_\infty)) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}].$$

²⁾ О гомотопической конструкции когомологий см., например, [8, гл. 4].

Приведем определение функции Александра и укажем связь этой функции с кручением Милнора для дополнения узла $M-k$ в M . Пусть $\mathcal{K}$ — поле частных кольца $[H_1(M-k)]$. Тогда *функция Александра* $A(M-k)$ узла $M-k$ — это элемент поля $\mathcal{K}$, определенный с точностью до знака и умножения на степень t :

$$A(M-k) = \prod_{i=0}^m [\Delta_0(H_i(Y_\infty))]^{(-1)^{i+1}} = \prod_{i=0}^m [\Delta_0(H_i(M-k; \mathbb{Z}[H_1(M-k)]))]^{(-1)^{i+1}}.$$

Теперь вычислим функцию Александра узла k в ориентированной гомологической 3-сфере M .

Лемма 4.1. *Пусть k — узел в ориентированной гомологической 3-сфере M . Тогда*

$$A(M-k) = \Delta_k(t)(t-1)^{-1}.$$

Доказательство. Для всех $i \geq 2$ гомологии $H_i(M-k; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ равны нулю. Поэтому их порядки равны единице. Цепной комплекс нулевого измерения $C_0(M-k; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ — это $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -модуль, порожденный одной точкой, т.е. поднятием точки из $M-k$. Аналогично можно показать, что порядок $\Delta_0(H_0(M-k; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]))$ равен $(t-1)$. Очевидно, что по определению многочлен Александра $\Delta_k(t)$ — это порядок $\Delta_0(H_1(M-k; \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]))$, что и требовалось доказать. $\square$

Теорема 4.1 ([6, с. 126]). *Пусть X — клеточный комплекс. Тогда $\tau(X) \doteq A(X)$, где $\tau(X)$ — кручение Милнора а $A(X)$ — функция Александра комплекса X .*

Теорема 4.2 ([6, с. 126]). *Пусть X — клеточное комплекс. Тогда*

$$\tau(X) \doteq A(X),$$

где $\tau(X)$ — кручение Милнора комплекса X , а $A(X)$ — функция Александра комплекса X . Существует свойство кручения пар по Крейнбилу [4, теорема 4.4].

Теорема 4.3 ([4]). *Пусть $\mathcal{M}$ — n -мерное многообразие с границей, $\partial\mathcal{M} = M_1 \cup M_2$ и $M_1 \cap M_2 = \partial M_1 = \partial M_2$. Тогда*

$$\tau(\mathcal{M}, M_1) \doteq \overline{\tau(\mathcal{M}, M_2)}^{(-1)^{n+1}},$$

где черта означает замену переменной t на $1/t$.

5. Доказательство теоремы 1.1

Доказательство теоремы 1.1. Для доказательства мы воспользуемся свойствами кручения Милнора и его связью с функцией Александра по Фоксу — Милнору [1] и Крейнбилу [4].

Пусть k_0 и k_1 — конкордантные узлы в ориентированной гомологической 3-сфере M и f — конкорданс между k_0 и k_1 , описанный в § 3.

Как показано в лемме 3.2, гомологии дополнения Y_0 узла k_0 в M и соответствующего ему нулевого хирургического пространства W_0 совпадают. Следовательно, ввиду теоремы 4.2 функция Александра Y_0 и кручение Милнора W_0 связаны равенством

$$A(Y_0) = A(W_0) \doteq \tau(W_0).$$

Аналогично для дополнения Y_1 узла k_1

$$A(Y_1) = A(W_1) \doteq \tau(W_1).$$

В силу [11, лемма 4] существует связь между кручением замыкания дополнения конкорданса Q и W_0 (напомним, что W_0 — часть границы $\partial Q = W_0 \cup W_1$):

$$\tau(W_0) \doteq \tau(Q, W_0)^{-1} \cdot \tau(Q),$$

$$\tau(Q) \doteq \tau(Q, W_1) \cdot \tau(W_1).$$

Поэтому

$$\tau(W_0) \doteq \tau(Q, W_0)^{-1} \cdot \tau(Q, W_1) \cdot \tau(W_1).$$

Поскольку Q , W_0 , W_1 удовлетворяют условиям теоремы 4.3, имеем

$$\tau(Q, W_1) \doteq \overline{\tau(Q, W_0)}^{(-1)}.$$

Следовательно,

$$\tau(W_0) \doteq \tau(Q, W_0)^{-1} \cdot \overline{\tau(Q, W_0)}^{(-1)} \cdot \tau(W_1),$$

что означает

$$A(Y_0) \doteq \lambda(t)\lambda(1/t)A(Y_1),$$

где $\lambda(t)$ — рациональная функция $\tau(Q, W_0)^{-1}$.

В силу леммы 4.1

$$A(Y_0) = \frac{\Delta_{k_0}(t)}{t-1}, \quad A(Y_1) = \frac{\Delta_{k_1}(t)}{t-1}.$$

Аналогично для произведения $\lambda(t)\lambda(1/t)$ по Милнору [1, теорема 2, с. 263], заключаем, что

$$\Delta_{k_0}(t) \doteq p(t)p(1/t)\Delta_{k_1}(t),$$

где $p(t)$ — многочлен из кольца $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 5.1. Особый случай конкорданса — срезанный узел. Из теоремы 1.1 следует, что если узел в ориентированной гомологической сфере является срезанным, то его многочлен Александра распадается на множители $p(t)p(1/t)$.

6. Доказательство теоремы 1.2

Доказательство теоремы 1.2. Теорема 1.2] является прямым обобщением теоремы 1.1. Рассмотрим более общую ситуацию, описанную в лемме А.1 ниже. (Соответствующая формулировка появилась благодаря вопросу С. А. Мелихова [частное сообщение]).

Пусть $\mathcal{W}$ — гомологический кобордизм между гомологическими 3-сферами M и M' . Пусть k и k' — узлы в M и M' соответственно и конкорданс между k и k' задан отображением $g: S^1 \times I \rightarrow \mathcal{W}$. Трубочатая окрестность $N(C)$ 2-клетки $C = g(S^1 \times I)$ в $\mathcal{W}$ имеет вид $C \times I^2$ ³⁾, где I^2 — 2-клетка. Пересечение $N(C)$ с границей $\partial\mathcal{W}$, т.е. $N(C) \cap \partial\mathcal{W}$, является объединением трубочатых окрестностей $k \times I^2 \cup k' \times I^2$ узлов k и k' в соответствующих гомологических сферах.

Рассмотрим замыкание $Q = \overline{\mathcal{W} - N(C)}$ в кобордизме $\mathcal{W}$. Граница ∂Q пространства Q является объединением $C \times \partial I^2$ и замыканий дополнений Y, Y' узлов k, k' в M, M' , сцепленных вдоль тор⁴⁾, $k \times \partial I^2$ и $k' \times \partial I^2$. Таким образом,

$$\partial Q = Y \cup_h C \times \partial I^2 \cup_{h'} Y',$$

где h и h' — соответствующие гомеоморфизмы нулевой хирургии, склеивающие Y, Y' и $C \times \partial I^2$.

Обозначим

$$\mathcal{Y} = Y \cup_h S^1 \times \{0\} \times \partial I^2, \quad \mathcal{Y}' = Y' \cup_{h'} C \times \partial I^2.$$

Тогда можно записать

$$\partial Q = \mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}'.$$

Согласно теореме 4.2

$$A(Y) = A(\mathcal{Y}) \doteq \tau(\mathcal{Y}),$$

$$A(Y') = A(\mathcal{Y}') \doteq \tau(\mathcal{Y}').$$

Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1.1, находим

$$\tau(\mathcal{Y}) \doteq \tau(Q, \mathcal{Y})^{-1} \cdot \tau(Q) = \tau(Q, \mathcal{Y})^{-1} \cdot \tau(Q, \mathcal{Y}') \cdot \tau(\mathcal{Y}').$$

Ясно, что Q , $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}'$ удовлетворяют условиям теоремы 4.3. Следовательно,

$$\tau(Q, \mathcal{Y}) \doteq \overline{\tau(Q, \mathcal{Y}')}^{(-1)},$$

³⁾ ср. [5].

⁴⁾ Подробности такой склейки аналогичны операции хирургии, описанной в § 3.

откуда получаем

$$A(\mathcal{Y}) \doteq \lambda(t)\lambda(1/t)A(\mathcal{Y}'),$$

где $\lambda(t) = \tau(Q, \mathcal{Y})^{-1}$ — рациональная функция, или, эквивалентно,

$$\Delta_k(t) \doteq p(t)p(1/t)\Delta_{k'}(t),$$

для некоторого многочлена $p(t)$, что и требовалось доказать. $\square$

Приложение А

Приведем более общее утверждение, чем лемма 3.1.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть $\mathcal{W}$ — гомологический кобордизм между гомологическими 3-сферами M и M' , т.е. вложения $M \hookrightarrow \mathcal{W}$ и $M' \hookrightarrow \mathcal{W}$ индуцируют изоморфизмы на гомологиях $H_*(M) \rightarrow H_*(\mathcal{W})$ и $H_*(M') \rightarrow H_*(\mathcal{W})$. Естественно, что эти вложения также индуцируют изоморфизмы на когомологиях $H^*(\mathcal{W}) \rightarrow H^*(M)$ и $H^*(\mathcal{W}) \rightarrow H^*(M')$.

Граница $\partial\mathcal{W}$ есть объединение $M \cup M'$. Пусть k — узел в M и k' — узел в M' . Предположим, что существует конкорданс $g : S^1 \times I \rightarrow \mathcal{W}$ между $k = S^1 \times \{0\} \subset M$ и $k' = S^1 \times \{1\} \subset M'$ в $\mathcal{W}$. Обозначим через $C \subset \mathcal{W}$ образ вложенного цилиндра $S^1 \times I$ под отображением g . Пусть $N(C)$ — регулярная окрестность множества C в $\mathcal{W}$. Обозначим через Q замыкание $Q = \mathcal{W} - N(C)$ множества $\mathcal{W} - N(C)$.

Лемма А.1. *Дополнение конкорданса $\mathcal{W} - C$ имеет гомологии окружности S^1 .*

Доказательство. Сначала отметим, что из точной последовательности пары $(\mathcal{W}, M)$ немедленно следует, что

$$H^i(\mathcal{W}, M) = 0$$

для всех размерностей i .

Рассмотрим точную последовательность когомологий тройки $(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}, M)$:

$$H^i(\mathcal{W}, M) \rightarrow H^i(\partial\mathcal{W}, M) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{W}, M).$$

Она переписывается как

$$0 \rightarrow H^i(\partial\mathcal{W}, M) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) \rightarrow 0,$$

т.е.

$$H^i(\partial\mathcal{W}, M) \cong H^{i+1}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}).$$

Кроме того, по аксиоме вырезания

$$H^i(\partial\mathcal{W}, M) = H^i(M'),$$

следовательно,

$$H^{i+1}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) = H^i(M').$$

Аналогично имеем

$$H^{i+1}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) = H^i(M).$$

Теперь, удаляя дополнения узлов k, k' в M, M' соответственно и применяя аксиому вырезания, имеем

$$H^i(N(C) \cup \partial\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) = H^i(N(C), N(C) \cap \partial\mathcal{W}).$$

Отметим, что $N(C)$ гомотопна множеству C , а пересечение $N(C) \cap \partial\mathcal{W}$ является дизъюнктым объединением трубчатых окрестностей узлов k в M и k' в M' . По инвариантности когомологий относительно гомотопии получаем

$$H^i(N(C), N(C) \cap \partial\mathcal{W}) = H^i(C, k \cup k').$$

Рассмотрим точную последовательность когомологий тройки $(C, k \cup k', k')$:

$$H^i(C, k') \rightarrow H^i(k \cup k', k') \rightarrow H^{i+1}(C, k \cup k') \rightarrow H^{i+1}(C, k').$$

Очевидно, что C, k, k' гомеоморфны окружности, следовательно

$$H^i(C, k') = 0.$$

По аксиоме вырезания

$$H^i(k \cup k', k') = H^i(k).$$

Отсюда

$$H^{i+1}(C, k \cup k') = H^i(k).$$

Из вышесказанного следует

$$H^i(N(C) \cup \partial\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) = H^{i-1}(k).$$

Далее, используя инвариантность гомологий относительно гомотопии, двойственность Пуанкаре — Лефшеца и аксиому вырезания, получаем

$$H_{3-i}(\mathcal{W} - C) = H_{3-i}(Q) = H^{i+1}(Q, \partial Q) = H^{i+1}(\mathcal{W}, N(C) \cup \partial\mathcal{W}),$$

где ∂Q — граница Q , а $\partial\mathcal{W} = M \cup M'$ — граница $\mathcal{W}$.

Группы когомологий

$$H^{i+1}(\mathcal{W}, N(C) \cup \partial\mathcal{W})$$

включены в точную последовательность когомологий тройки $(\mathcal{W}, N(C) \cup \partial\mathcal{W}, \partial\mathcal{W})$:

$$H^i(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) \rightarrow H^i(N(C) \cup \partial\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{W}, N(C) \cup \partial\mathcal{W}) \rightarrow H^{i+1}(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}).$$

Заменяя

$$H^i(\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) \cong H^{i-1}(M),$$

$$H^{i+1}(\mathcal{W}, N(C) \cup \partial\mathcal{W}) \cong H_{3-i}(\mathcal{W} - C),$$

$$H^i(N(C) \cup \partial\mathcal{W}, \partial\mathcal{W}) \cong H^{i-1}(k),$$

получаем точную последовательность

$$H^{i-1}(M) \rightarrow H^{i-1}(k) \rightarrow H_{3-i}(\mathcal{W} - C) \rightarrow H^i(M).$$

Ясно, что $H_4(\mathcal{W} - C) = 0$, при $i = 2$ получаем

$$H_1(\mathcal{W} - C) = \mathbb{Z},$$

при $i = 3$

$$H_0(\mathcal{W} - C) = \mathbb{Z}.$$

Известно, что отображение $H^0(M) \rightarrow H^0(k)$ является изоморфизмом и, следовательно, $H_2(\mathcal{W} - C) = H_3(\mathcal{W} - C) = 0$, что требовалось доказать. $\square$

Приведем другое доказательство леммы 2.1.

Другое доказательство леммы 2.1. Пусть $\nu(k)$ — трубчатая окрестность узла k в гомологической 3-сфере M . Обозначим через X_k замыкание множества $M - \nu(k)$. Ввиду инвариантности гомологий относительно гомотопии имеем

$$H_{3-i}(M - k) = H_{3-i}(X_k), \quad i \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

В силу двойственности Пуанкаре — Лефшеца и аксиомы вырезания

$$H_{3-i}(M - k) = H_{3-i}(X_k) = H^i(X_k, \partial X_k) = H^i(M, \nu(k)).$$

Группы когомологий $H^i(M, \nu(k))$ включены в точную последовательность когомологий пары $(M, \nu(k))$: $H^{i-1}(M) \rightarrow H^{i-1}(\nu(k)) \rightarrow H^i(M, \nu(k)) \rightarrow H^i(M)$ или, эквивалентно, $H^{i-1}(M) \rightarrow H^{i-1}(k) \rightarrow H_{3-i}(M - k) \rightarrow H^i(M)$. Из данной точной последовательности получаем $H_1(M - k) = \mathbb{Z}$ при $i = 2$ и $H_0(M - k) = \mathbb{Z}$ при $i = 3$. Ясно, что отображение $H^0(M) \rightarrow H^0(k)$ является изоморфизмом, поэтому $H_2(M - k) = H_3(M - k) = 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Благодарности

Автор благодарит профессоров Кауффмана и Мелихова за содержательные обсуждения, а также анонимного рецензента за его внимательную и поддерживающую работу.

Литература

1. R. H. Fox and J. W. Milnor, “Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots”, *Osaka J. Math.* **3**, 257–267 (1966).
2. N. Saveliev, *Lectures on the Topology of 3-Manifolds: An Introduction to the Casson Invariant*, De Gruyter, Berlin etc. (2012).
3. D. Austin, D. Rolfsen, “Homotopy of knots and the Alexander polynomial”, *Canad. Math. Bull.* **42**, No. 3, 257–262 (1999).
4. J. Kreinbihl, “A Fox–Milnor theorem for knots in a thickened surface”, *J. Knot Theory Ramifications* **28**, No. 12, Article ID 1950073 (2019).
5. H. Noguchi, “A classification of orientable surfaces in 4-space”, *Proc. Japan Acad.* **39**, 442–443 (1963).
6. В. Г. Тураев, “Кручение Райдемайстера в теории узлов”, *Успехи мат. наук* **41**, No. 1, 97–147 (1986).
7. C. Livingston, “A survey of classical knot concordance”, In: *Handbook of Knot Theory*, pp. 319–347, Elsevier, Amsterdam (2005).
8. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2002).
9. J. W. Milnor, “Infinite cyclic coverings”, In: *Conf. Topol. Manifolds, Michigan State Univ. 1967*, pp. 115–133, Michigan State Univ. Press (1968).
10. J. F. Davis, P. Kirk. *Lecture Notes in Algebraic Topology*, Am. Math. Soc., Providence, RI (2001).
11. J. W. Milnor, “Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct”, *Ann. Math.* **74**, 575–590 (1961).

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2025 г.
принята к публикации 5 июля 2025 г.

Л. В. Дворкин

ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ ПРЕДТРАНЗИТИВНЫХ АНАЛОГОВ (w)K4 и GL

Нормальная модальная логика предтранзитивна, если в ней выражима модальность, соответствующая транзитивному замыканию отношения достижимости. Мы установим конечную аппроксимируемость предтранзитивных обобщений K4, wK4, GL и их расширений каноническими формулами, наследуемыми подшкалами.

1. Введение

Пусть Λ — нормальная модальная логика. Формула χ с единственной переменной p выражает транзитивное замыкание в Λ , если для любой Λ -модели $\mathcal{M} = (W, R, \vartheta)$ и любого мира $w \in W$ $\mathcal{M}, w \models \chi$ тогда и только тогда, когда существует мир v , достижимый из w по транзитивному замыканию отношения R , в котором истинна p . Выразимость рефлексивного транзитивного замыкания определяется аналогично. Легко видеть, что если для некоторого $n \geq 1$ в логике выводима формула

$$\text{Trans}_n := \Diamond^{n+1}p \rightarrow \bigvee_{k=1}^n \Diamond^k p \quad \left(\text{wTrans}_n := \Diamond^{n+1}p \rightarrow \bigvee_{k=0}^n \Diamond^k p \right)$$

то $\bigvee_{k=1}^n \Diamond^k p$ ($\bigvee_{k=0}^n \Diamond^k p$) выражает в ней (рефлексивное) транзитивное замыкание. Назовем логику (слабо) n -транзитивной, если она содержит $(\text{w})\text{Trans}_n$. Очевидно, что любая n -транзитивная логика слабо n -транзитивна. На самом деле, следующие условия на логику Λ равносильны (предложение 2.1):

- в Λ выражимо транзитивное замыкание,
- в Λ выражимо рефлексивное транзитивное замыкание,
- Λ n -транзитивна для некоторого $n \geq 1$,
- Λ слабо n' -транзитивна для некоторого $n' \geq 1$.

Если одно из данных условий выполнено, Λ называется *предтранзитивной*.

Простейшими примерами предтранзитивных логик являются наименьшая 1-транзитивная и слабо 1-транзитивная логики

$$\text{K4} := \text{K} + \Diamond^2 p \rightarrow \Diamond p,$$

$$\text{wK4} := \text{K} + \Diamond^2 p \rightarrow \Diamond p \vee p.$$

Известно, что обе логики конечны аппроксимируемы [1, 2]. Более того, все расширения данных логик формулами, наследуемыми подшкалами (если формула общезначима на шкале, то она общезначима и на любой ее подшкале), конечны аппроксимируемы [3, 4]. Напротив, конечная

Работа выполнена при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (конкурс «Junior Leader»).

Л. В. Дворкин: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; lev_135@mail.ru.

аппроксимируемость $K + \text{Trans}_n$ и $K + \text{wTrans}_n$ при $n \geq 2$ является открытой проблемой [5, проблема 11.2].

Другими примерами предтранзитивных логик являются

$$\begin{aligned} K4_n^m &:= K + \Diamond^n p \rightarrow \Diamond^m p, \\ \text{wK}4_n^m &:= K + \Diamond^n p \rightarrow \Diamond^m p \vee p \end{aligned}$$

при $m < n$. При $m = 0$ эти логики вырождены и их финитная аппроксимируемость очевидна. Финитная аппроксимируемость $K4_n^1$ была установлена Габбаем [6], финитная аппроксимируемость $\text{wK}4_n^1$ установлена в недавней работе Кудинова и Шапировского [7]. Более того, в [7] доказано, что все расширения этих логик каноническими формулами, наследуемыми подшкалами, финитно аппроксимируемы. При $n > m \geq 2$ не известно, являются ли $K4_n^m$ и $\text{wK}4_n^m$ финитно аппроксимируемыми [5, проблема 11.2].

Ситуация лучше в случае логик конечной высоты и, в частности, для предтранзитивных аналогов S5. Финитная аппроксимируемость расширений $K + \text{wTrans}_n$, $n \geq 1$, и $K4_n^m$, $n > m \geq 1$, аксиомой симметричности для транзитивного замыкания установлена в [8] и [9] соответственно. В [10] получена финитная аппроксимируемость расширений данных логик аксиомой ограниченной высоты.

Помимо предтранзитивных аналогов K4 и wK4 рассматривались следующие предтранзитивные обобщения логики Геделя — Леба:

$$\text{GL}_n := K + \Box(\Box^{n-1} p \rightarrow p) \rightarrow \Box p = K + \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond^{n-1} p), \quad n \geq 2.$$

Саккетти [11] показал, что данные логики полны относительно класса конечных обратно фундированных $K4_n^1$ -шкал, обладают интерполяционным свойством Крейга и свойством неподвижных точек. Курахаша [12] построил Σ_2 нумерации для РА, относительно которых данные логики являются логиками доказуемости.

Другой предтранзитивный аналог GL

$$K + \Box(\Box(p \vee \Box p) \rightarrow p) \rightarrow \Box p = K + \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond(p \wedge \Diamond p)) \quad (1.1)$$

возник в [13] как фрагмент логики доказуемости непериодического расширения РА относительно РА. Свойства данной логики не изучались ранее.

Обозначим семейство логик $K4_n^1$, $\text{wK}4_n^1$ и GL_n при $n \geq 2$ через C_+ . Также обозначим через $C_?$ семейство логик $K + \text{Trans}_n$, $K + \text{wTrans}_n$ при $n \geq 2$ и $K4_n^m$, $\text{wK}4_n^m$ при $n > m \geq 2$. Как отмечено выше, финитная аппроксимируемость логик из C_+ известна, в то время как для логик из $C_?$ это является открытой проблемой. Логика из C_+ обладают несколькими свойствами, делающими их более легкими для изучения. Во-первых, логики из C_+ наследуются подшкалами. Во-вторых, для $\Lambda \in C_+$ и шкалы Крипке $\mathcal{F} = (W, R)$ существует Λ -замыкание R (наименьшее отношение $R' \supseteq R$ такое, что (W, R') является Λ -шкалой). Например, K4-замыкание — это транзитивное замыкание, а $K4_n^1$ -замыкание отношения R — это отношение $\bigcup_{k=0}^{\infty} R^{(n-1)k+1}$. Логика из $C_?$ не обладают ни одним из этих свойств.

Однако существуют логики, обладающие первым свойством, но не обладающие вторым. Среди них следующие логики:

$$\begin{aligned} K4_{\Diamond^2 \alpha} &:= K + \Diamond^2 \alpha(p) \rightarrow \Diamond p, \\ \text{wK}4_{\Diamond^2 \alpha} &:= K + \Diamond^2 \alpha(p) \rightarrow \Diamond p \vee p, \\ \text{GL}_{\Diamond^2 \alpha} &:= K + \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond \alpha(p)), \end{aligned}$$

где α — строго позитивная формула с единственной переменной p . Обозначим через C класс данных логик. Заметим, что $C \supset C_+$: $(\text{w})K4_{\Diamond^n p} = (\text{w})K4_n^1$ и $\text{GL}_{\Diamond^n p} = \text{GL}_n$ для $n \geq 2$. Также, $\text{GL}_{\Diamond^2(p \wedge \Diamond p)} \in C$ является в точности логикой из (1.1). Мы покажем, что все логики из C и их расширения каноническими формулами, наследуемыми подшкалами (в случае $\text{GL}_{\Diamond^2 \alpha}$ необходимо наследование более общими структурами), финитно аппроксимируемы.

