

ISSN 3034-3240 (print)

Том 2 № 3 (2026)

СИРИУС

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ



ФЕДЕРАЛЬНАЯ ТЕРРИТОРИЯ
«СИРИУС»

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

Председатель Научного совета ММЦ «Сириус»
академик Шведской королевской академии наук
Европейской академии наук и Академии Европа
Лаптев Арий Ариевич

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ФОНД «ТАЛАНТ И УСПЕХ»

Заместитель руководителя Фонда «Талант и успех»
Директор Научно-технологического университета «Сириус»
Гусев Антон Сергеевич

НАУЧНЫЙ СОВЕТ ММЦ «СИРИУС»

д.ф.-м.н. *Ландо Сергей Константинович* (ВШЭ)
чл.-корр. РАН *Миронов Андрей Евгеньевич* (ИМ СО РАН)
академик *Трецев Дмитрий Валерьевич* (МИАН)
д.ф.-м.н. *Цих Август Карлович* (СФУ)
к.ф.-м.н. *Щуплев Алексей Валерьевич* (Фонд «Талант и успех»)

ЧЛЕНЫ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

академик *Аптекарев Александр Иванович* (ИПМ РАН)
академик *Безродных Сергей Игоревич* (ФИЦ ИУ РАН)
академик *Беклемишев Лев Дмитриевич* (МИАН)
академик *Гончаров Сергей Савостьянович* (ИМ СО РАН)
академик *Кашин Борис Сергеевич* (МИАН)
академик *Кисляков Сергей Витальевич* (ПОМИ РАН)
академик *Козлов Валерий Васильевич* (МИАН)
академик *Конягин Сергей Владимирович* (МИАН)
академик *Лукоянов Николай Юрьевич* (ИММ УрО РАН)
академик *Матиясевич Юрий Владимирович* (ПОМИ РАН)
академик *Романов Владимир Гаврилович* (ИМ СО РАН)
академик *Семенов Алексей Львович* (МГУ)
академик *Тыртышников Евгений Евгеньевич* (ИВМ РАН)
академик *Чернушско Феликс Леонидович* (ИПМех РАН)
академик *Четверушкин Борис Николаевич* (ИПМ РАН)
академик *Шайдуров Владимир Викторович* (КНЦ СО РАН)
академик *Шананин Александр Алексеевич* (МФТИ)
чл.-корр. РАН *Болотин Сергей Владимирович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Бухштабер Виктор Матвеевич* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Василевский Юрий Викторович* (ИВМ РАН)
чл.-корр. РАН *Васин Владимир Васильевич* (ИММ УрО РАН)
чл.-корр. РАН *Веснин Андрей Юрьевич* (ИМ СО РАН)
чл.-корр. РАН *Гайфуллин Александр Александрович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Гасников Александр Владимирович* (ИУ)
чл.-корр. РАН *Гущин Валентин Анатольевич* (ИАП РАН)
чл.-корр. РАН *Давыдов Алексей Александрович* (МГУ)
чл.-корр. РАН *Кабанихин Сергей Игоревич* (ИМ СО РАН)
чл.-корр. РАН *Лазарева Галина Геннадьевна* (РУДН)
чл.-корр. РАН *Петров Игорь Борисович* (МФТИ)
чл.-корр. РАН *Попов Владимир Леонидович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Протасов Владимир Юрьевич* (МГУ)
чл.-корр. РАН *Прохоров Юрий Геннадьевич* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Разборов Александр Александрович* (МИАН)
чл.-корр. РАН *Садовский Владимир Михайлович* (ИВМ СО РАН)
чл.-корр. РАН *Тишкин Владимир Федорович* (ИПМ РАН)
чл.-корр. РАН *Толстоногов Александр Александрович* (ИДСТУ СО РАН)
чл.-корр. РАН *Шкаликов Андрей Андреевич* (МГУ)
чл.-корр. РАН *Якобовский Михаил Владимирович* (ИПМ РАН)

ЧЛЕНЫ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

академик *Джумадильдаев Аскар Серкулович* (Вице-президент НАН РК)
академик *Сураган Дурвудхан* (Назарбаев университет)

МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
ЦЕНТР «СИРИУС»

ISSN 3034-3240

СИРИУС
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 2

2026

№ 3

Под редакцией

А. А. Лаптева

Имперский колледж Лондона, Великобритания
Научно-технологический университет «Сириус», Россия

2026

Федеральная территория «Сириус»
Образовательный фонд «Талант и успех»

Журнал учрежден в 2024 г. Образовательным фондом «Талант и успех»
Издается с 2025 г. при поддержке Федеральной территории «Сириус»

УДК 51
ББК 22.1
С402

С402 Сириус. Математический журнал. Том 2, No. 3, 2026 — 96 с.

В рамках проекта «Сириус» — Казахстан данный выпуск представляет статьи математиков из Казахстана и их коллег, а открывается выпуск статьей академика НАН РК А. С. Джумадиляева о математике в Казахстане. В научных статьях исследуются слабосвязанные собственные значения функционально-разностных операторов, локализация дискретного спектра несамосопряженных операторов Вейля, обучаемость замкнутых вниз множеств в частичных порядках и дуальности для категорий биалгебраических решёток, а также асимптотика аттракторов двумерной системы Навье — Стокса в перфорированной области, представление пространств ультрадифференцируемых функций в виде преобразований Фурье — Лапласа, контрастные сочетания устойчивости и неустойчивости автономных дифференциальных систем, преобразование Фурье финально монотонных функций и весовые оценки типа Харди — Литтлвуда — Боаса.

УДК 51
ББК 22.1

Редколлегия: А. И. Аптекарев, А. Д. Баранов, В. М. Бухштабер, Ю. В. Василевский, А. Ю. Веснин, С. С. Гончаров, Н. С. Даирбеков, С. И. Кабанихин, В. А. Калягин, А. А. Лаптев (гл. ред.), Т. Е. Панов, Ю. Л. Сачков, Т. М. Садыков, А. П. Солодов, В. Н. Темляков, К. Ю. Федоровский, С. Б. Шлосман.

Руководитель редакционно-издательского отдела и выпускающий редактор: Т. Н. Рожковская.

Научные редакторы: Н. С. Даирбеков, Т. М. Садыков, А. П. Солодов, М. В. Швидефски.

Журнал публикует новые научные результаты по всем направлениям теоретической и прикладной математики. В качестве авторов приглашаются участники всех мероприятий, проводимых Международным математическим центром «Сириус» и Казахстанским математическим центром в Алматы, а также номинанты и лауреаты Премии молодым математикам России, учрежденной Образовательным фондом «Талант и успех». Рукописи принимаются на сайте

<https://ef.msp.org/submit/sirius>

Все выпуски «Сириус. Математического журнала» размещены в свободном доступе на сайте

<https://siriusmathcenter.ru/SiriusMathJ>

Весь тираж журнала на безвозмездной основе направляется математическому сообществу в России и за рубежом: библиотекам, университетам, институтам РАН, математикам.

Все статьи, прошедшие рецензирование через EditFlow и одобренные главным редактором, публикуются на английском языке издательством Springer в *Journal of Mathematical Sciences. Series B. «Sirius Mathematical Journal»* (<https://link.springer.com/journal/10958>), реферируются и индексируются в международных базах данных ANVUR, Baidu, CLOCKSS, CNKI, CNPIEC, Dimensions, EBSCO, Gale, Google Scholar, INIS Atomindex, INSPIRE, Japanese Science and Technology Agency (JST), Mathematical Reviews (MathSciNet.ams.org), Naver, OCLC WorldCat Discovery Service, Ovid Discovery, Portico, ProQuest, SCImago, SCOPUS, TD Net Discovery Service, Wanfang, eLibrary.ru, Zentralblatt MATH (zbMATH Open)

Подписано в печать 3.10.2026. Формат 220х290 мм. Усл. печ. л. 12. Тираж 500 (+50 доп.) экз.

Адрес редакции: 354340, Федеральная территория «Сириус», Дельта Сириус, Триумфальный пер., 1, офис 9-047, тел.: +7 (862) 241-98-44, доб. 5824, Эл. почта: rozhkovskaya.tn@talantiuspeh.ru.

Отпечатано в ООО «Издательство «Сочи пресс», 354000, Сочи, Виноградный пер., 15.

тел.: 7 (862) 296-08-08. Заказ

© Образовательный фонд «Талант и успех», 2026

СОДЕРЖАНИЕ

А. А. Лаптев

Международный математический центр «Сириус» — Казахстан 7

А. С. Джумадильдаев

Математика в Казахстане: Краткая история 8

Л. М. Баратова, Н. А. Баженов

Обучение замкнутых вниз множеств в частичных порядках по различным типам информации 11

1. Введение 11
2. Предварительные сведения 12
3. Негативная информация для линейных порядков 14
4. Разделение понятий обучаемости для линейных порядков 16
5. Случай произвольных частичных порядков 18

Литература 18

А. О. Башеева, М. В. Швидефски

Дуальность для категорий биалгебраических решеток 20

1. Введение 20
2. Основные определения и вспомогательные факты 22
3. Немодулярные решеточные многообразия 23
 - 3.1. Решеточное многообразие $\mathbf{V}_C$ и категория $\mathbb{B}_C$ 23
 - 3.2. Категория $\mathbb{J}_C$ упорядоченных пространств. 24
 - 3.3. Контравариантный функтор из $\mathbb{J}_C$ в $\mathbb{B}_C$ 25
 - 3.4. Контравариантный функтор из $\mathbb{B}_C$ в $\mathbb{J}_C$ 26
 - 3.5. Основные результаты. 26
 - 3.6. Решеточное многообразие, порожденное пентагоном N_5 27
 - 3.7. Решеточное многообразие, порожденное L_1 28
 - 3.8. Решеточное многообразие, порожденное L_2 29
 - 3.9. Решеточное многообразие, порожденное L_3 29
 - 3.10. Решеточное многообразие, порожденное L_4 30
 - 3.11. Решеточное многообразие, порожденное L_5 30
 - 3.12. Дуальности Биркгофа для некоторых конечно порожденных решеточных многообразий. 31
4. Модулярное решеточное многообразие 31
 - 4.1. Решеточное многообразие, порожденное M_3 32
 - 4.2. Категории $\mathbb{J}_{M_3}$ и $\mathbb{B}_{M_3}$ 32
 - 4.3. Контравариантный функтор из $\mathbb{J}_{M_3}$ в $\mathbb{B}_{M_3}$ 33
 - 4.4. Контравариантный функтор из $\mathbb{B}_{M_3}$ в $\mathbb{J}_{M_3}$ 33
 - 4.5. Основные результаты. 34

Литература 35

К. А. Бекмаганбетов, В. В. Чепыжов, Г. А. Чечкин

Об асимптотике аттракторов двумерной системы Навье — Стокса в модельной области, перфорированной вдоль границы 37

1. Постановка задачи и предварительные замечания 37

2. Вспомогательное утверждение	42
3. Усреднение исходной задачи	45
Литература	49
 А. А. Бондарев	
Двумерная автономная дифференциальная система с полной неустойчивостью вдоль любого луча, но частной устойчивостью массивного характера	51
1. Введение	51
2. Основной результат	52
Литература	55
 А. Е. Зернова	
Локализация дискретного спектра несамосопряженных функционально-разностных операторов	57
1. Введение	57
2. Предварительные сведения	59
3. Ограниченность модуля ядра свободной резольвенты	60
4. Локализация дискретного спектра	64
5. Примеры	66
Литература	67
 А. А. Лаптев, Д. Сураган, А. Е. Зернова	
Слабосвязанные собственные значения для функционально-разностных операторов	68
1. Введение	68
2. Доказательство теоремы 1.1 и некоторые обсуждения	70
Литература	72
 И. Х. Мусин, Р. С. Юлмухаметов	
Представление пространств ультрадифференцируемых функций в виде преобразований Фурье	74
1. Введение	74
2. Вспомогательные утверждения	76
3. Доказательство теорем 1.1 и 1.2	79
4. Доказательство теоремы 1.3	81
Литература	83
 Е. Д. Нурсултанов	
Преобразование Фурье финально монотонных функций	85
1. Введение	85
2. Сетевые пространства	87
3. Основная лемма	88
4. Интерполяционные теоремы	90
5. Преобразование Фурье финально монотонной функции	92
Литература	95

А. А. Лаптев

**МЕЖДУНАРОДНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЦЕНТР
«СИРИУС» — КАЗАХСТАН**

В апреле 2026 года в Астане состоялся II Международный саммит талантов «Казахстан — Сириус», посвященный 65-летию первого полета человека в космос, развитию образовательной инфраструктуры по модели «Сириус» в Казахстане и укреплению стратегического партнерства России и Казахстана в сфере образования, науки и культуры. Международный математический центр «Сириус» в делегации Образовательного Фонда «Талант и успех» представлял исполнительный директор ММЦ «Сириус» А. В. Щуплев. На саммите обсуждались, в частности, вопросы по укреплению сотрудничества математиков России и Казахстана, проведению совместных мероприятий и организации математического центра в Алматы по типу ММЦ «Сириус».

Продолжая линию проекта «Сириус — Казахстан», «Сириус. Математический журнал» открывает свои страницы для авторов из Казахстана. В редакционный совет приглашены вице-президент Национальной академии наук Республики Казахстан при Президенте Республики Казахстан Аскар Серкулович Джумадильдаев и академик Национальной академии наук Республики Казахстан при Президенте Республики Казахстан Дурвудхан Сураган, а в редколлегию вошел зав. отделом математической физики и моделирования Института математики и математического моделирования (Алматы) доктор физ.-мат. наук Нурлан Слямханович Даирбеков.

В настоящем выпуске представлены статьи авторов из Евразийского национального университета им. Л. Н. Гумилёва (Астана), Казахстанского филиала МГУ им. М. В. Ломоносова (Астана), Казахского национального университета им. Аль-Фараби (Алматы) и Назарбаев Университета (Астана). Выпуск открывает статья А. С. Джумадильдаева о развитии математики в Казахстане.

Надеюсь, что начиная с этого выпуска статьи казахстанских математиков будут регулярно появляться на страницах нашего журнала.

А. А. Лаптев

Главный редактор «Сириус. Математического журнала»
Научный руководитель Международного математического центра «Сириус»

А. А. Лаптев: Научно-технологический университет «Сириус», Федеральная территория «Сириус», Россия;
a.laptev@imperial.ac.uk.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* (2027)

© А. А. Лаптев, 2026

А. С. Джумадильдаев

МАТЕМАТИКА В КАЗАХСТАНЕ: КРАТКАЯ ИСТОРИЯ

Меня попросили написать небольшой текст о развитии математики в Казахстане. Подробности можно найти в книге *Институт математики МОН РК 50 лет*, ИМ МОН РК, Алматы (2005).

Академия наук Казахской ССР была основана в 1946 году. Первым президентом академии был избран геолог Каныш Имантаевич Сатпаев, впоследствии действительный член Академии наук СССР. Руководство Советского Союза уделяло огромное внимание развитию науки, и такие же академии были открыты во всех союзных республиках. При Сатпаеве были основаны 36 научно-исследовательских институтов. Один из таких институтов касался физики и математики.

В 1945 году был организован Сектор математики и механики при Казахстанском филиале АН СССР. Тогда в Алма-Ате было всего 5 кандидатов физ.-мат. наук по математике и 2 — по теоретической механике. Началось формирование аспирантуры Сектора, и весной 1946 года были приняты первые аспиранты из числа математиков, демобилизованных из Красной Армии. С весны 1945 года заведующим сектором был профессор К. П. Персидский. С 1947 года ежегодно издается журнал «Известия АН Казахской ССР. Серия математики и механики». С 1951 года зав. Сектором стал к.ф.м.н. Орымбек Жаутыков (позднее — академик АН КазССР). В период 1945–1965 гг. по линии Сектора защитились 25 кандидатов наук, в последующие три года было защищено 18 кандидатских диссертаций бывшими аспирантами и соискателями Сектора.

В 1954 году Постановлением Президиума АН КазССР при Президиуме АН КазССР была организована Лаборатория машинной и вычислительной математики. Задачей Лаборатории машинной и вычислительной математики являлась механизация трудоемких вычислений посредством использования вычислительных машин. В 1957 году на должность заведующего ЛМВМ был назначен член-корр. (с 1958 года академик) АН КазССР, доктор физ.-мат. наук М. В. Пентковский, известный специалист по номографии. Число сотрудников Лаборатории увеличилось с 7 в 1957 году до 54 в 1964 году.

А. С. Джумадильдаев: Национальная Академия наук Республики Казахстан при Президенте Республики Казахстан и Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан; askar56@gmail.com.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* (2027)

© А. С. Джумадильдаев, 2026

В 1965 году на базе Сектора математики и механики и лаборатории машинной и вычислительной математики был организован Институт математики и механики Академии наук КазССР. Открытие такого научно-исследовательского института математического направления было долгожданным событием исторического порядка, демонстрирующим высокий рост научно-интеллектуального потенциала народов Казахстана. Это было результатом многолетнего целенаправленного организационно-научного труда Константина Петровича Персидского, Орымбека Ахметбековича Жаутыкова, Асана Дабсовича Тайманова, Жакана Сулейменовича Ержанова, Енгвана Инсуговича Кима, механико-математического факультета КазГУ и его декана Хасена Ибрашевича Ибрашева, физико-математических факультетов КазПИ и других вузов республики. К концу 1965 года в Институте работали 67 научных сотрудников, в том числе 5 докторов и 11 кандидатов наук; 5 инженерно-технических и 12 административно-хозяйственных работников. В 1991 году в Институте насчитывалось 467 сотрудников, в том числе 20 докторов наук и 128 кандидатов наук, несколько отделов, в состав которых входили 30 лабораторий.

В 1992 году Постановлением Президиума АН Казахстана из состава Института были выделены четыре НИИ: Институт космических исследований, Институт информатики и проблем управления, Институт механики и машиноведения, Институт прикладной математики в Караган-де.

Основные научные изыскания в математике проводятся по следующим направлениям: дифференциальные уравнения, функциональный анализ, алгебра и математическая логика. В Институте математики и математического моделирования с 2014 года действует совместная с КазНУ им. аль-Фараби программа подготовки магистрантов и докторантов. На сегодняшний день это единственная образовательная программа среди всех НИИ Казахстана, получившая международную аккредитацию.

Кадровый состав Института в 2019–2024 годы.

	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Академиков НАН РК	5	6	6	6	6	6
членов–корр. НАН РК	5	4	4	4	4	4
докторов наук	41	40	35	40	49	50
кандидатов наук	45	46	38	40	44	54
докторов PhD	23	23	39	51	61	72
PhD докторантов	16	16	18	18	27	35
Всего сотрудников:	188	198	200	228	266	307

Молодых (до 40 лет) сотрудников в 2024 году: 159 или 52%. По количеству статей в журналах, индексируемых в WoS ИМММ занимает 7-е место в Казахстане среди всех организаций, уступая только крупным университетам. Согласно рейтингу «Research Areas» по количеству публикаций WoS 2019–2024 в мире среди всех публикаций на публикации по математике приходится 2,8%, а среди всех казахстанских публикаций на математику приходится 7,2%. Одним из индикаторов, позволяющих оценить научную направленность страны, является индекс научной специализации — отношение доли предметных областей в общем объеме публикаций страны к аналогичному показателю в общемировом документопотоке. Если данный индекс для работ в какой-либо научной дисциплине больше единицы, это означает, что данная дисциплина относится к сфере научной специализации страны. По математике коэффициент превышения среднемирового уровня равен 2,31; он уступает только наукам о космосе и Земле, где коэффициент равен 2,46.

Приведем список некоторых казахстанских математиков, получивших международные премии.

У. У. Умирбаев (премия Мура Американского математического общества, 2007).

А. С. Джумадильдаев (премия Хорезми Исламской Республики Иран, 2012).

С. Н. Харин (премия IEEE имени Хольмы, 2015).

Д. Сураган (премия Феррана Суньер-и-Балагера за лучшую монографию, 2018).

Национальная Академия наук Республики Казахстан при Президенте Республики Казахстан уделяет огромное внимание популяризации науки и активно работает над привлечением талантливой молодежи к науке. Издается научно-популярный журнал на государственном языке «Ал-Джебр атасы» («Отец алгебры»). Журнал назван в честь знаменитого ученого, выходца из Центральной Азии Аль Хорезми, который внес огромный вклад в развитие мировой цивилизации. С его именем связаны два термина, вошедшие во все языки мира: алгебра и алгоритм.

Казахстанские школьники успешно выступают на различных научных олимпиадах и конкурсах. Неоднократно они побеждали в конкурсах Intel ISEF. В 2000 году казахстанские школьники выиграли 5 золотых медалей на Международной математической олимпиаде и в 2026 году также выиграли 5 золотых медалей на Международной олимпиаде по физике. В Казахстане с 2005 года ежегодно проводится Жаутыковская олимпиада по математике, физике и информатике. Примечательно, что это единственная олимпиада международного уровня, проводимая в Казахстане, и она проводится усилиями одной школы. Дипломы этой олимпиады высоко ценятся в странах СНГ при поступлении в университеты.

Хорошими результатами в олимпиадах и научных конкурсах выделяются в основном три школы: Республиканская Физико-математическая школа (РФМШ), Назарбаев Интеллектуальные школы и Казахско-Турецкие лицеи «Білім-Инновация лицейі» («Знание и инновации»). В последние годы в этот список можно добавить также Казахско-Британскую школу «Haileybury».