Статья организована следующим образом. В § 2 мы приведем необходимые определения и известные факты из модальной логики. В § 3 мы определим рассматриваемые логики, установим их базовые свойства и сформулируем основные результаты. В § 4 мы получим вспомогательный комбинаторный результат о шкалах Крипке рассматриваемых логик. В § 5 мы докажем финитную аппроксимируемость предтранзитивных аналогов (w)K4 и GL. В § 6 мы распространим известный факт, что GL является замыканием wK4 относительно правила Леба, на предтранзитивный случай. В § 7 мы сформулируем несколько открытых вопросов для дальнейших исследований.

2. Основные понятия

Большинство определений в данном параграфе стандартны, более подробное изложение можно найти в [5] или [14].

2.1. Модальные формулы и логики. Множество *модальных формул* Fm строится из счетного множества *пропозициональных переменных* $PVar = \{p_0, p_1, \dots\}$ и $\perp$ с использованием импликации $\rightarrow$ и унарной модальной связки $\Diamond$. Остальные связки рассматриваются как сокращения, в частности,

$$\neg\varphi := \varphi \rightarrow \perp, \\ \top := \neg\perp, \quad \Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi.$$

Также мы используем обозначения

$$\Diamond^0\varphi := \varphi, \quad \Diamond^{k+1}\varphi := \Diamond\Diamond^k\varphi, \\ \Box^k\varphi := \neg\Diamond^k\neg\varphi$$

для $k \in \omega$. Графическое равенство формул обозначаем символом $\equiv$.

Обозначим через $Fm(p)$ множество формул с единственной переменной p . Для $\alpha \in Fm(p)$ и $\varphi \in Fm$ обозначим через $\alpha(\varphi)$ формулу, полученную подстановкой φ вместо p в α . В частности, $\alpha(p) \equiv \alpha$.

(Пропозициональной нормальной модальной) логикой называется множество формул $\Lambda \subseteq Fm$, содержащее все классические тавтологии, аксиомы $\Diamond\perp \rightarrow \perp$ и $\Diamond(p \vee q) \rightarrow \Diamond p \vee \Diamond q$ и замкнутое относительно правил *modus ponens*, подстановки, и *монотонности* $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\Diamond\varphi \rightarrow \Diamond\psi}$. Наименьшая логика обозначается K . Наибольшей логикой является множество всех формул. Все логики, отличные от Fm , называются *непротиворечивыми*. Для логики Λ и формулы φ обозначим через $\Lambda + \varphi$ наименьшую логику, содержащую Λ и φ . Мы используем стандартные обозначения для логик

$$K4 := K + \Diamond^2 p \rightarrow \Diamond p, \quad wK4 := K + \Diamond^2 p \rightarrow \Diamond p \vee p, \\ GL := K + \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p).$$

Мы говорим, что формула φ *выводима* в Λ и пишем $\Lambda \vdash \varphi$, если $\varphi \in \Lambda$.

2.2. Шкалы и модели Крипке. Шкалой Крипке называется пара $\mathcal{F} = (W, R)$, состоящая из непустого множества W и отношения $R \subseteq W \times W$ на нем. Элементы W называются *возможными мирами*, а R называется *отношением достижимости*. $\mathcal{F}$ *конечна*, если W конечно. Она *транзитивна*, если R транзитивно. $\mathcal{F}$ *обратно фундирована*, если не существует бесконечной последовательности миров $w_0, w_1, \dots$ такой, что $w_k R w_{k+1}$ для всех $k \in \omega$.

Для мира $w \in W$ обозначим через $R(w)$ множество $\{v \in W \mid w R v\}$. Степени отношения определяются стандартным образом:

$$R^0(w) := \{w\}, \quad R^{k+1}(w) := \bigcup_{v \in R(w)} R^k(v), \quad k \in \omega.$$

Отношения $R^+ := \bigcup_{k \geq 0} R^k$ и $R^* := \bigcup_{k \geq 0} R^k$ называются *транзитивным* и *рефлексивным транзитивным* замыканием R соответственно.

Оценкой на шкале $\mathcal{F}$ называется отображение $\vartheta : PVar \rightarrow \mathcal{P}(W)$, где $\mathcal{P}(W)$ — множество всех подмножеств W . Моделью Крипке над $\mathcal{F}$ называется пара $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, \vartheta)$, где ϑ — оценка на шкале

$\mathcal{F}$. Оценка ϑ продолжается на Fm по следующим правилам:

$$\begin{aligned}\vartheta(\perp) &:= \emptyset, \quad \vartheta(\varphi \rightarrow \psi) := W \setminus \vartheta(\varphi) \cup \vartheta(\psi), \\ \vartheta(\Diamond \varphi) &:= \{w \in W \mid R(w) \cap \vartheta(\varphi) \neq \emptyset\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что $\vartheta(\Diamond^k \varphi) = \{w \in W \mid R^k(w) \cap \vartheta(\varphi) \neq \emptyset\}$. Если $w \in \vartheta(\varphi)$, мы говорим, что φ истинна в мире w модели $\mathcal{M}$ и пишем $\mathcal{M}, w \models \varphi$, φ истинна в модели $\mathcal{M}$, если $\vartheta(\varphi) = W$, общезначима на шкале $\mathcal{F}$, если она истинна в любой модели над $\mathcal{F}$, общезначима в классе шкал $\mathcal{C}$, если она общезначима на всех шкалах из $\mathcal{C}$. Мы обозначаем это через $\mathcal{M} \models \varphi$, $\mathcal{F} \models \varphi$ и $\mathcal{C} \models \varphi$ соответственно. Для $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ мы говорим, что Γ истинна в мире w модели $\mathcal{M}$, если все $\varphi \in \Gamma$ истинны в w и пишем $\mathcal{M}, w \models \Gamma$. $\mathcal{M} \models \Gamma$, $\mathcal{F} \models \Gamma$ и $\mathcal{C} \models \Gamma$ определяются аналогично.

Модель (шкала) Крипке называется Λ -моделью (Λ -шкалой), если Λ истинна (общезначима) на ней. Класс всех Λ -шкал обозначим через $\text{Frames}(\Lambda)$. Множество $\text{Log}(\mathcal{C})$ всех формул, общезначимых на классе шкал $\mathcal{C}$, называется логикой $\mathcal{C}$. Легко показать, что, если $\mathcal{C} \neq \emptyset$, то $\text{Log}(\mathcal{C})$ является непротиворечивой логикой. Логика Λ полна по Крипке, если она является логикой некоторого класса шкал. Λ финитно аппроксимируема, если Λ является логикой некоторого класса конечных шкал.

2.3. Порожденные и селективные подшкалы и подмодели. Для модели Крипке $\mathcal{M}_0 = (W_0, R_0, \vartheta_0)$ и $W \subseteq W_0$ обозначим

$$R_0|_W := R_0 \cap (W \times W), \quad \vartheta_0|_W(p) := \vartheta_0(p) \cap W \text{ для всех } p \in \text{PVar}.$$

Определение 2.1. Пусть $\mathcal{F} = (W, R)$ и $\mathcal{F}_0 = (W_0, R_0)$ — шкалы Крипке. $\mathcal{F}$ называется

- слабой подшкалой $\mathcal{F}_0$, если $W \subseteq W_0$ и $R \subseteq R_0$,
- подшкалой $\mathcal{F}_0$, если $W \subseteq W_0$ и $R = R_0|_W$,
- порожденной подшкалой $\mathcal{F}_0$, если она является подшкалой $\mathcal{F}_0$ и $R_0(w) \subseteq W$ для всех $w \in W$.

$\mathcal{M} = (\mathcal{F}, \vartheta)$ называется подмоделью (слабой подмоделью, порожденной подмоделью) $\mathcal{M}_0 = (\mathcal{F}_0, \vartheta_0)$, если $\vartheta = \vartheta_0|_W$ и $\mathcal{F}$ является подшкалой (слабой подшкалой, порожденной подшкалой) $\mathcal{F}_0$.

Легко видеть, что истинность модальных формул сохраняется при переходе к порожденным подмоделям: если $\mathcal{M}$ — порожденная подмодель $\mathcal{M}_0$, то для всех $\varphi \in \text{Fm}$, $\vartheta(\varphi) = \vartheta_0(\varphi) \cap W$. Из этого вытекает сохранение общезначимости формул при переходе к порожденным подшкалам, т.е. $\text{Log}(\mathcal{F}_0) \subseteq \text{Log}(\mathcal{F})$, если $\mathcal{F}$ является порожденной подшкалой $\mathcal{F}_0$. Однако истинность не сохраняется при переходе к произвольным подмоделям. Для этих целей рассматриваются селективные подмодели.

Для формулы ζ обозначим через Ψ^ζ множество всех формул ψ , для которых $\Diamond \psi$ является подформулой ζ .

Определение 2.2. Слабая подмодель $\mathcal{M} = (W, R, \vartheta)$ модели Крипке $\mathcal{M}_0 = (W_0, R_0, \vartheta_0)$ называется ζ -селективной, если

$$\forall w \in W \forall \psi \in \Psi^\zeta (R_0(w) \cap \vartheta_0(\psi) \neq \emptyset \Rightarrow R(w) \cap \vartheta(\psi) \neq \emptyset).$$

Такие подмодели также называют селективными фильтрациями [16]. Следующая стандартная лемма утверждает, что истинность ζ и всех ее подформул сохраняется при переходе к ζ -селективной подмодели [16, лемма 6].

Лемма 2.1. Если $\mathcal{M}$ — ζ -селективная слабая подмодель $\mathcal{M}_0$, то $\vartheta(\varphi) = \vartheta_0(\varphi) \cap W$ для всех φ , являющихся подформулами ζ .

2.4. Каноническая модель. Пусть Λ — модальная логика. Множество формул Γ называется Λ -непротиворечивым, если не существует конечного $\Gamma' \subseteq \Gamma$ такого, что $\Lambda \vdash \bigwedge \Gamma' \rightarrow \perp$. Для непротиворечивой Λ существует модель $\mathcal{M}_\Lambda = (W_\Lambda, R_\Lambda, \vartheta_\Lambda)$, называемая канонической моделью Λ , обладающая следующими свойствами:

- (1) Λ истинна в $\mathcal{M}_\Lambda$,
- (2) лемма Линденбаума: для любого Λ -непротиворечивого множества $\Gamma \subseteq \text{Fm}$ существует мир $w \in W_\Lambda$ такой, что $\mathcal{M}_\Lambda, w \models \Gamma$,

(3) *теснота*: для любых двух миров $w, v \in W_\Lambda$,

$$\forall \varphi \in \text{Fm}(\mathcal{M}_\Lambda, w \models \Box \varphi \Rightarrow \mathcal{M}_\Lambda, v \models \varphi) \Rightarrow w R_\Lambda v,$$

(4) *различимость*: для любых двух различных миров $w, v \in W_\Lambda$ существует формула φ такая, что $\mathcal{M}_\Lambda, w \models \varphi$ и $\mathcal{M}_\Lambda, v \not\models \varphi$.

Шкала $\mathcal{F}_\Lambda := (W_\Lambda, R_\Lambda)$ называется *канонической шкалой* логики Λ . Логика Λ *каноническая*, если $\mathcal{F}_\Lambda \models \Lambda$. Если Λ каноническая, то по лемме Линденбаума $\Lambda = \text{Log}(\mathcal{F}_\Lambda)$, следовательно, Λ полна по Крипке.

Также нам понадобятся следующие стандартные факты про каноническую модель.

Лемма 2.2. *Для любых двух непротиворечивых логик Λ и Λ' , если $\Lambda \subseteq \Lambda'$, то $\mathcal{M}_{\Lambda'}$ является порожденной подмоделью $\mathcal{M}_\Lambda$.*

Следствие 2.1. *Если Λ каноническая и $\Lambda' \supseteq \Lambda$, то $\mathcal{F}_{\Lambda'} \models \Lambda$.*

Формула φ называется *канонической*, если логика $K + \varphi$ каноническая. По следствию 2.1, если $\Lambda \vdash \varphi$ и φ каноническая, то $\mathcal{F}_\Lambda \models \varphi$. Множество примеров канонических формул дает теорема Салквиста [17]. В частности, Trans_n и $w\text{Trans}_n$ — салквистовы формулы, следовательно, они канонические.

Лемма 2.3 (обобщенная теснота). *Пусть Λ — непротиворечивая логика, $w, v \in W_\Lambda$. Тогда справедливо следующее:*

(1) *Для всех $k \in \omega$, если $\forall \varphi \in \text{Fm}(\mathcal{M}_\Lambda, w \models \Box^k \varphi \Rightarrow \mathcal{M}_\Lambda, v \models \varphi)$, то $w R_\Lambda^k v$.*

(2) *Если для некоторого $n \in \omega$ $\forall \varphi \in \text{Fm}(\mathcal{M}_\Lambda, w \models \bigwedge_{k=1}^n \Box^k \varphi \Rightarrow \mathcal{M}_\Lambda, v \models \varphi)$, то $w R_\Lambda^+ v$.*

Доказательство. Первое утверждение хорошо известно (см. [5, предложение 5.9]). Для доказательства второго утверждения предположим, что $w R_\Lambda^+ v$ не выполнено. Тогда для всех $k \geq 1$ $w R_\Lambda^k v$ не выполнено, и по первому утверждению существуют $\varphi_k \in \text{Fm}$ такие, что $\mathcal{M}_\Lambda, w \models \Box^k \varphi_k$ и $\mathcal{M}_\Lambda, v \not\models \varphi_k$. Положим $\varphi := \bigvee_{k=1}^n \varphi_k$. Легко видеть, что $\mathcal{M}_\Lambda, v \not\models \varphi$ и $\mathcal{M}_\Lambda, w \models \Box^k \varphi$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Таким образом, посылка утверждения ложна. $\square$

2.5. Предтранзитивные логики. Для переменной $p \in \text{PVar}$ и формулы φ рассмотрим множество $D_p(\varphi) \subseteq \omega$:

$$\begin{aligned} D_p(p) &:= \{0\}, \quad D_p(\perp) = D_p(q) := \emptyset \quad \text{для } q \in \text{PVar} \setminus \{p\}, \\ D_p(\varphi \rightarrow \psi) &:= D_p(\varphi) \cup D_p(\psi), \quad D_p(\Diamond \varphi) := \{k+1 \mid k \in D_p(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Модальная глубина $d(\varphi)$ формулы φ определяется по рекурсии

$$d(p) = d(\perp) = 0, \quad d(\varphi \rightarrow \psi) = \max\{d(\varphi), d(\psi)\}, \quad d(\Diamond \varphi) = d(\varphi) + 1.$$

Легко видеть, что, если $k \in D_p(\varphi)$, то $k \leq d(\varphi)$.

Лемма 2.4. *Пусть $\mathcal{F} = (W, R)$ — шкала Крипке, $w \in W$ и $\varphi \in \text{Fm}$. Если оценки ϑ и ϑ' на $\mathcal{F}$ таковы, что*

$$\vartheta'(p) \cap \bigcup_{k \in D_p(\varphi)} R^k(w) = \vartheta(p) \cap \bigcup_{k \in D_p(\varphi)} R^k(w) \quad (2.1)$$

для всех $p \in \text{PVar}$, то $(\mathcal{F}, \vartheta), w \models \varphi \Leftrightarrow (\mathcal{F}, \vartheta'), w \models \varphi$.

Доказательство. Проведем индукцию по построению φ . Для $\varphi \equiv \perp$ утверждение тривиально. Если $\varphi \equiv p \in \text{PVar}$, то $D_p(\varphi) = \{0\}$ и в силу (2.1) $w \in \vartheta'(p) \Leftrightarrow w \in \vartheta(p)$. Переход для $\varphi \equiv \psi \rightarrow \eta$ очевиден.

Рассмотрим случай $\varphi \equiv \Diamond \psi$. В силу (2.1) для всех $p \in \text{PVar}$

$$\vartheta'(p) \cap \bigcup_{k \in D_p(\psi)} R^{k+1}(w) = \vartheta(p) \cap \bigcup_{k \in D_p(\psi)} R^{k+1}(w).$$

Заметим, что для $v \in R(w)$ $R^k(v) \subseteq R^{k+1}(w)$, откуда для всех $p \in \text{PVar}$

$$\vartheta'(p) \cap \bigcup_{k \in D_p(\psi)} R^k(v) = \vartheta(p) \cap \bigcup_{k \in D_p(\psi)} R^k(v).$$

По предположению индукции, $v \in \vartheta(\psi) \Leftrightarrow v \in \vartheta'(\psi)$. Таким образом, $w \in \vartheta(\Diamond\psi)$ тогда и только тогда, когда $w \in \vartheta'(\Diamond\psi)$. $\square$

Предложение 2.1. *Следующие условия на непротиворечивую логику Λ равносильны.*

- (1) В Λ выразимо транзитивное замыкание, т.е. существует $\chi \in \text{Fm}(p)$ такая, что для любой Λ -модели (W, R, ϑ)

$$\vartheta(\chi) = \{w \in W \mid R^+(w) \cap \vartheta(p) \neq \emptyset\}.$$

- (2) Λ выразимо рефлексивное транзитивное замыкание, т.е. существует $\chi' \in \text{Fm}(p)$ такая, что для любой Λ -модели (W, R, ϑ)

$$\vartheta(\chi') = \{w \in W \mid R^*(w) \cap \vartheta(p) \neq \emptyset\}. \quad (2.2)$$

- (3) Существует $n \in \omega$ такое, что Λ n -транзитивна, т.е. $\Lambda \vdash \Diamond^{n+1}p \rightarrow \bigvee_{k=1}^n \Diamond^k p$.

- (4) Существует $n' \in \omega$ такое, что Λ слабо n' -транзитивна, т.е. $\Lambda \vdash \Diamond^{n'+1}p \rightarrow \bigvee_{k=0}^{n'} \Diamond^k p$.

Логика, удовлетворяющие этим эквивалентным условиям, известны под различными названиями: слабо транзитивные [18, 19], конически выразимые [16], и предтранзитивные [9]. В настоящей работе мы используем последний термин. Также чаще рассматривают рефлексивное транзитивное замыкание, а не транзитивное, поэтому слабо n -транзитивные логики часто называют просто n -транзитивными [18, 19]. На самом деле, эквивалентность $2 \Leftrightarrow 4$ известна (она легко вытекает из [19, утверждение 5]). Тем не менее мы приведем здесь полное доказательство предложения 2.1:

Доказательство. Импликации $4 \Rightarrow 3$, $3 \Rightarrow 1$ и $1 \Rightarrow 2$ очевидны: достаточно положить $n := n' + 1$, $\chi := \bigvee_{k=1}^n \Diamond^k p$ и $\chi' := \chi \vee p$ соответственно.

Покажем, что $2 \Rightarrow 4$. Предположим, что χ' удовлетворяет условию (2.2) и для $n' := d(\chi')$ импликация $\Diamond^{n'+1}p \rightarrow \bigvee_{k=0}^{n'} \Diamond^k p$ не выводима в Λ . Тогда по лемме Линденбаума существует мир $w \in W_\Lambda$ такой, что $\mathcal{M}_\Lambda, w \models \Diamond^{n'+1}p$ и $\mathcal{M}_\Lambda, w \not\models \Diamond^k p$ для всех $k \leq n'$.

Рассмотрим оценку $\vartheta_\emptyset$ на $\mathcal{F}_\Lambda$, отображающую все переменные в $\emptyset$. Индукцией по построению формулы $\varphi \in \text{Fm}$ легко проверить, что $\vartheta_\emptyset(\varphi) = \vartheta_\Lambda(\varphi_\perp)$, где $\varphi_\perp$ — замкнутая формула, полученная из φ подстановкой $\perp$ вместо всех переменных. Так как Λ замкнута относительно правила подстановки, $\mathcal{M}_\emptyset := (\mathcal{F}_\Lambda, \vartheta_\emptyset)$ является Λ -моделью.

Таким образом, $\mathcal{M}_\Lambda$ и $\mathcal{M}_\emptyset$ являются Λ -моделями, $R_\Lambda^+(w) \cap \vartheta_\Lambda(p) \neq \emptyset$ и $R_\Lambda^+(w) \cap \vartheta_\emptyset(p) = \emptyset$. Следовательно, $\mathcal{M}_\Lambda, w \models \chi'$ и $\mathcal{M}_\emptyset, w \not\models \chi'$. Однако

$$\vartheta_\Lambda(p) \cap \bigcup_{k \in D_p(\chi')} R_\Lambda^k(p) \subseteq \vartheta_\Lambda(p) \cap \bigcup_{k=0}^{n'} R_\Lambda^k(p) = \emptyset = \vartheta_\emptyset(p) \cap \bigcup_{k \in D_p(\chi')} R_\Lambda^k(p).$$

Это невозможно по лемме 2.4. $\square$

Шкала Крипке $\mathcal{F} = (W, R)$ n -транзитивна, если $R^+ = \bigcup_{k=1}^n R^k$. Введем обозначения $\Diamond^{+n}\varphi := \bigvee_{k=1}^n \Diamond^k \varphi$, $\Box^{+n}\varphi := \bigwedge_{k=1}^n \Box^k \varphi$. Если $\mathcal{F}$ n -транзитивна, то для любой формулы $\varphi \in \text{Fm}$ и любой оценки ϑ на $\mathcal{F}$,

$$\vartheta(\Diamond^{+n}\varphi) = \{w \in W \mid R^+(w) \cap \vartheta(\varphi) \neq \emptyset\}.$$

Легко проверить, что $\mathcal{F}$ n -транзитивна тогда и только тогда, когда $\text{Log}(\mathcal{F})$ n -транзитивна. Следовательно, все шкалы n -транзитивной логики n -транзитивны. Так как формула Trans_n каноническая, каноническая шкала n -транзитивной логики n -транзитивна.

2.6. Кластеры, скелет, максимальные миры и лемма Цорна. Пусть $\mathcal{F} = (W, R)$ — шкала Крипке. Тогда R^* является *предпорядком* (рефлексивным транзитивным отношением) на W . Отношение эквивалентности

$$w \sim_R v :\Leftrightarrow w R^* v \wedge v R^* w$$

является конгруэнцией на (W, R^*) (т.е., если $w \sim_R w'$ и $v \sim_R v'$, то $w R^* v \Leftrightarrow w' R^* v'$). Индуцированное отношение $\preceq_R$ на фактормножестве $W/\sim_R$ является частичным порядком. Класс эквивалентности $[w]_R$ мира $w \in W$ относительно $\sim_R$ называется его *кластером*. Частично упорядоченное множество $(W/\sim_R, \preceq_R)$ называется *скелетом* $\mathcal{F}$.

Пусть X — подмножество W . Мир $v \in X$ *максимален в X* , если $v R^* u \Rightarrow u R^* v$ для всех $u \in X$. Обозначим через $\text{max}(X)$ множество всех максимальных миров в X . Подмножество $S \subseteq W$ называется *цепью*, если для всех $w, v \in S$ $w R^* v$ или $v R^* w$. Мир $v \in X$ называется *верхней гранью S* , если $u R^* v$ для всех $u \in S$. Отметим, что $S = \emptyset$ является цепью и любой $x \in X$ является ее верхней гранью.

Лемма 2.5 (Цорн). *Если любая цепь в X имеет верхнюю грань, то $\text{max}(X) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Данную версию леммы Цорна легко получить из стандартной формулировки леммы Цорна для частичных порядков, применив ее к скелету шкалы $(X, R^*|_X)$. $\square$

2.7. Свойство максимальности. Следующее свойство канонической модели установлено в [3] для транзитивных логик и обобщено на предтранзитивный случай в [20, 7].

Лемма 2.6 (свойство максимальности). *Пусть Λ — предтранзитивная логика, Γ — множество формул,*

$$X := \{w \in W_\Lambda \mid \mathcal{M}_\Lambda, w \models \Gamma\}.$$

Если Γ Λ -непротиворечиво, то $\text{max}(X) \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть n таково, что Λ n -транзитивна. Предположим, что Γ Λ -непротиворечиво и $\text{max}(X) = \emptyset$. Тогда по лемме Цорна в X существует цепь S без верхней грани. Рассмотрим множество

$$\Xi := \{\xi \mid \exists w \in S (\mathcal{M}_\Lambda, w \models \Box^{+n}\xi)\}.$$

Если $\Gamma \cup \Xi$ Λ -непротиворечиво, то по лемме Линденбаума существует мир $v \in X$ такой, что $\mathcal{M}_\Lambda, v \models \Xi$. В силу обобщенной тесноты $w R_\Lambda^+ v$ для всех $w \in S$. Поэтому $v \in X$ является верхней гранью S . Противоречие.

Если $\Gamma \cup \Xi$ Λ -противоречиво, то $\Lambda \vdash \bigwedge_{i < r} \varphi_i \wedge \bigwedge_{j < s} \psi_j \rightarrow \perp$ для некоторых $\varphi_i \in \Gamma$, $\xi_j \in \Xi$. Заметим, что $s > 0$, так как Γ Λ -непротиворечиво. Пусть $w_j \in S$ таковы, что $\mathcal{M}_\Lambda, w_j \models \Box^{+n}\xi_j$. Так как S — цепь, существует $k < s$ такое, что $w_j R_\Lambda^* w_k$ для всех $j < s$. Предположим, что существует мир $u \in X \cap R_\Lambda^+(w_k)$. Тогда $w_j R_\Lambda^+ u$ для всех $j < s$, следовательно, все φ_i и ξ_j истинны в u , что невозможно, так как $\mathcal{M}_\Lambda \models \Lambda$. Таким образом, w_k максимален в X , что противоречит предположению. $\square$

Следствие 2.2. *Пусть Λ — предтранзитивная логика, $w \in W_\Lambda$, $\psi \in \text{Fm}$. Если $\mathcal{M}_\Lambda, w \models \Diamond\psi$, то $\text{max}(R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\psi)) \neq \emptyset$.*

Доказательство. Легко видеть, что множество $\Gamma := \{\varphi \in \text{Fm} \mid \mathcal{M}_\Lambda, w \models \Box\varphi\} \cup \{\psi\}$ Λ -непротиворечиво. По тесноте

$$R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\psi) = \{u \in W_\Lambda \mid \mathcal{M}_\Lambda, u \models \Gamma\}.$$

Далее применяем лемму 2.6. $\square$

3. Предтранзитивные аналоги K4, wK4 и GL

Обозначим через $\text{Fm}^+(p)$ множество всех формул, построенных из переменной $p \in \text{PVar}$ и константы $\top$ с использованием $\wedge$ и $\Diamond$. Такие формулы называются *строго позитивными*. Для формулы φ обозначим $\underline{d}_p(\varphi) := \min(D_p(\varphi) \cup \{\infty\})$. Далее в работе предполагается, что $\beta, \gamma \in \text{Fm}^+(p)$, β и γ содержат p , $\underline{d}_p(\beta) \geq 1$, $\underline{d}_p(\gamma) \geq 2$.

Рассмотрим логики $\text{K}4_\gamma = \text{K} + \text{A}4_\gamma$, $\text{wK}4_\gamma = \text{K} + \text{Aw}4_\gamma$ и $\text{GL}_{\Diamond\beta} = \text{K} + \text{ALöb}_{\Diamond\beta}$, где

$$\text{A}4_\gamma = \gamma(p) \rightarrow \Diamond p,$$

$$\text{Aw}4_\gamma = \gamma(p) \rightarrow \Diamond p \vee p,$$

$$\text{ALöb}_{\Diamond\beta} = \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg\beta(p)).$$

Отметим, что это семейство логик немного более общее, чем семейство C из введения. Например, можно показать, что не существует $\alpha \in \text{Fm}^+(p)$, для которой $\text{K}4_{\Diamond^2\alpha} = \text{K}4_{\Diamond^3 p \wedge \Diamond^4 p}$.

3.1. Базовые связи между рассматриваемыми логиками.

Лемма 3.1. *Если $\alpha \in \text{Fm}^+(p)$ содержит p , то $\text{wK}4 \vdash \alpha \rightarrow \Diamond p \vee p$.*

Доказательство. Проведем индукцию по построению α . Для $\alpha \equiv \top$ посылка ложна. Для $\alpha \equiv p$ утверждение тривиально.

Предположим, что $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$ содержит p . Тогда для некоторого $i \in \{1, 2\}$ α_i содержит p . По предположению индукции $\text{wK}4 \vdash \alpha_i \rightarrow \Diamond p \vee p$. Следовательно, $\text{wK}4 \vdash \alpha \rightarrow \Diamond p \vee p$.

Если $\alpha \equiv \Diamond\alpha_1$ содержит p , то α_1 содержит p и $\text{wK}4 \vdash \alpha_1 \rightarrow \Diamond p \vee p$ по предположению индукции. По нормальности $\text{wK}4 \vdash \Diamond\alpha_1 \rightarrow \Diamond\Diamond p \vee \Diamond p$, следовательно, $\text{wK}4 \vdash \alpha \rightarrow \Diamond p \vee p$. $\square$

Лемма 3.2. *Если $\alpha \in \text{Fm}^+(p)$ содержит p и $\underline{d}_p(\alpha) \geq 1$, то $\text{K}4 \vdash \alpha \rightarrow \Diamond p$.*

Доказательство. Проведем индукцию по построению α . Для $\alpha \equiv \top$ и $\alpha \equiv p$ посылка ложна.

Если $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$ содержит p и $\underline{d}_p(\alpha) \geq 1$, то для некоторого $i \in \{1, 2\}$ α_i содержит p и $\underline{d}_p(\alpha_i) \geq 1$. По предположению индукции $\text{K}4 \vdash \alpha_i \rightarrow \Diamond p$, откуда $\text{K}4 \vdash \alpha \rightarrow \Diamond p$.

Предположим, что $\alpha \equiv \Diamond\alpha_1$ содержит p . По лемме 3.1 $\text{wK}4 \vdash \alpha_1 \rightarrow \Diamond p \vee p$. По нормальности $\text{wK}4 \vdash \Diamond\alpha_1 \rightarrow \Diamond\Diamond p \vee \Diamond p$. Так как $\text{K}4 \supseteq \text{wK}4$ и $\text{K}4 \vdash \Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$, $\text{K}4 \vdash \alpha \rightarrow \Diamond p$. $\square$

Предложение 3.1. $(\text{w})\text{K}4_\gamma \subseteq (\text{w})\text{K}4$ и $\text{GL}_{\Diamond\beta} \subseteq \text{GL}$. В частности, $(\text{w})\text{K}4_\gamma$ и $\text{GL}_{\Diamond\beta}$ непротиворечивы.

Доказательство. Согласно леммам 3.1 и 3.2

$$\text{K}4 \vdash \gamma \rightarrow \Diamond p, \quad \text{wK}4 \vdash \gamma \rightarrow \Diamond p \vee p \quad \text{и} \quad \text{K}4 \vdash \beta \rightarrow \Diamond p.$$

По монотонности $\text{K}4 \vdash \Diamond(p \wedge \neg\Diamond p) \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg\beta)$. Следовательно, $\text{GL} \vdash \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg\beta)$. $\square$

Рассмотрим следующую последовательность формул:

$$\sigma_1 := p, \quad \sigma_n := p \wedge \Diamond\sigma_{n-1} \quad \text{при } n > 1.$$

Пусть $\mathcal{M} = (W, R, \vartheta)$ — модель Крипке. Легко видеть, что σ_n истинна в мире v_1 тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}, v_1 \models p$ и существуют миры $v_2, \dots, v_n$ такие, что для $i = 2, \dots, n$ $v_{i-1} R v_i$ и $\mathcal{M}, v_i \models p$.

Лемма 3.3. *Если $\alpha \in \text{Fm}^+(p)$, $\underline{d}_p(\alpha) \geq k$ и $d(\alpha) < k + n$, то $\text{K} \vdash \Diamond^k \sigma_n \rightarrow \alpha$.*

Доказательство. Проведем индукцию по построению α . Для $\alpha \equiv \top$ утверждение тривиально. Если $\alpha \equiv p$, то $d(\alpha) = \underline{d}_p(\alpha) = 0$ и $\text{K} \vdash \Diamond^0 \sigma_n \rightarrow \alpha$ при $n > 0$.

Если $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$, то для $i = 1, 2$

$$\underline{d}_p(\alpha_i) \geq \underline{d}_p(\alpha) \geq k \quad \text{и} \quad d(\alpha_i) \leq d(\alpha) < k + n.$$

Следовательно, $\text{K} \vdash \Diamond^k \sigma_n \rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2$ по предположению индукции.

Если $\alpha \equiv \Diamond \alpha_1$, то

$$\underline{d}_p(\alpha_1) = \underline{d}_p(\alpha) - 1 \geq k - 1 \quad \text{и} \quad d(\alpha_1) = d(\alpha) - 1 < k - 1 + n.$$

По предположению индукции $K \vdash \Diamond^{k-1} \sigma_n \rightarrow \alpha_1$. Поэтому $K \vdash \Diamond^k \sigma_n \rightarrow \alpha$ по монотонности. $\square$

Предложение 3.2. Пусть $d(\gamma) \leq n + 1$ и $d(\beta) \leq n$. Тогда

$$K4_\gamma \supseteq K4_{\Diamond^2 \sigma_n}, \quad wK4_\gamma \supseteq wK4_{\Diamond^2 \sigma_n} \quad \text{и} \quad GL_{\Diamond \beta} \supseteq GL_{\Diamond^2 \sigma_n}.$$

Доказательство. По лемме 3.3 импликации $\Diamond^2 \sigma_n \rightarrow \gamma$ и $\Diamond \sigma_n \rightarrow \beta$ выводимы в K . Следовательно, импликации $A4_\gamma \rightarrow A4_{\Diamond^2 \sigma_n}$, $Aw4_\gamma \rightarrow Aw4_{\Diamond^2 \sigma_n}$ и $AL\ddot{o}b_{\Diamond \beta} \rightarrow AL\ddot{o}b_{\Diamond^2 \sigma_n}$ также выводимы в K . $\square$

Предложение 3.3. $wK4_\gamma \subseteq K4_\gamma$ и $K4_{\Diamond \beta} \subseteq GL_{\Diamond \beta}$.

Доказательство. Первое утверждение тривиально. Для доказательства второго рассмотрим формулу $\varphi := \beta(p) \vee p$. Индукцией по построению β легко проверить, что $K \vdash \beta(p) \rightarrow \beta(\varphi)$, следовательно,

$$K \vdash \varphi \rightarrow \beta(\varphi) \vee p. \quad (3.1)$$

Также $K \vdash \beta(p) \rightarrow \varphi$, откуда

$$\begin{aligned} GL_\gamma \vdash \Diamond \beta(p) &\rightarrow \Diamond \varphi && \text{по монотонности} \\ &\rightarrow \Diamond(\varphi \wedge \neg \beta(\varphi)) && \text{по } AL\ddot{o}b_{\Diamond \beta} \\ &\rightarrow \Diamond((\beta(\varphi) \vee p) \wedge \neg \beta(\varphi)) && \text{в силу (3.1)} \\ &\rightarrow \Diamond p. \end{aligned}$$

Предложение доказано. $\square$

Предложение 3.4. Пусть $\mathcal{F} = (W, R)$ — шкала Крипке. $GL_{\Diamond \beta}$ общезначима на $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F} \models wK4_{\Diamond \beta}$ и R обратно фундировано.

Доказательство. Пусть R не обратно фундировано. Тогда существует последовательность миров $V = \{v_k \mid k \in \omega\}$ такая, что $v_k R v_{k+1}$ для всех $k \in \omega$. Пусть $\vartheta(p) := V$, $n := d(\beta)$. Очевидно, что $\vartheta(\Diamond \sigma_n) \supseteq V$, откуда $\vartheta(\beta) \supseteq V$ по лемме 3.3. Следовательно, $\vartheta(p) \cap \vartheta(\neg \beta) = \emptyset$ и $(\mathcal{F}, \vartheta), v_1 \not\models \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \beta)$. Значит $GL_{\Diamond \beta}$ не общезначима на $\mathcal{F}$.

Пусть теперь $\mathcal{F}$ — $wK4_{\Diamond \beta}$ -шкала с обратно фундированным отношением R . Предположим, что для некоторой оценки ϑ $AL\ddot{o}b_{\Diamond \beta}$ ложна в мире $w \in W$ модели $\mathcal{M} = (\mathcal{F}, \vartheta)$. Тогда $\Diamond p$ и $\Box(p \rightarrow \beta)$ истинны в w . Рассмотрим множество $X := R(w) \cap \vartheta(p)$. Так как R обратно фундировано, существует $v \in X$ такой, что $X \cap R^+(v) = \emptyset$. При этом β истинна в v , так как $\mathcal{M}, w \models \Box(p \rightarrow \beta)$.

Рассмотрим оценку $\vartheta'(p) := \vartheta(p) \cap R^+(v)$. Так как $\underline{d}_p(\beta) \geq 1$, по лемме 2.4 $\mathcal{M}', v \models \beta$, следовательно, $\mathcal{M}', w \models \Diamond \beta$ и, поскольку $wK4_{\Diamond \beta}$ общезначима на $\mathcal{F}$, $\mathcal{M}', w \models \Diamond p \vee p$. $w R v$ и R обратно фундировано, следовательно, $w \notin R^+(v)$ и $\mathcal{M}', w \not\models p$. Таким образом, $\mathcal{M}', w \not\models \Diamond p$ и множество

$$R(w) \cap \vartheta'(p) = R(w) \cap \vartheta(p) \cap R^+(v) = X \cap R^+(v)$$

не пусто. Противоречие. $\square$

Отметим, что формулы $A4_\gamma$ сальквистовы, а значит им соответствуют некоторые первопорядковые условия на шкалы Крипке. Однако в общем случае эти условия достаточно громоздки. Поэтому мы выпишем их только для $\gamma = \Diamond^2 \sigma_n$: $\mathcal{F} = (W, R)$ является $K4_{\Diamond^2 \sigma_n}$ -шкалой тогда и только тогда, когда

$$\forall w, u, v_1, \dots, v_n \in W \left(w R u R v_1 R \dots R v_n \Rightarrow \bigvee_{i=1}^n w R v_i \right). \quad (3.2)$$

Предложение 3.5. *Имеют место следующие включения:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \text{GL} & = & \text{GL}_{\Diamond^2\sigma_1} & \supset & \text{GL}_{\Diamond^2\sigma_2} & \supset & \text{GL}_{\Diamond^2\sigma_3} & \supset & \dots \\
 & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
 \text{K4} & = & \text{K4}_{\Diamond^2\sigma_1} & \supset & \text{K4}_{\Diamond^2\sigma_2} & \supset & \text{K4}_{\Diamond^2\sigma_3} & \supset & \dots \\
 & & \cup & \supset & \cup & \supset & \cup & \supset & \\
 \text{wK4} & = & \text{wK4}_{\Diamond^2\sigma_1} & \supset & \text{wK4}_{\Diamond^2\sigma_2} & \supset & \text{wK4}_{\Diamond^2\sigma_3} & \supset & \dots
 \end{array}$$

Доказательство. Проверим, что $\text{wK4}_{\Diamond^2\sigma_n} \supseteq \text{K4}_{\Diamond^2\sigma_{n+1}}$. Так как $\text{K} \vdash \sigma_{n+1}(p) \rightarrow \sigma_n(p \wedge \Diamond p)$,

$$\begin{aligned}
 \text{wK4}_{\Diamond^2\sigma_n} \vdash \Diamond^2\sigma_{n+1}(p) &\rightarrow \Diamond^2\sigma_n(p \wedge \Diamond p) && \text{по монотонности} \\
 &\rightarrow \Diamond(p \wedge \Diamond p) \vee p \wedge \Diamond p && \text{по Aw}_{\Diamond^2\sigma_n} \\
 &\rightarrow \Diamond p.
 \end{aligned}$$

Оставшиеся нестрогие включения вытекают из предложений 3.2 и 3.3.

Теперь покажем строгость включений. Рассмотрим отношение следования на натуральных числах: $S := \{(n, n+1) \mid n \in \omega\}$. Для $n \in \omega$ положим $\mathcal{F}_n := (n, S|_n)$, где мы отождествляем n с множеством $\{0, \dots, n-1\}$. Легко видеть, что $\mathcal{F}_{n+2} \models \neg \Diamond^2\sigma_{n+1}$ и $\mathcal{F}_{n+2}$ обратно фундирована. Следовательно, $\mathcal{F}_{n+2}$ является $\text{GL}_{\Diamond^2\sigma_{n+1}}$ -шкалой по предложению 3.4. При этом $\mathcal{F}_{n+2} \not\models \text{wK4}_{\Diamond^2\sigma_n}$. Таким образом, включения между логиками с различными индексами строгие.

Остается проверить, что $\text{GL}_{\Diamond^2\sigma_n} \supsetneq \text{K4}_{\Diamond^2\sigma_n} \supsetneq \text{wK4}_{\Diamond^2\sigma_n}$. Для первого включения рассмотрим рефлексивную точку $\mathcal{F} = (\{0\}, \{(0, 0)\})$: $\text{GL}_{\Diamond^2\sigma_n}$ не общезначима на $\mathcal{F}$ по предложению 3.4, но $\mathcal{F} \models \text{K4}$, а значит $\text{K4}_{\Diamond^2\sigma_n}$ общезначима на $\mathcal{F}$. Для второго включения рассмотрим шкалы $\mathcal{F}'_n := (n, S|_n \cup \{(n-1, 0)\})$. Легко видеть, что $\mathcal{F}'_n \models \Diamond^2\sigma_n \rightarrow p$, но $\mathcal{F}'_n \not\models \Diamond^2\sigma_n \rightarrow \Diamond p$. Следовательно, $\mathcal{F}'_n$ является $\text{wK4}_{\Diamond^2\sigma_n}$ -шкалой, но не $\text{K4}_{\Diamond^2\sigma_n}$ -шкалой. $\square$

Как мы только что показали, логики $\text{K4}_{\Diamond^2\sigma_n}$ линейно упорядочены по включению. Легко проверить, что логики $\text{K4}_{\Diamond^n p} = \text{K4}_n^1$ по включению образуют решетку. Более точно,

$$\text{K4}_n^1 \subseteq \text{K4}_k^1 \Leftrightarrow (n-1) \text{ делится на } (k-1).$$

В общем случае отношение включения на логиках K4_γ устроено сложнее. Неясно даже в каких случаях данные логики совпадают. Очевидно, что, если $\text{K} \vdash \gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2$, то $\text{K4}_{\gamma_1} = \text{K4}_{\gamma_2}$. Однако, это условие не является необходимым: $\text{K4}_{\Diamond^2 p \wedge \Diamond^3 p} = \text{K4}_{\Diamond^3 p}$, несмотря на то, что $\Diamond^2 p \wedge \Diamond^3 p$ и $\Diamond^3 p$ не эквивалентны даже в K4 .

Следствие 3.1. *Следующие логики содержат $\text{K4}_{\Diamond^2\sigma_n}$:*

$$\text{K4}_\gamma, d(\gamma) \leq n+1, \quad \text{wK4}_\gamma, d(\gamma) \leq n \quad \text{и} \quad \text{GL}_\beta, d(\beta) \leq n.$$

Доказательство вытекает из предложений 3.2 и 3.5.

Предложение 3.6. *Логика $\text{K4}_{\Diamond^2\sigma_n}$ n -транзитивна.*

Доказательство. Рассмотрим формулу $\varphi := \bigvee_{k=0}^{n-1} \Diamond^k p$. Легко проверить, что

$$\text{K} \vdash \Diamond^{n+1} p \rightarrow \Diamond^2 \sigma_n(\varphi).$$

Следовательно, $\text{K4}_{\Diamond^2\sigma_n} \vdash \Diamond^{n+1} p \rightarrow \Diamond \varphi$ и $\text{K4}_{\Diamond^2\sigma_n} \vdash \Diamond^{n+1} p \rightarrow \bigvee_{k=1}^n \Diamond^k p$ по нормальности. $\square$

Следствие 3.2. *Логики из следствия 3.1 n -транзитивны.*

Лемма 3.4. *Для всех $n \geq 1$*

$$\begin{aligned}
 \text{K4}_{\Diamond^2\sigma_n} &\vdash \Diamond^{+n} \sigma_n(p) \rightarrow \Diamond p, \\
 \text{GL}_{\Diamond^2\sigma_n} &\vdash \Diamond p \rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n(p)).
 \end{aligned}$$

Доказательство. Легко проверить, что для всех $k \geq 0$

$$K \vdash \Diamond^k \sigma_n(p) \rightarrow \sigma_n \left(p \vee \bigvee_{l=1}^k \Diamond^l \sigma_n \right). \quad (3.3)$$

Индукцией по $k \geq 1$ покажем, что

$$K4_{\Diamond^2 \sigma_n} \vdash \Diamond^k \sigma_n(p) \rightarrow \Diamond p. \quad (3.4)$$

Для $k = 1$ формула выводима в K . Пусть $k \geq 2$ и (3.4) выполнено для $l = 1, \dots, k-1$. Имеем

$$\begin{aligned} K4_{\Diamond^2 \sigma_n} \vdash \Diamond^k \sigma_n(p) &\rightarrow \Diamond^2 \sigma_n \left(p \vee \bigvee_{l=1}^{k-2} \Diamond^l \sigma_n \right) && \text{в силу (3.3)} \\ &\rightarrow \Diamond \left(p \vee \bigvee_{l=1}^{k-2} \Diamond^l \sigma_n \right) && \text{по } A4_{\Diamond^2 \sigma_n} \\ &\rightarrow \Diamond p \vee \bigvee_{l=2}^{k-1} \Diamond^l \sigma_n && \text{по нормальности} \\ &\rightarrow \Diamond p && \text{по предположению индукции.} \end{aligned}$$

Первое утверждение немедленно вытекает из (3.4). Докажем второе. Из (3.3) следует, что

$$K \vdash \Diamond^{+n} \sigma_n(p) \rightarrow \Diamond \sigma_n(p \vee \Diamond^{+n} \sigma_n). \quad (3.5)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} GL_{\Diamond^2 \sigma_n} \vdash \Diamond p &\rightarrow \Diamond(p \vee \Diamond^{+n} \sigma_n) \\ &\rightarrow \Diamond((p \vee \Diamond^{+n} \sigma_n) \wedge \neg \Diamond \sigma_n(p \vee \Diamond^{+n} \sigma_n)) && \text{по } AL\ddot{o}b_{\Diamond^2 \sigma_n} \\ &\rightarrow \Diamond((p \vee \Diamond^{+n} \sigma_n) \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n) && \text{в силу (3.5)} \\ &\rightarrow \Diamond(p \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n). \end{aligned}$$

□

Транзитивность отношения R можно определить эквивалентным образом как локальным условием $R^2 \subseteq R$, так и глобальным $R^+ \subseteq R$. Похожие эффекты имеют место для логик $K4_{\Diamond^2 \sigma_n}$: (3.2) является локальным условием, глобальное сформулировано в следующем утверждении.

Следствие 3.3. Шкала Крипке $\mathcal{F} = (W, R)$ является $K4_{\Diamond^2 \sigma_n}$ -шкалой тогда и только тогда, когда

$$\forall w, v_1, \dots, v_n \in W \left(w R^+ v_1 R \dots R v_n \Rightarrow \bigvee_{i=1}^n w R v_i \right). \quad (3.6)$$

Доказательство. Очевидно, что (3.6) влечет (3.2), поэтому (3.6) является достаточным условием. Докажем, что оно также необходимо. Пусть $\mathcal{F} = K4_{\Diamond^2 \sigma_n}$ -шкала и $w R^+ v_1 R \dots R v_n$. Рассмотрим оценку $\vartheta(p) := \{v_1, \dots, v_n\}$. Тогда $(\mathcal{F}, \vartheta), v_1 \models \sigma_n$ и, так как $\mathcal{F}$ n -транзитивна, $(\mathcal{F}, \vartheta), w \models \Diamond^{+n} \sigma_n$. По лемме 3.4, $(\mathcal{F}, \vartheta), w \models \Diamond p$. Поэтому, $w R v_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$ □

Отметим, что в общем случае равенство $K4_{\Diamond \beta} = K + \Diamond^{+n} \beta \rightarrow \Diamond p$ не имеет места. Например, $K4_{\Diamond^3 p} \vdash \Diamond^k p \rightarrow \Diamond p$ тогда и только тогда, когда k нечетно.