Республиканская Физико-математическая школа была открыта в 1967 году. Вначале она работала в школе № 56 имени Сатпаева вместе с интернатом № 3. В 1972 году на Ботаническом бульваре было построено специальное здание для школы с интернатом. Выпускники этой школы успешно работают в Казахстане и за рубежом в различных отраслях народного хозяйства. Так, два выпускника РФМШ Аркадий Волож и Илья Сегалович основали российскую транснациональную компанию в отрасли информационных технологий «Яндекс». Выпускник РФМШ Ерзат Дулат вместе с другими выпускниками РФМШ и Назарбаев интеллектуальной школы создали частную технологическую компанию, первый казахстанский «единорог» — ИИ-стартап Higgsfield AI. Последняя оценка ИИ-стартапа составляет \$5,4 млрд. Эту оценку компания получила в рамках инвестиционного раунда серии В, о котором было официально объявлено 17 августа 2026 года.



В городах Алматы и Астана совместно с российскими коллегами строятся школы и образовательные центры для одаренных детей «Сириус». В будущем ученики «Сириуса» также покажут блестящие результаты. В этом у меня сомнения нет.

А. С. Джумадильдаев
Вице-президент Национальной Академии наук Республики Казахстан
при Президенте Республики Казахстан

Л. М. Баратова, Н. А. Баженов

ОБУЧЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ ВНИЗ МНОЖЕСТВ В ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКАХ ПО РАЗЛИЧНЫМ ТИПАМ ИНФОРМАЦИИ

*Изучается обучаемость для замкнутых вниз множеств в частичных порядках. Для вычислимого линейного порядка A получен критерий обучаемости по негативной информации для семейства $DS(A)$, состоящего из всех непустых замкнутых вниз подмножеств A . Показано, что в случае обучения по негативной информации для $DS(A)$ понятия **Ех**-обучаемости и **ВС**-обучаемости совпадают. Установлено, что в общем случае следующие типы обучаемости для $DS(A)$ различны: обучение по негативной информации, обучение по позитивной информации, обучение с переключением типа информации и обучение по информанту. Доказано, что для вычислимого частичного порядка P , содержащего бесконечную антицепь, семейство $DS(P)$ не является **ВС**-обучаемым по информанту.*

1. Введение

Классическая алгоритмическая теория обучения восходит к работам Патнэма [1] и Голда [2]. В данной области исследований изучаются математические формализации индуктивного вывода. Следуя [3], индуктивный вывод можно понимать как процесс выдвижения гипотез, описывающих неизвестный объект, на основе конечного объема данных об этом объекте. К концу XX века алгоритмическая теория обучения стала развитым направлением, в котором особое внимание уделяется обучаемости для формальных языков и вычислимых функций. Обзор известных результатов можно найти в [3]–[5].

Штефан и Венцов [6] начали систематические исследования алгоритмического обучения в рамках теории вычислимых структур [7, 8]. Работа [6] посвящена обучаемости для классов подструктур данной вычислимой структуры S . В модели, рассматриваемой в [6], обучающийся получает только позитивную информацию (или текст) о подструктуре A структуры S . Обучающийся выдает последовательность гипотез, которая должна сходиться к программе, перечисляющей подструктуру A , поданную на вход. Свойства обучаемости тесно связаны со структурными свойствами рассматриваемой структуры S . В частности, семейство всех идеалов вычислимого коммутативного кольца R является **ВС**-обучаемым по тексту тогда и только тогда, когда кольцо R является нетеровым [6, теорема 3.1]. Понятие **ВС**-обучаемости здесь соответствует так называемой *семантической сходимости* последовательности выдвигаемых гипотез (формальное определение **ВС**-обучения приведено в п. 2.1).

Работа поддержана Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP26198617). Работа второго автора выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2026-0032). Второй автор благодарит Международный математический центр «Сириус» за гостеприимство.

Л. М. Баратова: Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, Алматы, Казахстан; baratova.lyazzat@gmail.com.

Н. А. Баженов: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия; nickbazh@yandex.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* (2027)

© Л. М. Баратова, Н. А. Баженов, 2026

Харизанов и Штефан [9] исследовали обучаемость для семейств вычислимо перечислимых (в.п.) подструктур данной вычислимой структуры $\mathcal{S}$. Это направление исследований продолжено в [10, 11]. Другой близкий подход к обучению развит в [12, 13]: в рамках этого подхода исследуется обучаемость для семейств вычислимых структур $\{S_i : i \in \omega\}$.

Напомним, что в частичном порядке $\mathcal{P} = (P, \leq_P)$ подмножество $D \subseteq P$ является *замкнутым вниз* тогда и только тогда, когда выполнено следующее: если $a \leq_P b$ и $b \in D$, то $a \in D$.

В данной статье продолжают исследования, начатые в [9, 11]. Как и в [11], для данного вычислимого частичного порядка $\mathcal{P}$ рассматривается семейство всех его непустых замкнутых вниз множеств $DS(\mathcal{P})$. В [11] рассматривалось только обучение по позитивной информации (**Txt**-обучение). В данной статье, следуя подходу [9, 14], также рассматриваются обучение по негативной информации (**Neg**-обучение), обучение с переключением типа информации (**Sw**-обучение) и обучение по информанту (т.е. одновременно по позитивной и негативной информации; **Inf**-обучение). При этом рассматриваются как семантическая сходимость (**BC**), так и синтаксическая сходимость (**Ex**).

Статья организована следующим образом. В § 2 приведены необходимые предварительные сведения о рассматриваемых моделях обучения. Сначала рассматривается семейство $DS(\mathcal{A})$ для случая, когда $\mathcal{A}$ есть вычислимый линейный порядок. В § 3 получено полное описание **Neg**-обучаемости; в частности, показано, что $DS(\mathcal{A})$ является **NegEx**-обучаемым в том и только том случае, когда $DS(\mathcal{A})$ является **NegBC**-обучаемым. В § 4 строятся примеры семейств $DS(\mathcal{A})$, разделяющие понятия **SwEx**-обучаемости и **NegBC**-обучаемости, а также **InfEx**-обучаемости и **SwBC**-обучаемости. Из полученных результатов следует, что в случае **Ex**-обучения все рассматриваемые типы обучения попарно различны. В § 5 получены некоторые результаты о произвольных вычислимых частичных порядках $\mathcal{P}$. В частности, показано, что $DS(\mathcal{P})$ не является **InfBC**-обучаемым в случае, когда $\mathcal{P}$ содержит бесконечную антицепь.

2. Предварительные сведения

Как обычно, через $(\varphi_e)_{e \in \mathbb{N}}$ обозначается стандартная нумерация всех одноместных частично вычислимых функций, а $W_e = \text{dom}(\varphi_e)$ для $e \in \mathbb{N}$. Необходимые сведения из теории вычислимости можно найти в [15].

Для конечной строки σ обозначим через $|\sigma|$ длину σ . Пустая строка обозначается Λ и $\leq_{\mathbb{N}}$ — стандартный порядок на натуральных числах.

Для множества Y его характеристическая функция обозначается через χ_Y . Если $k \in \mathbb{N}$ и f — это отображение из $\mathbb{N}$ в множество X , то, как обычно, через $f \upharpoonright k$ обозначаем ограничение f на множество $\{i \in \mathbb{N} : i < k\}$.

2.1. Алгоритмическое обучение. Рассматриваемая модель обучения в основном следует соглашениям из [6, 9, 14], которые, в свою очередь, основаны на обучении в стиле Голда для семейств в.п. множеств [2, 5]. Отметим, что все рассматриваемые здесь алгоритмы обучения являются вычислимыми.

Процесс обучения можно рассматривать как диалог между учителем и обучающимся. Предположим, что обучающийся M должен успешно обучиться множеству $V \subseteq \mathbb{N}$. Обучающийся M рассматривается как алгоритмическая машина, которая поочередно запрашивает новые данные и выдает гипотезы $e \in \mathbb{N}$.

Фиксируем специальный символ паузы $\#$. Обучающийся делает бесконечно много запросов, каждый из которых имеет тип 0 (негативная информация) или тип 1 (позитивная информация). На шаге $s \in \mathbb{N}$ учитель отвечает на s -й запрос обучающегося. Если запрос имеет тип $b \in \{0, 1\}$, то учитель предъявляет либо символ паузы $\#$, либо элемент $v \in \mathbb{N}$ такой, что $\chi_V(v) = b$. После этого обучающийся M выдает свою s -ю гипотезу $e_s \in \mathbb{N}$ и делает $(s + 1)$ -й запрос.

Более формально обучающегося M можно определить следующим образом.

Бесконечная *информационная последовательность* I — это отображение из $\mathbb{N}$ в $(\mathbb{N} \cup \{\#\}) \times \{0, 1\}$, обладающее следующим свойством: если $(n, b) \in \text{range}(I)$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$ и $b \in \{0, 1\}$, то $(n, 1 - b) \notin \text{range}(I)$. Если I является бесконечной информационной последовательностью и

$k \in \mathbb{N}$, то конечное отображение $\sigma = I \upharpoonright k$ называем *конечной информационной последовательностью*.

Обучающегося M можно рассматривать как всюду определенное вычислимое отображение, которое по данной конечной информационной последовательности σ выдает пару (e, b) , где:

- $e \in \mathbb{N}$ есть текущая гипотеза,
- $b \in \{0, 1\}$ является типом следующего запроса обучающегося.

В дальнейшем всегда используем следующее соглашение. Если I является произвольной информационной последовательностью и $M(I \upharpoonright k) = (e, b)$, то $I(k)$ равно (v, b) для некоторого $v \in \mathbb{N} \cup \{\#\}$. Другими словами, учитель «строит» информационные последовательности I таким образом, чтобы они соответствовали запросам обучающегося.

Формализация процесса обучения включает два ключевых аспекта: ограничения на учителя и критерии сходимости. Следуя [9], в настоящей статье рассматриваются следующие модели обучения.

Определение 2.1 ([2, 9, 14]). Рассматриваются следующие ограничения на учителя:

- (a) *Обучение по тексту (Txt)*. Обучающийся запрашивает только позитивную информацию (т.е. данные типа 1), а информационная последовательность I , предоставляемая учителем, в конечном итоге содержит все элементы $n \in V$ (где $V \subseteq \mathbb{N}$ — это множество, которому необходимо обучиться).
- (b) *Обучение по негативному тексту (Neg)*. Обучающийся запрашивает только негативную информацию (т.е. данные типа 0), а учитель в конечном итоге предъявляет все элементы $n \notin V$.
- (c) *Обучение с переключением типа информации (Sw)*. Обучающемуся разрешается переключаться между позитивной и негативной информацией. Однако, если начиная с некоторого момента обучающийся всегда запрашивает информацию некоторого фиксированного типа $b \in \{0, 1\}$, то учитель должен предъявить обучающемуся все $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие $\chi_V(n) = b$.
- (d) *Обучение по информанту (Inf)*. Обучающийся бесконечно часто запрашивает позитивную информацию и бесконечно часто запрашивает негативную информацию. В конечном итоге учитель должен предъявить каждый элемент $n \in \mathbb{N}$ либо как позитивное вхождение, либо как негативное.

Отметим, что каждое из приведенных выше ограничений, по существу, определяет способ кодирования множества V посредством информационной последовательности I , предоставляемой учителем.

Гипотезы $e \in \mathbb{N}$, выдаваемые обучающимся, рассматриваются как индексы в.п. множеств относительно нумерации $(W_e)_{e \in \mathbb{N}}$. Пусть $(e_s)_{s \in \mathbb{N}}$ — это последовательность гипотез, выдаваемых обучающимся на информационной последовательности I , кодирующей множество V . Рассматриваются следующие два типа критериев сходимости:

- (i) *Объяснительное обучение (Ex)*. Существуют $s_0 \in \mathbb{N}$ и индекс $e^* \in \mathbb{N}$ такие, что $e_s = e^*$ для всех $s \geq s_0$ и $V = W_{e^*}$.
- (ii) *Поведенчески корректное обучение (BC)*. Существует $s_0 \in \mathbb{N}$ такое, что $V = W_{e_s}$ для всех $s \geq s_0$.

Определение 2.2 ([2, 9, 14]). Пусть $V \subseteq \mathbb{N}$ — это в.п. множество. Предположим, что $N \in \{\text{Txt}, \text{Neg}, \text{Sw}, \text{Inf}\}$ и $\text{Cr} \in \{\text{Ex}, \text{BC}\}$. Говорят, что множество V является **NCr-обучаемым** посредством обучающегося M , если для каждой информационной последовательности I , кодирующей множество V и удовлетворяющей ограничению N , обучающийся M корректно сходится в соответствии с критерием Cr .

Пусть $\mathcal{K}$ — непустое семейство в.п. множеств. Семейство $\mathcal{K}$ является **NCr-обучаемым**, если существует обучающийся M , который **NCr-обучается** каждому множеству $V \in \mathcal{K}$.

Сформулируем простые импликации между рассматриваемыми понятиями обучаемости (эти импликации непосредственно следуют из определений).

Замечание 2.1. Пусть $N \in \{\text{Txt}, \text{Neg}, \text{Sw}, \text{Inf}\}$ и $Cr \in \{\text{Ex}, \text{BC}\}$.

- (1) $\text{NEx-обучаемость} \Rightarrow \text{NBC-обучаемость}$,
- (2) $\text{TxtCr-обучаемость} \Rightarrow \text{SwCr-обучаемость} \Rightarrow \text{InfCr-обучаемость}$,
- (3) $\text{NegCr-обучаемость} \Rightarrow \text{SwCr-обучаемость}$.

Напомним следующие полезные классические понятия. *Текстом* для множества $V \subseteq \mathbb{N}$ называют произвольную функцию $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\#\}$ такую, что $\text{range}(T) \setminus \{\#\} = V$. Неформально говоря, текст T за дает перечисление всех элементов множества V с возможными повторениями и паузами.

Негативным текстом для множества V называют текст для дополнения $\bar{V} = \mathbb{N} \setminus V$. Обзор результатов об обучении формальных языков по негативной информации можно найти в [16].

2.2. Обучение для замкнутых вниз множеств. Структуру $\mathcal{Q} = (Q, \leq_Q)$ называют *предпорядком*, если отношение $\leq_Q$ рефлексивно и транзитивно. Следуя [11], обозначим через $DS(\mathcal{Q})$ семейство всех непустых замкнутых вниз подмножеств предпорядка $\mathcal{Q}$.

В [11] получен следующий критерий обучаемости по тексту.

Теорема 2.1 ([11, теорема 3.2]). Пусть $\mathcal{Q} = (Q, \leq_Q)$ — вычислимый предпорядок. Следующие условия эквивалентны:

- (a) Семейство $DS(\mathcal{Q})$ является **TxtEx-обучаемым**.
- (b) Семейство $DS(\mathcal{Q})$ является **TxtBC-обучаемым**.
- (c) Предпорядок $\mathcal{Q}$ не содержит ни бесконечных антицепей, ни бесконечных строго возрастающих цепей.

Для предпорядка $\mathcal{Q} = (Q, \leq_Q)$ через $\mathcal{Q}^*$ обозначим обращение предпорядка $\mathcal{Q}$, т.е. $x \leq_{\mathcal{Q}^*} y$ тогда и только тогда, когда $y \leq_Q x$.

3. Негативная информация для линейных порядков

В этом параграфе получим полное описание **Neg**-обучаемости для семейства $DS(\mathcal{A})$ в случае, когда $\mathcal{A}$ — это вычислимый линейный порядок.

Теорема 3.1. Пусть $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$ — вычислимый линейный порядок. Следующие условия эквивалентны:

- (a) Семейство всех непустых замкнутых вниз множеств $DS(\mathcal{A})$ является **NegEx-обучаемым**.
- (b) Семейство $DS(\mathcal{A})$ является **NegBC-обучаемым**.
- (c) Порядок $1 + \omega^*$ не вкладывается изоморфно в $\mathcal{A}$.

Доказательство. Импликация (a) $\Rightarrow$ (b) следует из замечания 2.1.

(b) $\Rightarrow$ (c). Предположим, что порядок $1 + \omega^*$ изоморфно вкладывается в порядок $\mathcal{A}$. Это означает, что в $\mathcal{A}$ можно выбрать (вообще говоря, неэффективным образом) элементы a^* и b_i , $i \in \mathbb{N}$, так, чтобы выполнялось:

$$a^* <_A \cdots <_A b_3 <_A b_2 <_A b_1 <_A b_0.$$

Покажем, что семейство $DS(\mathcal{A})$ не является **NegBC-обучаемым**.

Рассмотрим следующие непустые замкнутые вниз множества:

$$Z = \{x \in A : (\forall j \in \mathbb{N})(x <_A b_j)\} \text{ и } Y_i = \{x \in A : x \leq_A b_i\}.$$

Отметим, что каждое множество Y_i вычислимо перечислимо.

Если множество $Z \in DS(\mathcal{A})$ не является в.п., то (в силу определения) семейство $DS(\mathcal{A})$ не является **NegBC-обучаемым**, поскольку в рассматриваемой модели невозможно обучиться не в.п. множеству. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что Z вычислимо перечислимо.

Допустим противное: пусть обучающийся M осуществляет **NegBC-обучение** для семейства $DS(\mathcal{A})$. Построим негативный текст T для некоторого множества $V \in \{Y_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{Z\}$.

Положим $T(0) = b_0$. На шаге $s+1$ действуем следующим образом. Предположим, что $k \in \mathbb{N}$ — это наибольшее число, для которого

$$\{b_i : i \leq k\} \subseteq \text{range}(T \upharpoonright s+1).$$

Если $s = 2t$ (т.е. $s+1$ является нечетным шагом), то ищем наименьшее число $y \leq_{\mathbb{N}} s+1$ такое, что $b_{k+1} <_A y$ и $y \notin \text{range}(T \upharpoonright s+1)$. Если такое y существует, то полагаем $T(s+1) = y$. В противном случае полагаем $T(s+1) = b_k$.

Если $s = 2t+1$ (т.е. $s+1$ является четным шагом), то действуем следующим образом. Если в.п. множество $W_{M(T \upharpoonright s+1)}$ равно Y_{k+1} , то полагаем $T(s+1) = b_{k+1}$. В противном случае полагаем $T(s+1) = b_k$.

Построение негативного текста T завершено. Ясно, что либо

$$\text{range}(T) = \overline{Z} = \{y \in A : (\exists j \in \mathbb{N})(b_{j+1} <_A b_j \leq_A y)\},$$

либо $\text{range}(T) = \overline{Y_{k^*+1}} = \{y : b_{k^*+1} <_A y\}$ для некоторого $k^* \in \mathbb{N}$. Следовательно, как и требовалось, T — это негативный текст для непустого замкнутого вниз в.п. множества.

Если множество $\text{range}(T)$ равно $\overline{Z}$, то существует бесконечно много шагов s , для которых $W_{M(T \upharpoonright s+1)} \neq W_{M(T \upharpoonright s)}$. Следовательно, обучающийся M не осуществляет **NegBC**-обучение замкнутого вниз множества Z по тексту T .

В противном случае $\text{range}(T) = \overline{Y_{k^*+1}}$. Выберем шаг s^* такой, что $b_{k^*} \in \text{range}(T \upharpoonright s^*+1)$. Тогда из определения T следует, что для всех четных шагов $s+1 > s^*$ множество $W_{M(T \upharpoonright s+1)}$ не равно Y_{k^*+1} . Следовательно, M не обучается замкнутому вниз множеству Y_{k^*+1} по его негативному тексту T .

В обоих случаях пришли к противоречию. Следовательно, семейство $DS(\mathcal{A})$ не **NegBC**-обучаемо.

(с) $\Rightarrow$ (а). Предположим, что $1 + \omega^*$ не вкладывается изоморфно в $\mathcal{A}$, и пусть V — это произвольное непустое замкнутое вниз множество в $\mathcal{A}$. Как обычно, без ограничения общности можно считать, что носитель $\mathcal{A}$ равен $\mathbb{N}$. Покажем следующее: если дополнение $\overline{V}$ непусто, то оно имеет $\leq_A$ -наименьший элемент v^* .

Предположим противное: пусть $\overline{V} \neq \emptyset$ и $\overline{V}$ не имеет $\leq_A$ -наименьшего элемента. Тогда множество $\overline{V}$ содержит бесконечную убывающую цепь $b_0 >_A b_1 >_A b_2 >_A \dots$. Выберем произвольный элемент $d \in V$. Поскольку V является замкнутым вниз множеством и $b_i \notin V$, имеем $d <_A b_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$d <_A \dots <_A b_2 <_A b_1 <_A b_0,$$

и порядок $1 + \omega^*$ вкладывается в $\mathcal{A}$. Получили противоречие.

Следовательно, доказано, что для любого замкнутого вниз множества V такого, что $\overline{V} \neq \emptyset$, существует элемент v^* , удовлетворяющий равенству

$$\overline{V} = \{x \in \mathbb{N} : v^* \leq_A x\}. \quad (3.1)$$

Теперь опишем обучающегося M , осуществляющего **NegEx**-обучение для семейства $DS(\mathcal{A})$. Пусть T — это негативный текст для замкнутого вниз множества $V \in DS(\mathcal{A})$ и пусть $k \in \mathbb{N}$.

Если $\text{range}(T \upharpoonright k) \subseteq \{\#\}$, т.е. $\text{range}(T \upharpoonright k)$ не содержит натуральных чисел, то $M(T \upharpoonright k)$ выдает некоторый фиксированный индекс $i_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $W_{i_0} = \mathbb{N}$; другими словами, текущая гипотеза состоит в том, что множество V равно всему носителю порядка $\mathcal{A}$.

В противном случае пусть $\text{range}(T \upharpoonright k) \setminus \{\#\} = \{a_0, a_1, \dots, a_m\}$. Найдем индекс $j \leq m$ такой, что $a_j \leq_A a_i$ для всех $i \leq m$. Значение $M(T \upharpoonright k)$ определяется как индекс $\ell \in \omega$ такой, что

$$W_\ell = \{x \in A : x <_A a_j\}.$$

Описание обучающегося M завершено. Заметим, что M успешно осуществляет **NegEx**-обучение для множества $\mathbb{N}$.

Теперь предположим, что $V \neq \mathbb{N}$. Поскольку множество $\overline{V}$ непусто, выберем элемент v^* , удовлетворяющий равенству (3.1). Отметим, что замкнутое вниз множество V равно $\{x : x <_A v^*\}$.

Поэтому, выбрав наименьшее $k^* \in \mathbb{N}$ такое, что $v^* \in \text{range}(T \upharpoonright k^*)$, получаем, что $M(T \upharpoonright k) = M(T \upharpoonright k^*)$ для всех $k \geq k^*$ и

$$V = \{x \in A : x <_A v^*\} = W_{M(T \upharpoonright k^*)}.$$

Следовательно, семейство $DS(\mathcal{A})$ является **Ех**-обучаемым по негативным текстам. Теорема 3.1 доказана. $\square$

Теорема 3.1 дает следующие разделения между рассматриваемыми моделями обучения.

Следствие 3.1. Для семейств вида $DS(\mathcal{L})$, где $\mathcal{L}$ является вычислимым линейным порядком, выполнено следующее:

- (a) **NegEx** $\not\equiv$ **TxtEx**,
- (b) **TxtEx** $\not\equiv$ **NegEx**.

Доказательство. Пусть α — это вычислимый ординал такой, что $\alpha \geq \omega + 1$.

(a) Рассмотрим вычислимый линейный порядок $\mathcal{A}$, изоморфный α . По теореме 3.1 семейство $DS(\mathcal{A})$ является **NegEx**-обучаемым. С другой стороны, $\mathcal{A}$ содержит бесконечную строго возрастающую цепь, и поэтому по теореме 2.1 семейство $DS(\mathcal{A})$ не является **TxtEx**-обучаемым.

(b) Пусть $\mathcal{B}$ — это вычислимый линейный порядок, изоморфный обращению α^* . По теореме 2.1 семейство $DS(\mathcal{B})$ является **TxtEx**-обучаемым. Отметим, что порядок $1 + \omega^*$ изоморфно вкладывается в $\mathcal{B}$, и поэтому по теореме 3.1 семейство $DS(\mathcal{B})$ не является **NegEx**-обучаемым. $\square$

4. Разделение понятий обучаемости для линейных порядков

В данном параграфе получены дополнительные примеры семейств $DS(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — это вычислимый линейный порядок, которые позволяют разделить некоторые понятия обучаемости из определения 2.2.

Теорема 4.1. Пусть $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$ — это вычислимая изоморфная копия порядка $1 + \mathbb{Z} + 1$. Тогда:

- (a) $DS(\mathcal{A})$ не является ни **TxtBC**-обучаемым, ни **NegBC**-обучаемым,
- (b) $DS(\mathcal{A})$ является **SwEx**-обучаемым.

Доказательство. (a) Поскольку $\mathcal{A}$ содержит бесконечную строго возрастающую цепь, по теореме 2.1 семейство $DS(\mathcal{A})$ не является **TxtBC**-обучаемым. Поскольку порядок $1 + \omega^*$ изоморфно вкладывается в $1 + \mathbb{Z} + 1$, по теореме 3.1 семейство $DS(\mathcal{A})$ не является **NegBC**-обучаемым.

(b) Пусть c_1 — это наибольший элемент в $\mathcal{A}$, а c_0 — наименьший элемент в $\mathcal{A}$.

Опишем обучающегося M , осуществляющего **SwEx**-обучение для семейства $DS(\mathcal{A})$. Пусть I — это информационная последовательность для некоторого множества $V \in DS(\mathcal{A})$.

- (1) Сначала M запрашивает у учителя только негативную информацию. Если предоставляемая информационная последовательность I не предъявляет элементов из A (т.е. в текущий момент $\text{range}(I \upharpoonright s) \subseteq \{(\#, 0)\}$), то M выдвигает гипотезу о том, что входное множество V равно всему носителю A .
- (2) Если I предъявляет c_1 как негативное вхождение, то M меняет свою гипотезу на $W_{i_0} = A \setminus \{c_1\}$. Обучающийся продолжает запрашивать у учителя негативную информацию.
- (3) Предположим, что I предъявляет некоторый элемент $b \neq c_1$ как негативное вхождение. Тогда, поскольку $V \neq \emptyset$, элемент b не равен c_0 . Теперь также известно, что V не равно ни A , ни $A \setminus \{c_1\}$. Обучающийся M переключается на запросы позитивной информации.
- (4) Предположим, что F — это конечное множество, состоящее из всех предъявленных к настоящему моменту позитивных данных $y \in A$. Обучающийся M выдвигает гипотезу о том, что V равно множеству $\{x : x \leq_A d_F\}$, где

$$d_F = \max_{\leq_A}(F \cup \{c_0\}).$$

Ясно, что построенный обучающийся M осуществляет **SwEx**-обучение для множеств A и $A \setminus \{c_1\}$. Напомним, что $\mathcal{A}$ изоморфно порядку $1 + \mathbb{Z} + 1$. Если $V \notin \{A, A \setminus \{c_1\}\}$, то $\bar{V}$ содержит некоторый элемент $b \neq c_1$, принадлежащий $\mathbb{Z}$ -части порядка $\mathcal{A}$, и $V = \{x : x \leq_A d^*\}$ для некоторого d^* , принадлежащего $(1 + \mathbb{Z})$ -части порядка $\mathcal{A}$. Следовательно, множество V в конечном итоге будет корректно распознано по его позитивной информации. Теорема 4.1 доказана. $\square$

Перед тем как получить следующую теорему о разделении рассматриваемых моделей обучаемости, напомним результат из [9].

Теорема 4.2 ([9, теорема 2.2]). Пусть $\mathfrak{K}$ — это семейство в.п. множеств. Предположим, что существует множество $W \in \mathfrak{K}$ такое, что для любого конечного множества D найдутся $U, U' \in \mathfrak{K}$, удовлетворяющие:

$$U \subsetneq W \subsetneq U' \text{ и } D \cap U = D \cap W = D \cap U'.$$

Тогда семейство $\mathfrak{K}$ не является **SwBC**-обучаемым.

Получим следующий результат.

Теорема 4.3. Существует вычислимый линейный порядок $\mathcal{A} = (A, \leq_A)$ такой, что семейство $DS(\mathcal{A})$ является **InfEx**-обучаемым, но не является **SwBC**-обучаемым.

Доказательство. Построим $\mathcal{A}$ как стандартную изоморфную копию порядка $\omega + \omega^*$ следующим образом:

$$0 <_A 2 <_A 4 <_A \dots <_A 2n <_A 2n+2 <_A \dots <_A 2m+3 <_A 2m+1 <_A \dots <_A 5 <_A 3 <_A 1.$$

Обозначим через Even множество всех четных чисел. Отметим, что

$$DS(\mathcal{A}) = \{\text{Even}, \mathbb{N}\} \cup \{\{2x : x \leq n\}, \mathbb{N} \setminus \{2x+1 : x \leq n\} : n \in \mathbb{N}\}. \quad (4.1)$$

Опишем обучающегося M , осуществляющего **InfEx**-обучение для семейства $DS(\mathcal{A})$. Пусть I — это информационная последовательность для некоторого множества $V \in DS(\mathcal{A})$.

- (1) Если учитель не предъявляет в I негативных данных, то M предполагает, что V равно $\mathbb{N}$.
- (2) Предположим, что учитель начинает предъявлять в I негативные данные. Если к настоящему моменту каждое предъявленное позитивное вхождение $k \in \mathbb{N}$ является четным, а каждое предъявленное негативное вхождение $\ell \in \mathbb{N}$ является нечетным, то M выдвигает гипотезу о том, что V равно Even .
- (3) После этого возможен один из следующих двух случаев:
 - 3.a. Последовательность I уже предъявила некоторое нечетное позитивное вхождение $2m_0+1$. Тогда M начинает выдавать следующие гипотезы: множество V равно $\{y : y \leq_A 2m+1\} = \mathbb{N} \setminus \{2x+1 : x \leq_{\mathbb{N}} m-1\}$, где m выбирается как $\leq_{\mathbb{N}}$ -наименьшее число такое, что $2m+1$ уже появилось в качестве позитивного вхождения.
 - 3.b. Последовательность I предъявила некоторое четное негативное вхождение $2n_0$. Тогда M начинает выдавать следующие гипотезы: множество V равно $\{y : y \leq_A 2n\} = \{2x : x \leq_{\mathbb{N}} n\}$, где n выбирается как $\leq_{\mathbb{N}}$ -наибольшее число такое, что $2n$ уже появилось в качестве позитивного вхождения.

Рассматривая все возможные случаи для $V \in DS(\mathcal{A})$ в равенстве (4.1), нетрудно показать, что описанный обучающийся M осуществляет **InfEx**-обучение для каждого такого множества V .

Теперь применим теорему 4.2. Рассмотрим множество $W = \text{Even}$. Пусть D — произвольное конечное множество. Определим замкнутые вниз множества

$$U = \{x \in \text{Even} : (\exists n \in D)(x \leq_{\mathbb{N}} n)\}, \quad U' = \mathbb{N} \setminus \{x \in \text{Odd} : (\exists n \in D)(x \leq_{\mathbb{N}} n)\}.$$

Тогда $U \subsetneq \text{Even} \subsetneq U'$ и $D \cap U = D \cap \text{Even} = D \cap U'$. По теореме 4.2 заключаем, что семейство $DS(\mathcal{A})$ не является **SwBC**-обучаемым. $\square$

Отметим, что в случае объяснительного обучения полученные результаты разделяют все рассматриваемые модели из определения 2.2. Действительно, следствие 3.1 и теоремы 4.1 и 4.3 вместе дают следующий результат.

Следствие 4.1. Для семейств замкнутых вниз множеств $DS(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — вычислимый линейный порядок, следующие понятия обучаемости попарно различны: **NegEx**, **TextEx**, **SwEx** и **InfEx**.

5. Случай произвольных частичных порядков

В этом параграфе установим некоторые общие результаты о семействе $DS(\mathcal{P})$ для случая, когда $\mathcal{P}$ — это произвольный вычислимый частичный порядок.

Предложение 5.1. Пусть $\mathcal{P} = (P, \leq_P)$ — вычислимый частичный порядок. Если линейный порядок $1 + \omega^*$ изоморфно вкладывается в $\mathcal{P}$, то семейство $DS(\mathcal{P})$ не является **NegBC**-обучаемым.

Набросок доказательства. Доказательство почти дословно повторяет доказательство импликации (b) $\Rightarrow$ (c) в теореме 3.1, за исключением следующего ключевого изменения. При построении негативного текста T на нечетном шаге $s+1$ теперь необходимо искать наименьшее число $y \leq_N s+1$ такое, что $y \notin \text{range}(T \upharpoonright s+1)$ и y удовлетворяет одному из следующих двух условий: $b_{k+1} <_P y$, либо y несравним с b_i для некоторого $i \leq k$. $\square$

Теорема 5.1. Пусть $\mathcal{P} = (P, \leq_P)$ является вычислимым частичным порядком. Если порядок $\mathcal{P}$ содержит бесконечную антицепь, то семейство $DS(\mathcal{P})$ не является **InfBC**-обучаемым.

Доказательство. Предположим, что $(a_i)_{i \in \omega}$ — это бесконечная антицепь в порядке $\mathcal{P}$. Для данного непустого в.п. множества $V \subseteq \mathbb{N}$ определим замкнутое вниз множество $D(V)$ следующим образом:

$$D(V) = \{b : \exists i \in (b \leq_P a_i)\}.$$

Если множество $D(V)$ не является в.п., то семейство $DS(\mathcal{P})$ не является **InfBC**-обучаемым, поскольку в рассматриваемой модели невозможно обучиться не в.п. множеству. Поэтому можно считать, что все такие множества $D(V)$ вычислимо перечислимы.

Зафиксируем всюду определенную вычислимую функцию $h(x)$, обладающую следующим свойством: если W_e — это в.п. подмножество P , то

$$W_{h(e)} = \{i \in \omega : a_i \in W_e\}.$$

Отметим следующее: если $W_e = D(V)$, то $W_{h(e)}$ равно V .

Известно, что семейство $\mathfrak{W}$ всех непустых в.п. множеств не является **InfBC**-обучаемым [2, 5]. Допустим противное: пусть обучающийся M осуществляет **InfBC**-обучение семейства $DS(\mathcal{P})$. Отсюда следует, что M осуществляет **InfBC**-обучение каждого множества $D(V)$, где $V \in \mathfrak{W}$. Тогда нетрудно показать, что функция $h \circ M$ обучается каждому множеству V из $\mathfrak{W}$. Следовательно, семейство $\mathfrak{W}$ является **InfBC**-обучаемым посредством обучающегося $h \circ M$, что приводит к противоречию. Таким образом, семейство $DS(\mathcal{P})$ не является **InfBC**-обучаемым. $\square$

Литература

1. H. Putnam, "Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski," *J. Symb. Log.* **30**, No. 1, 49–57 (1965).
2. E. M. Gold, "Language identification in the limit," *Inf. Control* **10**, No. 5, 447–474 (1967).
3. T. Zeugmann, S. Zilles, "Learning recursive functions: a survey," *Theor. Comput. Sci.* **397**, No. 1–3, 4–56 (2008).
4. S. Lange, T. Zeugmann, S. Zilles, "Learning indexed families of recursive languages from positive data: a survey," *Theor. Comput. Sci.* **397**, No. 1–3, 194–232 (2008).
5. S. Jain, D. Osherson, J. S. Royer, A. Sharma, *Systems that Learn*, MIT Press, Cambridge (1999).
6. F. Stephan, Yu. Ventsov, "Learning algebraic structures from text," *Theor. Comput. Sci.* **268**, No. 2, 221–273 (2001).
7. Ю. Л. Ершов, С. С. Гончаров, *Конструктивные модели*, Научная книга, Новосибирск (1999).

8. C. J. Ash, J. F. Knight, *Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy*, Elsevier, Amsterdam etc. (2000).
9. V. S. Harizanov, F. Stephan, "On the learnability of vector spaces," *J. Comput. Syst. Sci.* **73**, No. 1, 109–122 (2007).
10. Z. Gao, F. Stephan, G. Wu, A. Yamamoto, "Learning families of closed sets in matroids," *Lect. Notes Comput. Sci.* **7160**, 120–139 (2012).
11. N. Bazhenov, M. Mustafa, "On learning down-sets in quasi-orders, and ideals in Boolean algebras," *Theory Comput. Syst.* **69**, No. 1, article 1 (2025).
12. E. Fokina, T. Kötzing, L. San Mauro, "Limit learning equivalence structures," *Proc. Mach. Learn. Res. (PMLR)* **98**, 383–403 (2019).
13. N. Bazhenov, E. Fokina, L. San Mauro, "Learning families of algebraic structures from informant," *Inf. Comput.* **275**, article 104590 (2020).
14. S. Jain, F. Stephan, "Learning by switching type of information," *Inf. Comput.* **185**, No. 1, 89–104 (2003).
15. P. Odifreddi, *Classical Recursion Theory*, Elsevier, Amsterdam etc. (1992).
16. S. Jain and E. Kinber, "Negative data in learning languages," In: *Mathematical Logic in Asia*, pp. 90–112, World Scientific, Hackensack (2006).

Статья поступила в редакцию 4 августа 2026 г.

принята к публикации 23 сентября 2026 г.

А. О. Башеева, М. В. Швидефски

ДУАЛЬНОСТЬ ДЛЯ КАТЕГОРИЙ БИАЛГЕБРАИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Классический результат Гаррета Биркгофа утверждает, что категория, объектами которой являются биалгебраические дистрибутивные решетки, а морфизмами — полные гомоморфизмы решеток, дуально эквивалентна категории, объектами которой — частично упорядоченные множества, а морфизмы — монотонные отображения. Этот результат был расширен на категорию биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию, порожденному пентагоном N_5 , а также на другие многообразия решеток. Мы даем обзор метода, используемого для получения последней дуальности и наметим доказательство новых расширений.

1. Введение

Результат Гаррета Биркгофа (который мы называем дуальностью Биркгофа) устанавливает дуальную эквивалентность категории конечных дистрибутивных решеток с $(0, 1)$ -гомоморфизмами и категории конечных частично упорядоченных множеств с монотонными отображениями. Более общо, категория алгебраических пространственных дистрибутивных решеток (которые являются биалгебраическими) с полными гомоморфизмами и категория частично упорядоченных множеств с монотонными отображениями дуально эквивалентны.

Известно, что существуют ровно два покрытия многообразия $\mathbf{D}$ дистрибутивных решеток в решетке всех многообразий решеток — многообразие $\mathbf{SP}(N_5)$, порожденное пентагоном N_5 , наименьшей немодулярной решеткой, и многообразие $\mathbf{SP}(M_3)$, порожденное диамантом M_3 , наименьшей модулярной недистрибутивной решеткой. Обобщение дуальности Биркгофа было впервые найдено для категории биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию решеток $\mathbf{SP}(N_5)$, в [1, 2]. Позже дуальность Биркгофа была расширена [3] на категорию биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию $\mathbf{SP}(M_3)$.

Чтобы установить дуальность Биркгофа в простейшем дистрибутивном случае, нужно определить два контравариантных функтора F и G . Функтор F сопоставляет каждому ч.у. множеству алгебраическую пространственную дистрибутивную решетку его порядковых идеалов (упорядоченную относительно включения). Более того, для каждого монотонного отображения f из ч.у.м. $\mathcal{P}_0$ в ч.у.м. $\mathcal{P}_1$ полный гомоморфизм решеток $F(f)$ отображает каждый порядковый идеал I из $\mathcal{P}_1$ в его прообраз $f^{-1}(I)$, который, очевидно, является порядковым идеалом в $\mathcal{P}_0$. Другой контравариантный функтор G сопоставляет каждой алгебраической пространственной дистрибутивной решетке L ч.у.м. ее вполне $\vee$ -неразложимых элементов $\mathbf{CJ}(L)$, а каждому полному гомоморфизму решеток — его нижний сопряженный в смысле Маккензи [4].

Работа выполнена при поддержке Комитета науки Министерства науки и образования Республики Казахстан (проект No. AP23485395).

А. О. Башеева: Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева, Астана, Казахстан;
basheeva3006@gmail.com.

М. В. Швидефски: Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;
m.schwidefsky@ngsu.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* (2027)

© А. О. Башеева, М. В. Швидефски, 2026

Для расширения дуальности Биркгофа на категории биалгебраических недистрибутивных решеток, требуется ввести геометрию на ч.у.м. $\langle \text{CJ}(L); \leq \rangle$, индуцированную существованием (минимальных) нетривиальных $\vee$ -покрытий элементов из $\text{CJ}(L)$ и свойствами этих $\vee$ -покрытий. Для некоторых решеток L (и, в частности, для пентагона N_5) определяющие свойства минимальных $\vee$ -покрытий могут быть выражены тождествами. Множество тождеств, описывающих эти свойства, образует в этом случае базис тождеств для многообразия $\mathbf{V}(L)$ и вынуждает все минимальные $\vee$ -покрытия во всех решетках из $\mathbf{V}(L)$ обладать теми же свойствами, что и у L . Это позволяет определить понятие дуального пространства, расширяя тем самым дуальность Биркгофа на категорию биалгебраических решеток, принадлежащих $\mathbf{V}(L)$. Существование (минимальных) нетривиальных $\vee$ -покрытий в недистрибутивных решетках делает необходимым введение некоторой дополнительной структуры на ч.у.м. полностью $\vee$ -неразложимых элементов. Эта дополнительная структура выражается бинарной функцией для немодулярных решеточных многообразий и бинарным отношением для модулярных многообразий.

Для категории биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию $\mathbf{SP}(N_5)$ описанное выше было сделано в [1, 2]. Позже, с использованием базисов тождеств, найденных в [5, 6], дуальность Биркгофа была расширена на многообразия $\mathbf{SP}(L_1)$, $\mathbf{SP}(L_4)$ и $\mathbf{SP}(M_3)$ в [7, 8, 3]. Отметим, что дуальность биркгофовского типа для $\mathbf{SP}(L_1)$ и $\mathbf{SP}(L_4)$ расширяет дуальность для $\mathbf{SP}(N_5)$ — поскольку оба многообразия, $\mathbf{SP}(L_1)$ и $\mathbf{SP}(L_4)$, покрывают многообразие $\mathbf{SP}(N_5)$ в решетке многообразий решеток (см. [9]). В [10, 11] дуальность Биркгофа была также распространена на многообразия, порожденные решетками подпорядков конечных ч.у.м. длины 2. Заметим, что решетка подпорядков трехэлементной цепи изоморфна L_1 , и дуальность Биркгофа, полученная в [10, 11], расширяет таким образом ту, что получена в [5, 7].

Данная статья представляет собой обзор как уже опубликованных результатов о дуальностях для многообразий решеток, так и новых результатов. В частности, мы даем расширение дуальности Биркгофа на конечно базлируемое многообразие $\mathbf{V}_C$, которое обобщает существующие, и приводим больше примеров этой дуальности для конечно порожденных многообразий решеток. Мы даем общее определение дуальной категории в двух случаях — для немодулярных многообразий и для модулярного многообразия решеток $\mathbf{SP}(M_3)$.