3.2. Логики, наследуемые подшкалами и полуподшкалами.

Определение 3.1. Слабая подшкала $\mathcal{F} = (W, R)$ шкалы $\mathcal{F}_0 = (W_0, R_0)$ называется *полуподшкалой*, если выполнено следующее условие:

$$\forall w, v \in W (w R^* v \wedge w R_0 v \Rightarrow w R v). \quad (3.7)$$

Модель $(\mathcal{F}, \vartheta)$ называется *полуподмоделью* $(\mathcal{F}_0, \vartheta_0)$, если $\mathcal{F}$ — полуподшкала $\mathcal{F}_0$ и $\vartheta = \vartheta_0|_W$.

В отличие от порожденных подшкал класс шкал произвольной логики не обязательно замкнут относительно взятия подшкал и полуподшкал. Мы говорим, что полная по Крипке логика Λ *наследуется (полу)подшкалами*, если класс $\text{Frames}(\Lambda)$ замкнут относительно взятия (полу)подшкал. Формула φ *наследуется (полу)подшкалами*, если $K + \varphi$ наследуется (полу)подшкалами. Отметим, что если φ каноническая, то $K + \varphi$ полна по Крипке, и это определение совпадает с определением из введения. Очевидно, что любая подшкала является полуподшкалой, следовательно, все логики, наследуемые подшкалами, наследуются полуподшкалами.

Здесь необходимо сделать несколько комментариев. Во-первых, логики, наследуемые подшкалами, в англоязычной литературе часто называют просто *subframe* (подшкальными или субфреймовыми) логиками (с классической работы Файна [3] до современных статей [4, 7]). Однако термин *субфреймовая формула* обычно используют для формул специального вида, определенных Файном. В настоящей работе мы используем более точный (и более длинный) термин *наследуемые подшкалами*, как для формул, так и для логик. Во-вторых, понятие «логика, наследуемая подшкалами» можно распространить на неполные по Крипке логики, используя обобщенные шкалы [21, п. 2.2].

Приведем несколько примеров формул, наследуемых подшкалами и полуподшкалами. Легко видеть, что полуподшкалы транзитивной (рефлексивной) шкалы транзитивны (рефлексивны), следовательно, формулы $\Diamond^2 p \rightarrow \Diamond p$ и $p \rightarrow \Diamond p$ наследуются полуподшкалами. Также любая подшкала (но не любая полуподшкала) симметричной шкалы симметрична. Поэтому формула $p \rightarrow \Box \Diamond p$ наследуется подшкалами, но не полуподшкалами. Наконец, подшкала серийной шкалы легко может быть не серийна, поэтому $\Diamond \top$ не наследуется подшкалами.

Предложение 3.7. *Логики $K4_\gamma$, $wK4_\gamma$ и $GL_{\Diamond\beta}$ наследуются полуподшкалами.*

Доказательство. Предположим, что существует полуподшкала $\mathcal{F} = (W, R)$ шкалы $\mathcal{F}_0 = (W_0, R_0)$ такая, что $\mathcal{F} \not\models K4_\gamma$. Тогда существуют оценка ϑ на $\mathcal{F}$ и мир $w \in W$ такие, что $(\mathcal{F}, \vartheta), w \not\models \gamma \rightarrow \Diamond p$. В силу леммы 2.4 можно считать, что $\vartheta(p) \subseteq R^*(w)$.

Пусть ϑ_0 — оценка на $\mathcal{F}_0$ такая, что $\vartheta_0(p) = \vartheta(p)$. Индукцией по построению $\alpha \in \text{Fm}^+(p)$ покажем, что $\vartheta_0(\alpha) \supseteq \vartheta(\alpha)$. Базовый случай тривиален. Пусть $\alpha \equiv \Diamond \alpha_1$. По предположению индукции $\vartheta_0(\alpha_1) \supseteq \vartheta(\alpha_1)$. Так как $W_0 \supseteq W$ и $R_0 \supseteq R$,

$$\begin{aligned} \vartheta_0(\Diamond \alpha_1) &= \{v \in W_0 \mid R_0(v) \cap \vartheta_0(\alpha_1) \neq \emptyset\} \\ &\supseteq \{v \in W \mid R(v) \cap \vartheta(\alpha_1) \neq \emptyset\} = \vartheta(\Diamond \alpha_1). \end{aligned}$$

Индукционный переход для $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$ тривиален.

Следовательно, $(\mathcal{F}_0, \vartheta_0), w \models \gamma$. В то же время

$$\begin{aligned} R_0(w) \cap \vartheta_0(p) &= R_0(w) \cap R^*(w) \cap \vartheta(p) && \text{поскольку } \vartheta_0(p) = \vartheta(p) \subseteq R^*(w) \\ &= R(w) \cap \vartheta(p) && \text{в силу (3.7).} \end{aligned}$$

Таким образом, $(\mathcal{F}_0, \vartheta_0), w \not\models \Diamond p$ и $\mathcal{F}_0 \not\models K4_\gamma$.

Итак, $K4_\gamma$ наследуется подшкалами. Заметим, что, если $w \notin \vartheta(\text{Aw}4_\gamma)$, то $w \notin \vartheta(p) = \vartheta_0(p)$, откуда $w \notin \vartheta_0(\text{Aw}4_\gamma)$. Следовательно, $wK4_\gamma$ также наследуется подшкалами. Легко видеть, что класс всех обратно фундированных шкал замкнут относительно взятия полуподшкал, следовательно, по предложению 3.4 $GL_{\Diamond\beta}$ наследуется подшкалами. $\square$

Формулы $A4_\gamma$ и $\text{Aw}4_\gamma$ салквистовы, следовательно, логики $K4_\gamma$ и $wK4_\gamma$ канонические. Напротив, $GL_{\Diamond\beta}$ не каноническая. В самом деле, по предложению 3.1 $GL \supseteq GL_{\Diamond\beta}$, откуда $\mathcal{F}_{GL}$ является порожденной подшкалой $\mathcal{F}_{GL_{\Diamond\beta}}$ по лемме 2.2. Известно, что $\mathcal{F}_{GL}$ содержит рефлексивные миры [5, теорема 6.5]. Следовательно, $\mathcal{F}_{GL_{\Diamond\beta}}$ также содержит их и $\mathcal{F}_{GL_{\Diamond\beta}} \not\models GL_{\Diamond\beta}$ по предложению 3.4.

Следствие 3.4. *$K4_\gamma$ и $wK4_\gamma$ общезначимы на всех полуподшкалах своих канонических шкал. $GL_{\Diamond\beta}$ общезначима на всех обратно фундированных полуподшкалах своей канонической шкалы.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из каноничности и предложения 3.7. Для доказательства второго предположим, что $\mathcal{F}$ — обратно фундированная полуподшкала $\mathcal{F}_{GL_{\Diamond\beta}}$. По

предложению 3.3 и следствию 2.1 $\mathcal{F}_{\text{GL}_{\diamond\beta}} \models \text{K4}_{\diamond\beta}$, следовательно, $\mathcal{F} \models \text{K4}_{\diamond\beta}$ по предложению 3.7 и $\mathcal{F} \models \text{GL}$ по предложению 3.4. $\square$

3.3. Основные результаты. Теперь мы готовы сформулировать основные результаты настоящей работы.

Теорема 3.1. Пусть логика Λ общезначима на всех конечных подшкалах своей канонической шкалы и содержит $\text{K4}_{\diamond^2\sigma_n}$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда она финитно аппроксимируема.

Теорема 3.2. Пусть логика Λ общезначима на конечных обратно фундированных полуподшкалах своей канонической шкалы и содержит $\text{GL}_{\diamond^2\sigma_n}$ для некоторого $n \in \omega$. Тогда она финитно аппроксимируема.

В силу следствий 3.1 и 3.4 условия теорем выполнены для K4_γ , wK4_γ и $\text{GL}_{\diamond\beta}$.

Следствие 3.5. Логики K4_γ , wK4_γ и $\text{GL}_{\diamond\beta}$ финитно аппроксимируемы.

К сожалению, сложно привести другие естественные примеры нетранзитивных логик, для которых можно применить данные теоремы. Выше отмечено, что формулы $p \rightarrow \diamond p$ и $p \rightarrow \square \diamond p$ наследуются подшкалами. Однако легко видеть, что все рефлексивные $\text{K4}_{\diamond^2\sigma_n}$ -шкалы транзитивны, а значит по следствию 3.1 $\text{K4}_\gamma + p \rightarrow \diamond p = \text{K4} + p \rightarrow \diamond p$. Аналогичная тривиализация наблюдается для симметричности, линейности и других стандартных наследуемых подшкалами аксиом модальных логик. В контексте предтранзитивных логик более естественно рассматривать версии аксиом для транзитивного замыкания: $p \rightarrow \diamond^{+n} p$, $p \rightarrow \square^{+n} \diamond^{+n} p$ (логики со второй аксиомой рассматривались в [9]). Однако легко показать, что данные формулы не наследуются подшкалами.

Тем не менее можно привести примеры модальных логик отличных от K4_γ и wK4_γ , для которых применима теорема 3.1. Зафиксируем переменную s и введем новую модальность $\diamond_s \varphi := \diamond(s \wedge \varphi)$. Легко видеть, что формула

$$\text{Trans}_n^s := s \rightarrow \left(\diamond_s^{n+1} p \rightarrow \bigvee_{k=1}^n \diamond_s^k p \right)$$

общезначима на шкале $\mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ и все ее подшкалы n -транзитивны. Следовательно, Trans_n^s наследуется подшкалами. Также она салквистова, а значит каноническая. Таким образом, логики $\text{K4}_\gamma + \text{Trans}_n^s$ финитно аппроксимируемы по 3.1. Легко проверить, что при $n < d(\gamma) - 1$ K4_γ не n -транзитивна и $\text{K4}_\gamma + \text{Trans}_n^s$ является нетривиальным (хотя и не очень естественным) расширением K4_γ . Логика $\text{K} + \text{Trans}_n^s$ намного более естественна, но она не содержит $\text{K4}_{\diamond^2\sigma_m}$ ни для какого m , поэтому теорема 3.1 не применима к ней.

4. Пути в шкалах и моделях

В данном параграфе мы установим вспомогательный комбинаторный результат относительно $\text{K4}_{\diamond^2\sigma_n}$ -шкал.

4.1. Пути в шкалах.

Определение 4.1. Пусть $\mathcal{F} = (W, R)$ — шкала Крипке. Конечная последовательность миров $u_0, \dots, u_m$ называется *путем* в $\mathcal{F}$, если $u_k R u_{k+1}$ для всех $k < m$. Число $m \in \omega$ называется *длиной* пути.

Зафиксируем некоторое $n \in \omega$ и положим $N := n^n$.

Предложение 4.1. Пусть $\mathcal{F}$ — $\text{K4}_{\diamond^2\sigma_n}$ -шкала. Предположим, что $u_0^i, \dots, u_n^i$, $i = 0, \dots, N$ — пути длины n в $\mathcal{F}$ такие, что $u_n^i R^* u_0^{i+1}$ для всех $i < N$. Тогда существуют $i, i' \leq N$ и $j < n$ такие, что $i < i'$ и $u_j^i R u_{j+1}^{i'}$.

Доказательство. Предположим, что $u_j^i R u_{j+1}^{i'}$ не имеет места для всех $i < i' \leq N$ и $j < n$. Пару последовательностей натуральных чисел $(i_1, \dots, i_l)$, $(j_2, \dots, j_l)$ назовем $l \times m$ -зигзагом, если

$1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq N$, $1 \leq j_2, \dots, j_l \leq m$ и $u_m^{i_k} R u_{j_{k+1}}^{i_{k+1}}$ для всех $k = 1, \dots, l-1$. Число i_1 назовем начальной строкой зигзага. Заметим, что каждому зигзагу соответствует путь в $\mathcal{F}$:

$$\begin{array}{c} u_1^{i_1} \rightarrow u_2^{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow u_m^{i_1} \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ u_{j_2}^{i_2} \leftarrow \dots \rightarrow u_m^{i_2} \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \dots \\ u_{j_l}^{i_l} \leftarrow \dots \rightarrow u_m^{i_l} \end{array}$$

Отметим, что для $i = 1, \dots, N-1$

$$u_m^i R^+ u_1^{i+1} R u_2^{i+1} R \dots R u_n^{i+1}.$$

Следовательно, $u_m^i R u_{j_{i+1}}^{i+1}$ для некоторых $j_{i+1} \in \{1, \dots, n\}$ по следствию 3.3, поэтому $(1, 2, \dots, N)$, $(j_2, \dots, j_N)$ образуют $n^n \times n$ -зигзаг.

Предположим, что существует $n \times 1$ -зигзаг $(i_1, \dots, i_n)$, $(j_2, \dots, j_n)$. Тогда $j_2 = \dots = j_n = 1$ и

$$u_0^0 R^+ u_1^{i_1} R u_1^{i_2} R \dots R u_1^{i_n}.$$

По следствию 3.3 $u_0^0 R u_1^{i_a}$ для некоторого $a \in \{1, \dots, n\}$, что противоречит предположению.

Итак, мы знаем, что $n^n \times n$ -зигзаг существует, а $n \times 1$ -зигзаг не существует.

Лемма 4.1. *Если существует $kn \times m$ -зигзаг с начальной строкой i_1 , то существует $k \times (m-1)$ -зигзаг с той же начальной строкой.*

Доказательство. Проведем индукцию по k . Базовый случай $k = 1$ тривиален. Предположим, что $k > 1$ и утверждение выполнено для $k-1$. Пусть $(i_1, \dots, i_{kn})$, $(j_2, \dots, j_{kn})$ — $kn \times m$ -зигзаг.

Рассмотрим часть соответствующего зигзагу пути, которая находится на строках $i_2, \dots, i_{n+1}$:

$$\begin{array}{c} u_{j_2}^{i_2} \rightarrow \dots \rightarrow u_m^{i_2} \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ u_{j_3}^{i_3} \leftarrow \dots \rightarrow u_m^{i_3} \\ \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \searrow \\ \quad \quad \quad \dots \\ u_{j_{n+1}}^{i_{n+1}} \leftarrow \dots \rightarrow u_m^{i_{n+1}} \end{array}$$

В данном участке находится не менее n миров (минимум по одному на строке) и $u_{m-1}^{i_1} R^+ u_{j_2}^{i_2}$, значит по следствию 3.3 $u_{m-1}^{i_1} R u_j^{i_a}$ для некоторых $a \in \{2, \dots, n+1\}$, $j \in \{j_a, \dots, m\}$. Более того, по предположению j не может быть равно m .

Рассмотрим часть зигзага, начинающуюся с a -й строки:

$$(i_a, i_{a+1}, \dots, i_{kn}), (j_{a+1}, \dots, j_{kn})$$

Очевидно, что это $l \times m$ -зигзаг, где $l = kn - a + 1 \geq (k-1)n$. По предположению индукции существует $(k-1) \times (m-1)$ -зигзаг $(i'_1, i'_2, \dots, i'_{k-1})$, $(j'_2, \dots, j'_{k-1})$ такой, что $i'_1 = i_a$.

Остается заметить, что

$$(i_1, i_a, i'_2, \dots, i'_{k-1}), (j, j'_2, \dots, j'_{k-1})$$

является искомым $k \times (m-1)$ -зигзагом. □

Применив $n-1$ раз лемму 4.1 к $n^n \times n$ -зигзагу, получим $n \times 1$ -зигзаг. Противоречие. □

4.2. Размеченные пути в моделях.

Определение 4.2. Пусть $\mathcal{M} = (W, R, \vartheta)$ — шкала Крипке, Ψ — конечное множество формул. Ψ -размеченным путем в $\mathcal{M}$ назовем последовательность миров и формул

$$u_0, \psi_0, u_1, \psi_1, \dots, \psi_{m-1}, u_m,$$

в которой $m \geq 0$, $u_k \in W$, $\psi_k \in \Psi$ и для всех $k < m$, $u_{k+1} \in R(u_k) \cap \vartheta(\psi_k)$. Число m назовем длиной данного пути.

Зафиксируем некоторое Ψ и положим $M := N|\Psi|^n = n^n|\Psi|^n$.

Лемма 4.2. Пусть $\mathcal{M} = (W, R, \vartheta)$ — модель на $K4_{\Diamond^2\sigma_n}$ -шкале, и пусть $u_0^i, \psi_0^i, \dots, u_n^i$, $i = 0, \dots, M$, — Ψ -размеченные пути длины n в $\mathcal{M}$ такие, что $u_n^i R^* u_0^{i+1}$ для всех $i < M$. Тогда существуют $i, i' \leq M$ и $j < n$ такие, что $i < i'$ и

$$u_{j+1}^{i'} \in R(u_j^i) \cap \vartheta(\psi_j^i). \quad (4.1)$$

Доказательство. Рассмотрим наборы формул

$$\vec{\psi}_i = (\psi_0^i, \dots, \psi_{n-1}^i), \quad i = 0, \dots, M.$$

Существует только $|\Psi|^n$ различных наборов формул из Ψ длины n . Следовательно по принципу Дирихле среди наборов $\vec{\psi}_i$, $i = 0, \dots, M$ есть $n^n + 1$ идентичных, т.е. $\vec{\psi}_{i_0} = \dots = \vec{\psi}_{i_N}$ для некоторых $0 \leq i_0 < \dots < i_N \leq M$. Рассмотрим пути

$$u_0^{i_k}, \dots, u_n^{i_k}, \quad k = 0, \dots, N.$$

По предложению 4.1 существуют $k, k' \leq N$ и $j < n$ такие, что $k < k'$ и $u_j^{i_k} R u_{j+1}^{i_{k'}}$. Так как $u_0^{i_{k'}}, \psi_0^{i_{k'}}, \dots, u_n^{i_{k'}}$ — размеченный путь и $\vec{\psi}_{i_{k'}} = \vec{\psi}_{i_k}$, $u_{j+1}^{i_{k'}} \in \vartheta(\psi_j^{i_{k'}}) = \vartheta(\psi_j^{i_k})$. Следовательно, (4.1) имеет место для $i = i_k$ и $i' = i_{k'}$. $\square$

Определение 4.3. Ψ -размеченный путь $u_0, \psi_0, \dots, u_m$ в модели $\mathcal{M} = (W, R, \vartheta)$ называется оптимальным, если для всех $k < m$ $u_{k+1} \in \max(R(u_k) \cap \vartheta(\psi_k))$.

Следствие 4.1. Пусть $\mathcal{M} = (W, R, \vartheta)$ — модель на $K4_{\Diamond^2\sigma_n}$ -шкале и l — число, не меньшее n . Предположим, что $u_0, \psi_0, \dots, u_{lM+n}$ — оптимальный Ψ -размеченный путь длины $lM + n$ в $\mathcal{M}$. Тогда существует $k \leq l(M-1) + n$, для которого $u_{k+l} R^+ u_k$.

Доказательство. Положим $u_j^i := u_{li+j}$ для $i \leq M$, $j \leq n$, $\psi_j^i := \psi_{li+j}$ для $i \leq M$, $j < n$. Очевидно, что $u_0^i, \psi_0^i, \dots, u_n^i$, $i \leq M$ — Ψ -размеченные пути в $\mathcal{M}$. Также, поскольку $n \leq l$, $li + n \leq l(i+1)$, следовательно, $u_n^i R^* u_0^{i+1}$ для всех $i < M$. По лемме 4.2 существуют $i, i' \leq M$, $j < n$ такие, что $i < i'$ и $u_{j+1}^{i'} \in R(u_j^i) \cap \vartheta(\psi_j^i)$. Так как $u_{j+1}^i \in \max(R(u_j^i) \cap \vartheta(\psi_j^i))$ и $u_{j+1}^i R^+ u_{j+1}^{i'}$, $u_{j+1}^{i'} R^+ u_{j+1}^i$. Таким образом, $u_{j+1}^{i+1} R^+ u_{j+1}^i$, т.е. $u_{k+l} R^+ u_k$ для $k := li + j + 1$. $\square$

Определение 4.4. Ψ -размеченный путь $u_0, \psi_0, \dots, u_m$ в $\mathcal{M} = (W, R, \vartheta)$ сократим, если существуют $k, k' < m$ такие, что $k' \leq k$ и $u_{k'} \in R(u_k) \cap \vartheta(\psi_k)$.

Следствие 4.2. Пусть $\mathcal{M} = (W, R, \vartheta)$ — модель на $K4_{\Diamond^2\sigma_n}$ -шкале. Тогда Ψ -размеченные пути длины $n(M+1)$ в $\mathcal{M}$, все миры в которых принадлежат одному и тому же кластеру, сократимы.

Доказательство. Пусть $u_0, \psi_0, \dots, u_{n(M+1)}$ — Ψ -размеченный путь в $\mathcal{M}$, все миры в котором принадлежат одному и тому же кластеру. Положим $u_j^i := u_{n(M-i)+j}$ для $i \leq M$, $j \leq n$, $\psi_j^i := \psi_{n(M-i)+j}$ для $i \leq M$, $j < n$. Очевидно, что $u_0^i, \psi_0^i, \dots, u_n^i$, $i \leq M$, являются Ψ -размеченными путями в $\mathcal{M}$. Так как все миры принадлежат одному кластеру, $u_n^i R^* u_0^{i+1}$ для всех $i < M$. По лемме 4.2 существуют $i, i' \leq M$, $j < n$ такие, что $i < i'$ и $u_{j+1}^{i'} \in R(u_j^i) \cap \vartheta(\psi_j^i)$. Пусть $k := n(M-i) + j$, $k' := n(M-i') + j + 1$. Тогда $k < nM + n$, $u_{k'} \in R(u_k) \cap \vartheta(\psi_k)$ и $k - k' = n(i' - i) - 1 \geq n - 1 \geq 0$, откуда $k' \leq k$. $\square$

Следствие 4.3. Пусть $\mathcal{M} = (W, R, \vartheta)$ — модель на $K4_{\Diamond^2\sigma_n}$ -шкале. Тогда оптимальные Ψ -размеченные пути длины $C := n(M^2 + M + 1)$ в $\mathcal{M}$ сократимы.

Доказательство. Пусть $u_0, \psi_0, \dots, u_C$ — оптимальный Ψ -размеченный путь в $\mathcal{M}$. Заметим, что $C = lM + n$ для $l := n(M + 1)$. По следствию 4.1 существует $k \leq l(M - 1) + n$ такое, что $u_{k+l} R^+ u_k$. Тогда миры $u_k, \dots, u_{k+l}$ принадлежат одному и тому же кластеру. По следствию 4.2 $u_k, \psi_k, \dots, u_{k+l}$ сократим. Значит $u_0, \psi_0, \dots, u_C$ также сократим. $\square$

5. Финитная аппроксимируемость

В данном параграфе мы докажем теоремы 3.1 и 3.2. В обоих случаях мы будем использовать метод селективной фильтрации канонической модели, свойство максимальности и комбинаторные свойства, установленные в предыдущем параграфе.

5.1. Предтранзитивные аналоги К4 и wK4. В данном разделе мы докажем теорему 3.1. Предположим, что Λ общезначима на всех конечных подшкалах $\mathcal{F}_\Lambda$ и содержит $K4_{\diamond 2\sigma_n}$ для некоторого $n \geq 1$. Пусть ζ — невыводимая в Λ формула. Тогда множество $\{\neg\zeta\}$ Λ -непротиворечиво, и по лемме Линденбаума существует мир $x \in \vartheta_\Lambda(\neg\zeta)$. Построим по рекурсии множества $W_k \subseteq W_\Lambda$, $k \in \omega$. Положим $W_0 := \{x\}$.