Конечно базлируемое многообразие $\mathbf{V}_C$ вводится в § 3.1, а понятие J_C -пространства вводится в определении 3.1. Затем для категории $\mathbb{B}_C$ определяется дуальная категория $\mathbb{J}_C$, объектами которой являются биалгебраические решетки, принадлежащие $\mathbf{V}_C$, а обобщение дуальности Биркгофа устанавливается в теореме 3.1 и следствии 3.3. Исходная дуальность для многообразия $\mathbf{SP}(N_5)$ из [1, 2] становится частным случаем дуальности для $\mathbf{V}_C$ (см. § 3.6). Далее, с помощью этой более общей дуальности Биркгофа в пп. 3.7–3.11 устанавливаются дуальности Биркгофа для конечно порожденных решеточных многообразий $\mathbf{SP}(L_i)$, $1 \leq i \leq 5$ (см. также теорему 3.3 и следствие 3.5). Решетки L_1 – L_5 были найдены в [9] (см. также [12] и рис. 1–5 ниже для их диаграмм). Заметим, что решетки L_1 – L_5 находятся в списке конечных подпрямо неразложимых решеток, которые порождают верхние покрытия многообразия $\mathbf{SP}(N_5)$ в решетке всех многообразий решеток (см. [9]).

Для модулярного случая мы представляем расширение дуальности Биркгофа для многообразия решеток, порожденного алмазом M_3 , в § 4. Основные результаты § 4 — теоремы 4.1, 4.2 и следствия 4.2, 4.3.

Интересно, что для всех рассматриваемых здесь недистрибутивных многообразий решеток расширение дуальности Биркгофа получается с использованием двух контравариантных функторов F и G , которые очень близки к описанным выше для дистрибутивного случая. Более точно, функтор F каждому упорядоченному пространству с дополнительной структурой ставит в соответствие биалгебраическую решетку его пространственных идеалов (также упорядоченную по включению). Более того, для каждого морфизма f из пространства S_0 в пространство S_1 полный гомоморфизм решеток $F(f)$ отображает каждый пространственный идеал I из S_1 в его прообраз $f^{-1}(I)$, который является идеалом в S_0 . Функтор G каждой биалгебраической решетке L (принадлежащей рассматриваемому многообразию) ставит в соответствие пространство ее полностью $\vee$ -неразложимых элементов $\text{CJ}(L)$, наделенное дополнительной структурой, а каждому полному гомоморфизму решеток g — морфизм, определяемый с помощью его нижнего сопряженного β_g (см. § 3.3–3.4).

Новые результаты представлены здесь в основном без доказательств, как анонсы. За основами теории решеток мы отсылаем к [13]. Сведения и факты о нижних сопряженных для гомоморфизмов решеток и минимальных $\vee$ -покрытиях элементов в решетках можно найти в [14], а информацию о многообразиях решеток — в [12]. Некоторые базовые определения и результаты, используемые в статье, содержатся в следующем параграфе.

2. Основные определения и вспомогательные факты

Для ч.у.м. $\langle P; \leq \rangle$ обозначим через $2P$ множество двухэлементных антицепей в $\langle P; \leq \rangle$; т.е.

$$2P = \{\{a, b\} \mid a, b \in P, a \not\leq b, b \not\leq a\}.$$

Для подмножества $A \subseteq P$ полагаем $\downarrow A = \{x \in P \mid x \leq a \text{ для некоторого } a \in A\}$ и пишем $\downarrow a$ вместо $\downarrow \{a\}$ для элемента $a \in P$.

2.1. $\vee$ -Покрытия. Для $\vee$ -полурешетки $\langle S; \vee \rangle$ обозначим через $J(S)$ множество всех $\vee$ -неразложимых элементов S , а через $CJ(S)$ — множество всех полностью $\vee$ -неразложимых элементов S .

Следующие понятия и обозначения можно найти в [14]. Для двух произвольных подмножеств $A, B \subseteq S$ $\vee$ -полурешетки S говорят, что A *уточняет* B , и пишут $A \ll B$, если $A \subseteq \downarrow B$. Мы пишем $a \ll B$ вместо $\{a\} \ll B$ и $A \ll b$ вместо $A \ll \{b\}$ для элементов $a, b \in P$. Для $x \in S$ конечное непустое множество $A \subseteq S$ называется $\vee$ -*покрытием* x в S , если $x \leq \bigvee A$; мы также называем неравенство $x \leq \bigvee A$ $\vee$ -*покрытием* в этом случае. $\vee$ -Покрытие $x \leq \bigvee A$ *нетривиально*, если $x \notin \downarrow A$. Обозначим через $\mathfrak{F}_S(x)$ множество всех нетривиальных $\vee$ -покрытий x в S . $\vee$ -Покрытие $x \leq \bigvee A$ *минимально* (символически $A \in \mathfrak{M}_S(x)$), если $A \subseteq B$ для каждого $B \in \mathfrak{F}_S(x)$ такого, что $B \ll A$. $\vee$ -Полурешетка S обладает *свойством полного уточнения минимальных $\vee$ -покрытий* (CR), если для каждого $x \in CJ(S)$ и каждого $A \in \mathfrak{F}_S(x)$ существует $B \in \mathfrak{M}_S(x)$ такое, что $B \ll A$ и $B \subseteq CJ(S)$.

2.2. Категории решеток. Следуя [15], назовем $\vee$ -полурешетку S *пространственной*, если каждый элемент S является объединением полностью $\vee$ -неразложимых элементов S . $\vee$ -Полурешетка (решетка) S *алгебраична*, если каждый ее элемент является объединением компактных элементов. Решетка L *биалгебраична*, если L и дуальная L^∂ являются алгебраическими решетками. Следуя [16], обозначим через $\mathbb{A}_s$ категорию полных алгебраических пространственных решеток с полными гомоморфизмами решеток в качестве морфизмов. Обозначим через $\mathbb{A}_s^+$ полную подкатегорию $\mathbb{A}_s$, все объекты которой обладают свойством (CR), а через $\mathbb{B}$ — категорию биалгебраических решеток с полными гомоморфизмами. Согласно [17, следствие 3.13] каждая биалгебраическая решетка обладает свойством (CR), что делает $\mathbb{B}$ полной подкатегорией $\mathbb{A}_s^+$.

Следующая теорема имеет важное значение при рассмотрении конечно порожденных решеточных многообразий.

Теорема 2.1 ([16]). Пусть L — биалгебраическая решетка. Для решетки $M \in \mathbf{SP}(L)$ следующие условия эквивалентны:

- (1) M является $\mathbb{A}_s^+$ -объектом,
- (2) M биалгебраична.

По теореме 2.1 для каждой конечной решетки L решетка $M \in \mathbf{SP}(L)$ является $\mathbb{A}_s^+$ -объектом тогда и только тогда, когда L является $\mathbb{B}$ -объектом.

2.3. 2-дистрибутивность. Обозначим через (D_2) тождество 2-дистрибутивности

$$x \wedge (y_0 \vee y_1 \vee y_2) = \bigvee_{0 \leq i < j \leq 2} [x \wedge (y_i \vee y_j)].$$

Это тождество введено в [18] в серии тождеств (D_n) , $0 < n < \omega$. В этой серии (D_1) — это тождество обычной дистрибутивности. Справедлива следующая хорошо известная лемма (см., например, [19]).

Лемма 2.1. Для решетки L сформулируем следующие утверждения:

- (1) (D_2) выполняется в L ,

(2) если $a \leq b_0 \vee b_1 \vee \dots \vee b_n$ — несократимое $\vee$ -покрытие для некоторого $a \in J(L)$ и некоторых $b_0, b_1, \dots, b_n \in L$, то $n < 2$.

Утверждение (1) влечет (2). Если существует множество $J \subseteq J(L)$ такое, что каждый элемент в L является объединением элементов из J , то (2) влечет (1).

3. Немодулярные решеточные многообразия

Здесь мы даем общее определение дуального пространства для биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию $\mathbf{SP}(L_i)$, где $1 \leq i \leq 5$ (см. рис. 2–5, а также [9] и [12, рис. 2.29]).

3.1. Решеточное многообразие $\mathbf{V}_C$ и категория $\mathbb{B}_C$. Рассмотрим следующее тождество, которое обозначим через (C):

$$\begin{aligned} x \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (z_0 \vee z_1) &= \bigvee_{i < 2} [x \wedge y_i \wedge (z_0 \vee z_1)] \vee \bigvee_{i < 2} [x \wedge z_i \wedge (y_0 \vee y_1)] \vee \\ &\vee \bigvee_{i < 2} [x \wedge ((y_0 \wedge z_i) \vee (y_1 \wedge z_{1-i}))]. \end{aligned}$$

Это тождество было введено в [1, 2] и также появилось в [10, 11] под названием (C_1) в серии тождеств. Следующая лемма сформулирована в [2], а ее полное доказательство содержится в [5, лемма 4, следствие 5].

Лемма 3.1. Сформулируем следующие утверждения для решетки L :

- (1) (C) выполняется в L ,
- (2) если $a \leq a_0 \vee a_1$ и $a \leq b_0 \vee b_1$ — минимальные $\vee$ -покрытия для некоторых элементов $a, a_0, a_1, b_0, b_1 \in \mathbf{CJ}(L)$, то $\{a_0, a_1\} = \{b_0, b_1\}$.

Тогда (1) влечет (2). Если $L \in \mathbb{A}_s^+$ 2-дистрибутивна, то (2) влечет (1).

Следующая лемма демонстрирует силу тождества (C).

Лемма 3.2. (C) влечет (D_2) .

Доказательство. Пусть L — произвольная решетка такая, что $L \models (C)$, и пусть $a, a_0, a_1, a_2 \in L$. Рассмотрим следующую интерпретацию γ :

$$\gamma: x \mapsto a, \quad \gamma: y_0 \mapsto a_0, \quad \gamma: y_1 \mapsto a_1 \vee a_2, \quad \gamma: z_0 \mapsto a_0 \vee a_1, \quad \gamma: z_1 \mapsto a_2.$$

Вычислим:

$$\begin{aligned} (x \wedge y_0 \wedge (z_0 \vee z_1))[\gamma] &= a \wedge a_0 \wedge (a_0 \vee a_1 \vee a_2) = a \wedge a_0, \\ (x \wedge y_1 \wedge (z_0 \vee z_1))[\gamma] &= a \wedge (a_1 \vee a_2) \wedge (a_0 \vee a_1 \vee a_2) = a \wedge (a_1 \vee a_2), \\ (x \wedge z_0 \wedge (y_0 \vee y_1))[\gamma] &= a \wedge (a_0 \vee a_1) \wedge (a_0 \vee a_1 \vee a_2) = a \wedge (a_0 \vee a_1), \\ (x \wedge z_1 \wedge (y_0 \vee y_1))[\gamma] &= a \wedge a_2 \wedge (a_0 \vee a_1 \vee a_2) = a \wedge a_2, \\ (x \wedge ((y_0 \wedge z_0) \vee (y_1 \wedge z_1)))[\gamma] &= a \wedge ((a_0 \wedge (a_0 \vee a_1)) \vee ((a_1 \vee a_2) \wedge a_2)) = a \wedge (a_0 \vee a_2), \\ (x \wedge ((y_0 \wedge z_1) \vee (y_1 \wedge z_0)))[\gamma] &= a \wedge ((a_0 \wedge a_2) \vee ((a_1 \vee a_2) \wedge (a_0 \vee a_1))) \\ &= a \wedge (a_1 \vee a_2) \wedge (a_0 \vee a_1) \leq a \wedge (a_0 \vee a_1). \end{aligned}$$

Пусть u — значение правой части (C), а v — значение правой части (D_2) при интерпретации γ . Тогда

$$\begin{aligned} (x \wedge (x_0 \vee x_1 \vee x_2))[\gamma] &= a \wedge (a_0 \vee a_1 \vee a_2) = (x \wedge (y_0 \vee y_1) \wedge (z_0 \vee z_1))[\gamma] = u \\ &\leq (a \wedge a_0) \vee (a \wedge (a_1 \vee a_2)) \vee (a \wedge (a_0 \vee a_1)) \vee (a \wedge a_2) \vee (a \wedge (a_0 \vee a_2)) \vee (a \wedge (a_0 \vee a_1)) = v. \end{aligned}$$

Таким образом, $L \models (D_2)$. □

Пусть $\mathbf{V}_C$ обозначает многообразие решеток, определенное тождеством (C), и пусть $\mathbb{B}_C$ обозначает полную подкатегорию $\mathbb{B}$, объекты которой принадлежат $\mathbf{V}_C$. Из леммы 3.2 следует, что $\mathbf{V}_C$ — собственное подмногообразие в многообразии 2-дистрибутивных решеток.

3.2. Категория $\mathbb{J}_C$ упорядоченных пространств. Наша первая цель — определить категорию $\mathbb{J}_C$ упорядоченных пространств, дуальную категории $\mathbb{B}_C$, чтобы распространить дуальность Биркгофа на многообразия $\mathbf{SP}(L_i)$ такие, что $1 \leq i \leq 5$, а также обобщить дуальность биркгофского типа, полученную для многообразий $\mathbf{SP}(N_5)$ в [1, 2] и $\mathbf{SP}(M_3)$ в [3]. Для этого введем следующее определение, обобщающее определение 2 из [2].

Определение 3.1. Структура $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ называется J_C -пространством, если выполняются следующие условия:

- (s1) $X \cap Y = \emptyset$,
- (s2) $\leq$ — частичный порядок на $X \cup Y$,
- (s3) $f: Y \rightarrow (X \cup Y) \times (X \cup Y)$ — функция, и для всех $y \in Y$ с $f(y) = (a, b)$ выполнено следующее:
 - (a) $y \not\leq \{a, b\}$ и $\{a, b\}, \{y, b\} \in 2(X \cup Y)$,
 - (b) если $a, b \leq z$ для некоторого $z \in X \cup Y$, то $y \leq z$,
 - (c) если $z \leq y$ для некоторого $z \in X \cup Y$, то либо $z \ll \{a, b\}$, либо $z \in Y$ и $\{c, d\} \ll \{a, b\}$, где $f(z) = (c, d)$.

Для удобства введем обозначения $X(\mathbb{S})$ для X и $Y(\mathbb{S})$ для Y .

Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle X', Y', \leq, f' \rangle$ — J_C -пространства. Тогда $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ называется J_C -отображением, если выполняются следующие условия:

- (m1) φ отображает $X \cup Y$ в $X' \cup Y' \cup 2X'$, где $2X'$ обозначает совокупность 2-элементных антицепей в $\langle X', \leq' \rangle$,
- (m2) если $u, v \in X \cup Y$ таковы, что $\varphi(u), \varphi(v) \in X' \cup Y'$ и $u \leq v$, то $\varphi(u) \leq \varphi(v)$,
- (m3) для всех $x \in X$ выполнено $\varphi(x) \in X'$,
- (m4) для всех $y \in Y$ с $f(y) = (a, b)$ выполнено следующее:
 - (a) если $\varphi(y) \in X'$, то $\varphi(y) \ll \varphi(a)$ или $\varphi(y) \ll \varphi(b)$,
 - (b) если $\varphi(y) \in Y'$, то $\varphi(a), \varphi(b) \in X' \cup Y'$ и $f'(\varphi(y)) = (\varphi(a), \varphi(b))$,
 - (c) если $\varphi(y) \in 2X'$, то $\varphi(y) = \{\varphi(a), \varphi(b)\} \subseteq X'$ и $\{\varphi(a), \varphi(b)\} \ll \varphi(z)$ для каждого $z \in X \cup Y$ с $y \leq z$.

Пусть $\mathbb{S}_0, \mathbb{S}_1$, и $\mathbb{S}_2$ — J_C -пространства, $X_i = X(\mathbb{S}_i)$, $Y_i = Y(\mathbb{S}_i)$, $i < 3$, и $\varphi_0: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_1$, $\varphi_1: \mathbb{S}_1 \rightarrow \mathbb{S}_2$ — J_C -отображения. Композиция $\varphi_0 \circ \varphi_1: \mathbb{S}_0 \rightarrow \mathbb{S}_2$ J_C -отображений φ_0 и φ_1 определяется следующим образом. Пусть $u \in X_0 \cup Y_0$.

- (c1) Если $\varphi_0(u) \in X_1$ или $\varphi_0(u) \in Y_1$ и $f(u) = (a, b)$ в $\mathbb{S}_0$, то

$$\varphi_0 \circ \varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi_1 \varphi_0(u), & \varphi_1 \varphi_0(u) \in X_2 \cup Y_2, \\ \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\}, & \varphi_1 \varphi_0(u) \in 2X_2. \end{cases}$$

- (c2) Если $\varphi_0(u) \in 2X_1$, то

$$\varphi_0 \circ \varphi_1(u) = \begin{cases} \varphi_1 \varphi_0(a), & \varphi_1 \varphi_0(b) \leq \varphi_1 \varphi_0(a), \\ \varphi_1 \varphi_0(b), & \varphi_1 \varphi_0(a) \leq \varphi_1 \varphi_0(b), \\ \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\}, & \{\varphi_1 \varphi_0(a), \varphi_1 \varphi_0(b)\} \in 2X_2, \end{cases}$$

где $\varphi_0(u) = \{\varphi_0(a), \varphi_0(b)\}$ в силу (m4-с).

Лемма 3.3. Композиция $\circ$ двух J_C -отображений является J_C -отображением. Более того, $\circ$ ассоциативна.

Лемма 3.3 дает категорию $\mathbb{J}_C$, объекты которой суть J_C -пространства, а морфизмы — J_C -отображения. Пусть $(\mathbb{J}_C)_{fin}$ и $(\mathbb{B}_C)_{fin}$ обозначают полные подкатегории в $\mathbb{J}_C$ и $\mathbb{B}_C$ соответственно, объекты которых конечны.

Замечание 3.1. Возможен случай $X = Y = \emptyset$ в определении J_C -пространства (см. определение 3.1). В этом случае соответствующий $\mathbb{J}_C$ -объект также обозначается через $\emptyset$. Ясно, что $\emptyset: \emptyset \rightarrow \mathbb{S}$ — единственное J_C -отображение для каждого J_C -пространства $\mathbb{S}$. Таким образом, $\emptyset$ является начальным объектом в категории $\mathbb{J}_C$.

Как мы увидим позже, этот начальный объект в категории $\mathbb{J}_C$ соответствует при дуальности терминальному объекту T в категории $\mathbb{W}_C$, который является тривиальной (т.е. одноэлементной) решеткой.

Другой подход состоял бы в том, чтобы отбросить тривиальную решетку и пустой $\mathbb{J}_C$ -объект. Оба подхода эквивалентны, и мы следуем первому только для упрощения изложения.

3.3. Контравариантный функтор из $\mathbb{J}_C$ в $\mathbb{W}_C$.

Определение 3.2 ([2, определение 3.1]). Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ — J_C -пространство. Подмножество $I \subseteq X \cup Y$ называется *идеалом* $\mathbb{S}$, если $I = \downarrow I$ относительно $\leq$ и выполняется следующее условие: если $f(y) = (a, b)$ в $\mathbb{S}$ и $a, b \in I$, то $y \in I$.

Как и в [2], рассмотрим множество $F(\mathbb{S})$ всех идеалов $\mathbb{S}$ как полную $(0, 1)$ -решетку с $\emptyset$ в качестве наименьшего элемента и $X \cup Y$ в качестве наибольшего элемента. Тот факт, что $F(\mathbb{S})$ образует полную алгебраическую решетку, вытекает из следующих утверждений, доказательства которых повторяют доказательства соответствующих утверждений из [2, § 3].

Лемма 3.4. Для семейства $\mathcal{Z} = \{Z_i \in F(\mathbb{S}) \mid i \in I\}$ идеалов в J_C -пространстве $\mathbb{S}$ выполняются следующие утверждения:

- (1) $\bigwedge_{i \in I} Z_i = \bigcap_{i \in I} Z_i$,
- (2) $\bigvee_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} Z_i \cup \{y \in Y \mid f(y) = (a, b), a, b \in \bigcup_{i \in I} Z_i\}$,
- (3) если $\mathcal{Z}$ — направленное вверх семейство относительно $\subseteq$, то $\bigvee_{i \in I} Z_i = \bigcup_{i \in I} Z_i$.

В частности, $F(\mathbb{S})$ — алгебраическая пространственная решетка.

Лемма 3.5. Пусть Z — непустой идеал в J_C -пространстве $\mathbb{S}$. Тогда

- (1) Z является полностью $\vee$ -неразложимым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $Z = \downarrow z$ для некоторого $z \in X \cup Y$,
- (2) Z является полностью $\vee$ -простым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $Z = \downarrow z$ для некоторого $z \in X$,
- (3) если $z \in X \cup Y$, то $\downarrow z$ является $\vee$ -простым элементом в $F(\mathbb{S})$ тогда и только тогда, когда $z \in X$.

Следующее утверждение может быть доказано точно так же, как утверждение 3.4 в [2, предложение 3.2].

Предложение 3.1. Если $\mathbb{S}$ — J_C -пространство, то $F(\mathbb{S})$ — непрерывная вниз решетка. Следовательно, $F(\mathbb{S})$ — биалгебраическая решетка.

Предложение 3.2. Если $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ — J_C -пространство, то $F(\mathbb{S}) \in \mathbf{V}_C$.

Доказательство. По предложению 3.1 $F(\mathbb{S})$ — биалгебраическая решетка, поэтому $F(\mathbb{S}) \in \mathbf{A}_0^+$. Более того, из леммы 3.4(2) следует, что $F(\mathbb{S})$ 2-дистрибутивна. Таким образом, чтобы получить требуемое заключение, следует доказать, что утверждение (2) леммы 3.1 выполняется в решетке $F(\mathbb{S})$. Для этого используем лемму 3.5. Пусть $a, b_0, b_1, c_0, c_1 \in X \cup Y$ таковы, что $\downarrow a \subseteq \downarrow b_0 \vee \downarrow b_1$, $\downarrow a \subseteq \downarrow c_0 \vee \downarrow c_1$ оба являются минимальными $\vee$ -покрытиями в $F(\mathbb{S})$. Таким образом, $a \in \downarrow b_0 \vee \downarrow b_1$ и $a \in \downarrow c_0 \vee \downarrow c_1$. В частности, эти $\vee$ -покрытия нетривиальны, откуда $a \notin \downarrow b_0 \cup \downarrow b_1 \cup \downarrow c_0 \cup \downarrow c_1$. По лемме 3.4(2) следует, что $a \in Y$, $f(a) = (b, c)$ в $\mathbb{S}$, и $b, c \in (\downarrow b_0 \cup \downarrow b_1) \cap (\downarrow c_0 \cup \downarrow c_1)$. Если $b, c \in \downarrow b_i$ для некоторого $i < 2$, то включение $\downarrow b_i \in F(\mathbb{S})$ влечет, что $a \in \downarrow b_i$ и $\downarrow a \subseteq \downarrow b_i$, что невозможно по нашему предположению. Таким образом, $b, c \notin \downarrow b_i$ и, аналогично, $b, c \notin \downarrow c_i$ для всех $i < 2$. Следовательно, мы можем предположить, что $b \in \downarrow b_0 \cap \downarrow c_0$ и $c \in \downarrow b_1 \cap \downarrow c_1$.

Это влечет, что $\{\downarrow b, \downarrow c\} \ll \{\downarrow b_0, \downarrow b_1\}$ и $\{\downarrow b, \downarrow c\} \ll \{\downarrow c_0, \downarrow c_1\}$ в $F(\mathbb{S})$. Более того, $\downarrow a \subseteq \downarrow b \vee \downarrow c$ по лемме 3.4(2). По определению минимального $\vee$ -покрытия и нашему предположению выше

получаем, что $\{\downarrow b_0, \downarrow b_1\} \subseteq \{\downarrow b, \downarrow c\}$, $\{\downarrow c_0, \downarrow c_1\} \subseteq \{\downarrow b, \downarrow c\}$. Следовательно, $b_0, c_0 \leq b$ и $b_1, c_1 \leq c$, что дает равенства $b_0 = b = c_0$, $b_1 = c = c_1$ и искомое утверждение (2) леммы 3.1. По лемме 3.1 $F(\mathbb{S})$ удовлетворяет тождеству (C) и, следовательно, принадлежит $\mathbb{V}_C$. $\square$

Пусть $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle X', Y', \leq, f \rangle$ — J_C -пространства и пусть $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ — J_C -отображение. Как это сделано в [2], положим для идеала Z' в $\mathbb{S}'$

$$\varphi^{-1}(Z') = \{z \in X \cup Y \mid \varphi(z) \in Z'\} \cup \{z \in Y \mid \varphi(z) \subseteq Z'\}$$

и рассмотрим отображение $F(\varphi): F(\mathbb{S}') \rightarrow F(\mathbb{S})$, $F(\varphi): Z' \mapsto \varphi^{-1}(Z')$. Следующее утверждение доказывается точно так же, как предложение 3.4 в [2].

Предложение 3.3. Для J_C -пространств $\mathbb{S}$ и $\mathbb{S}'$ и для J_C -отображения $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ отображение $F(\varphi): F(\mathbb{S}') \rightarrow F(\mathbb{S})$ является полным гомоморфизмом решеток.

По аналогии с [2, следствие 3.5], основная цель данного пункта достигается с помощью следующего утверждения.

Следствие 3.1. $F: \mathbb{J}_C \rightarrow \mathbb{B}_C$ — контравариантный функтор.

3.4. Контравариантный функтор из $\mathbb{B}_C$ в $\mathbb{J}_C$. Следуя идее из [2], положим для каждой решетки $L \in \mathbb{B}_C$:

$$G(L) = \langle CJ_P(L), CJ_{NP}(L), \leq, f \rangle,$$

где частичный порядок $\leq$ наследуется из L , и для элемента $y \in CJ_{NP}(L)$ имеем $f(y) = (a, b)$ каждый раз, когда $y \leq a \vee b$ — единственное минимальное $\vee$ -покрытие y в L такое, что $b \not\leq a$. То, что существует только одно минимальное $\vee$ -покрытие, обеспечивается леммой 3.1 и тем, что $L \models (C)$.

Доказательство следующего утверждения очевидно.

Предложение 3.4. Если $L \in \mathbb{B}_C$, то $G(L) \in \mathbb{J}_C$.

По аналогии с [2] определим для решеток $L, M \in \mathbb{B}$ и полного гомоморфизма решеток $g: M \rightarrow L$ отображение $G(g): G(L) \rightarrow G(M)$. А именно, для каждого $z \in CJ(L)$ положим:

$$G(g)(z) = \begin{cases} \beta_g(z), & \beta_g(z) \in CJ(M), \\ \{\beta_g(a), \beta_g(b)\}, & \beta_g(z) \notin CJ(M), \mathfrak{M}_L(z) = \{\{a, b\}\}. \end{cases}$$

Здесь и далее β_g обозначает нижний сопряженный к g , т.е.

$$\beta_g: L \rightarrow M, \quad \beta_g: a \mapsto \bigwedge \{b \in M \mid a \leq g(b)\}.$$

Тогда лемма 3.1, лемма 5 из [8] и предложение 3.5 ниже гарантируют, что $G(g)$ корректно определено.

Предложение 3.5. Пусть $L, M \in \mathbb{B}_C$ и пусть $g: M \rightarrow L$ — полный гомоморфизм решеток. Тогда $G(g): G(L) \rightarrow G(M)$ — J_C -отображение.

Следовательно, мы получаем основное утверждение этого параграфа.

Следствие 3.2. $G: \mathbb{B}_C \rightarrow \mathbb{J}_C$ — контравариантный функтор.

3.5. Основные результаты. Основываясь на предыдущем, мы приходим к основному результату этого параграфа, который дает искомое расширение дуальности Биркгофа на многообразие $\mathbb{V}_C$.

Теорема 3.1. Функторы F и G устанавливают дуальную эквивалентность категорий $\mathbb{J}_C$ и $\mathbb{B}_C$.

Как и в [2], J_C -отображение $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ называется *сюръективным*, если для каждого $z' \in X' \cup Y'$ существует $z \in X \cup Y$ такое, что $\varphi(z) = z'$. Более того, φ называется *вложением*, если $\varphi(X \cup Y) \subseteq X' \cup Y'$ и $\varphi(z_0) \leq \varphi(z_1)$ влечет $z_0 \leq z_1$ для всех $z_0, z_1 \in X \cup Y$.

По аналогии с [2] получаем следующие утверждения.

- Следствие 3.3.** (1) Сюръективные $\mathbb{J}_C$ -морфизмы соответствуют при дуальности $\mathbb{B}_C$ -морфизмам, которые являются полными вложениями решеток, и наоборот.
- (2) $\mathbb{J}_C$ -морфизмы, являющиеся вложениями, соответствуют при дуальности сюръективным $\mathbb{B}_C$ -морфизмам и наоборот.
- (3) Дизъюнктивные объединения $\mathbb{J}_C$ -пространств (которые образуют копроизведения в $\mathbb{J}_C$) соответствуют при дуальности декартовым произведениям в $\mathbb{B}_C$ и наоборот.
- (4) Категории $(\mathbb{J}_C)_{fin}$ и $(\mathbb{B}_C)_{fin}$ дуально эквивалентны посредством функторов F и G .

Замечание 3.2. Дуальность из теоремы 3.1 расширяет дуальность Биркгофа на многообразие $\mathbf{V}_C$, т.е. на категории $\mathbb{B}_C$ и $(\mathbb{B}_C)_{fin}$ (см. следствие 3.3(4)).

Замечание 3.3. В [20] построен континуум локально конечных многообразий $(0, 1)$ -решеток, каждое из которых содержится в многообразии $\mathbf{V}_C$ и ни одно из которых не содержит ромб M_3 .

В следующих пунктах этого параграфа мы ограничиваем дуальность, полученную в теореме 3.1, на несколько конечно порожденных подмногообразий $\mathbf{V}_C$, включая многообразие $\mathbf{SP}(N_5)$, порожденное пентагоном, которое покрывает многообразие $\mathbf{D}$ дистрибутивных решеток в решетке всех решеточных многообразий.

3.6. Решеточное многообразие, порожденное пентагоном N_5 . Исторически это было первое решеточное многообразие, на которое была расширена дуальность Биркгофа для дистрибутивных решеток (см. [1, 2]). Все идеи, методы и конструкции, которые мы описываем в этой статье, происходят из [1, 2] и основаны на дуальности Биркгофа для многообразия $\mathbf{SP}(N_5)$.

Пусть $\mathbb{B}_{N_5}$ обозначает полную подкатегорию $\mathbb{B}_C$, объекты которой — биалгебраические решетки, принадлежащие многообразию $\mathbf{SP}(N_5)$. Анализируя рис. 1, замечаем, что $\mathbf{J}(N_5) = \{y, a, b\}$ и единственное минимальное $\vee$ -покрытие $\vee$ -неразложимого элемента в этой решетке — это $\vee$ -покрытие $y \leq a \vee b$. Более того, элементы a, b являются $\vee$ -простыми в N_5 и $a < y$. В силу лемм 2.1 и 3.1 $\mathbf{SP}(N_5) \subseteq \mathbf{V}_C$.

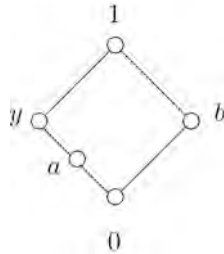


Рис. 1. Пентагон N_5 .

Тот факт, что оба элемента минимального $\vee$ -покрытия являются $\vee$ -простыми, может быть выражен тождеством. Такое тождество было найдено в [1, 2], где обозначалось (N_5^1) (см. [5, лемма 6, следствие 7]). В последующих работах это тождество обозначалось (P). Тот факт, что один элемент из $\vee$ -покрытия y лежит ниже y , также может быть выражен тождеством. Такое тождество также было найдено в [1, 2], где обозначалось (N_5^0) (см. [5, лемма 6, следствие 7]).

Тождества (C), (P) и (N_5^0) образуют эквациональный базис $\mathbf{SP}(N_5)$ (см. леммы 1.2 [2] и 3.2).

Два дополнительных свойства минимальных $\vee$ -покрытий, упомянутых выше, отражены в определении дуального пространства (N_5 -пространства) (см. определение 3.3 ниже). Мы приводим там только пункты, специфичные для N_5 -пространств по сравнению с общими $\mathbb{J}_C$ -пространствами и учитывающие геометрию N_5 и, следовательно, геометрию N_5 -пространства, построенного на $\mathbf{CJ}(L)$ для каждой $\mathbb{A}_s^+$ -решетки $L \in \mathbf{SP}(N_5)$.

Определение 3.3 ([2, определение 2.1]). $\mathbb{J}_C$ -пространство $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ называется N_5 -пространством, если дополнительно выполняется следующее условие:

- (s3-N5) $f: Y \rightarrow X \times X$, и дополнительно выполняется следующее условие для всех $y \in Y$ с $f(y) = (a, b)$:
- (aN5) $a < y$.

Пусть $\mathbb{J}_{N_5}$ обозначает полную подкатегорию $\mathbb{J}_C$, объекты которой суть N_5 -пространства.

Категории $\mathbb{J}_{N_5}$ и $\mathbb{B}_{N_5}$, обозначились в [1, 2] через $\mathbb{N}_5$ и $\mathbb{B}_5$ соответственно. Мы используем здесь унифицированное обозначение для всех рассматриваемых категорий.

Ограничивая функторы F и G на категории $\mathbb{J}_{N_5}$ и $\mathbb{B}_{N_5}$ соответственно, получаем следующие результаты, полученные в [1, 2].

Теорема 3.2 ([2, теорема 5.4]). *Функторы F и G устанавливают дуальную эквивалентность категорий $\mathbb{J}_{N_5}$ и $\mathbb{B}_{N_5}$.*

Следствие 3.4 ([2, следствия 5.5 и 5.6]). *Справедливы следующие утверждения.*

- (1) *Дизъюнктные объединения N_5 -пространств (которые образуют копроизведения в $\mathbb{J}_{N_5}$) соответствуют при дуальности декартовым произведениям в $\mathbb{B}_{N_5}$ и наоборот.*
- (2) *Категории $(\mathbb{J}_{N_5})_{fin}$ и $(\mathbb{B}_{N_5})_{fin}$ дуально эквивалентны.*

В следующих пунктах этого параграфа мы рассматриваем решеточные многообразия $\mathbf{SP}(L_i)$, $1 \leq i \leq 5$, которые покрывают многообразие $\mathbf{SP}(N_5)$ в решетке всех решеточных многообразий (см. [9]). Мы даем подходящее определение L_i -пространства и определяем полные подкатегории $\mathbb{J}_i$ категории $\mathbb{J}_C$, чтобы расширить далее дуальность Биркгофа, что приводит к теореме 3.3 и следствию 3.5 ниже. Ограничения полученных расширений на многообразии $\mathbf{SP}(N_5)$ дают дуальность Биркгофа, установленную в [1, 2] (см. теорему 3.2).

3.7. Решеточное многообразие, порожденное L_1 . Так как L_1 очевидно содержит изоморфную копию пентагона как $(0,1)$ -подрешетку (см. рис. 2), $\mathbf{SP}(N_5)$ является собственным подмногообразием в $\mathbf{SP}(L_1)$. Более того, последнее покрывает первое в решетке всех решеточных многообразий (см. [9]).

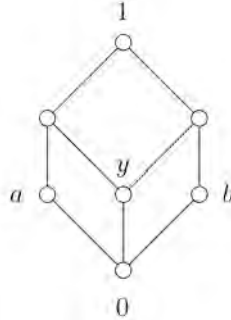


Рис. 2. Решетка L_1 .

Кроме того, $J(L_1) = \{y, a, b\}$ (см. рис. 2). Анализируя рис. 2, замечаем, что единственное минимальное $\vee$ -покрытие $\vee$ -неразложимого элемента в этой решетке — это $\vee$ -покрытие $y \leq a \vee b$, где a и b являются $\vee$ -простыми. Ввиду леммы 3.1 $\mathbf{SP}(L_1) \subseteq \mathbf{V}_C$. Как мы уже видели в предыдущем параграфе, свойство $\vee$ -покрытия состоять из $\vee$ -простых элементов выражается тождеством (P). В силу теоремы 12 [5] и леммы 3.2 тождества (C) и (P) образуют эквациональный базис для $\mathbf{SP}(L_1)$.

Дополнительное свойство минимальных $\vee$ -покрытий $\vee$ -неразложимых элементов в решетках из $\mathbf{SP}(L_1)$, описанное выше, отражает следующее:

Определение 3.4 ([7, определение 2]). J_C -пространство $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ называется L_1 -пространством, если дополнительно выполняется следующее условие:

- (s3-1) $f: Y \rightarrow X \times X$, и условия (a)–(c) выполняются для всех $y \in Y$ с $f(y) = (a, b)$.

Пусть $\mathbb{J}_1$ обозначает полную подкатегорию $\mathbb{J}_C$, объекты которой — L_1 -пространства.

Из определений 3.3 и 3.4 следует, что $\mathbb{J}_{N_5}$ является полной подкатегорией $\mathbb{J}_1$.

3.8. Решеточное многообразие, порожденное L_2 . Анализируя рис. 3, видим, что $J(L_2) = \{a_0, a_1, b_0, b_1\}$. Единственные минимальные $\vee$ -покрытия элементов из $J(L_2)$ таковы: $b_0 \leq a_0 \vee b_1$ и $b_1 \leq a_1 \vee b_0$. По лемме 3.1 имеем включения $\mathbf{SP}(N_5) \prec \mathbf{SP}(L_2) \subseteq \mathbf{V}_C$. Рассматривая далее минимальные $\vee$ -покрытия, замечаем, что для каждого $i < 2$ a_i является $\vee$ -простым элементом и $a_i < b_i$. Это свойство может быть выражено тождеством, которое вместе с тождеством (C) образует эквациональный базис для многообразия $\mathbf{SP}(L_2)$. Это свойство также отражает следующее:

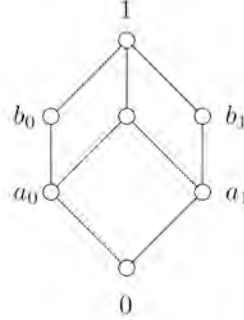


Рис. 3. Решетка L_2 , дуальная к L_1 .

Определение 3.5. J_C -пространство $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ является L_2 -пространством, если дополнительно выполняется следующее условие:

- (s3-2) $f: Y \rightarrow X \times (X \cup Y)$, и имеют место следующие два дополнительных условия для всех $y \in Y$ с $f(y) = (a, b)$:
- (aN5) $a < y$,
 - (d2) если $b \in Y$, то $f(b) = (a', y)$ для некоторого $a' \in X$.

Тогда $\mathbb{J}_2$ обозначает полную подкатегорию $\mathbb{J}_C$, объекты которой — L_2 -пространства.

3.9. Решеточное многообразие, порожденное L_3 . Анализируя рис. 4, мы видим, что $J(L_3) = \{y, a, b, c\}$. Единственные минимальные $\vee$ -покрытия элементов из $J(L_3)$ таковы: $y \leq a \vee b$ и $b \leq c \vee y$. По [9] и лемме 3.1 имеем включения $\mathbf{SP}(N_5) \prec \mathbf{SP}(L_3) \subseteq \mathbf{V}_C$. Более того, элементы a и c являются $\vee$ -простыми и $a < c, y$. Это наблюдение может быть выражено тождеством, которое вместе с тождеством (C) образует эквациональный базис для многообразия $\mathbf{SP}(L_3)$. Это свойство также отражено в следующем

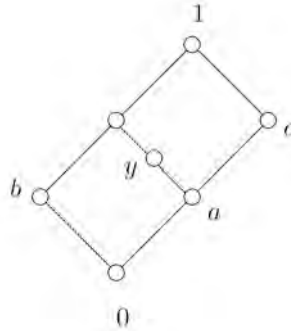


Рис. 4. Решетка L_3 .

Определение 3.6. J_C -пространство $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ называется L_3 -пространством, если выполняется следующее условие:

- (s3-3) $f: Y \rightarrow X \times (X \cup Y)$, и дополнительно выполняется следующее условие для всех $y \in Y$ с $f(y) = (a, b)$,
- (d3) если $a < y$ и $b \in Y$, то $f(b) = (c, y)$ для некоторого $c \in X$ с $c \geq a$,
если $\{a, y\}$ — антицепь, то $b \in Y$ и $f(b) = (c, y)$ для некоторого $c \in X$ с $c \leq a, b$.

Тогда $\mathbb{J}_3$ обозначает полную подкатегорию $\mathbb{J}_C$, объекты которой — L_3 -пространства.

3.10. Решеточное многообразие, порожденное L_4 . Согласно рис. 5 $J(L_4) = \{y, a, b\}$. Единственные минимальные $\vee$ -покрытия элементов из $J(L_4)$ таковы: $y \leq a \vee b$, $a \leq y \vee b$. Как и выше, имеют место включения $\mathbf{SP}(N_5) \prec \mathbf{SP}(L_4) \subseteq \mathbf{V}_C$ по [9] и лемме 3.1. Анализируя рис. 5, мы видим, что элемент b является $\vee$ -простым. В [6] было найдено тождество, (M_w) , которое отражает взаимодействие минимальных $\vee$ -покрытий для элементов из $J(L_4)$. Следующее утверждение касается тождества (M_w) и следует из предложения 2 [6] и леммы 3.2.

Предложение 3.6. Для решетки L рассмотрим следующие условия:

- (1) (M_w) выполняется в L ,
- (2) если $a \leq b \vee c$ — минимальное $\vee$ -покрытие для некоторых $a, b, c \in CJ(L)$, то возможен один из следующих двух случаев:
 - (a) $b \leq a \vee c$ и c — $\vee$ -простой элемент,
 - (b) $c \leq a \vee b$ и b — $\vee$ -простой элемент,
 - (c) $b < a$ и b, c $\vee$ -простые,
 - (d) $c < a$ и b, c $\vee$ -простые.

Тогда (1) влечет (2). Если $L \in \mathbf{V}_C - A_s^+$ -решетка, то (2) влечет (1).

Более того, по теореме 1 из [6] и лемме 3.2 тождества (C) и (M_w) образуют эквациональный базис для многообразия $\mathbf{SP}(L_4)$.

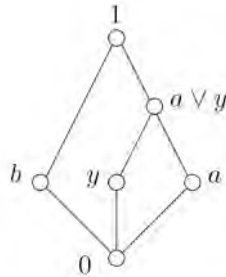


Рис. 5. Решетка L_4 .

Определение 3.7 ([8, определение 1]). J_C -пространство $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ называется L_4 -пространством, если дополнительно выполняется следующее условие:

- (s3-4) $f: Y \rightarrow (X \cup Y) \times X$, и дополнительно выполняются следующие два условия для всех $y \in Y$ с $f(y) = (a, b)$:
- (a4) если $a \in X$, то $a < y$,
 - (d4) если $a \in Y$, то $f(a) = (y, b)$.