Предположим, что для некоторого $k \in \omega$, W_k определено. Рассмотрим множество

$$D_k := \{(w, \psi) \in W_k \times \Psi^\zeta \mid \mathcal{M}_\Lambda, w \models \diamond\psi\}.$$

Для $(w, \psi) \in D_k$ обозначим

$$V_k^b(w, \psi) := R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\psi) \cap \bigcup_{l \leq k} W_l \quad \text{и} \quad V_k^f(w, \psi) := \max(R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\psi))$$

(b и f означают «назад» [backward] и «вперед» [forward] соответственно). Заметим, что множество $V_k^f(w, \psi)$ не пусто по следствию 2.2. Затем положим

$$D_k^b := \{(w, \psi) \in D_k \mid V_k^b(w, \psi) \neq \emptyset\} \quad \text{и} \quad D_k^f := D_k \setminus D_k^b.$$

Зафиксируем элементы $v_k(w, \psi) \in V_k^b(w, \psi)$ для $(w, \psi) \in D_k^b$ и $v_k(w, \psi) \in V_k^f(w, \psi)$ для $(w, \psi) \in D_k^f$. Теперь положим

$$W_{k+1} := \{v_k(w, \psi) \mid (w, \psi) \in D_k^f\}.$$

Наконец, пусть $W := \bigcup_{k \in \omega} W_k$, $R := R_\Lambda|_W$ и $\vartheta := \vartheta_\Lambda|_W$. Из конструкции очевидно, что $\mathcal{M} := (W, R, \vartheta)$ является ζ -селективной подмоделью $\mathcal{M}_\Lambda$. Следовательно, $\mathcal{M}, x \not\models \zeta$ по лемме 2.1. Кроме того, заметим, что $|W_0| = 1$ и $|W_{k+1}| \leq |D_k| \leq |W_k| |\Psi^\zeta|$. Следовательно,

$$|W_k| \leq |\Psi^\zeta|^k \quad \text{и} \quad \left| \bigcup_{l < k} W_l \right| \leq \sum_{l < k} |\Psi^\zeta|^l < |\Psi^\zeta|^k.$$

Индукцией по $k \in \omega$ покажем, что если $v \in W_k$, то в $\mathcal{M}_\Lambda$ существует несократимый оптимальный Ψ^ζ -размеченный путь $u_0, \psi_0, \dots, u_k$ длины k такой, что $u_k = v$ и $u_l \in W_l$ для $l < k$ (в частности, $u_0 = x$). Базовый случай тривиален. Предположим, что утверждение справедливо для $k \in \omega$ и $v \in W_{k+1}$. Тогда по построению $v = v_k(w, \psi)$ для некоторой пары $(w, \psi) \in D_k^f$, а значит $w \in W_k$, $V_k^b(w, \psi) = \emptyset$ и $v \in \max(R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\psi))$. По предположению индукции существует несократимый оптимальный Ψ^ζ -размеченный путь $u_0, \psi_0, \dots, u_k$ такой, что $u_k = w$ и $u_l \in W_l$ для $l < k$. Пусть $\psi_k := \psi$, $u_{k+1} := v$. Так как $v \in \max(R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\psi))$, размеченный путь $u_0, \psi_0, \dots, u_{k+1}$ оптимален. Покажем, что он несократим. Предположим, что существуют $l, l' < k + 1$ такие, что $l' \leq l$ и $u_{l'} \in R_\Lambda(u_l) \cap \vartheta_\Lambda(\psi_l)$. Так как $u_0, \psi_0, \dots, u_k$ несократим, $l = k$. Следовательно,

$$u_{l'} \in R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\psi) \cap W_{l'} \subseteq V_k^b(w, \psi) = \emptyset.$$

Противоречие.

По следствию 4.3 в $\mathcal{M}_\Lambda$ не существует несократимого Ψ^ζ -размеченного пути длиной $C := n(M^2 + M + 1)$, где $M := n^n |\Psi^\zeta|^n$. Следовательно, $W_C = \emptyset$ и $|W| = \left| \bigcup_{l < C} W_l \right| < |\Psi^\zeta|^C$. Таким образом, $\mathcal{F} := (W, R)$ — конечная подшкала $\mathcal{F}_\Lambda$. По условию теоремы $\mathcal{F} \models \Lambda$. В то же время $\mathcal{F} \not\models \zeta$. Следовательно, Λ финитно аппроксимируема.

5.2. Предтранзитивные аналоги GL. Для доказательства теоремы 3.2 нам понадобятся несколько лемм.

Лемма 5.1. Для n -транзитивной логики Λ и $k \geq 1$

$$\Lambda \vdash \sigma_k(p) \wedge \neg \Diamond^{+n} q \rightarrow \sigma_k(p \wedge \neg \Diamond^{+n} q).$$

Доказательство. Проведем индукцию по k . Для $k = 1$ утверждение очевидно.

Предположим, что $k > 1$ и утверждение выполнено для $k - 1$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \Lambda \vdash \Diamond \Diamond^{+n} q &\rightarrow \bigvee_{k=2}^n \Diamond^k q \vee \Diamond^{n+1} q && \text{по нормальности} \\ &\rightarrow \Diamond^{+n} q, && \text{так как } \Lambda \text{ } n\text{-транзитивна.} \end{aligned}$$

Следовательно, $\Lambda \vdash \neg \Diamond^{+n} q \rightarrow \Box \neg \Diamond^{+n} q$ и

$$\begin{aligned} \Lambda \vdash \sigma_k(p) \wedge \neg \Diamond^{+n} q &\rightarrow \Diamond(\sigma_{k-1}(p) \wedge \neg \Diamond^{+n} q) && \text{по нормальности} \\ &\rightarrow \Diamond \sigma_{k-1}(p \wedge \neg \Diamond^{+n} q) && \text{по предположению индукции.} \end{aligned}$$

Ясно, что $\Lambda \vdash \sigma_k(p) \wedge \neg \Diamond^{+n} q \rightarrow p \wedge \neg \Diamond^{+n} q$. Таким образом, утверждение справедливо для k . $\square$

Лемма 5.2. Пусть $\Lambda \supseteq \text{GL}_{\Diamond^2 \sigma_n}$ для некоторого $n \geq 1$, $w \in W_\Lambda$, $\varphi \in \text{Fm}$. Тогда все миры в множествах $\text{max}(\vartheta_\Lambda(\varphi))$ и $\text{max}(R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\varphi))$ иррефлексивны.

Доказательство. Предположим, что $v \in \text{max}(\vartheta_\Lambda(\varphi))$ рефлексивен. Тогда $\mathcal{M}_\Lambda, v \models \Diamond \varphi$ и по лемме 3.4, $\mathcal{M}_\Lambda, v \models \Diamond(\varphi \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n(\varphi))$. Следовательно, $\mathcal{M}_\Lambda, u \models \varphi \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n(\varphi)$ для некоторого $u \in R_\Lambda(v)$. Так как v максимален, $u R_\Lambda^+ v$, но это невозможно, поскольку $\mathcal{M}_\Lambda, v \models \sigma_n(\varphi)$.

Теперь предположим, что $v \in \text{max}(R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\varphi))$ рефлексивен. Тогда $\mathcal{M}_\Lambda, v \models \Diamond \sigma_n(\varphi)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} \Lambda \vdash \Diamond \sigma_n(\varphi) &\rightarrow \Diamond(\sigma_n(\varphi) \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n(\varphi)) && \text{по лемме 3.4} \\ &\rightarrow \Diamond \sigma_n(\varphi \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n(\varphi)) && \text{по лемме 5.1.} \end{aligned}$$

Следовательно, существуют $u_1, \dots, u_n \in \vartheta_\Lambda(\varphi \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n(\varphi))$ такие, что $v R_\Lambda u_1 R_\Lambda \dots R_\Lambda u_n$. Так как $\mathcal{F}_\Lambda \models \text{A4}_{\Diamond^2 \sigma_n}$, $w R_\Lambda u_i$ для некоторого i . Заметим, что $u_i \in R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\varphi)$ и $v R_\Lambda^+ u_i$. Так как v максимален, $u_i R_\Lambda^+ v$. Это невозможно, поскольку $\mathcal{M}_\Lambda, v \models \sigma_n(\varphi)$. $\square$

Лемма 5.3. Пусть $\Lambda \supseteq \text{GL}_{\Diamond^2 \sigma_n}$ для некоторого $n \geq 1$ и $u_0, \psi_0, \dots, u_m$ — оптимальный размеченный путь в $\mathcal{M}_\Lambda$, каждый мир в котором иррефлексивен. Тогда $u_0 \notin R_\Lambda(u_m)$.

Доказательство. Проведем индукцию по m . Так как u_0 иррефлексивен, базовый случай $m = 0$ выполнен. Предположим, что $m \geq 1$, $u_0, \psi_0, \dots, u_m$ — оптимальный размеченный путь, $u_m R_\Lambda u_0$ и утверждение выполнено для всех путей, длина которых меньше m . В частности, утверждение имеет место для путей $u_k, \psi_k \dots u_{m-1}$, $k < m$, т.е. для $k < m$ $u_k \notin R_\Lambda(u_{m-1})$. В силу тесноты существуют $\eta_0, \dots, \eta_{m-1}$ такие, что

$$\mathcal{M}_\Lambda, u_k \models \eta_k \quad \text{и} \quad \mathcal{M}_\Lambda, u_{m-1} \not\models \Diamond \eta_k.$$

Рассмотрим формулу $\varphi := \bigvee_{k=0}^{m-1} \eta_k \vee \psi_{m-1}$. Так как $\mathcal{M}_\Lambda, u_{m-1} \models \Diamond \varphi$, по лемме 3.4

$$\mathcal{M}_\Lambda, u_{m-1} \models \Diamond(\varphi \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n(\varphi)).$$

Более того, поскольку для $k < m$ $\mathcal{M}_\Lambda, u_{m-1} \not\models \Diamond \eta_k$

$$\mathcal{M}_\Lambda, u_{m-1} \models \Diamond(\psi_{m-1} \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n(\varphi)).$$

Следовательно, $\mathcal{M}_\Lambda, v \models \psi_{m-1} \wedge \neg \Diamond^{+n} \sigma_n(\varphi)$ для некоторого $v \in R_\Lambda(u_{m-1})$. Заметим, что $u_m R_\Lambda^+ u_{m-1} R_\Lambda v$. Так как $u_m \in \text{max}(R_\Lambda(u_{m-1}) \cap \vartheta_\Lambda(\psi_{m-1}))$, $v R_\Lambda^+ u_m$. В то же время, φ истинна во всех u_k , $k \leq m$, откуда легко показать, что $\sigma_n(\varphi)$ также истинна в u_k . Противоречие. $\square$

Следствие 5.1. Пусть Λ — логика, расширяющая $\text{GL}_{\Diamond^2\sigma_n}$, Ψ — конечное множество формул, $M := n^n|\Psi|^n$. Тогда в $\mathcal{M}_\Lambda$ не существует оптимального Ψ -размеченного пути длины $C := nM + n$, все миры в котором иррефлексивны.

Доказательство. Пусть $w_0, \psi_0, \dots, w_C$ — оптимальный Ψ -размеченный путь в $\mathcal{M}_\Lambda$. По следствию 4.1 существует $k \leq nM$ такое, что $w_{k+n} R_\Lambda^+ w_k$. Тогда по следствию 3.3 $w_{k+n} R_\Lambda w_{k'}$ для некоторого k' , $k \leq k' < k + n$. Таким образом, размеченный путь $w_{k'}, \psi_{k'+1}, \dots, w_{k+n}$ содержит рефлексивные меры по лемме 5.3. $\square$

Теперь докажем теорему 3.2. Предположим, что Λ общезначима на всех конечных обратно фундированных полуподшкалах $\mathcal{F}_\Lambda$ и содержит $\text{GL}_{\Diamond^2\sigma_n}$ для некоторого $n \geq 1$. Пусть ζ — невыводимая в Λ формула. Тогда множество $\{\neg\zeta\}$ Λ -непротиворечиво и по лемме 2.6 существует мир $x \in \max(\vartheta_\Lambda(\neg\zeta))$. Построим множества $W_k \subseteq W_\Lambda$ и отношения $S_k \subseteq R_\Lambda$ для $k \in \omega$ по рекурсии. Положим $W_0 := \{x\}$, $S_0 := \emptyset$.

Предположим, что для некоторого $k \in \omega$, W_k определено. Рассмотрим множество

$$D_k := \{(w, \psi) \in W_k \times \Psi^\zeta \mid \mathcal{M}_\Lambda, w \models \Diamond\psi\}.$$

Для $(w, \psi) \in D_k$ зафиксируем некоторые элементы $v_k(w, \psi) \in \max(R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\psi))$. Теперь положим

$$W_{k+1} := \{v_k(w, \psi) \mid (w, \psi) \in D_k\} \setminus \bigcup_{l \leq k} W_l,$$

$$S_{k+1} := \{(w, v_k(w, \psi)) \mid (w, \psi) \in D_k\}.$$

Наконец, пусть $W := \bigcup_{k \in \omega} W_k$, $S := \bigcup_{k \in \omega} S_k$, $R := R_\Lambda \cap S^*$ и $\vartheta := \vartheta_\Lambda|_W$. Заметим, что для всех $w, v \in W$,

$$w R^* v \wedge w R_\Lambda v \Rightarrow w S^* v \wedge w R_\Lambda v \Rightarrow w R v.$$

Следовательно, $\mathcal{F} := (W, R)$ является полуподшкалой $\mathcal{F}_\Lambda$. Предположим, что $R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\psi) \neq \emptyset$ для некоторых $w \in W$ и $\psi \in \Psi^\zeta$. Пусть $k \in \omega$ таково, что $w \in W_k$. Тогда $(w, \psi) \in D_k$ и по построению существует $v = v_k(w, \psi) \in R_\Lambda(w) \cap \vartheta_\Lambda(\psi)$ такой, что $w S v$, откуда $w R v$. Таким образом, $\mathcal{M} := (\mathcal{F}, \vartheta)$ — ζ -селективная полуподмодель $\mathcal{M}_\Lambda$ и $\mathcal{M}, x \not\models \zeta$ по лемме 2.1.

Аналогично доказательству теоремы 3.1, можно показать, что, если $v \in W_k$, то в $\mathcal{M}_\Lambda$ существует оптимальный Ψ^ζ -размеченный путь $u_0, \psi_0, \dots, u_k$ длины k такой, что $u_k = v$ и для $l < k$ $u_l \in W_l$. По лемме 5.2 $R_\Lambda|_W$ иррефлексивно, следовательно, по следствию 5.1 в $\mathcal{M}_\Lambda$ не существует оптимального Ψ^ζ -размеченного пути длины $C := n^{n+1}|\Psi^\zeta|^n + n$. Таким образом, $W_C = \emptyset$ и $|W| \leq |\bigcup_{l < C} W_l| < |\Psi^\zeta|^C$. Итак, $\mathcal{F} = (W, R)$ является конечной полуподшкалой $\mathcal{F}_\Lambda$.

Предположим, что $\mathcal{F}$ не обратно фундирована. Тогда существует $w \in W$ такой, что $w R^+ w$. Так как $R_\Lambda|_W$ иррефлексивно, $R = R_\Lambda \cap S^+$, откуда $R^+ \subseteq S^+$. Поэтому для некоторых $m \geq 1$, $u_1, \dots, u_m \in W$

$$w = u_0 S u_1 S \dots S u_m S w.$$

По построению существуют $\psi_0, \dots, \psi_{m-1}$ такие, что $u_0, \psi_0, \dots, u_m$ — оптимальный размеченный путь. Так как $u_m S w$, $u_m R_\Lambda w$, что противоречит лемме 5.3.

Итак, $\mathcal{F}$ — конечная обратно фундированная подшкала $\mathcal{F}_\Lambda$. По условию теоремы $\mathcal{F} \models \Lambda$. В то же время $\mathcal{F} \not\models \zeta$. Значит Λ финитно аппроксимируема.

6. Предтранзитивные аналоги GL и правило Леба

Известно [22, с. 59], что

$$\text{GL} = \text{K4} + \frac{\Box\varphi \rightarrow \varphi}{\varphi} = \text{wK4} + \frac{\Box\varphi \rightarrow \varphi}{\varphi},$$

где $\Lambda + R$ означает замыкание логики Λ относительно правила R . В данном параграфе мы покажем, что аналогичное свойство имеет место для $\text{GL}_{\Diamond\varphi}$ и $(\text{w})\text{K4}_{\Diamond\varphi}$.

Предложение 6.1. Для n -транзитивной логики Λ , следующие логики совпадают:

- (1) $\Lambda_1 := \Lambda + \Diamond^{+n}p \rightarrow \Diamond^{+n}(p \wedge \neg\Diamond^{+n}p)$,
- (2) $\Lambda_2 := \Lambda + \Diamond p \rightarrow \Diamond^{+n}(p \wedge \neg\Diamond p)$,
- (3) $\Lambda_3 := \Lambda + \frac{\Box^{+n}\varphi \rightarrow \varphi}{\varphi}$,
- (4) $\Lambda_4 := \Lambda + \frac{\Box\varphi \rightarrow \varphi}{\varphi}$.

Доказательство. Очевидно, что $\Lambda_1 \supseteq \Lambda_2$ и $\Lambda_3 \supseteq \Lambda_4$.

Покажем, что $\Lambda_2 \supseteq \Lambda_3$. Предположим, что $\Lambda_2 \vdash \Box^{+n}\varphi \rightarrow \varphi$. Тогда $\Lambda_2 \vdash \Box\Box^{+n}\varphi \rightarrow \Box^{+n}\varphi$. Следовательно, $\Lambda_2 \vdash \Box^{+n}(\Box\Box^{+n}\varphi \rightarrow \Box^{+n}\varphi)$. Так как $\Lambda_2 \vdash \Box^{+n}(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$, $\Lambda_2 \vdash \Box\Box^{+n}\varphi$. Значит $\Lambda_2 \vdash \Box^{+n}\varphi$ и $\Lambda_2 \vdash \varphi$.

Теперь покажем, что $\Lambda_4 \supseteq \Lambda_1$. Заметим, что

$$K \vdash \Diamond^{+n}p \rightarrow \Diamond\Diamond^{+n}p \vee \Diamond(p \wedge \neg\Diamond^{+n}p).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \Lambda \vdash \Box(\Diamond^{+n}p \rightarrow \Diamond^{+n}(p \wedge \neg\Diamond^{+n}p)) \wedge \Diamond\Diamond^{+n}p &\rightarrow \Diamond\Diamond^{+n}(p \wedge \neg\Diamond^{+n}p) \\ &\rightarrow \Diamond^{+n}(p \wedge \neg\Diamond^{+n}p). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\Lambda \vdash \Box(\Diamond^{+n}p \rightarrow \Diamond^{+n}(p \wedge \neg\Diamond^{+n}p)) \rightarrow (\Diamond^{+n}p \rightarrow \Diamond^{+n}(p \wedge \neg\Diamond^{+n}p)).$$

Значит $\Lambda_4 \vdash \Diamond^{+n}p \rightarrow \Diamond^{+n}(p \wedge \neg\Diamond^{+n}p)$. □

Введем обозначение $AL\ddot{o}b^{+n} := \Diamond^{+n}p \rightarrow \Diamond^{+n}(p \wedge \neg\Diamond^{+n}p)$.

Лемма 6.1. Для n -транзитивной шкалы $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \models AL\ddot{o}b^{+n}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ обратно фундирована.

Доказательство. Так как $\Diamond^{+n}p$ выражает транзитивное замыкание на $\mathcal{F} = (W, R)$,

$$\mathcal{F} \models AL\ddot{o}b^{+n} \Leftrightarrow (W, R^+) \models GL \Leftrightarrow R^+ \text{ транзитивно и обратно фундировано.}$$

R^+ всегда транзитивно. Оно обратно фундировано тогда и только тогда, когда R обратно фундировано. □

Следствие 6.1. Если $n \geq d(\beta)$, то $K4_{\Diamond\beta} + AL\ddot{o}b^{+n} \subseteq GL_{\Diamond\beta}$.

Доказательство. По следствию 3.5 $GL_{\Diamond\beta}$ полна по Крипке. Пусть $\mathcal{F}$ — $GL_{\Diamond\beta}$ -шкала. Тогда по предложению 3.4 $\mathcal{F} \models K4_{\Diamond\beta}$ и $\mathcal{F}$ обратно фундирована. В силу следствия 3.1 $\mathcal{F}$ n -транзитивна, а значит $\mathcal{F} \models AL\ddot{o}b^{+n}$ по лемме 6.1. □

Лемма 6.2. Для всех $n \geq 1$, $K4_{\Diamond^2\sigma_n} + AL\ddot{o}b^{+n} \supseteq GL_{\Diamond^2\sigma_n}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} K4_{\Diamond^2\sigma_n} + AL\ddot{o}b^{+n} \vdash \Diamond^{+n}\sigma_n &\rightarrow \Diamond^{+n}(\sigma_n \wedge \neg\Diamond^{+n}\sigma_n) && \text{по } AL\ddot{o}b^{+n} \\ &\rightarrow \Diamond^{+n}\sigma_n(p \wedge \neg\Diamond^{+n}\sigma_n) && \text{по лемме 5.1} \\ &\rightarrow \Diamond(p \wedge \neg\Diamond^{+n}\sigma_n) && \text{по лемме 3.4.} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} K4_{\Diamond^2\sigma_n} + AL\ddot{o}b^{+n} \vdash \Diamond p &\rightarrow \Diamond(p \wedge \neg\Diamond\sigma_n) \vee \Diamond^2\sigma_n \\ &\rightarrow \Diamond(p \wedge \neg\Diamond\sigma_n). \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Теорема 6.1. Для $\Lambda \in \{K4_{\Diamond\beta}, wK4_{\Diamond\beta}\}$ логики Λ_1 , Λ_2 , Λ_3 и Λ_4 из предложения 6.1 совпадают с $GL_{\Diamond\beta}$.

Доказательство. Пусть $n = d(\beta) + 1$. Заметим, что $\Lambda_1 = \Lambda + \text{ALöb}^{+n}$. По следствию 6.1,

$$\text{wK4}_{\diamond\beta} + \text{ALöb}^{+n} \subseteq \text{K4}_{\diamond\beta} + \text{ALöb}^{+n} \subseteq \text{GL}_{\diamond\beta}.$$

Покажем, что $L := \text{wK4}_{\diamond\beta} + \text{ALöb}^{+n} \supseteq \text{GL}_{\diamond\beta}$. Тогда для $\Lambda \in \{\text{wK4}_{\diamond\beta}, \text{K4}_{\diamond\beta}\}$, $\Lambda_1 = \text{GL}_{\diamond\beta}$ и по предложению 6.1 $\Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = \text{GL}_{\diamond\beta}$.

Заметим, что $\text{wK4}_{\diamond\beta} = \text{K4}_{\diamond^2\sigma_n} + \text{Aw4}_{\diamond\beta}$ в силу следствия 3.1 и $\text{K4}_{\diamond^2\sigma_n} + \text{ALöb}^{+n} = \text{GL}_{\diamond^2\sigma_n}$ в силу следствия 6.1 и леммы 6.2. Следовательно,

$$L = \text{wK4}_{\diamond\beta} + \text{ALöb}^{+n} = \text{K4}_{\diamond^2\sigma_n} + \text{Aw4}_{\diamond\beta} + \text{ALöb}^{+n} = \text{GL}_{\diamond^2\sigma_n} + \text{Aw4}_{\diamond\beta}.$$

Формула $\text{Aw4}_{\diamond\beta}$ каноническая и по предложению 3.7 наследуется подшкалами. Поэтому L полна по Крипке по теореме 3.2. Пусть $\mathcal{F}$ — L -шкала. Тогда $\mathcal{F} \models \text{wK4}_{\diamond\beta}$ и по лемме 6.1 $\mathcal{F}$ обратно фундирована. По предложению 3.4 $\mathcal{F} \models \text{GL}_{\diamond\beta}$. Таким образом, $\text{GL}_{\diamond\beta} \subseteq L$. $\square$

7. Некоторые открытые проблемы

7.1. Сложность. Известно, что все логики между K и S4 , а также между K и GL PSpace -трудны [23, 24]. Следовательно, wK4_{γ} , K4_{γ} и $\text{GL}_{\diamond\beta}$ PSpace -трудны. Верхняя PSpace оценка известна для K4 [23] и wK4 [25, 26]. Для wK4_n^1 , $n \geq 2$ она указана как открытая проблема в [7]. Метод, которым была установлена финитная аппроксимируемость в данной работе, может быть также использован для доказательства PSpace разрешимости, как показано в [25] для транзитивного случая. Тем не менее для доказательства PSpace разрешимости наших логик процесс фильтрации нужно модифицировать.