Тогда $\mathbb{J}_4$ обозначает полную подкатегорию $\mathbb{J}_C$, объекты которой — L_4 -пространства.

3.11. Решеточное многообразие, порожденное L_5 . Согласно рис. 6 $J(L_5) = \{y, a, b, c\}$. Единственные минимальные $\vee$ -покрытия элементов из $J(L_5)$ таковы: $y \leq a \vee b$, $c \leq a \vee b$, $b \leq y \vee c$. Как и выше, справедливы включения $\mathbf{SP}(N_5) \prec \mathbf{SP}(L_5) \subseteq \mathbf{V}_C$ в силу [9] и леммы 3.1 ввиду формы минимальных $\vee$ -покрытий в L_5 . Анализируя рис. 6, видим, что элемент a является $\vee$ -простым. Свойства минимальных $\vee$ -покрытий выше могут быть выражены тождеством, которое вместе с тождеством (C) образует эквациональный базис для многообразия $\mathbf{SP}(L_5)$ и которое также позволяет дать следующее

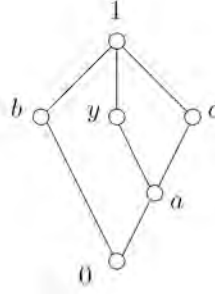


Рис. 6. Решетка L_5 , дуальная к L_4 .

Определение 3.8. [8, определение 1] J_C -пространство $\mathbb{S} = \langle X, Y, \leq, f \rangle$ называется L_5 -пространством, если дополнительно выполняется следующее условие:

- (s3-4) $f: (X \cup Y) \rightarrow (X \cup Y) \times (X \cup Y)$, и дополнительно выполняются следующие два условия для всех $y \in Y$ с $f(y) = (a, b)$:
- (a4) если $a < y$, то $a \in X$,
 - (d5) если $f(c) = (a, b)$ и $c \neq y$, то $a \in X$ и $f(b) = (y, c)$.

Тогда $\mathbb{J}_5$ обозначает полную подкатегорию $\mathbb{J}_C$, объекты которой — L_5 -пространства.

3.12. Дуальность Биркгофа для некоторых конечно порожденных решеточных многообразий. Ограничивая функторы F и G на категории $\mathbb{J}_i$ и $\mathbb{B}_i$ соответственно, $1 \leq i \leq 5$, получаем следующие дуальности биркгофовского типа.

Теорема 3.3. Функторы F и G устанавливают дуальную эквивалентность категорий $\mathbb{J}_i$ и $\mathbb{B}_i$ для каждого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Следствие 3.5 ([2, следствия 5.5 и 5.6]). Справедливы следующие утверждения для каждого $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$:

- (1) дизъюнктные объединения L_i -пространств (которые образуют копроизведения в $\mathbb{J}_i$) соответствуют при дуальности декартовым произведениям в $\mathbb{B}_i$ и наоборот,
- (2) категории $(\mathbb{J}_i)_{fin}$ и $(\mathbb{B}_i)_{fin}$ дуально эквивалентны.

При $i = 1$ теорема 3.3 — это теорема 15 [7], а следствие 3.5 — это следствия 16 и 17 [7]. При $i = 4$ теорема 3.3 — это теорема 1 [8], а следствие 3.5 — это следствия 2 и 3 [8].

Замечание 3.4. Сравнение рис. 2 с рис. 3 и рис. 5 с рис. 6 показывает, что $L_2 \cong L_1^\partial$ и $L_5 \cong L_4^\partial$. Конечно, можно в обоих случаях построить упорядоченные L_2 - и L_4 -пространства на множествах вполне $\wedge$ -неразложимых элементов, используя порядково-дуальный аргумент и получая тем самым дуальность биркгофовского типа для многообразия $\mathbf{SP}(L_2)$ и $\mathbf{SP}(L_4)$ соответственно. Хотя эта конструкция расширяет классическую дуальность Биркгофа для дистрибутивных решеток, она не расширяет дуальность Биркгофа для многообразия $\mathbf{SP}(N_5)$ из [1, 2], описанную выше. Поэтому нам приходится строить дуальные пространства на множествах полностью $\vee$ -неразложимых элементов.

Замечание 3.5. Дуальность Биркгофа была распространена в [10, 11] на многообразия $\mathbf{O}_n$, $0 < n < \omega$, каждое из которых порождено решетками подпорядков решеток M_n (см. рис. 7). Решетка подпорядков трехэлементной цепи M_1 изоморфна L_1 , и, следовательно, $\mathbf{SP}(L_1) = \mathbf{O}_1$. Таким образом, дуальность Биркгофа, полученная в [10, 11], расширяет дуальность, полученную в [5, 7] и представленную в § 3.7 выше. Однако $\mathbf{O}_n \not\subseteq \mathbf{V}_C$ при $n > 1$. Поэтому мы не обсуждаем здесь дуальность из [10, 11].

4. Модулярное решеточное многообразие

Чтобы распространить дуальность Биркгофа на модулярные решеточные многообразия, нужно адаптировать для модулярного случая основные понятия предыдущего параграфа: понятие идеала и понятие пространства. Нужно соответственно скорректировать определение дуальных категорий.

Это главная цель настоящего параграфа. Корректировка состоит в замене функции f в определении 3.1 на бинарное отношение R (см. определение 4.1).

Пусть M_κ — модулярная решетка длины 2 с κ атомами, где κ — кардинал (см. рис. 7). Ясно, что $\mathbf{V}(M_\kappa) = \mathbf{V}(M_\omega)$ для каждого бесконечного кардинала κ , $\mathbf{V}(M_n) = \mathbf{SP}(M_n)$ для всех n таких, что $2 < n < \omega$, и $\mathbf{V}(M_2) = \mathbf{V}(M_1) = \mathbf{D}$ (см. [12]). Более того, решетка подмногообразий $\mathbf{V}(M_\omega)$ образует счетную цепь:

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{SP}(M_3) \subset \dots \subset \mathbf{SP}(M_n) \subset \dots \subset \mathbf{V}(M_\omega)$$

изоморфную $\omega + 1$. Здесь мы рассматриваем только многообразие $\mathbf{SP}(M_3)$, следуя [3].

Тождество модулярности существенно влияет на минимальные $\vee$ -покрытия, как показывает следующее утверждение.

Предложение 4.1 ([3, предложение 3]). *Для решетки L рассмотрим следующие два утверждения:*

- (1) L модулярна,
- (2) если $a \leq b \vee c$ — минимальное нетривиальное $\vee$ -покрытие для некоторых $a, b, c \in J$, то $b \leq a \vee c$.

Тогда (1) влечет (2). Если L — 2-дистрибутивная $\mathbb{A}_s^+$ -решетка, то (2) влечет (1). Более того, $b \leq a \vee c$ также является минимальным $\vee$ -покрытием в этом случае.

В дальнейшем тождество модулярности обозначается (M).

4.1. Решеточное многообразие, порожденное M_3 . Имеем $J(M_3) = \{a, b, c\}$, и минимальные $\vee$ -покрытия этих элементов таковы: $a \leq b \vee c$, $b \leq a \vee c$, $c \leq a \vee b$ (см. рис. 7). Так как каждый элемент из $J(M_3)$ имеет единственное минимальное $\vee$ -покрытие, ни один из этих элементов не является $\vee$ -простым. Более того, $\mathbf{SP}(M_3) \subseteq \mathbf{V}_C$ по лемме 3.1.

4.2. Категории $\mathbb{J}_{M_3}$ и $\mathbb{B}_{M_3}$.

Определение 4.1. [3, определение 1] Структура $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ называется M_3 -пространством, если

- (s1) $\leq$ — частичный порядок на S ,
- (s2) $R \subseteq S^2$ — отношение эквивалентности на S такое, что для всех элементов $a, b, c, d, e, f \in S$ выполняются следующие условия:
 - (1) $[a]_R$ — антицепь, и либо $[a]_R$ одноэлементно, либо $[a]_R$ содержит три элемента,
 - (2) если $[a]_R = \{a, b, c\}$ и $a, b \leq d$, то $c \leq d$,
 - (3) если $[a]_R = \{a, b, c\}$, $[d]_R = \{d\}$ и $d \leq a$, то $d \ll \{b, c\}$,
 - (4) если $[a]_R = \{a, b, c\}$, $[d]_R = \{d, e, f\}$ и $d \leq a$, то либо $d \ll \{b, c\}$, либо $\{e, f\} \ll \{b, c\}$.

Положим

$$X(\mathbb{S}) = \{a \in S \mid [a]_R \text{ одноэлементно}\},$$

$$Y(\mathbb{S}) = \{a \in S \mid [a]_R \text{ не одноэлементно}\} = S \setminus X(\mathbb{S}).$$

Пусть $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ и $\mathbb{S}' = \langle S', \leq, R' \rangle$ — M_3 -пространства. Тогда $\varphi: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}'$ называется M_3 -отображением, если выполняются следующие условия:

- (m1) φ отображает S в $S' \cup 2X(S')$,
- (m2) если $u, v \in S$ таковы, что $\varphi(u), \varphi(v) \in S'$ и $u \leq v$, то $\varphi(u) \leq \varphi(v)$,
- (m3) для всех $x \in X(S)$, $\varphi(x) \in X(S')$,
- (m4) для всех $a \in Y(S)$ с $[a]_R = \{a, b, c\}$ выполняется следующее:
 - (a) если $\varphi(a) \in X(S')$, то выполняется одно из следующих условий:
 - (i) $\varphi(b) = \{\varphi(a), \varphi(c)\} \subseteq X(S')$,
 - (ii) $\varphi(c) = \{\varphi(a), \varphi(b)\} \subseteq X(S')$,
 - (iii) $\varphi(a) \leq \varphi(b) = \varphi(c) \in X(S')$,
 - (iv) $\varphi(b) \leq \varphi(a) = \varphi(c)$ и $\varphi(b), \varphi(c) \in X(S')$,

- (v) $\varphi(c) \leq \varphi(a) = \varphi(b)$ и $\varphi(b), \varphi(c) \in X(S')$,
- (b) если $\varphi(a) \in Y(S')$, то $[\varphi(a)]_R = \{\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)\} \subseteq Y(S')$,
- (c) если $\varphi(a) \notin S'$, то $\varphi(a) = \{\varphi(b), \varphi(c)\} \subseteq X(S')$ — антицепь и $\varphi(a) \ll \varphi(u)$ для каждого $u \in S$ такого, что $a \leq u$.

Композиция M_3 -отображений определяется точно так же, как в определении 3.1.

Лемма 4.1. Пусть S_0, S_1, S_2 — M_3 -пространства и пусть $\varphi_0: S_0 \rightarrow S_1$, $\varphi_1: S_1 \rightarrow S_2$ — M_3 -отображения. Тогда $\varphi_0 \circ \varphi_1$ — M_3 -отображение. Более того, $\circ$ ассоциативна.

Лемма 4.1 позволяет определить следующие категории. Пусть $\mathbb{B}_{M_3}$ обозначает категорию, объекты которой являются биалгебраические решетки, принадлежащие многообразию $\mathbf{V}(M_3)$, а морфизмами — полные гомоморфизмы решеток (см. рис. 7). Пусть также $\mathbb{J}_{M_3}$ обозначает категорию с M_3 -пространствами в качестве объектов и M_3 -отображениями в качестве морфизмов. Пусть $(\mathbb{J}_{M_3})_{fin}$ и $(\mathbb{B}_{M_3})_{fin}$ обозначают полные подкатегории в $\mathbb{J}_{M_3}$ и $\mathbb{B}_{M_3}$ соответственно, объекты которых суть конечные объекты из $\mathbb{J}_{M_3}$ и $\mathbb{B}_{M_3}$ соответственно.

Категории $\mathbb{J}_{M_3}$ и $\mathbb{B}_{M_3}$ появились в [3], где они обозначались $\mathbb{M}_3$ и $\mathbb{B}_3$. Здесь мы используем унифицированное обозначение для всех рассматриваемых категорий.

4.3. Контравариантный функтор из $\mathbb{J}_{M_3}$ в $\mathbb{B}_{M_3}$.

Определение 4.2 ([3, определение 2]). Пусть $S = \langle S, \leq, R \rangle$ — M_3 -пространство. Подмножество $I \subseteq S$ называется идеалом M_3 -пространства S , если I — нижний конус относительно $\leq$, обладающий следующим свойством для всех $a \in S$:

если $[a]_R \cap I$ содержит по крайней мере два элемента, то $[a]_R \subseteq I$.

По аналогии с п. 3.3, рассмотрим множество $F(S)$ всех идеалов S как полную $(0, 1)$ -решетку с $\emptyset$ в качестве наименьшего элемента и S в качестве наибольшего элемента. Более того, аналогии леммы 3.4, леммы 3.5 и предложения 3.1 выполняются также для M_3 -пространств. Мы не будем формулировать их здесь, ссылаясь при необходимости на три указанных утверждения.

Далее, функтор F определяется на морфизмах так же, как в п. 3.3, и это определение корректно, как показывает следующее утверждение.

Предложение 4.2. Если $S = \langle X, Y, \leq, R \rangle$ — J_{M_3} -пространство, то $F(S) \in \mathbf{V}(M_3)$ является биалгебраической решеткой.

Предложение 4.3. Для M_3 -пространств S и S' и для M_3 -отображения $\varphi: S \rightarrow S'$ отображение $F(\varphi): F(S') \rightarrow F(S)$ является полным гомоморфизмом решеток.

Следствие 4.1. $F: \mathbb{J}_{M_3} \rightarrow \mathbb{B}_{M_3}$ — контравариантный функтор.

4.4. Контравариантный функтор из $\mathbb{B}_{M_3}$ в $\mathbb{J}_{M_3}$. Для решетки $L \in \mathbb{B}_{M_3}$ пусть

$$G(L) = \langle G(L), \leq, R \rangle,$$

где $G(L) = CJ(L)$, $\leq$ — частичный порядок на $G(L)$, наследуемый из L , а R — отношение эквивалентности на $G(L)$ такое, что для всех $a, b, c \in G(L)$:

$$[a]_R = \begin{cases} \{a\}, & a \text{ является } \vee\text{-простым,} \\ \{a, b, c\}, & a \leq b \vee c \text{ является минимальным } \vee\text{-покрытием.} \end{cases}$$

Ввиду предложения 4.1 и леммы 3.1 определение R корректно, и R действительно является отношением эквивалентности. Более того, выполняется следующее утверждение.

Предложение 4.4. Если $L \in \mathbb{B}_{M_3}$, то $G(L) \in \mathbb{J}_{M_3}$.

Замечание 4.1. Возможен случай $G(L) = \emptyset$ (когда L — тривиальная решетка). Так же, как для J_C -пространств (см. замечание 3.1), мы считаем пустое множество $\mathbb{J}_{M_3}$ -объектом (см. определение 4.1), который в этом случае является начальным объектом $\mathbb{J}_{M_3}$.

Действие G на морфизмах такое же, как для категории $\mathbb{B}_C$, и определено в п. 3.4. Справедливо следующее предложение.

Предложение 4.5. Пусть $L, M \in \mathbb{B}_{M_3}$ и пусть $g: M \rightarrow L$ — полный гомоморфизм решеток. Тогда $G(g): G(L) \rightarrow G(M)$ — J_{M_3} -отображение.

Отсюда получаем следующее утверждение.

Предложение 4.6. $G: \mathbb{B}_{M_3} \rightarrow \mathbb{J}_{M_3}$ — контравариантный функтор.

4.5. Основные результаты. Следующие два результата устанавливают искомое расширение дуальности Биркгофа на решеточное многообразие, порожденное M_3 .

Теорема 4.1. Функторы G и F устанавливают дуальную эквивалентность категорий $\mathbb{B}_{M_3}$ и $\mathbb{J}_{M_3}$.

Как и для категории $\mathbb{J}_C$, J_{M_3} -отображение $\varphi: S \rightarrow S'$ называется *сюръективным*, если для каждого $z' \in S'$ существует $z \in S$ такое, что $\varphi(z) = z'$. Кроме того, φ называется *вложением*, если $\varphi(S) \subseteq S'$ и $(\varphi(z_0), \varphi(z_1)) \in P$ в S' тогда и только тогда, когда $(z_0, z_1) \in P$ в S для всех $z_0, z_1 \in S$ и каждого отношения $P \in \{\leq, R\}$.

Следствие 4.2. Справедливы следующие утверждения:

- (1) сюръективные J_{M_3} -морфизмы соответствуют при дуальности равнозначным полным гомоморфизмам решеток и наоборот,
- (2) J_{M_3} -морфизмы, являющиеся вложениями, соответствуют при дуальности сюръективным полным гомоморфизмам решеток и наоборот,
- (3) дизъюнктные объединения J_{M_3} -пространств соответствуют при дуальности декартовым произведениям решеток в $\mathbb{B}_{M_3}$ и наоборот,
- (4) категории $(\mathbb{J}_{M_3})_{fin}$ и $(\mathbb{B}_{M_3})_{fin}$ дуально эквивалентны посредством функторов F и G .

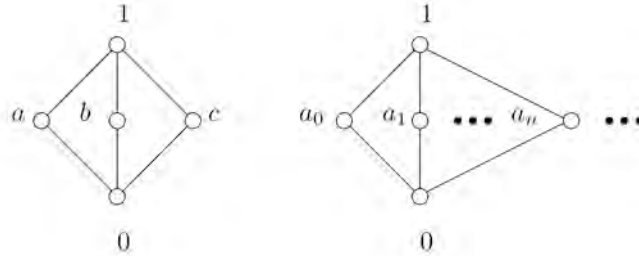


Рис. 7. Решетки M_3 и M_ω .

Замечание 4.2. Сравнивая определения 3.1 и 4.1, замечаем следующее. Вместо отношения эквивалентности R можно ввести функцию в каждом M_3 -пространстве $\mathbb{S}$:

$$f: Y(\mathbb{S}) \rightarrow Y(\mathbb{S}) \times Y(\mathbb{S}), \quad f(a) = (b, c), \text{ если } [a]_R = \{a, b, c\}.$$

Непосредственно видно, что определенная таким образом f делает каждое M_3 -пространство $\mathbb{S} = \langle S, \leq, R \rangle$ J_C -пространством $\mathbb{S}_C = \langle S, \leq, f \rangle$ (мы называем его M'_3 -пространством), поскольку все условия (s1)–(s3) определения 3.1 выполняются. Более того, эта функция обладает дополнительным свойством

$$(s3-M3) \quad f: Y(\mathbb{S}) \rightarrow Y(\mathbb{S}) \times Y(\mathbb{S}), \quad f(a) = (y, b), \text{ и } f(b) = (y, a) \text{ каждый раз, когда } f(y) = (a, b).$$

Аналогично, поскольку все условия (m1)–(m4) определения 3.1 выполняются для M_3 -отображения φ , последнее оказывается J_C -отображением. Следовательно, мы получаем категорию $\mathbb{J}'_{M_3}$, объекты которой — в точности J_C -пространства $\mathbb{S}_C$, где $\mathbb{S}$ пробегает класс $\mathbb{J}_{M_3}$ -объектов, а морфизмы — это $\mathbb{J}_{M_3}$ -морфизмы, которые все являются J_C -морфизмами.

Ясно, что две категории, $\mathbb{J}_{M_3}$ и $\mathbb{J}'_{M_3}$, категорно эквивалентны (даже изоморфны). Следовательно, категория $\mathbb{B}_{M_3}$ дуально эквивалентна полной подкатегории $\mathbb{J}'_{M_3}$ категории $\mathbb{J}_C$.

Следовательно, мы получаем более сильное утверждение.

Теорема 4.2. Функторы F и G устанавливают дуальную эквивалентность категорий $\mathbb{J}_{M_3}$ и $\mathbb{B}_{M_3}$, а также категорий $\mathbb{J}'_{M_3}$ и $\mathbb{B}_{M_3}$.

Следствие 4.3. *Справедливы следующие утверждения.*

- (1) Дизъюнктные объединения M'_3 -пространств (которые образуют копроизведения в $\mathbb{J}'_{M_3}$) соответствуют при дуальности декартовым произведениям в $\mathbb{B}_{M_3}$ и наоборот.
- (2) Категории $(\mathbb{J}'_{M_3})_{fin}$ и $(\mathbb{B}_{M_3})_{fin}$ дуально эквивалентны.

Замечание 4.3. В заключение заметим, что эквациональный базис многообразий $\mathbf{SP}(N_5)$ и $\mathbf{SP}(M_3)$ найден ранее в [21] (см. также [22]). Более того, эквациональные базисы многообразий, порожденных одной решеткой вида M_∞ , были найдены в [23]. Эти базисы, а также эквациональные базисы для многообразий $\mathbf{SP}(L_1)$ – $\mathbf{SP}(L_5)$, можно также найти с помощью метода Маккензи [4]. Все они конечны согласно [24]. Упомянутые здесь эквациональные базисы отличаются и служат лишь нашей цели: выразить свойства минимальных $\vee$ -покрытий и, основываясь на этих свойствах, определить дуальные категории для всех рассматриваемых многообразий.

Литература

1. W. Dziobiak, M. V. Schwidefsky, “Categorical dualities for some two categories of lattices: An extended abstract”, *Bull. Sec. Logic* **51**, No. 3, 329–344 (2022).
2. В. Дзёбьяк, М. В. Швидефски, “Дуальность для биалгебраических решеток, принадлежащих многообразию (0,1)-решеток, порожденному пентагоном”, *Алгебра логика*, **63**, No. 2, 167–208 (2024).
3. А. Е. Изюрова, М. В. Швидефски, “A duality for the variety $\mathbf{SP}(M_3)$ ”, *Lobachevskii J. Math.* **46**, No. 12, 6125–6142 (2025).
4. R. N. McKenzie, “Equational bases and non-modular lattice varieties”, *Trans. Am. Math. Soc.* **174**, 1–43 (1972).
5. А. О. Басheyева, М. В. Швидефски, К. Д. Сультанкулов, “The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. I. An equational basis”, *Sib. Electron. Math. Rep.* **19**, No. 2, 902–911 (2022).
6. А. О. Басheyева, М. В. Швидефски, “The lattice variety generated by L_4 . I”, *Lobachevskii J. Math.* **47**, No. 3, 1326–1334 (2026).
7. А. О. Басheyева, М. В. Швидефски, “The quasivariety $\mathbf{SP}(L_6)$. II. A duality result”, *Sib. Math. J.* **65**, No. 3, 514–521 (2024).
8. А. О. Басheyева, М. В. Швидефски, “The lattice variety generated by L_4 . II”, *Sib. Math. J.* **67**, No. 5, 1040–1049 (2026).
9. B. Jónsson, I. Rival, “Lattice varieties covering the smallest non-modular lattice variety”, *Pacific J. Math.* **82**, 463–478 (1979).
10. О. А. Кадyрова, М. В. Швидефски, “Quasivarieties generated by small suborder lattices. I. Equational bases”, *Sib. Electron. Math. Rep.* **20**, No. 1, 62–71 (2023).
11. О. А. Кадyрова, М. В. Швидефски, “Quasivarieties generated by small suborder lattices. II. A duality theorem”, *Lobachevskii J. Math.* **47**, No. 4, 1572–1589 (2026).
12. P. Jipsen, H. Rose, *Varieties of Lattices*, Springer, New York etc. (1992).
13. G. Grätzer, *Lattice Theory: Foundation*, Birkhäuser, Basel (2011).
14. R. Freese, J. Ježek, J. B. Nation, *Free Lattices*, Am. Math. Soc., Providence, RI (1995).
15. C. Herrmann, D. Pickering, M. Roddy, “A geometric description of modular lattices”, *Algebra Univers.* **31**, No. 3, 365–396 (1994).
16. W. Dziobiak, M. V. Schwidefsky, “New results for algebraic lattices”, *Algebra Logic* **64**, No. 3, 135–143 (2025).
17. L. Santocanale, F. Wehrung, “Varieties of lattices with geometric descriptions”, *Order* **30**, No. 1, 13–38 (2013).
18. A. P. Huhn, “Schwach distributive Verbände”, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **33**, 297–305 (1972).
19. J. B. Nation, “An approach to lattice varieties of finite height”, *Algebra Univers.* **27**, No. 4, 521–543 (1990).

- 20. M. E. Adams, W. Dziobiak, “Q-universal varieties of bounded lattices”, *Algebra Univers.* **48**, No. 2, 333–356 (2002).
- 21. S. D. Comer, D. X. Hong, “Some remarks concerning the varieties generated by the diamond and the pentagon”, *Trans. Am. Math. Soc.* **174**, 45–54 (1972).
- 22. M. Schützenberger, “Sur certains axiomes de la théorie des structures”, *C. R. Acad. Sci. Paris* **221**, 218–220 (1945).
- 23. B. Jónsson, “Equational classes of lattices”, *Math. Scand.* **22**, 187–196 (1968).
- 24. R. N. McKenzie, “Equational bases for lattice theories”, *Math. Scand.* **27**, 24–38 (1970).

Статья поступила в редакцию 4 августа 2026 г.
принята к публикации 23 сентября 2026 г.

К. А. Бекмаганбетов, В. В. Чепыжов, Г. А. Чечкин

ОБ АСИМПТОТИКЕ АТТРАКТОРОВ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ — СТОКСА В МОДЕЛЬНОЙ ОБЛАСТИ, ПЕРФОРИРОВАННОЙ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

Рассмотрена начально-краевая задача для двумерной системы Навье — Стокса в модельной области с мелкими препятствиями около границы. Предполагая, что на границе препятствий выставлено условие прилипания, а на внешней границе условие непротекания, а также третье краевое условие на тангенциальную компоненту вектора скорости, мы исследуем асимптотическое поведение траекторных аттракторов. В этих предположениях доказана слабая сходимости траекторных аттракторов этой системы к траекторным аттракторам усредненной системы Навье — Стокса в области без препятствий с условием прилипания на всей границе.

В данной статье мы рассматриваем аттракторы, которые используются для описания поведения решений в целом для диссипативных эволюционных уравнений. В частности, аттракторы содержат устойчивые и неустойчивые предельные режимы соответствующих бесконечномерных динамических систем (см., например, монографии [1]–[3] и библиографию там же).

Задачи в областях, перфорированных вдоль многообразий (в частности, вдоль границы), являются интересными с точки зрения теории дифференциальных уравнений и важными в прикладных вопросах. Отметим некоторые работы по усреднению в таких областях [4]–[10]. Усреднение систем Навье — Стокса в микронеоднородных средах рассмотрены в [11]. Отметим, что мы рассматриваем на части границы области краевые условия третьего рода, которые в теории аттракторов системы Навье — Стокса встречаются достаточно редко. Близкая постановка имеется в [12, 13], где рассмотрены так называемые свободные граничные условия, т.е. условие непротекания и условие нулевого вихря, которое в нашем случае сводится к условию равенства нулю тангенциальной составляющей вектора скорости (см. также работы об усреднении аттракторов в микронеоднородных средах [14]–[17]).

1. Постановка задачи и предварительные замечания

Начнем постановку задачи с геометрического описания области. Пусть D — область в $\mathbb{R}^2$, вида $(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ и пусть $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где $\Gamma_1 = \{x : x_1 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], x_2 = -\frac{1}{2}\}$, $\Gamma_2 = \{x : x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\}$, $\Gamma_3 = \{x : x_1 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}], x_2 = \frac{1}{2}\}$, $\Gamma_4 = \{x : x_1 = \frac{1}{2}, x_2 \in [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]\}$. Везде ниже $\varepsilon = \frac{1}{2N+1}$ — малый параметр, N — натуральное число, $N \gg 1$.

Мы также будем использовать следующие обозначения. Пусть B — произвольная двумерная область с гладкой границей, лежащая в круге $K = \{\xi : \xi_1^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < a^2\}$, $0 < a < \frac{1}{2}$. Обозначим

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект No. 25-11-00133).

К. А. Бекмаганбетов: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Казахстанский филиал и ТОО «Geometry», Астана, Казахстан; bekmaganbetov-ka@yandex.kz.

В. В. Чепыжов: Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Москва, Россия; cher@iitp.ru.

Г. А. Чечкин: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; chechkin@mech.math.msu.su.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* (2027)

© К. А. Бекмаганбетов, В. В. Чепыжов, Г. А. Чечкин, 2026

$B_\varepsilon^{1j} = \{x \in D : \varepsilon^{-1}(x_1 - \varepsilon j, x_2 + \frac{1}{2}) \in B\}$, $B_\varepsilon^{2j} = \{x \in D : \varepsilon^{-1}(x_1 + \frac{1-\varepsilon}{2}, x_2 - \varepsilon(j - \frac{1}{2})) \in B\}$,
 $B_\varepsilon^{3j} = \{x \in D : \varepsilon^{-1}(x_1 - \varepsilon j, x_2 + \varepsilon - \frac{1}{2}) \in B\}$, $B_\varepsilon^{4j} = \{x \in D : \varepsilon^{-1}(x_1 - \frac{1-\varepsilon}{2}, x_2 - \varepsilon(j - \frac{1}{2})) \in B\}$,
 $j \in \mathbb{Z}$. Пусть $B_\varepsilon = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \bigcup_{k=1}^4 B_\varepsilon^{kj}$. Определим область $D_\varepsilon = D \setminus \overline{B_\varepsilon}$ (см. рис. 1) с препятствиями вдоль
 границы. Обозначим $\Gamma_\varepsilon = D \cap \partial B_\varepsilon$. Тогда $\partial D_\varepsilon = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_\varepsilon$.

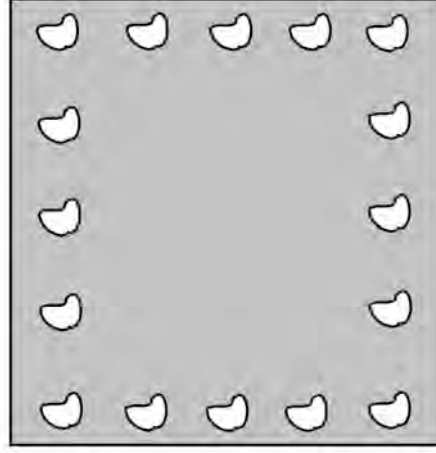


Рис. 1. Область D_ε .

Введем следующие обозначения для пространств

$$\mathbf{H} := \{u = (u^1, u^2) \in [L_2(D)]^2, (\nabla, u) = 0\},$$

$$\mathbf{H}_\varepsilon := \{u = (u^1, u^2) \in [L_2(D_\varepsilon)]^2, (\nabla, u) = 0\},$$

$$\mathbf{V} := \{u \in [H^1(D)]^2, (\nabla, u) = 0, u^1|_{\partial D} = 0, u^2|_{\partial D} = 0\},$$

$$\mathbf{V}_\varepsilon := \{u \in [H^1(D_\varepsilon)]^2, (\nabla, u) = 0, u^1|_{\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0, u^2|_{\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0\};$$

$\mathbf{V}_\varepsilon$ — это множество вектор-функций из $[H^1(D_\varepsilon)]^2$ с нулевым следом первой компоненты u^1 вектор-функции $u(x) = (u^1(x), u^2(x))$ на $\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4$ и нулевым следом второй компоненты u^2 на $\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_3$. Нормы в этих пространствах определяются стандартным образом:

$$\|v\|^2 := \int_D \sum_{i=1}^2 |v^i(x)|^2 dx, \quad \|v\|_\varepsilon^2 := \int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^2 |v^i(x)|^2 dx,$$

$$\|v\|_1^2 := \int_D \sum_{i=1}^2 |\nabla v^i(x)|^2 dx, \quad \|v\|_{1\varepsilon}^2 := \int_{D_\varepsilon} \sum_{i=1}^2 |\nabla v^i(x)|^2 dx.$$

Обозначим через $\mathbf{V}'$ и $\mathbf{V}'_\varepsilon$ двойственные пространства к пространствам $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_\varepsilon$ соответственно.

Рассмотрим следующую задачу для 2D системы Навье — Стокса в области D_ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta u_\varepsilon + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon + \nabla p &= g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x = (x_1, x_2) \in D_\varepsilon, \quad t > 0, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon &= 0, \quad x \in D_\varepsilon, \quad t > 0, \\ \nu \frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial n} + \alpha u_\varepsilon^1 &= 0, \quad u_\varepsilon^2 = 0, \quad x \in \Gamma_1 \cap \Gamma_3, \quad t > 0, \\ u_\varepsilon^1 &= 0, \quad \nu \frac{\partial u_\varepsilon^2}{\partial n} + \alpha u_\varepsilon^2 &= 0, \quad x \in \Gamma_2 \cap \Gamma_4, \quad t > 0, \\ u_\varepsilon &= 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad t > 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$u_\varepsilon = U(x), \quad x \in D_\varepsilon, \quad t = 0,$$

где $u_\varepsilon = u_\varepsilon(x, t) = (u_\varepsilon^1, u_\varepsilon^2)$ — неизвестная вектор-функция скорости, $p = p(x, t)$ — неизвестная скалярная функция давления, а $g = g(x) = (g^1, g^2) \in \mathbf{H}$ — известная внешняя сила, n — вектор внешней нормали к границе ∂D и $\nu > 0$, $\alpha \geq 0$. — коэффициенты. Здесь $\eta_1 \cdot \eta_2$ означает скалярное произведение векторов $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}^2$. Легко видеть, что на Γ_1 нормаль $n = (0, -1)$, на Γ_2 — нормаль $n = (-1, 0)$, на Γ_3 — нормаль $n = (0, 1)$ и на Γ_4 — нормаль $n = (1, 0)$.

Предполагается, что вектор-функция $g : D \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ является функцией Каратеодори, т.е. отображение $x \rightarrow g(x, \xi)$ измеримо по Лебегу при всех $\xi \in \mathbb{R}^2$, а отображение $\xi \rightarrow g(x, \xi)$ непрерывно для почти всех $x \in D$. Тогда отображение $x \rightarrow g(x, \frac{x}{\varepsilon})$ корректно задано и измеримо. Для вектор-функции $g(x, y)$ будем считать, что функции $g_\varepsilon(x) \equiv g(x, \frac{x}{\varepsilon}) \in \mathbf{H}$ для любого $\varepsilon > 0$ и имеют среднее $\bar{g}(x)$ в пространстве $\mathbf{H}$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$, т.е.

$$g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \bar{g}(x) \quad (\varepsilon \rightarrow 0+) \quad \text{слабо в } \mathbf{H} \quad (1.2)$$

или подробнее

$$\int_D g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \varphi(x) dx \rightarrow \int_D \bar{g}(x) \cdot \varphi(x) dx \quad (1.3)$$

для любой функции $\varphi \in \mathbf{H}$ при $\varepsilon \rightarrow 0+$. Отметим, что из (1.3) следует равномерная (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограниченность в $\mathbf{H}$ внешних сил $g_\varepsilon(x)$:

$$\|g_\varepsilon(\cdot)\| \leq R \quad \forall \varepsilon \in (0, 1). \quad (1.4)$$

Заметим, что так выбранные граничные условия для части границы ∂D обеспечивают выполнение ключевого свойства ортогональности для нелинейного члена, т.е.

$$\int_{D_\varepsilon} ((u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon) \cdot u_\varepsilon dx = 0 \quad \forall u_\varepsilon \in \mathbf{V}_\varepsilon. \quad (1.5)$$

поскольку на границе области ∂D_ε выполняется условие непротекания.

Покажем также, что для таких краевых условий оператор Стокса будет симметричным и отрицательным. Для достаточно гладких вектор-функций $u_\varepsilon, v_\varepsilon \in \mathbf{V}_\varepsilon$, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \Delta v_\varepsilon dx &= \sum_{i=1}^2 \int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon^i(x) \Delta v_\varepsilon^i(x) dx = - \sum_{i,j=1}^2 \int_{D_\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon^i}{\partial x_j}(x) \frac{\partial v_\varepsilon^i}{\partial x_j}(x) dx + \sum_{i=1}^2 \int_{\partial D_\varepsilon} u_\varepsilon^i(x) \frac{\partial v_\varepsilon^i}{\partial n}(x) d\sigma \\ &= - \int_{D_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon dx - \frac{\alpha}{\nu} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} u_\varepsilon^1(x) v_\varepsilon^1(x) dx_1 - \frac{\alpha}{\nu} \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} u_\varepsilon^2(x) v_\varepsilon^2(x) dx_2 \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{D_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon^i(x) v_\varepsilon^i(x) dx = \int_{D_\varepsilon} \Delta u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

Мы проверили симметричность. Одновременно при $v_\varepsilon = u_\varepsilon$ получили формулу

$$\int_{D_\varepsilon} u_\varepsilon \cdot \Delta u_\varepsilon dx = - \int_{D_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon dx - \frac{\alpha}{\nu} \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} u_\varepsilon^1(x) u_\varepsilon^1(x) dx_1 - \frac{\alpha}{\nu} \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} u_\varepsilon^2(x) u_\varepsilon^2(x) dx_2, \quad (1.6)$$

из которой следует отрицательность оператора Стокса.

Рассмотрим задачу Стокса, связанную с рассматриваемыми граничными условиями

$$\begin{aligned} -\nu \Delta u_\varepsilon + \nabla p &= g(x), \quad x = (x_1, x_2) \in D_\varepsilon, \quad t > 0, \\ \nabla \cdot u_\varepsilon &= 0, \quad x \in D_\varepsilon, \quad t > 0, \\ \nu \frac{\partial u_\varepsilon^1}{\partial n} + \alpha u_\varepsilon^1 &= 0, \quad u_\varepsilon^2 = 0, \quad x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_3, \quad t > 0, \\ u_\varepsilon^1 &= 0, \quad \nu \frac{\partial u_\varepsilon^2}{\partial n} + \alpha u_\varepsilon^2 = 0, \quad x \in \Gamma_2 \cup \Gamma_4, \quad t > 0, \\ u_\varepsilon &= 0, \quad x \in \Gamma_\varepsilon, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Пусть $g \in \mathbf{H}$. Слабым (или обобщенным) решением задачи (1.7) называется функция $u_\varepsilon(x) \in \mathbf{V}_\varepsilon$, для которой

$$\nu \int_{D_\varepsilon} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx + \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} \alpha u_\varepsilon^1 \psi^1 \, dx_1 + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} \alpha u_\varepsilon^2 \psi^2 \, dx_2 = \int_{D_\varepsilon} g(x) \cdot \psi \, dx \quad (1.8)$$

для любой $\psi = (\psi^1, \psi^2) \in \mathbf{V}_\varepsilon$.

Лемма 1.1. Для любого $g \in \mathbf{H}$ существует единственное слабое решение $u_\varepsilon(x) \in \mathbf{V}_\varepsilon$, причем выполнено тождество

$$\nu \int_{D_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x)|^2 dx + \alpha \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} |u_\varepsilon^1(x)|^2 dx_1 + \alpha \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} |u_\varepsilon^2(x)|^2 dx_2 = \int_{D_\varepsilon} g(x) \cdot u_\varepsilon(x) dx.$$

Доказательство аналогично классическому доказательству из [20] для случая граничного условия прилипания (т.е. нулевых условий Дирихле).

Вернемся к системе Навье — Стокса. Будем исследовать слабые решения начально-краевой задачи (1.1), т.е. функции

$$u_\varepsilon(x, t) \in \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\}$$

которые удовлетворяют задаче (1.1) в смысле обобщенных функций, т.е.

$$\begin{aligned} - \int_{D_\varepsilon \times \mathbb{R}_+} u_\varepsilon \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \, dx dt + \nu \int_{D_\varepsilon \times \mathbb{R}_+} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla \psi \, dx dt + \int_{D_\varepsilon \times \mathbb{R}_+} (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon \cdot \psi \, dx dt \\ + \alpha \int_{(\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times \mathbb{R}_+} u_\varepsilon^1 \psi^1 \, dx_1 dt + \alpha \int_{(\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \times \mathbb{R}_+} u_\varepsilon^2 \psi^2 \, dx_2 dt = \int_{D_\varepsilon \times \mathbb{R}_+} g_\varepsilon(x) \cdot \psi \, dx dt \end{aligned} \quad (1.9)$$

для любых функций $\psi = (\psi^1, \psi^2) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon)$.

Утверждается, что если $U \in \mathbf{H}_\varepsilon$, то существует единственное слабое решение $u_\varepsilon(t)$ начально-краевой задачи (1.1), которое принадлежит $\mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$, такое, что $u_\varepsilon(0) = U$. При этом, $\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon)$.

Доказательство аналогично классическому случаю прилипания на границе области (см. [20, 1, 2]). В [12, 13] этот факт установлен для свободных граничных условий. Аналогично доказывается для граничного условия 3-го рода для компоненты вектора скорости u^2 на части границы $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ и для компоненты вектора скорости u^1 на части границы $\Gamma_2 \cup \Gamma_4$. Ключевые свойства, которые при этом используются, это свойство ортогональности нелинейной функции в системе (1.1), также симметричность, отрицательность и обратимость оператора Стокса для приведенных граничных условий.

Следующая лемма имеет ключевое значение при выводе основных априорных оценок для решения задачи (1.1), а также при доказательстве теоремы существования и единственности слабого решения этой задачи. При ее доказательстве существенно используется свойство ортогональности (1.5), а также тождество (1.6). Аналогичное утверждение для нулевых условий Дирихле доказано в [3, предложение XV.3.1].

Лемма 1.2. Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ — слабое решение задачи (1.1). Тогда

- (i) $u_\varepsilon \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)$,
- (ii) функция $\|u_\varepsilon(\cdot, t)\|^2$ является абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}_+$, и выполнено дифференциальное тождество

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_\varepsilon(\cdot, t)\|_\varepsilon^2 + \nu \int_{D_\varepsilon} |\nabla u_\varepsilon(x, t)|^2 dx + \alpha \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} |u_\varepsilon^1(x, t)|^2 dx_1 + \alpha \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} |u_\varepsilon^2(x, t)|^2 dx_2 = \int_{D_\varepsilon} g_\varepsilon(x) \cdot u_\varepsilon(x, t) dx.$$

При описании пространства траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ для задачи (1.1) будем следовать общей схеме из [3] и определим банаховы пространства для каждого отрезка $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}_{t_1, t_2} := \mathbf{L}_{2, w}^{\text{loc}}(t_1, t_2; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_{\infty, *w}^{\text{loc}}(t_1, t_2; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2, w}^{\text{loc}}(t_1, t_2; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\} \quad (1.10)$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}} := \|v\|_{\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V}_\varepsilon)} + \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(t_1, t_2; \mathbf{H}_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V}'_\varepsilon)}. \quad (1.11)$$

Заметим, что $\Pi_{t_1, t_2} \mathcal{F}_{\tau_1, \tau_2} \subset \mathcal{F}_{t_1, t_2}$ и

$$\|\Pi_{t_1, t_2} f\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}} \leq \|f\|_{\mathcal{F}_{\tau_1, \tau_2}} \quad \forall f \in \mathcal{F}_{\tau_1, \tau_2}, \quad (1.12)$$

где $[t_1, t_2] \subseteq [\tau_1, \tau_2]$ и Π_{t_1, t_2} обозначает оператор сужения на отрезок $[t_1, t_2]$.