7.2. Предтранзитивные аналоги GL , наследуемые подшкалами. При доказательстве теоремы 3.2 мы выделили из канонической модели конечную обратно фундированную полуподмодель. Неясно, можно ли выделить вместо этого подмодель и доказать финитную аппроксимируемость всех канонических расширений $\text{GL}_{\diamond^2\sigma_n}$, наследуемых подшкалами. Для этого имеет смысл выяснить, можно ли усилить лемму 5.2 следующим образом: кластеры всех миров $v \in \max(w \cap \vartheta_{\Lambda}(\psi))$ канонической модели логики $\Lambda \supseteq \text{GL}_{\diamond^2\sigma_n}$ являются иррефлексивными синглтонами. Если данное усиление имеет место, то выделить подмодель несложно, рассуждая аналогично доказательству теоремы 3.1.

7.3. Более слабые предтранзитивные логики, наследуемые подшкалами. В § 3.3 отмечено, что логики $\text{K} + \text{Trans}_n^s$ предтранзитивны, канонические, а также наследуются подшкалами. На самом деле $\text{K} + \text{Trans}_n^s$ — минимальная n -транзитивная логика, наследуемая подшкалами. Однако данные логики слабее $\text{K4}_{\diamond^2\sigma_n}$, поэтому неизвестно, обладают ли они свойством финитной аппроксиммируемости.

Литература

1. E. J. Lemmon, “Algebraic semantics for modal logics. I, II”, *J. Symb. Log.* **31**, 46–65; 191–218 (1966).
2. N. Bezhanishvili et al. (Eds), *Logic, Language, and Computation, Lect. Notes Comput. Sci.* **6618** (2011).
3. K. Fine, “Logics containing K4 . II”, *J. Symb. Log.* **50**, 619–651 (1985).
4. G. Bezhanishvili, S. Ghilardi, M. Jibladze, “An algebraic approach to subframe logics. Modal case”, *Notre Dame J. Formal Logic* **52**, No. 2, 187–202 (2011).
5. A. Chagrov, M. Zakharyashev, *Modal Logic*, Clarendon Press, Oxford (1997).
6. D. M. Gabbay, “A general filtration method for modal logics”, *J. Philos. Log.* **1**, 29–34 (1972).
7. A. Kudinov, I. Shapirovsky, *Two Types of Filtrations for wK4 and Its Relatives*, Preprint, arXiv:2401.00457 (2025).

8. R. Jansana, “Some logics related to von Wright’s logic of place”, *Notre Dame J. Formal Logic* **35**, No. 1, 88–98 (1994).
9. A. Kudinov, I. Shapirovskii, “Finite model property of pretransitive analogs of S5”, In: *Topology, Algebra and Categories in Logic (TACL, 2011)*, pp. 261–264, Marseille (2011).
10. А. В. Кудинов, И. Б. Шапировский, “О разбиениях шкал Крипке конечной высоты”, *Изв. РАН, Сер. мат.* **81**, No. 3, 134–159 (2017).
11. L. Sacchetti, “The fixed point property in modal logic”, *Notre Dame J. Formal Logic* **42**, No. 2, 65–86 (2001).
12. T. Kurahashi, “Arithmetical soundness and completeness for Σ_2 numerations”, *Stud. Log.* **106**, No. 6, 1181–1196 (2018).
13. Л. В. Дворкин, “О логиках доказуемости арифметики Нибергалля” *Изв. РАН, Сер. мат.* **88**, No. 3, 61–100 (2024).
14. P. Blackburn, M. de Rijke, Y. Venema, *Modal Logic*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2001).
15. I. Shapirovsky, V. Shehtman, “Chronological future modality in Minkowski spacetime”, In: *Advances in Modal Logic* **4**, pp. 437–459, King’s College Publications, London (2002).
16. H. Sahlqvist, “Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic”, In: *Proc. 3rd Scand. Logic Symp., Uppsala 1973* pp. 110–143 (1975).
17. M. Kracht, “Tools and Techniques in Modal Logic”, Elsevier, Amsterdam (1999).
18. T. Kowalski, M. Kracht, “Semisimple varieties of modal algebras”, *Stud. Log.* **83**, No. 1–3, 351–363 (2006).
19. D. M. Gabbay, D. Skvortsov, V. Shehtman, *Quantification in Nonclassical Logic. I*, Elsevier, Amsterdam (2009).
20. I. B. Shapirovsky, “Glivenko’s theorem, finite height, and local tabularity”, *J. Appl. Log.* **8**, No. 8, 2333–2347 (2021).
21. F. Wolter, *Lattices of Modal Logics*, PhD Thesis, Berlin (1993).
22. G. Boolos, *The Logic of Provability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
23. R. E. Ladner, “The computational complexity of provability in systems of modal propositional logic”, *SIAM J. Comput.* **6**, 467–480 (1977).
24. E. Spaan, *Complexity of Modal Logics*, PhD Thesis, University of Amsterdam (1993).
25. I. Shapirovsky, “On PSPACE-decidability in transitive modal logics”, In: *Advances in Modal Logic* **5**, pp. 269–287, King’s College Publications, London (2005).
26. I. Shapirovsky, “Satisfiability Problems on Sums of Kripke Frames”, *ACM Trans. Comput. Log.* **23**, No. 3, Article No. 15 (2022). <https://doi.org/10.1145/3508068>

Статья поступила в редакцию 19 марта 2025 г.
принята к публикации 16 июля 2025 г.

А. Г. Чечкина

ОБ ОЦЕНКЕ МАКСИМУМА МОДУЛЯ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ЗАРЕМБЫ ДЛЯ ДИВЕРГЕНТНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается задача Зарембы для дивергентного эллиптического оператора второго порядка. Получена оценка максимум модуля нормированных собственных функций.

1. Введение

Настоящая работа посвящена оценке максимума модуля собственных функций эллиптического оператора

$$Lu = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad (1.1)$$

определенного в ограниченной строго липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Напомним, что область D называется *строго липшицевой*, если для каждой точки $x_0 \in \partial D$ существует открытый куб Q с центром в x_0 , грани которого параллельны координатным осям, длина ребра не зависит от x_0 и в некоторой декартовой системе координат с началом в x_0 множество $Q \cap \partial D$ есть график липшицевой функции $x_n = g(x_1, \dots, x_{n-1})$ с постоянной Липшица, не зависящей от x_0 .

Коэффициенты оператора $a_{ij}(x)$ измеримы и симметричны, удовлетворяют условию равномерной эллиптичности

$$\alpha^{-1} |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \alpha |\xi|^2. \quad (1.2)$$

Для постановки задачи Зарембы введем пространство Соболева $W_2^1(D, F)$. Здесь $F \subset \partial D$ — замкнутое множество, $W_2^1(D, F)$ — пополнение бесконечно дифференцируемых в замыкании D функций, равных нулю в окрестности F , по норме пространства $W_2^1(D)$

$$\|v\|_{W_2^1(D, F)} = \left(\int_D |v|^2 dx + \int_D |\nabla v|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Априори для функций $v \in W_2^1(D, F)$ требуется выполнение неравенство Фридрикса

$$\int_D |v|^2 dx \leq C \int_D |\nabla v|^2 dx. \quad (1.3)$$

Здесь и далее через C или $C(\cdot)$ обозначаются различные константы в неравенствах и оценках.

Приведем необходимое и достаточное условие на множество $F \subset \partial D$, гарантирующее выполнение неравенства (1.3). Для этого нам потребуется понятие емкости.

А. Г. Чечкина: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; chechkina@mail.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 218–225 (2024).

Обозначим через $\mathcal{Q}_d$ открытый куб с длиной ребра d и гранями, параллельными координатным осям, предполагая, что строго липшицева область D имеет диаметр d и $D \subset \mathcal{Q}_d$. Введем понятие емкости $C_2(K, \mathcal{Q}_{2d})$ компакта $K \subset \overline{\mathcal{Q}_d}$ по отношению к кубу $\mathcal{Q}_{2d}$ следующим равенством:

$$C_2(K, \mathcal{Q}_{2d}) = \inf \left\{ \int_{\mathcal{Q}_{2d}} |\nabla \varphi|^2 dx : \varphi \in C_0^\infty(\mathcal{Q}_{2d}), \varphi \geq 1 \text{ на } K \right\}.$$

Из результатов Мазьи [1] следует, что для функций $v \in W_2^1(D, F)$ неравенство (1.3) имеет место тогда и только тогда, когда

$$C_2(F, \mathcal{Q}_{2d}) > 0. \quad (1.4)$$

Нашей целью является оценка максимума модуля собственных функций задачи Зарембы

$$-Lu = \lambda u, \quad u|_F = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \gamma} \Big|_G = 0, \quad (1.5)$$

нормированных равенством

$$\int_D u^2 dx = 1. \quad (1.6)$$

Здесь $G = \partial D \setminus F$, конормальная производная определяется формулой

$$\frac{\partial u}{\partial \gamma} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_j,$$

а $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ — единичная внешняя нормаль к границе ∂D .

Под *решением* задачи (1.5) понимается функция $u \in W_2^1(D, F)$ для которой справедливо интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n \int_D a_{ij}(x) u_{x_j} \varphi_{x_i} dx = \lambda \int_D u \varphi dx, \quad (1.7)$$

выполненное на пробных функциях $\varphi \in W_2^1(D, F)$. Те значения λ , для которых существуют собственные функции, называются *собственными значениями*.

Поскольку оператор задачи является самосопряженным в $W_2^1(D, F)$ и положительным, при сделанных выше предположениях относительно коэффициентов оператора L и области D задача (1.5) имеет полную ортонормированную систему обобщенных собственных функций. Все собственные функции соответствуют положительным собственным значениям.

Оценкам собственных функций задачи Дирихле для равномерно эллиптических операторов вида (1.1) посвящены многочисленные исследования (см. [2]–[7]). В частности, в [5] показано, что если область и коэффициенты $a_{ij}(x)$ достаточно гладкие, то для классической собственной функции $u_k(x)$, отвечающей собственному значению λ_k , имеет место оценка

$$\max_{x \in \overline{D}} |u_k(x)| \leq C(n, D, \alpha) \lambda_k^{\frac{n}{4}}.$$

Если коэффициенты $a_{ij}(x)$ оператора (1.1) измеримы, то Якубовым [6, 7] показано, что оценка для обобщенной собственной функции

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)| \leq C(n, D, \alpha) \lambda^{\frac{n}{4}} \quad (1.8)$$

является точной. Аналогичные оценки для задачи Зарембы не известны.

Основной результат настоящей работы сформулирован в следующем утверждении.

Теорема 1.1. *Если выполнены условия (1.2) и (1.4), то в предположении (1.6) для собственных функций задачи (1.5) справедлива оценка (1.8) с постоянной C , зависящей только от n , области D , константы α из (1.2) и компакта F .*

Как отмечалось выше, для функций из пространства $W_2^1(D, F)$ выполнено неравенство Фридрихса (1.3), в силу чего это пространство можно снабдить нормой, в которой присутствует только градиент. В последующих рассуждениях будем использовать теоремы вложения Соболева для

строго липшицевых областей, имея в виду такую норму. Кроме того, предполагается выполненным условие (1.4), влекущее неравенство Фридрихса (1.3).

2. Оценка максимума модуля собственных функций. Случай $n > 2$

Ниже для функций $\varphi \in W_2^1(D, F)$ будем пользоваться теоремой вложения Соболева

$$\left(\int_D |\varphi|^{2k} dx \right)^{1/k} \leq C(n, D) \int_D |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \varphi \in W_2^1(D, F), \quad k = n/(n-2). \quad (2.1)$$

Лемма 2.1. Для решения $u(\cdot)$ задачи (1.5) справедливо неравенство

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)| \leq C(\alpha, n, D, F) \lambda^{n/4} \left(\int_D u^2 dx \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Пусть

$$u_+(x) = \begin{cases} u(x), & u(x) > 0, \\ 0, & u(x) \leq 0, \end{cases} \quad u_-(x) = \begin{cases} -u(x), & u(x) < 0, \\ 0, & u(x) \geq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для $\beta \geq 1$ положим $T_j(\xi) = \xi^\beta$ при $\xi \in [0, j]$, $T_j(\xi) = j^\beta + \beta j^{\beta-1}(\xi - j)$ при $\xi \geq j$,

$$H_j(\xi) = \int_0^\xi |T_j'(\zeta)|^2 d\zeta.$$

Выберем сначала в (1.7) пробную функцию $\varphi(x) = H_j(u_+(x))$, являющуюся допустимой. В результате после стандартных рассуждений, использующих условие (1.2) и неравенство Коши, придем к соотношению

$$\int_D |\nabla u_+|^2 H_j'(u_+(x)) dx \leq C(\alpha) \lambda \int_D u_+ H_j(u_+(x)) dx.$$

Отсюда следует, что

$$\int_D |\nabla T_j(u_+(x))|^2 dx \leq C(\alpha) \lambda \int_D u_+ H_j(u_+(x)) dx.$$

Отсюда по неравенству Соболева (2.1) найдем

$$\left(\int_D (T_j(u_+(x)))^{2k} dx \right)^{1/k} \leq C(\alpha, n, D, F) \lambda \int_D u_+ H_j(u_+(x)) dx. \quad (2.4)$$

Переходя к пределу при $j \rightarrow +\infty$, получим

$$\begin{aligned} \left(\int_D (u_+(x))^{2k\beta} dx \right)^{1/k} &\leq C(\alpha, n, D, F) \frac{\beta^2}{2\beta-1} \lambda \int_D (u_+(x))^{2\beta} dx \\ &\leq C(\alpha, n, D, F) \beta \lambda \int_D (u_+(x))^{2\beta} dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Рассуждая как выше, но с заменой функции u_+ на u_- (см. (2.3)), находим

$$\left(\int_D (u_-(x))^{2k\beta} dx \right)^{1/k} \leq C(\alpha, n, D, F) \beta \lambda \int_D (u_-(x))^{2\beta} dx.$$

Сопоставив два последних неравенства, получим

$$\left(\int_D |u(x)|^{2k\beta} dx \right)^{1/k} \leq C(\alpha, n, D, F) \beta \lambda \int_D |u(x)|^{2\beta} dx$$

или

$$\left(\int_D |u(x)|^{2k\beta} dx \right)^{1/2\beta k} \leq (C(\alpha, n, D, F))^{\frac{1}{2\beta}} \beta^{\frac{1}{2\beta}} \lambda^{\frac{1}{2\beta}} \left(\int_D |u(x)|^{2\beta} dx \right)^{1/2\beta}. \quad (2.6)$$

Протестируем эту оценку. Для $i = 0, 1, \dots$ положим $\beta = k^i$. Применяя оценку (2.6) и полагая

$$\Phi_i = \left(\int_D |u|^{2k^i} dx \right)^{1/2k^i},$$

получим рекуррентное соотношение

$$\Phi_{i+1} \leq (C(\alpha, n, D, F))^{\frac{1}{2k^i}} (k^i)^{1/2k^i} \lambda^{1/2k^i} \Phi_i.$$

Отсюда по индукции следует

$$\Phi_{i+1} \leq \prod_{m=0}^i (C(\alpha, n, D, F))^{1/2k^m} (2k^i)^{1/2k^m} \lambda^{1/2k^m} \Phi_0$$

или ввиду $k = n/(n-2)$

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)| = \lim_{i \rightarrow \infty} \Phi_i \leq C(\alpha, n, D, F) \lambda^{n/4} \Phi_0,$$

что дает искомое неравенство (2.2). $\square$

Доказательство теоремы 1.1. При $n > 2$ требуемое утверждение является следствием оценки (2.2) и соотношения 1.6. $\square$

3. Оценка максимума модуля собственных функций. Случай $n = 2$

В случае $n = 2$ для функций $\varphi \in W_2^1(D, F)$ теорема вложения Соболева имеет вид

$$\left(\int_D |\varphi|^q dx \right)^{2/q} \leq C(n, D) \int_D |\nabla \varphi|^2 dx, \quad \varphi \in W_2^1(D, F), \quad q \geq 1. \quad (3.1)$$

Сначала приведем вспомогательное утверждение.

Отметим, что решение u задачи (1.5) в плоском случае ограничено. Действительно, если в (3.1) положить, например, $q = 4$, то используя доказательство из предыдущего параграфа, придем к неравенству

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in D} |u(x)| \leq C(\alpha, n, D, F) \lambda \left(\int_D u^2 dx \right)^{1/2}.$$

Поскольку решение ограничено и непрерывно в области D (см. [8]), найдется точка x_0 в D такая, что

$$\operatorname{ess\,sup}_D |u(x)| \geq |u(x_0)| - \varepsilon \quad (3.2)$$

для некоторого положительного ε . Сделаем замену переменных (гомотетию)

$$y = (x - x_0) \lambda^{\frac{1}{2}}, \quad v(y) = u(x_0 + y \lambda^{-\frac{1}{2}}),$$

где $y \in D^1$, а D^1 — образ области D при таком преобразовании. Задача (1.5) переписывается в виде

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left(b_{ij}(y) \frac{\partial v}{\partial y_j} \right) + v = 0 \text{ в } D^1, \quad v|_{\tilde{F}} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \mu} \Big|_{\tilde{G}} = 0, \quad (3.3)$$

где

$$\frac{\partial v}{\partial \mu} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(y) \frac{\partial v}{\partial y_i} \nu_j,$$

а $\tilde{F}$ и $\tilde{G}$ — образы F и G при этом преобразовании. Ясно, что коэффициенты $b_{ij}(y)$ удовлетворяют условию эллиптичности с той же константой α , что и коэффициенты $a_{ij}(x)$, матрица остается симметрической. Решение понимается в обобщенном смысле, т.е. $v \in W_2^1(D^1, \tilde{F})$ является решением, если имеет место интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{D^1} b_{ij}(y) v_{y_i} \varphi_{y_j} dy = \int_{D^1} v \varphi dy \quad (3.4)$$

для любой функции $\varphi \in W_2^1(D^1, \tilde{F})$. Отметим, что решение v остается ограниченным. Обозначим через B_R — открытый шар радиуса R с центром в начале координат. Покажем, что

$$\operatorname{ess\,sup}_{B_1 \cap D^1} |v(y)| \leq C(\alpha) \left(\int_{D^1} |v|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.5)$$

Выберем пробную функцию в интегральном тождестве $\varphi = v|v|^{\beta-1}\eta^2$, где $\beta \geq 1$ и $\eta \in C_0^\infty(B_2)$, $0 < \eta < 1$. Поскольку функция v ограничена, то такая пробная функция является допустимой. В результате приходим к равенству

$$\beta \sum_{i,j=1}^2 \int_{B_4 \cap D^1} b_{ij} v_{y_i} v_{y_j} |v|^{\beta-1} \eta^2 dy = -2 \sum_{i,j=1}^2 \int_{B_4 \cap D^1} b_{ij} v_{y_i} v |v|^{\beta-1} \eta \eta_{y_j} dy + \int_{B_4 \cap D^1} |v|^{\beta+1} \eta^2 dy. \quad (3.6)$$

После стандартных рассуждений приходим к соотношению

$$\int_{B_4 \cap D^1} |\nabla v|^2 |v|^{\beta-1} \eta^2 dy \leq C(\alpha) \left(\int_{B_4 \cap D^1} |v|^{\beta+1} |\nabla \eta|^2 dy + \int_{B_4 \cap D^1} |v|^{\beta+1} \eta^2 dy \right).$$

Преобразуем левую часть:

$$\frac{(\beta+1)^2}{4} \int_{B_4 \cap D^1} |\nabla(|v|^{\frac{\beta+1}{2}})|^2 \eta^2 dy \leq C(\alpha) \left(\int_{B_4 \cap D^1} |v|^{\beta+1} |\nabla \eta|^2 dy + \int_{B_4 \cap D^1} |v|^{\beta+1} \eta^2 dy \right). \quad (3.7)$$

Теперь, используя очевидное неравенство

$$|\nabla(\psi \zeta)|^2 \leq 2(|\nabla \psi|^2 \zeta^2 + \psi^2 |\nabla \zeta|^2),$$

из (3.7) находим

$$\int_{B_4 \cap D^1} |\nabla(|v|^{\frac{\beta+1}{2}})|^2 dy \leq C(\alpha)(\beta+1)^2 \left(\int_{B_4 \cap D^1} |v|^{\beta+1} |\nabla \eta|^2 dy + \int_{B_4 \cap D^1} |v|^{\beta+1} \eta^2 dy \right). \quad (3.8)$$

Воспользуемся теоремой вложения Соболева в области $B_4 \cap D^1$, согласно которой

$$\left(\int_{B_4 \cap D^1} (|v|^{\frac{\beta+1}{2}} \eta)^q dy \right)^{\frac{2}{q}} \leq C \int_{B_4 \cap D^1} |\nabla(|v|^{\frac{\beta+1}{2}} \eta)|^2 dy, \quad q \geq 1,$$

из (3.8) получим

$$\left(\int_{B_4 \cap D^1} (|v|^{\frac{\beta+1}{2}} \eta)^q dy \right)^{\frac{2}{q}} \leq C(\alpha)(\beta+1)^2 \left(\int_{B_4 \cap D^1} |v|^{\beta+1} |\nabla \eta|^2 dy + \int_{B_4 \cap D^1} |v|^{\beta+1} \eta^2 dy \right). \quad (3.9)$$

Выберем теперь срезающую функцию η из (3.9). Для $j = 0, 1, \dots$ положим $R_j = 1 + 2^{-j}$ и пусть $\eta \in C_0^\infty(B_{R_j})$, $0 < \eta < 1$, $\eta = 1$ в $B_{R_{j+1}}$ и $|\nabla \eta| \leq \text{const} \cdot 2^j$. В теореме вложения Соболева выбираем $q = 4$ и полагая $\beta + 1 = 2^{j+1} = \chi_j$, из (3.9) получим

$$\left(\int_{B_{R_{j+1}} \cap D^1} |v|^{\chi_{j+1}} dy \right)^{\frac{1}{\chi_{j+1}}} \leq C(\alpha)(\chi_j)^{\frac{2}{\chi_j}} 2^{\frac{2j}{\chi_j}} \left(\int_{B_{R_j} \cap D^1} |v|^{\chi_j} dy \right)^{\frac{1}{\chi_j}}. \quad (3.10)$$

Отсюда по индукции имеем

$$\left(\int_{B_{R_{j+1}} \cap D^1} |v|^{\chi_{j+1}} dy \right)^{\frac{1}{\chi_{j+1}}} \leq \prod_{m=0}^j C(\alpha)(\chi_m)^{\frac{2}{\chi_m}} 2^{\frac{2m}{\chi_m}} \left(\int_{B_2 \cap D^1} |v|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Переходя к пределу при $j \rightarrow +\infty$, приходим к оценке (3.5). Из этой оценки в силу выбора точки x_0 (см. (3.2)) вытекает, что

$$\text{ess sup}_{D^1} |v(y)| - \varepsilon \leq C(\alpha) \left(\int_{D^1} |v|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.11)$$

Перейдя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, возвращаясь к исходным переменным и учитывая (1.6) и соотношение

$$\int_{D^1} |v(y)|^2 dy = \lambda^{\frac{1}{2}} \int_D |u(x)|^2 dx = \lambda^{\frac{1}{2}}. \quad (3.12)$$

получаем

$$\text{ess sup}_{x \in D} |u(x)| \leq C(\alpha) \lambda^{\frac{1}{2}}, \quad (3.13)$$

что доказывает теорему 1.1 при $n = 2$.

Литература

1. V. Maz'ya, *Sobolev Spaces with Applications to Elliptic Partial Differential Equations*, Springer, Berlin (2011).
2. Х. Л. Смолицкий, "Оценки производных фундаментальных функций", *ДАН СССР* **74**, No. 2, 205–208 (1950).
3. Д. М. Эйдуc, "Оценки модуля собственных функций", *ДАН СССР* **90**, No. 6, 973–974 (1953).
4. Д. М. Эйдуc, "Некоторые неравенства для собственных функций", *ДАН СССР* **107**, No. 6, 796–798 (1956).
5. В. А. Ильин, И. А. Шишмарев, "Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных", *Изв. АН СССР* **24**, No. 6, 883–896 (1960).
6. В. Я. Якубов, "Точные оценки для нормированных в L_2 собственных функций эллиптического оператора", *Докл. РАН* **331**, No. 3, 286–287 (1993).
7. В. Я. Якубов, "Оценки по спектральному параметру для собственных функций эллиптических операторов", *Функцион. анал. прил.* **33**, No. 2, 58–67 (1999).
8. Д. Гилбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М. (1989).

Статья поступила в редакцию 6 мая 2025 г.

принята к публикации 3 июля 2025 г.

Э. Т. Мортенсон

**РАМАНУДЖАН, q -РЯДЫ И
ПРИТВОРНЫЕ ТЕТА-ФУНКЦИИ В СПбГУ**

Обзор новых результатов в теории чисел и комбинаторике, полученных молодыми математиками под научным руководством автора в Санкт-Петербургском государственном университете. Приводятся необходимые сведения о тождествах Рамануджана, q -рядах и притворных тета-функциях, а также краткие исторические заметки о «Потерянной тетради» Рамануджана. Представлены перспективные результаты Николая Борозенца по наследию Рамануджана.

О себе: Я получил степень бакалавра и PhD по математике в Висконсинском университете в Мадисоне (США). Область моих интересов: теория чисел, комбинаторика и q -ряды. Ранее я работал как преподаватель и научный сотрудник в математическом институте Макса Планка (Германия), университете штата Пенсильвания (США) и университете Квинсленда (Австралия). Начиная с 2020 г. — доцент Санкт-Петербургского государственного университета.

1. Введение

Наши группы по теории чисел и комбинаторике в Санкт-Петербургском государственном университете расширяются. Вводятся новые курсы такие, как введение в теорию дзета-функций, бинарные квадратичные формы, теория разбиений, углубленная комбинаторика, введение в аналитическую теорию чисел и введение в модулярные формы. Учащиеся всех уровней принимают участие в научных исследованиях q -рядов, притворных тета-функций и разбиений. У нас уже есть хорошие результаты, полученные нашими студентами бакалавриата и магистратуры, а также аспирантами. Однако, прежде чем представить научные достижения нашей группы, необходимо напомнить некоторые факты о Рамануджане, q -рядах и притворных тета-функциях.

2. Предварительные сведения о Рамануджане, q -рядах и притворных тета-функциях

Теория чисел — это увлекательная область математики, связанная с физикой, информатикой и многими другими науками. Тета-функции и эллиптические кривые составляют важные разделы теории чисел. Тета-функции появляются во многих областях науки, например, тета-функция Якоби решает одномерное уравнение теплопроводности.

Тета-функция определяется формулой

$$j(x; q) := \prod_{n=1}^{\infty} (1 - xq^{n-1})(1 - q^n/x)(1 - q^n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\binom{n}{2}} x^n,$$

Э. Т. Мортенсон: Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия; etmortenson@gmail.com.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 255–265 (2025).

где q — комплексное число такое, что $|q| < 1$. Обобщения тета-функций — модулярные формы — сыграли ключевую роль в доказательстве Уайлса Великой теоремы Ферма, утверждающей, что для любого целого числа $n > 2$ не существует трех положительных целых чисел a, b, c , удовлетворяющих уравнению $a^n + b^n = c^n$. Уайлс вывел и затем применил основанные на новых идеях взаимосвязи между эллиптическими кривыми и модулярными формами. Напомним, что Великая теорема Ферма была открытой проблемой 358 лет, а притворные тета-функции были введены знаменитым индийским математиком Рамануджаном в начале XX-го столетия. Два основных источника информации о притворных тета-функциях — это последнее письмо Харди от Рамануджана и «Потерянная тетрадь» Рамануджана.

В письме Харди Рамануджан выписал семнадцать так называемых притворных тета-функций. Каждую функцию из этого списка Рамануджан определил как q -ряд, сходящийся при $|q| < 1$. Данные q -ряды не являются тета-функциями, но по своим асимптотическим свойствам схожи с ними. Рамануджан написал четыре притворные тета-функции третьего порядка, десять функций пятого порядка и три функции седьмого порядка, а также привел несколько тождеств, связывающих притворные тета-функции друг с другом. При этом понятие порядка точно определено не было. Например, притворная тета-функция $f(q)$ третьего порядка была выписана Рамануджаном в виде

$$f(q) := \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(-q; q)_n^2} = 1 + \frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^4}{(1+q)^2(1+q^2)^2} + \dots$$

Притворные тета-функции привлекли внимание многих выдающихся математиков. Их изучали Ватсон, Сельберг, Эндрюс, а также известный специалист по теоретической физике Фримен Дайсон. Притворные тета-функции возникают в различных областях математики, в том числе весьма далеких от теории чисел, например, в теории вероятностных клеточных автоматов (Холройд, Лиггетт, Ромик, 2004; Эндрюс, 2005), инвариантах Виттена — Решетихина — Тураева в маломерной топологии (Лоуренс, Загир, 1999) и инвариантах Дональдсона в физике (Мальмендир, Оно 2012). Важное значение этих функций отметил Дайсон следующими словами:

Притворные тета-функции указывают путь к великому синтезу, которому предстоит еще быть открытым...

Я мечтаю дожить до того дня, когда наши молодые физики в своих попытках привести в соответствие предсказания теории суперструн с реалиями природы придут к необходимости расширить свой аналитический аппарат исследования за счет включения притворных тета-функций...

Однако к этому дню притворные модулярные формы и их симметрии должны быть глубоко исследованы с чисто математической точки зрения.

Притворные тета-функции являются частными случаями q -рядов и их аналогов; они проявляются в казалось бы совершенно несопоставимых формах: двойные суммы типа Гекке, суммы Аппелля — Лерха, эйлеровы формы и коэффициенты Фурье мероморфных форм Якоби. Так, эйлеровы формы похожи на q -гипергеометрические ряды. Бесконечные тета-ряды, известные как двойные суммы типа Гекке, определяются следующим образом:

$$f_{a,b,c}(x, y; q) := \left(\sum_{r,s \geq 0} - \sum_{r,s < 0} \right) (-1)^{r+s} x^r y^s q^{a \binom{r}{2} + b r s + c \binom{s}{2}}.$$

Коэффициенты Фурье двойных сумм типа Гекке можно интерпретировать как считающие функции (с весами) для количества представлений числа в виде бинарной квадратичной формы. Будем называть такие суммы *двойными суммами типа I*, а сумму, полученную заменой знака минус между двумя двойными суммами на знак плюс, — *двойной суммой типа II*. Будем говорить, что двойная сумма имеет *положительный дискриминант*, если $b^2 - ac > 0$, или *отрицательный дискриминант*, если $b^2 - ac < 0$. Введем также функции Аппелля

$$m(x, z; q) := \frac{1}{j(z; q)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}} z^n}{1 - q^{n-1} x z}.$$

Под *ложной* тета-функцией будем понимать тета-функцию с «неправильным» знаком внутри суммирования.

Каждая форма имеет свои уникальные черты. Например, эйлеровы формы могут быть интерпретированы и связаны с разбиениями, а свойства разложений Фурье мероморфных форм Якоби связаны с так называемым эффектом «пересечения стенок» в теории инвариантов Дональдсона (Готше, Загир, 1998) и аналогичным явлением в теории черных дыр (Сен, 2007).

Исторически сложилось так, что проблемы и гипотезы теории притворных тета-функций связаны с выводом точных формул для коэффициентов Фурье. В качестве примера можно вспомнить гипотезу Эндрюса и Драгонетт (Драгонетт, 1952; Эндрюс, 1966; Брингманн, Оно, 2006), доказательство тождеств для притворных тета-функций, в частности, гипотезы о притворных тета-функций (Хикерсон, 1988) и построение теории модулярных преобразований притворных тета-функций (Ватсон, 1937; Цвегерс, 2001, 2002). Заметим, что изобретение и применение способов преобразования одних выражений для q -рядов в другие всегда было решающим моментом при изучении таких задач и гипотез.

Во время своего пребывания в университете Кембриджа весной 1976 г. Эндрюс обнаружил неизвестные ранее заметки Рамануджана с сотнями тождеств без доказательств. Впоследствии эти заметки стали называть «Потерянной тетрадь» Рамануджана. Среди недоказанных Рамануджаном тождеств было десять, которые связывали притворные тета-функции пятого порядка и классические тета-функции. Данные тождества были названы (теперь уже бывшими) притворными тета-гипотезами. Каждое тождество выражало притворную тета-функцию пятого порядка через определенный «строительный блок» и частные тета-функций. Этот строительный блок называется *универсальной притворной тета-функцией* $g(x; q)$ и определяется формулой

$$g(x; q) := x^{-1} \left(-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(x; q)_{n+1} (q/x; q)_n} \right).$$

В принятых обозначениях выпишем две из десяти бывших притворных тета-гипотез (Хикерсон, 1988):

$$f_0(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(-q; q)_n} = \frac{j(q^5; q^{10})j(q^2; q^5)}{j(q; q^3)} - 2q^2 g(q^2; q^{10}),$$

$$f_1(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n(n+1)}}{(-q; q)_n} = \frac{j(q^5; q^{10})j(q; q^5)}{j(q; q^3)} - 2q^3 g(q^4; q^{10}).$$

Чтобы доказать притворные тета-гипотезы и установить свойства модулярности для функций пятого порядка, Эндрюс использовал технику q -гипергеометрических рядов, с помощью которой эйлерову форму можно преобразовать в две другие формы: двойную сумму типа Гекке (1986) и коэффициенты Фурье мероморфных форм Якоби (1988). На основе работ Эндрюса Хикерсон доказал в 1988 г. притворные тета-гипотезы и вывел аналогичные формулы для притворных тета-функций седьмого порядка.

Остановимся кратко на понятии притворной модулярности. Чтобы ввести определение модулярности голоморфной функции $f(z)$ в верхней комплексной полуплоскости, сначала следует выяснить, что представляют из себя преобразования $f(z+1)$ и $f(-1/z)$. Они должны быть некоторыми специальными кратными $f(z)$. Применив технику q -гипергеометрических рядов для конвертации эйлеровых форм функций третьего порядка в формы Аппелля — Лерха, Ватсон (1937) показал, что притворные тета-функции почти модулярны в том смысле, что они являются вещественной частью векторных действительно-аналитических модулярных форм. Цвегерс показал (2002), что функции Аппелля — Лерха, коэффициенты Фурье мероморфных форм Якоби и неопределенные тета-ряды специального вида ведут себя похожим образом, близко к модулярному поведению. Отметим, что притворные тета-функции голоморфны, но не модулярны. Каждой притворной тета-функции можно поставить в соответствие тета-ряд веса $3/2$, называемый *тенью* (Загир, 2007). Добавив не голоморфный член, определяемый *тенью*, можно получить действительно-аналитическую модулярную форму, которая, однако, уже не будет голоморфной. Тем самым притворная тета-функция

может рассматриваться как голоморфная часть слабой гармонической формы Маасса (Брюинье, Функе, 2004), (Брингманн, Оно, 2008, 2010).

На основе прорывной работы Цвегера было показано, что притворные тета-функции и их обобщения — притворные модулярные формы — играют решающую роль во многих областях науки, например, для бесконечномерных супералгебр Ли, алгебры Вирасоро и конформной теории поля, гипотезы чудовищного вздора [1] и физики черных дыр [2]. С помощью q -рядов Рамануджана можно построить объекты, «протекающие» через вещественную ось (Загир, 2007).

3. Наши исследования и новые результаты

Научные исследования в наших группах ведутся, в основном, по четырем направлениям.

1. Представления общих q -рядов через строительные блоки в виде двойных сумм типа I или II, а также в виде двойных сумм положительного или отрицательного дискриминанта, которые, в свою очередь, выражаются через тета-функции, притворные тета-функции и ложные тета-функции.

2. Новые аналоги притворных тождеств десятого порядка из «Потерянной тетради».

3. Выражение струнных функций через тета-функции и струнных функций допустимого дробного уровня через тета-функции, притворные тета-функции и ложные тета-функции.

4. Разбиения и другие классические проблемы из теории чисел.

3.1. Выражения сумм типа Гекке — Аппелля и двойных сумм типа Гекке. В этом направлении были получены новые результаты магистрантом Анкитом Саху [4] о q -рядах и двойных сумм типа Гекке, а также студентом бакалавриата Николаем Борозенцом [5] о смешанной притворной модулярности.

Хиками и Лавджой [6] нашли семейство тройных сумм типа Гекке — Аппелля, двойственных к обобщенным квантовым модулярным формам. В отличие от двойных сумм, для таких сумм типа Гекке — Аппелля коэффициенты Фурье интерпретируются как считающие функции представлений числа тернарной квадратичной формой. Хиками и Лавджой поставили вопрос о модулярности таких сумм. Нам удалось ответить на их вопрос.

Мортенсон и Цвегерс [3] нашли выражение сумм типа Гекке — Аппелля, рассмотренных Хиками и Лавджоем, через смешанные притворные модулярные формы.

Хикерсон и Мортенсон [7], выразили двойные суммы типа Гекке через функции Аппелля и тета-функции, где двойные суммы типа Гекке обладали симметрией одного из двух специальных типов. Именно благодаря этим двум типам разложений удалось выразить все двойные суммы типа Гекке, связанные с классическими притворными тета-функциями Рамануджана. Тройные суммы Хиками и Лавджоя были выражены через суммы бинарных произведений двойных сумм типа Гекке. При этом один из множителей произведения является симметричной двойной суммой, которая допускает выражение в терминах тета-функций в силу результатов [7], тогда как другой множитель представляет собой асимметричную двойную сумму и выразить его через притворные формы [7] не представляется возможным. Преодолевая эту трудность, Мортенсон и Цвегерс [3] вывели замкнутое выражение общей двойной суммы типа Гекке через функции Аппелля и тета-функции без каких-либо ограничений на свойства симметрии. Такие выражения можно было бы назвать *общими двойными суммами положительного дискриминанта*.

Николай Борозенец [5] улучшил метод из работы [3] и адаптировал модифицированный метод для ответа на аналогичный вопрос Брингманн, Лавджоя и Ролена [8] о модулярности тройных сумм типа Гекке — Аппелля.

Дипломная работа магистранта Анкиты Саху [4] была посвящена представлению q -рядов в виде блоков из двойных сумм типа Гекке. В терминах симметрии имеются два существенно различных типа строительных блоков для двойных сумм. Блоки типа I связаны с тета-функциями и притворными тета-функциями и хорошо изучены. В частности, известно, что они обладают притворными модулярными свойствами (Цвегерс, 2002). Более того, используя результаты [7],

можно выразить двойные суммы из блоков типа I через тета-функции и функции Аппелля. Блоки типа II весьма замысловаты и, видимо, связаны с ложными тета-функциями.

Мортенсон и Саху [4], используя технику q -рядов, записали двойные суммы в терминах строительных блоков типов I и II, а затем исследовали свойства модулярности.

Мортенсон [9] вывел формулу, показывающую, что двойные суммы отрицательного дискриминанта допускают элегантное компактное представление через тета-функции и ложные тета-функции. Эта формула аналогична по структуре общим двойным суммам типа Гекке с положительным дискриминантом, для которых уже было доказано [3] разложение в терминах функций Аппелля и тета-функций. Отметим, что результат [9] сыграл существенную роль при выражении струнных функций отрицательного допустимого дробного уровня в совместной работе Борозенца и Мортенсона [10].

3.2. Тожества между притворными тета-функциями и частными тета-функций. По данной тематике мы отметим результаты магистранта Дилшоода Уразова [11].

Многие тождества из «Потерянной тетради» (например, для притворных тета-функций десятого порядка) содержат впечатляющие линейные комбинации притворных тета-функций. Напомним две из четырех притворных тета-функций десятого порядка [12]–[15]

$$\varphi_{10}(q) := \sum_{n \geq 0} \frac{q^{\binom{n+1}{2}}}{(q; q^2)_{n+1}}, \quad \psi_{10}(q) := \sum_{n \geq 0} \frac{q^{\binom{n+2}{2}}}{(q; q^2)_{n+1}}.$$

Четыре функции удовлетворяют шести тождествам, каждое из которых содержит частные тета-функций. Одно из этих шести тождеств имеет вид [12]

$$q^2 \varphi_{10}(q^9) - \frac{\psi_{10}(\omega q) - \psi_{10}(\omega^2 q)}{\omega - \omega^2} = -q \frac{j(q; q^2)}{j(q^3; q^6)} \cdot \frac{j(q^3; q^{15})j(q^6; q^{18})}{j(q^3; q^9)},$$

где ω обозначает первообразный корень из единицы третьей степени, остальные пять тождеств аналогичны [12]–[15]. Что вдохновило Рамануджана на такие тождества, навечно останется неразгаданной загадкой.

Мы нашли новые тождества, аналогичные тождествам для притворных тета-функций десятого порядка из «Потерянной тетради». Именно, Мортенсон [16] открыл три новых тождества для притворных тета-функций шестого порядка, а также нашел и доказал девятнадцать тождеств для притворных тета-функций второго, шестого и восьмого порядков. Несколько семейств, также в духе тождеств для притворных тета-функций десятого порядка, были найдены для функций Аппелля совместно с магистрантом Дилшодом Уразовым [11].

3.3. Струнные функции и новые притворные тета-тождества. В этом направлении отметим статью [17], а также совместные статьи с Дмитрием Соловьевым и Ольгой Постновой [18], где были найдены новые симметрии для струнных функций, и с Николаем Борозенцом [10, 19], где изучались струнные функции допустимого дробного уровня.

Кац и Вакимото (1988, 1989) ввели понятие допустимого представления старшего веса, которое было использовано для классификации модулярных инвариантных представлений аффинных алгебр Каца — Муди. Допустимые представления алгебры Каца — Муди $A_1^{(1)}$ могут иметь определенные рациональные уровни. Допустимые струнные функции (с точностью до простого множителя) были реализованы в работах Ана, Чанга, Тая (1991) как характеры обобщенных парафермионных теорий Фатеева — Замолотчикова (1985). Следует отметить, что определение модулярных свойств и вычисление в явном виде характеров парафермионных теорий и характеров других косетных теорий является сложной, но важной проблемой (Кац, Петресон, 1984), (Кац, Вакимото, 1990). В этом направлении мы получили следующие результаты совместно с Николаем Борозенцом.

В [10] мы определили смешанные притворные модулярные свойства струнных функций уровня $1/2$, а также нашли выражение для струнных функций в виде притворных тета-тождеств, содержащих, в частности, притворные тета-функции из «Потерянной тетради» Рамануджана. Кроме того, мы показали, что струнные функции отрицательного допустимого дробного уровня можно

выразить в терминах ложных тета-функций с помощью формул для двойных сумм типа Гекке с отрицательным дискриминантом [9].

В [19] мы разработали и применили новый подход к вычислению струнных функций допустимого дробного уровня. Согласно этому подходу сначала исследуются квазипериодические свойства допустимых струнных функций, а затем выводится полярно-конечное разложение Загир — Цвегера [2, 20] допустимых характеров. Полученные результаты позволили нам обобщить результаты статьи [10]: найдены семейства новых притворных тета-тождеств для струнных функций уровня $1/3$ и $2/3$ в терминах двух притворных тета-функций $f_3(q)$ и $\omega_3(q)$ из последнего письма Рамануджана, адресованного Харди. Кроме того, мы получили аналогичное семейство новых тождеств для струнных функций уровня $1/5$ из четырех притворных тета-функций десятого порядка, выписанных в «Потерянной тетради» Рамануджана.

3.4. Классическая теория чисел и разбиения. В этом направлении мы отметим совместные работы со студентками бакалавриата Екатериной Кочетковой и магистратуры Марией Досполовой [21] а также статью [22] аспиранта Степана Коненкова.

Тождество Кронекера (см. [23, 24]) в частных случаях приводит к классическим результатам теории чисел, например, утверждению о представлении числа в виде суммы квадратов (Варнар, 2013). Здесь уместно вспомнить теорему Лагранжа, утверждающую, что каждое натуральное число можно представить суммой четырех квадратов, и теорему Ферма о том, что нечетное простое число p представимо в виде суммы двух квадратов тогда и только тогда, когда $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Мортенсон [23] нашел многомерный аналог тождества Кронекера [24], среди частных случаев которого оказалось тождество, приводящее к теореме Гаусса «Эврика!» о том, что каждое натуральное число можно записать в виде суммы не более чем трех треугольных чисел, а также тождество Эндрюса — Крандалла, считающего представления числа n в виде суммы трех квадратов.

Досполова и Кочеткова также исследовали варианты тождества Кронекера. В нашей совместной статье [21] получена версия многомерного обобщенного тождества Кронекера, в которой фигурирует тождество, схожее с тождеством Эндрюса — Крандалла, но в этом варианте оно считает представления n различных тернарных квадратичных форм.

Первая статья [22] Коненкова посвящена гипотезам Канаде — Рассела, которые предлагают новый подход к изучению тождеств типа Роджерса — Рамануджана.

По словам Эндрюса гипотезы Канаде — Рассела обещают действительно захватывающие прорывы в изучении разбиений и q -рядов. Причем эти слова были сказаны в начале исследований этих гипотез, когда доказательства были получены лишь в некоторых конкретных ситуациях. Далее, Анку и Зудилин предложили новый подход к исследованию гипотез Канаде — Рассела, основанный на изучении конечных вариантов тождеств. Недавно Хикерсон сформулировал несколько гипотез, дополняющих гипотезы Канаде — Рассела.

Коненков [22] улучшил метод Анку и Зудилина и адаптировал его для исследования гипотез Хикерсона. Результаты Коненкова внесли значительный вклад в исследование как гипотез Канаде — Рассела, так и гипотез Хикерсона.

3.5. Бакалаврская дипломная работа Николая Борозенца затрагивает много классических и при этом стремительно развивающихся областей математики, связанных с наследием Рамануджана, притворными тета-функциями и разбиениями. В таком контексте функции можно рассматривать как ряд Фурье по комплексной переменной q такой, что $|q| < 1$, и затем исследовать их с точки зрения теории разбиений и различных «строительных» блоков различных типов. Тета-функции могут рассматриваться как функции, обладающие большим количеством симметрий, а притворные тета-функции имеют асимптотические свойства, схожие с асимптотическими свойствами тета-функций. В комбинации с корректирующим членом специального вида притворные тета-функции могут приобрести аналогичные классическому случаю свойства симметрии (Цвегер, 2002). Многие важные задачи могут быть разрешены путем перехода к другой форме для q -рядов (Эндрюс, 1986) и (Хикерсон, 1988).

Бакалаврская дипломная работа Борозенца состоит из двух частей.

3.5.1. Часть 1. Первая часть [5] отвечает на давно поставленный вопрос Брингманн, Лавджоя и Ролена [8]: Можно ли определить притворные модулярные свойства специальной функции типа Гекке — Аппелля? Комбинируя квантовые модулярные формы и притворные модулярные формы, используя результаты из теории узлов и недавно опубликованной работы Мортенсона и Цвегера [3], Борозенец получил замкнутое выражение для семейства сумм типа Гекке — Аппелля через смешанные притворные модулярные формы, т.е. суммы произведений тета-функций и притворных модулярных форм.

Притворные двойные суммы можно рассматривать как q -ряды, где коэффициенты Фурье являются считающими функциями (с весом) представлений числа в виде неопределенной бинарной квадратичной формы. Тройные суммы типа Гекке — Аппелля можно интерпретировать как q -ряды, в которых коэффициенты считают количество представлений числа в виде тернарной квадратичной формы.

Борозенец [5] представил специальные тройные суммы типа Гекке — Аппелля через определенные порождающие функции, что привело к более ясному пониманию картины в целом. Были использованы двойные суммы типа Гекке, поскольку мы уже знаем, как выразить такие двойные суммы в терминах тета-функций и притворных тета-функций [7, 3].

3.5.2. Часть 2. Во второй части Борозенец [25] подробно изучил статистики на разбиениях: рэнг и крэнг. Здесь он не только получил новые доказательства классических результатов, но также вдохнул новую жизнь в этот предмет, породив большое многообразие новых результатов, доказанных им самим или высказанных в виде гипотез. По одной из его гипотез уже дан ответ [26].

Для дальнейшего изложения полученных Николаем Борозенцом результатов потребуется дополнительная информация. *Разбиением* положительного целого числа n называется невозрастающая последовательность натуральных чисел, сумма которых равна n . Например, имеется пять разбиений числа 4:

$$(4), \quad (3, 1), \quad (2, 2), \quad (2, 1, 1), \quad (1, 1, 1, 1).$$

Количество разбиений числа n обозначается $p(n)$. В теории разбиений хорошо известны конгруэнции Рамануджана

$$\begin{aligned} p(5n + 4) &\equiv 0 \pmod{5}, \\ p(7n + 5) &\equiv 0 \pmod{7}, \\ p(11n + 6) &\equiv 0 \pmod{11}, \end{aligned}$$

которые к настоящему времени доказаны различными способами и имеют многочисленные обобщения. Наш пример соответствует первой конгруэнции Рамануджана при $n = 0$. Для изучения конгруэнций разбиений часто строят функцию (статистику), которая ставит в соответствие разбиению некоторое число.

Дайсон (1944) ввел комбинаторную статистику, которую назвал рэнг, и предположил, что с помощью этого понятия можно объяснить первые две конгруэнции. *Рэнг разбиения* определяется как разность между наибольшей частью и числом частей разбиения. Например, рэнги пяти разбиений числа 4 суть 3, 1, 0, -1 , -3 соответственно. Таким образом, рэнг дает равномошное распределение разбиений числа 4 на пять различных классов вычетов по модулю 5.

В общем случае можно положить

$$N(a, M; n) := \text{число разбиений числа } n \text{ с рэнгом } \equiv a \pmod{M}.$$

Для первой конгруэнции Дайсон выдвинул следующую гипотезу:

$$N(a, 5; 5n + 4) = p(5n + 4)/5, \quad a \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Эту и некоторые другие гипотезы Дайсона подтвердили Аткин и Свиннертон-Дайер (1954). Относительно конгруэнции Рамануджана по модулю 11 Дайсон смог лишь предположить, что должна существовать некая функции типа рэнга, и назвал ее *крэнгом* (1944):

Станут ли эти догадки очевидностью — я оставляю читателям вынести окончательный вердикт. По моему убеждению крэнг — это единственная арифметическая функция, получившая имя еще до своего определения. Да будет она спасена от бесславной участи мистической планеты Вулкан.

В 1988 г. Эндрюс и Гарван нашли такую характеристику, которую Дайсон называл крэнгом.

Изучая отклонения рэнга от ожидаемого значения

$$D(a, M) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(N(a, M; n) - \frac{p(n)}{M} \right) q^n,$$

можно найти и доказать тождества и конгруэнции для рэнгов и крэнгов. Но для этого потребуются специальные базисы. Образно говоря, требуется найти набор ключей, подходящие комбинации которых открывали бы тождества и конгруэнции.

Во второй части [25] своей дипломной работы на степень бакалавра Николай Борозенец разработал теорию и выдвинул гипотезы, связанные с рэнгами и крэнгами разбиений по модулю 11. В этом направлении Борозенец установил новый подход к исследованию рэнгов и крэнгов функции разбиения с помощью представления девиации в специальном базисе. В его подходе использованы недавно опубликованные результаты Гарвана и Сармы [27], а также работа [28]. Борозенец получил новые доказательства многих классических результатов для рэнгов и крэнгов, а также вывел новые тождества и новые неравенства. Гипотезы, высказанные Борозенцом, сразу же привлекли внимание других исследователей в этой области, и подробное решение одной из гипотез Борозенца было вскоре опубликовано ведущими специалистами в этой области (Брингманн, Пандей, [26]).

Литература

1. M. C. Cheng, J. F. Duncan, J. A. Harvey, “Umbral moonshine”, *Commun. Number Theory Phys.* **8**, No. 2, 101–242 (2014).
2. A. Dabholkar, S. Murthy, D. Zagier, *Quantum Black Holes, Wall Crossing, and Mock Modular Forms*, Preprint, arXiv:1208.4074 (2012).
3. E. T. Mortenson, S. Zwegers, “The mixed mock modularity of certain duals of generalized quantum modular forms of Hikami and Lovejoy”, *Adv. Math.* **418**, Article ID: 108944 (2023).
4. E. T. Mortenson, A. Sahu, “Expressing q -series in terms of building blocks of Hecke-type double-sums”, *Int. J. Number Theory* **16**, No. 6, 1429–1451 (2023).
5. N. Borozenets, “The mixed mock modularity of a new U -type function related to the Andrews–Gordon identities”, *Hardy–Ramanujan J.* **45**, 108–129 (2022).
6. K. Hikami, J. Lovejoy, “Torus knots and quantum modular forms”, *Res. Math. Sci.* **2**, Paper No. 2 (2015).
7. D. R. Hickerson, E. T. Mortenson, “Hecke-type double sums, Appell–Lerch sums, and mock theta functions. I”, *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **109**, No. 2, 382–422 (2014).
8. K. Bringmann, J. Lovejoy, L. Rolin, “On some special families of q -hypergeometric Maass forms”, *Int. Math. Res. Not.* **2018** No. 18, 5537–5561 (2018).
9. E. T. Mortenson, “A general formula for Hecke-type false theta functions”, *Алгебра анал.* **36**, No. 1, 195–203 (2024).
10. N. Borozenets, E. T. Mortenson, *On String Functions of the Generalized Parafermionic Theories, Mock Theta Functions, and False Theta Functions*, Preprint, arXiv:2409.14834 (2024).
11. E. T. Mortenson, D. Urazov, “Splitting Appell functions in terms of single quotients of theta functions”, *J. Math. Anal. Appl.* **537**, No. 1, Article No. 128261 (2024).
12. Y.-S. Choi, “Tenth order mock theta functions in Ramanujan’s Lost Notebook”, *Invent. Math.* **136**, No. 3, 497–569 (1999).
13. Y.-S. Choi, “Tenth order mock theta functions in Ramanujan’s Lost Notebook II”, *Adv. Math.* **156**, No. 2, 180–285 (2000).

14. Y.-S. Choi, “Tenth order mock theta functions in Ramanujan’s Lost Notebook III”, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **94**, 26–52 (2007).
15. S. Ramanujan, *The Lost Notebook and Other Unpublished Papers*, Narosa Publishing House, New Delhi (1988).
16. E. T. Mortenson, “On Ramanujan’s Lost Notebook and new tenth-order like identities for second-, sixth-, and eighth-order mock theta functions”, *Bull. Lond. Math. Soc.* **56**, No. 3, 1029–1053 (2024).
17. E. T. Mortenson, “On Hecke-type double-sums and general string functions for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$ ”, *Ramanujan J.* **63**, No. 3, 553–582 (2024).
18. E. T. Mortenson, O. Postnova, D. Solov'yev, “On string functions and double-sum formulas”, *Res. Math. Sci.* **10**, No. 2, Paper No. 15 (2023).
19. N. Borozenets, E. T. Mortenson, *On String Functions of the Generalized Parafermionic Theories, Mock Theta Functions, and False Theta Functions. II*, Preprint, arXiv:2502.03074 (2025).
20. S. Zwegers, *Mock Theta Functions*, Ph.D. Thesis, Universiteit Utrecht (2002).
21. M. Dospelova, E. Kochetkova, E. T. Mortenson, “A new Andrews–Crandall-type identity and the number of integer solutions to $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = n$ ”, *Ramanujan J.* **63**, No. 4, 969–994 (2024).
22. S. Konenkov, “Further q -reflections on the modulo 9 Kanade–Russell (conjectural) identities”, *J. Comb. Theory, Ser. A* **206**, Article ID 105894 (2024).
23. E. T. Mortenson, “A double-sum Kronecker-type identity”, *Adv. Appl. Math.* **82**, 155–177 (2017).
24. E. T. Mortenson, “A Kronecker-type identity and the representations of a number as a sum of three squares”, *Bull. Lond. Math. Soc.* **49**, No. 5, 770–783 (2017).
25. N. Borozenets, “Deviation of the rank and crank modulo 11”, *Ramanujan J.* **64**, No. 4, 1357–1420 (2024).
26. K. Bringmann, B. Pandey, “Biases among classes of rank-crank partitions (mod 11)”, *J. Math. Anal. Appl.* **536**, No. 2, Article ID 128221 (2024).
27. F. G. Garvan, R. Sarma, “New symmetries for Dyson’s rank function”, *Ramanujan J.* **65**, No. 4, 1883–1939 (2024).
28. E. T. Mortenson, “On ranks and cranks of partitions modulo 4 and 8”, *J. Comb. Theory, Ser. A* **161**, 51–80 (2019).

Статья поступила в редакцию 25 мая 2025 г.
принята к публикации 29 мая 2025 г.

АННОТАЦИИ

А. В. Щуплев, “Международный математический центр «Сириус» для молодых математиков”, *Сириус. Мат. ж.* **1**, No. 3, 8–10 (2025); English translation: Alexey Shchuplev, “Sirius international mathematics center for young mathematicians and celebration of the 5th anniversary of the center,” *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 167–169 (2025) (Open Access).

DOI: 10.1007/s10958-025-07898-8

Выпуск представляет статьи конкурсантов Премии молодым математикам России, учрежденной Образовательным фондом «Талант и успех». Библиография: 6 назв. Иллюстрации: 1 рис.

The Editorial Notes present articles of the issue *J. Math. Sci.* **292**, No. 2 (2025) written by participants of the first conferences held at Sirius International Mathematics Center in 2021–2022 and also articles by nominees and laureates of the Awards for Young Mathematicians of Russia. Bibliography: 6 titles. Illustrations: 1 figure.

Статья представлена в Editflow/Sirius 27 июля 2025 г.
принята к публикации 28 июля 2025 г.
опубликована на русском языке 7 октября 2025 г.
опубликована на английском языке 22 августа 2025 г.

А. А. Бондарев, “Автономная дифференциальная система с контрастными сочетаниями глобальных стабильностных свойств и мер”, *Сириус. Мат. ж.* **1**, No. 3, 11–17 (2025); English translation: Alexey Bondarev “Autonomous differential system with contrasting combinations of global stability properties and measures,” *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 170–177 (2025).

DOI: 10.1007/s10958-025-07899-7

УДК 517.925.5

Предложен пример многомерной автономной дифференциальной системы, все решения которой стремятся к нулю при неограниченном росте времени, тогда как относительная мера начальных значений тех решений, которые начинаются в шаре с центром в нуле и удаляются от него на достаточное расстояние с ростом времени, приближается сколь угодно близко к единице при стремлении радиуса шара к нулю. Построенная система обладает также нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения. Библиография: 7 назв. Иллюстрации: 1 рис.

Ключевые слова: автономная дифференциальная система, устойчивость по Ляпунову, устойчивость по Перрону, верхнепредельная устойчивость, мера устойчивости, асимптотическое поведение решений.

MSC2020: 34A34

We describe an example of a multidimensional autonomous differential system such that all its solutions tend to zero with time. For the solutions starting in a ball centered at zero and leaving the ball at a sufficient distance with time the relative measure of the initial values becomes arbitrarily close to 1 as the ball radius tends to zero. We show that the constructed system possesses the zero linear approximation along the zero solution. Bibliography: 7 titles. Illustrations: 1 figure.

Key words: autonomous differential system, Lyapunov stability, Perron stability, upper-limit stability, stability measure, asymptotic behavior of solutions.

Статья представлена в Editflow/Sirius 26 марта 2025 г.
принята к публикации 24 мая 2025 г.
опубликована на русском языке 7 октября 2025 г.
опубликована на английском языке 22 августа 2025 г.

Н. Е. Борозенец, “Девиации и арифметические свойства комбинаторных статистик Дайсона, Эндрюса и Гарвана (обзор)”, *Сириус. Мат. ж.* **1**, No. 3, 18–33 (2025); English translation: Nikolay E. Borozenets, “Survey on deviations and arithmetic properties of combinatorial statistics after Dyson, Andrews and Garvan,” *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 178–196 (2025).

DOI: 10.1007/s10958-025-07900-3

УДК 511.33

Рассматриваются знаменитые сравнения Рамануджана по модулю 5, 7 и 11 для функции числа разбиений и связанные с ними классические комбинаторные статистики рэнг и крэнг, введенные Дайсоном, Эндрюсом и Гарваном. Представлены новые результаты по явному вычислению элементов расщеплений девиаций рэнга и крэнга, и показано, как они помогают выявить неожиданные арифметические свойства данных комбинаторных статистик. Сформулированы несколько гипотез о рэнгах и крэнгах. Библиография: 36 назв.

Ключевые слова: функция числа разбиений, сравнения Рамануджана, рэнг Дайсона, крэнг Эндрюса — Гарвана, девиация, расщепление, конгруэнция, неравенство.

MSC2020: 11P83, 05A17

In this survey, we overview the celebrated Ramanujan’s congruences modulo 5, 7 and 11 for the partition function and how the classical combinatorial statistics rank and crank introduced by Dyson, Andrews and Garvan explain them. We also present some recent results on the explicit calculation of the dissections of the deviations of rank and crank and how these computations help to deduce unexpected arithmetic properties of these combinatorial statistics. In addition, we posed some open problems in this area. Bibliography: 36 titles.

Key words: Partition function, Ramanujan’s congruences, Dyson’s rank, Andrews–Garvan’s crank, deviation, dissection, congruence, inequality.

Статья представлена в Editflow/Sirius 15 июня 2025 г.

принята к публикации 18 июня 2025 г.

опубликована на русском языке 7 октября 2025 г.

опубликована на английском языке 22 августа 2025 г.

Е. Вл. Булинская, “Плотность популяции внутри фронта распространения каталитического ветвящегося случайного блуждания”, *Сириус. Мат. ж.* **1**, No. 3, 34–50 (2025); English translation: Ekaterina V. Bulinskaya, “Population density inside the propagation front of a catalytic branching random,” *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 197–217 (2025).

DOI: 10.1007/s10958-025-07901-2

УДК 519.21

В модели каталитического ветвящегося случайного блуждания по $\mathbb{Z}^d$ исследуется, как концентрируются частицы внутри фронта распространения популяции, когда время неограниченно растет. Предполагается, что режим надкритический (мальтусовский параметр положителен), а хвосты скачка блуждания легкие, т.е. выполнено условие Крамера. Поскольку, как известно, в таком случае фронт растет асимптотически линейно по времени, то нами рассматриваются слои частиц внутри фронта, которые тоже растут линейно со временем, но с меньшей скоростью. Нами установлено, что число частиц в слое растет экспоненциально быстро, хотя и с показателем меньшим, чем мальтусовский параметр. Библиография: 30 назв.

Ключевые слова: каталитическое ветвящееся случайное блуждание, фронт распространения популяции, плотность популяции, надкритический режим, легкие хвосты, предельные теоремы.

MSC2020: 60J80, 60F05

In the model of catalytic branching random walk on $\mathbb{Z}^d$, we study the concentration of particles bounded by the population propagation front as time tends to infinity. We assume that the regime is supercritical (the Malthusian parameter is positive) and the tails of the random walk jump are light, i.e., the Cramér condition is fulfilled. Since, in this case, the front is known to spread asymptotically

linearly in time, we consider the layers of particles behind the front which also grow linearly in time, but at a slower rate. We establish that the number of particles in a layer grows exponentially fast, although with an index smaller than the Malthusian parameter. Bibliography: 30 titles.

Key words: catalytic branching random walk, population propagation front, population density, supercritical regime, light tail, limit theorem.

Статья представлена в Editflow/Sirius 5 апреля 2025 г.,
принята к публикации 19 мая 2025 г.
опубликована на русском языке 7 октября 2025 г.
опубликована на английском языке 22 августа 2025 г.

Х.-Б. Вьонг, “Условие Фокса — Милнора для конкордантных узлов в гомологических 3-сферах”, *Сириус. Мат. ж.* **1**, No. 3, 51–59 (2025); English translation: *J. Math. Sci.* [To appear]

УДК 515.162

Показано, что полином Александера узла, срезанного в ориентированной гомологической 3-сфере, удовлетворяет условию Фокса — Милнора. Установлено соотношение между полиномами Александера конкордантных узлов в ориентированной гомологической 3-сфере. Библиография: 11 назв.
Ключевые слова: узел, трехмерный тор, полином Александера.

MSC2020: 57M27, 57M05

We show that the Alexander polynomial of a knot, which is of slice type in an oriented homology 3-sphere, satisfies the Fox–Milnor polynomial condition. A relation between Alexander polynomial of concordant knots in an oriented homology 3-sphere is established. Bibliography: 11 titles.

Key words: knot, 3-dimensional torus, Alexander polynomial.

Статья представлена в Editflow/Sirius 25 апреля 2025 г.
принята к публикации 5 июля 2025 г.
опубликована на русском языке 7 октября 2025 г.

Л. В. Дворкин, “Финитная аппроксимируемость предтранзитивных аналогов $(w)K4$ и GL ”, *Сириус. Мат. ж.* **1**, No. 3, 60–80 (2025); English translation: *J. Math. Sci.* [To appear]

УДК 510.643.7

Нормальная модальная логика предтранзитивна, если в ней выразима модальность, соответствующая транзитивному замыканию отношения достижимости. В статье установлена финитная аппроксимируемость предтранзитивных обобщений $K4$, $wK4$, GL и их расширений каноническими формулами, наследуемыми подшкалами. Библиография: 26 назв.

Ключевые слова: модальная логика, логика доказуемости, аппроксимируемость.

MSC2020: 03F45

A normal modal logic is pretransitive, if the modality corresponding to the transitive closure of an accessibility relation is expressible in it. In the present work we establish the finite model property for pretransitive generalizations of $K4$, $wK4$, GL , and their extensions by canonical subframe-hereditary formulas.

Key words: modal logic, provability logic, approximability.

Статья представлена в Editflow/Sirius 19 марта 2025 г.,
принята к публикации 16 июля 2025 г.
опубликована на русском языке 7 октября 2025 г.

А. Г. Чечкина, “Об оценке максимума модуля собственных функций задачи Зарембы для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка”, *Сириус. Мат. ж.* **1**, No. 3, 81–86 (2025); English translation: Aleksandra G. Chechkina, “Estimate for the maximum of the absolute

value of eigenfunctions of the Zaremba problem for a second order elliptic equation in divergence form,” *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 218–225 (2025).

DOI: 10.1007/s10958-025-07902-1

УДК 517.954+517.982

Рассматривается задача Зарембы для дивергентного эллиптического оператора второго порядка. Найдена оценка максимум модуля нормированных собственных функций. Библиография: 8 назв.

Ключевые слова: задача Зарембы, эллиптический оператор, собственная функция.

MSC2020: 35B40, 35J25

We consider the Zaremba problem for a second order elliptic operator in divergence form and obtain an estimate for the maximum of the absolute value of normalized eigenfunctions. Bibliography: 8 titles.

Key words: Zaremba problem, elliptic operator, eigenvalue function.

Статья представлена в Editflow/Sirius 6 мая 2025 г.,

принята к публикации 3 июля 2025 г.

опубликована на русском языке 7 октября 2025 г.

опубликована на английском языке 2 сентября 2025 г.

Э. Т. Мортенсон, “Рамануджан, q -ряды и притворные тета функции в СПбГУ”, *Сириус. Мат. ж.* **1**, No. 3, 87–95 (2025); English translation: Eric T. Mortenson, “Ramanujan, q -series, and mock theta functions at SPbU,” *J. Math. Sci.* **292**, No. 2, 255–265 (2025).

DOI: 10.1007/s10958-025-07905-y

Обзор новых результатов в теории чисел и комбинаторике, полученных молодыми математиками под научным руководством автора в Санкт-Петербургском государственном университете. Приводятся необходимые сведения о тождествах Рамануджана, q -рядах и притворных тета-функциях, а также краткие исторические заметки о «Потерянной тетради» Рамануджана. Представлены перспективные результаты Николая Борозенца по наследию Рамануджана. Библиография: 28 назв.

Ключевые слова: теория чисел, тета функция, q -ряд, конгруэнции Рамануджана, «Потерянная тетрадь» Рамануджана.

This paper is a review of research and recent results in number theory and combinatorics obtained by young mathematicians under the author’s scientific supervision at St. Petersburg State University. Necessary background information on Ramanujan, q -series, and mock theta functions is given. Historical remarks on Ramanujan’s *Lost Notebook* are provided and perspective results of Nikolay Borozenets on Ramanujan-topic are discussed in detail. Bibliography: 28 titles.

Key words: number theory, theta function, q -series, Ramanujan’s congruences, Ramanujan’s «Lost Notebook».

Статья представлена в Editflow/Sirius 25 мая 2025 г.,

принята к публикации 29 мая 2025 г.

опубликована на русском языке 7 октября 2025 г.

опубликована на английском языке 22 августа 2025 г.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ**Алексей Валерьевич Щуплев**

Директор, Международный математический центр «Сириус».

Алексей Андреевич Бондарев

Финалист Премии молодым математикам России (2024) в номинации «аспиранты».

А. А. Бондарев поступил в аспирантуру механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова в 2022 г. В настоящее время обучается на кафедре дифференциальных уравнений под научным руководством профессора Игоря Николаевича Сергеева. Область научных интересов: качественная теория обыкновенных дифференциальных уравнений, теория устойчивости.

Николай Евгеньевич Борозенец

Лауреат Премии молодым математикам России (2024) в номинации «студенты».

Премия присуждена за дипломную работу на степень бакалавра, выполненную под научным руководством доцента Эрика Тодда Мортенсона в СПбГУ. В настоящее время Н. Е. Борозенец обучается в совместной магистратуре Сколтеха и Высшей школы экономики по профилю математическая физика. Область научных интересов: теория чисел, комбинаторика, конформная теория поля и статистическая физика.

Екатерина Владимировна Булинская

Лауреат Премии молодым математикам России (2021) в номинации «молодые ученые».

Е. Вл. Булинская защитила кандидатскую диссертацию под научным руководством профессора Е. Б. Яровой в 2012 г., а в 2024 г. — докторскую диссертацию, отмеченную в 2025 г. премией им. И. И. Шувалова первой степени. В настоящее время Е. Вл. Булинская — доцент кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Область научных интересов: ветвящиеся процессы, случайные блуждания.

Хью-Бао Вьонг

Номинант Премии молодым математикам России (2021) в номинации «аспиранты».

Х.-Б. Вьонг защитил кандидатскую диссертацию под научным руководством профессоров Александра Дмитриевича Медных и Николая Владимировича Абросимова в 2022 г. С 2022 г. Хью-Бао Вьонг — старший преподаватель Томского государственного университета, а с 2025 г. — научный сотрудник НИУ «Высшая школа экономики». Область научных интересов: топология малых размерностей, комбинаторная и алгебраическая теория узлов.

Лев Вениаминович Дворкин

Лауреат Премии молодым математикам России (2024) в номинации «студенты».

Премия присуждена за научную статью, опубликованную в *Известиях РАН* в 2024 г. В настоящее время Л. В. Дворкин обучается в аспирантуре механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова. Научный руководитель: академик Лев Дмитриевич Беклемишев. Область научных интересов: логика доказуемости, модальные логики.

Александра Григорьевна Чечкина

Номинант Премии молодым математикам России (2021) в номинации «молодые ученые».

А. Г. Чечкина защитила кандидатскую диссертацию под научным руководством академика Виктора Антоновича Садовниченко в 2015 г. В настоящее время А. Г. Чечкина — автор около 50 научных работ, преподает на различных факультетах МГУ им. М. В. Ломоносова, а также в филиале МГУ в городе Баку. Область научных интересов: уравнения с частными производными, спектральные задачи, краевые задачи математической физики.

Эрик Тодд Мортенсон

Доцент, Санкт-Петербургский государственный университет.