Пусть $S(h)$ для $h \in \mathbb{R}$ обозначает оператор сдвига $S(h)f(t) = f(h + t)$. Очевидно, если аргумент t функции $f(\cdot)$ принадлежит отрезку $[t_1, t_2]$, тогда аргумент t функции $S(h)f(\cdot)$ будет принадлежать отрезку $[t_1 - h, t_2 - h]$ для $h \in \mathbb{R}$. Легко видеть, что отображение $S(h)$ является изоморфизмом из $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ в $\mathcal{F}_{t_1 - h, t_2 - h}$ и

$$\|S(h)f\|_{\mathcal{F}_{t_1 - h, t_2 - h}} = \|f\|_{\mathcal{F}_{t_1, t_2}} \quad \forall f \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}. \quad (1.13)$$

Положив $\mathcal{D}_{t_1, t_2} = \mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{V}_\varepsilon)$, получаем, что $\mathcal{F}_{t_1, t_2} \subseteq \mathcal{D}_{t_1, t_2}$, а если $u(t) \in \mathcal{F}_{t_1, t_2}$, тогда $A(u(t)) \in \mathcal{D}_{t_1, t_2}$. Далее можно рассматривать слабые решения задачи (1.1) как решение системы уравнений из общей схемы (см. [18, 19], а также [3]).

Определим следующие пространства:

$$\mathcal{F}_+^{\text{loc}} = \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\},$$

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{\text{loc}} = \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ множество всех слабых решений задачи (1.1). Напомним, что для любой функции $U \in \mathbf{H}_\varepsilon$ существует единственная траектория $u_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ такая, что $u_\varepsilon(0) = U(x)$. Следовательно, пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (1.1) не пусто и достаточно велико.

Предложение 1.1. Пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ принадлежит $\mathcal{F}_+^{\varepsilon, b}$, и для любой траектории $u_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ выполнены неравенства

$$\|S(h)u_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^b}^2 \leq C_1 \|u_\varepsilon(0)\|_\varepsilon^2 e^{-\sigma h} + R_1^2, \quad (1.14)$$

$$\alpha \int_t^{t+1} \left(\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} |u_\varepsilon^1(x, s)|^2 dx_1 + \int_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} |u_\varepsilon^2(x, s)|^2 dx_2 \right) ds \leq C_2 \|u_\varepsilon(0)\|_\varepsilon^2 e^{-\sigma h} + R_2^2 \quad \forall t \geq 0,$$

где $\sigma > 0$, C_1, C_2 не зависят от $u_\varepsilon(0)$ и ε , а величины R_1, R_2 зависят от R (см. (1.4)).

Доказательство основано на использовании леммы 1.2, из которой с помощью неравенства Гронолла выводятся необходимые априорные оценки (см. [3]).

Пространство траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ является трансляционно-инвариантным, т.е. если $u_\varepsilon(t) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$, то $u_\varepsilon(h + t) \in \mathcal{K}_\varepsilon^+$ для любых $h \geq 0$. Следовательно,

$$S(h)\mathcal{K}_\varepsilon^+ \subseteq \mathcal{K}_\varepsilon^+ \quad \forall h \geq 0.$$

Далее, используя норму пространства $\mathbf{L}_2(t_1, t_2; \mathbf{H}_\varepsilon)$, определим метрики $\rho_{t_1, t_2}(\cdot, \cdot)$ в пространствах $\mathcal{F}_{t_1, t_2}$ следующим образом:

$$\rho_{0, M}(u, v) = \left(\int_0^M \|u(s) - v(s)\|_{\mathbf{H}_\varepsilon}^2 ds \right)^{1/2} \quad \forall u(\cdot), v(\cdot) \in \mathcal{F}_{0, M}.$$

Эти метрики порождают топологию $\Theta_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$ в пространстве $\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$. Напомним, что последовательность $\{v_k\} \subset \mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$ сходится к функции $v \in \mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$ при $k \rightarrow \infty$ в топологии $\Theta_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$, если $\|v_k(\cdot) - v(\cdot)\|_{\mathbf{L}_2(0, M; \mathbf{H}_\varepsilon)} \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) для любого $M > 0$. Топология $\Theta_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$ метризуема и соответствующее метрическое пространство является полным. Аналогично вводится топология в пространстве Θ_+^{loc} в пространстве $\mathcal{F}_+^{\text{loc}}$ заменой нормы $\mathbf{H}_\varepsilon$ на норму $\mathbf{H}$.

Мы рассматриваем топологию $\Theta_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$ в пространстве траекторий $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ задачи (1.1). Полугруппа сдвигов $\{S(h)\}$, действующая на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$ непрерывна в рассматриваемой топологии Θ_+^{loc} .

Следуя общей схеме, определим ограниченные множества в $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, используя банахово пространство

$$\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^b = \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\} \quad (1.15)$$

с нормой

$$\|v\|_{\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^b} := \|v\|_{\mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}_\varepsilon)} + \|v\|_{\mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial v}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}'_\varepsilon)}.$$

которое является подпространством пространства $\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$.

Рассмотрим полугруппу сдвигов $\{S(h)\}$ на $\mathcal{K}_\varepsilon^+$, $S(h) : \mathcal{K}_\varepsilon^+ \rightarrow \mathcal{K}_\varepsilon^+$, $h \geq 0$.

Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon$ означает ядро задачи (1.1), которое состоит из всех слабых решений $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, ограниченных в пространстве

$$\mathcal{F}_\varepsilon^b = \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}_\varepsilon) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}; \mathbf{H}_\varepsilon) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}'_\varepsilon) \right\}.$$

Предложение 1.2. *Задача (1.1) имеет траекторный аттрактор $\mathfrak{A}_\varepsilon$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc} . Множество $\mathfrak{A}_\varepsilon$ ограничено в $\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^b$ и компактно в $\Theta_{\varepsilon, +}^{\text{loc}}$. Более того, $\mathfrak{A}_\varepsilon = \Pi_+ \mathcal{K}_\varepsilon$, где ядро $\mathcal{K}_\varepsilon$ непусто и ограничено в $\mathcal{F}_\varepsilon^b$.*

Доказательство этого предложения, которое использует предложение 1.1, практически полностью совпадает с доказательством, приведенным в [3] для случая нулевых граничных условий.

Следствие 1.1. *Траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и ядра $\mathcal{K}_\varepsilon$ равномерно (по $\varepsilon \in (0, 1)$) ограничены в пространствах $\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^b$ и $\mathcal{F}_\varepsilon^b$ соответственно, т.е.*

$$\forall u_\varepsilon \in \mathfrak{A}_\varepsilon \quad \|u_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathcal{F}_{\varepsilon, +}^b} \leq R_1; \quad \forall u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon \quad \|u_\varepsilon(\cdot)\|_{\mathcal{F}_\varepsilon^b} \leq R_1. \quad (1.16)$$

2. Вспомогательное утверждение

В данном параграфе приводится утверждение, аналогичное лемме из [5]. Обозначим через $W_2^1(D)$ пространство функций из $W_2^1(D)$ с нулевым следом на границе области. Аналогично определим $W_2^1(D_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ — пространство функций из $W_2^1(D_\varepsilon)$ с нулевым следом на Γ_ε . Продолжим функции из $W_2^1(D_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ нулем внутрь полостей.

Лемма 2.1. *Пусть семейство $v_\varepsilon(x, t) \in L_2(0, 1; W_2^1(D_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))$, $\varepsilon \in (0, 1)$, равномерно ограничено по норме этого пространства и $v_\varepsilon \rightharpoonup v^*$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ слабо в $L_2(0, 1; W_2^1(D_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))$. Тогда $v^* \in L_2(0, 1; W_2^1(D))$.*

Доказательство. Покажем, что след функции v^* на Γ_1 равен нулю. Для остальных сторон квадрата (Γ_2 , Γ_3 и Γ_4) доказательство совершенно аналогично.

Пусть длина проекции B на ось ξ_1 равна b . Область D_ε представим следующим образом:

$$D_\varepsilon = \bigcup_{i=-N}^N (\Pi_{1, \varepsilon}^{i+} \cup \Pi_{1, \varepsilon}^{i-}) \cup \bigcup_{i=-N-1}^N \Pi_{2, \varepsilon}^i \cup R_\varepsilon,$$

где $\Pi_{1,\varepsilon}^{i,+}$ — область (часть вертикальной полосы) ширины $b\varepsilon$, ограниченная снизу верхней частью границы i -й области B_ε^i , а сверху частью внешней границы; область $\Pi_{1,\varepsilon}^{i,-}$ — полоса ширины $b\varepsilon$, ограниченная сверху нижней частью границы i -й области B_ε^i , а снизу — прямой $x_2 = 0$; $\Pi_{2,\varepsilon}^i$, $i = -\mathcal{N}, \dots, \mathcal{N} - 1$, — полоса ширины $(1 - b)\varepsilon$, ограниченная снизу прямой $x_2 = 0$, а сверху — куском внешней границы, имеющая общие вертикальные границы с областями $\Pi_{1,\varepsilon}^{i,+}$ и $\Pi_{1,\varepsilon}^{i+1,+}$ (см. рис. 2); самая левая область $\Pi_{2,\varepsilon}^{-\mathcal{N}-1}$ и самая правая область $\Pi_{2,\varepsilon}^{\mathcal{N}}$ — вертикальные полосы, ограниченные снизу прямой $x_2 = 0$, а сверху — куском границы Γ_1 , имеющие общие вертикальные границы с областями $\Pi_{1,\varepsilon}^{-\mathcal{N}+}$ и $\Pi_{1,\varepsilon}^{\mathcal{N}+}$ соответственно, и имеющие суммарную ширину $(1 - b)\varepsilon$, наконец, R_ε — это оставшиеся части области D_ε (быть может пустые), внешняя граница которых принадлежит ∂D .

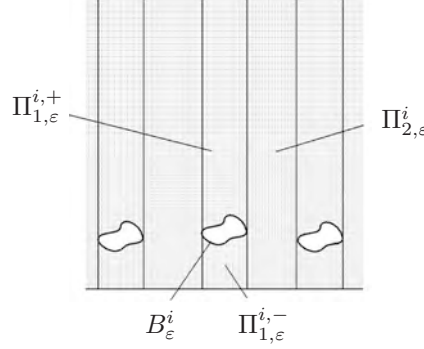


Рис. 2. Разбиение области D_ε .

Пусть $\omega > \varepsilon$. Обозначим через $\Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i,+}$ область $\Pi_{1,\varepsilon}^{i,+} \cap \{x_2 < \omega\}$ (см. рис. 3). Кроме того, пусть $\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}$ отрезок прямой $x_2 = \omega$, ограничивающий сверху множество $\Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i,+}$. Аналогично определяем множества $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ и $\Pi_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$.

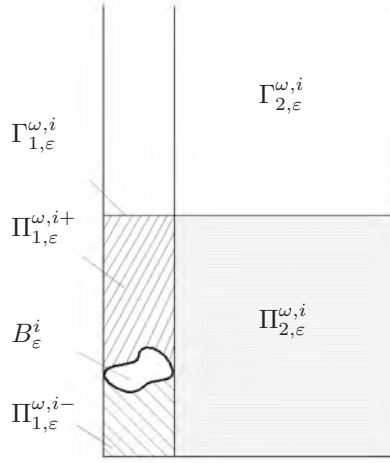


Рис. 3. Подобласти области D_ε . Разбиение слоя.

Не ограничивая общности, будем считать, что функции v_ε вещественнозначные. Обозначим через $C_0^\infty(\overline{D_\varepsilon}, \Gamma_\varepsilon)$ функции из $C^\infty(\overline{D})$, которые обращаются в нуль в окрестности B_ε . Предположим в начале, что $v_\varepsilon \in C_0^\infty(\overline{D_\varepsilon}, \Gamma_\varepsilon)$. Пусть $(x_1, \omega) \in \Pi_{1,\varepsilon}^{i,+}$, а точка $(x_1, \tilde{x}_2)$ лежит на нижнем основании $\Pi_{1,\varepsilon}^{i,+}$. Поскольку $v_\varepsilon(x_1, \tilde{x}_2, t) = 0$, по формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$v_\varepsilon(x_1, \omega, t) = \int_{\tilde{x}_2}^{\omega} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_2} dx_2.$$

Возведем обе части данного равенства в квадрат и применим неравенство Коши — Буняковского:

$$v_\varepsilon^2(x_1, \omega, t) = \left(\int_{\tilde{x}_2}^{\omega} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_2} dx_2 \right)^2 \leq \omega \int_{\tilde{x}_2}^{\omega} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_2} \right)^2 dx_2 \leq \omega \int_{\tilde{x}_2}^{\omega} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx_2. \quad (2.1)$$

Проинтегрируем обе части этого неравенства по переменной x_1 по $\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}$, считая, что функция v_ε продолжена нулем в $B_\varepsilon^i \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{i-}$. Получаем

$$\int_{\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}} v_\varepsilon^2(x_1, \omega, t) dx_1 \leq \omega \int_{\Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i+}} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx. \quad (2.2)$$

Рассмотрим теперь полосу $\Pi_{2,\varepsilon}^i$, $i = -\mathcal{N}, \dots, \mathcal{N}$. Пусть область B_ε^i касается ее слева. Проведем касательные из левого и правого концов отрезка $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ к области B_ε^i (см. рис. 4).

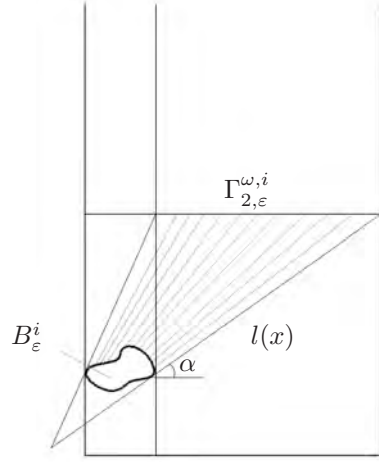


Рис. 4. Косые направления.

Легко видеть, что угол наклона касательных β лежит в пределах $(\beta_0, \frac{\pi}{2})$, где $\beta_0 > 0$ не зависит от ε и ω (напомним: мы предполагали, что $\omega > \varepsilon$). Это следует из того, что диаметр и расстояние между полостями имеют один и тот же порядок. Соединим все точки отрезка $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ с границей B_ε^i так, чтобы все эти прямые пересекались в точке пересечения касательных. У нас получился пучок прямых с направляющими $l(x_1)$, углы наклона которых лежат в промежутке $(\beta_0, \frac{\pi}{2})$. Пусть $(x_1, \omega) \in \Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$, а $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \partial B_\varepsilon^i \cap l(x_1, \omega)$. Поскольку $v_\varepsilon(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, t) = 0$, снова по формуле Ньютона — Лейбница имеем

$$v_\varepsilon(x_1, \omega, t) = \int_{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}^{(x_1, \omega)} \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial l} dl.$$

Аналогично (2.1), возводя обе части данного равенства в квадрат и применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем неравенство

$$v_\varepsilon^2(x_1, \omega, t) \leq \frac{\omega}{\sin^2 \beta_0} \int_{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}^{(x_1, \omega)} \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial l} \right)^2 dl \leq \frac{\omega}{\sin^2 \beta_0} \int_{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)}^{(x_1, \omega)} |\nabla v_\varepsilon|^2 dl.$$

Интегрируя обе части этого неравенства по x_1 по $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$ и заменяя правую часть на больший интеграл, получаем

$$\int_{\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}} v_\varepsilon^2(x_1, \omega, t) dx_1 \leq \frac{\omega}{\sin^2 \beta_0} \int_{\Pi_{2,\varepsilon}^{\omega,i} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i+} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,i-}} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx, \quad i = -\mathcal{N}, \dots, \mathcal{N}. \quad (2.3)$$

Осталось оценить интеграл по $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,-\mathcal{N}-1}$. Используем ту же конструкцию, что и для остальных $\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}$, $i = -\mathcal{N}, \dots, \mathcal{N}$, только рассмотрим область $B_\varepsilon^{-\mathcal{N}}$, которая касается полосы $\Pi_{2,\varepsilon}^{-\mathcal{N}-1}$ справа. Проводя аналогичные вычисления, получаем

$$\int_{\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,-\mathcal{N}-1}} v_\varepsilon^2(x_1, \omega, t) dx_1 \leq C\omega \int_{\Pi_{2,\varepsilon}^{\omega,-\mathcal{N}-1} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,-\mathcal{N}+1} \cup \Pi_{1,\varepsilon}^{\omega,-\mathcal{N}-1}} |\nabla v_\varepsilon|^2 dx. \quad (2.4)$$

Пусть $\Gamma^\omega = \overline{D} \cap \{(-\infty, \infty) \times \{\omega\}\}$ — отрезок, параллельный отрезку Γ_1 , в области D на расстоянии ω от этой стороны, т.е.

$$\Gamma^\omega = \bigcup_i \overline{\Gamma_{1,\varepsilon}^{\omega,i}} \cup \overline{\Gamma_{2,\varepsilon}^{\omega,i}}.$$

Просуммировав неравенства (2.2), (2.3) по i и прибавив (2.4), получаем оценку

$$\int_{\Gamma^\omega} v_\varepsilon^2(x_1, \omega, t) dx_1 \leq C_1\omega \int_D |\nabla v_\varepsilon|^2 dx. \quad (2.5)$$

Проведя аналогичные вычисления по остальным сторонам квадрата и просуммировав полученные неравенства, выводим неравенство (2.5), где Γ^ω — объединение отрезков, параллельных сторонам исходного квадрата, отстоящих от сторон исходного квадрата на ω .

Далее, проинтегрируем полученное неравенство по t от 0 до 1:

$$\int_0^1 \int_{\Gamma^\omega} v_\varepsilon^2(x_1, \omega, t) dx_1 dt \leq C_1\omega \int_0^1 \int_D |\nabla v_\varepsilon|^2 dx dt. \quad (2.6)$$

В силу плотности вложения $L_2(0, 1; C_0^\infty(\overline{D}_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))$ в $L_2(0, 1; W_2^1(D_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))$ следует, что оценка (2.6) справедлива и для любого $v_\varepsilon \in L_2(0, 1; W_2^1(D_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon))$. Тогда из равномерной ограниченности v_ε в этом пространстве вытекает неравенство

$$\int_0^1 \int_{\Gamma^\omega} v_\varepsilon^2(x_1, \omega, t) dx_1 dt \leq \omega M.$$

Поскольку $W_2^1(D)$ компактно вкладывается в $L_2(\Gamma^\omega)$, а v_ε слабо сходится в $L_2(0, 1; W_2^1(D))$, переходя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$\int_0^1 \int_{\Gamma^\omega} (v^*)^2 dx_1 dt \leq \omega M. \quad (2.7)$$

Наконец, поскольку ω — произвольно малое положительное число, то из (2.7) следует, что $v^* = 0$ на всей границе ∂D . Лемма доказана. $\square$

3. Усреднение исходной задачи

В этом параграфе изучается предельное поведение аттракторов $\mathfrak{A}_\varepsilon$ для системы уравнений Навье — Стокса (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0+$ и их сходимости к траекторному аттрактору соответствующего усредненного уравнения в области D без препятствий.

Усредненная (предельная) задача имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \nu \Delta u_0 + (u_0 \cdot \nabla) u_0 + \nabla p &= \overline{g}(x), \quad x \in D, \quad t > 0, \\ (\nabla \cdot u_0) &= 0, \quad x \in D, \quad t > 0, \\ u_0 &= 0, \quad x \in \partial D, \quad t > 0, \\ u_0 &= U(x), \quad x \in D, \quad t = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рассматриваются слабые решения начально-краевой задачи (3.1), т.е. функции

$$u_0(x, s) \in \mathbf{L}_{2,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}) \cap \mathbf{L}_{\infty,*w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}) \cap \left\{ v : \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} \in \mathbf{L}_{2,w}^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}') \right\},$$

которые удовлетворяют задаче (1.1) в смысле обобщенных функций, т.е.

$$-\int_{D \times \mathbb{R}_+} u_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdt + \nu \int_{D \times \mathbb{R}_+} \nabla u_0 \cdot \nabla \psi dxdt + \int_{D \times \mathbb{R}_+} (u_0 \cdot \nabla) u_0 \cdot \psi dxdt = \int_{D \times \mathbb{R}_+} \bar{g}(x) \cdot \psi dxdt \quad (3.2)$$

для любых функций $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{V})$.

Как известно, при любом $U \in \mathbf{H}$ задача (3.1) имеет единственное слабое решение [1, 2, 20].

Следующая лемма доказывается аналогично предложению XV.3.1 из [3].

Лемма 3.1. Пусть $u(x, t)$ — слабое решение задачи (3.1). Тогда

- (i) $u \in C(\mathbb{R}_+; \mathbf{H})$,
- (ii) функция $\|u(\cdot, t)\|^2$ является абсолютно непрерывной на $\mathbb{R}_+$; более того,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|^2 + \nu \int_D |\nabla u(x, t)|^2 dx \int_D \bar{a}(x) f(u(x, t)) \cdot u(x, t) dx = \int_D \bar{g}(x) \cdot u(x, t) dx.$$

Справедливо неравенство, аналогичное (1.14) в соответствующем пространстве $\mathcal{F}_+^b$. Задача (3.1) имеет траекторный аттрактор $\bar{\mathfrak{A}}$ в пространстве траекторий $\bar{\mathcal{K}}^+$, состоящем из всех слабых решений задачи (3.1), причем $\bar{\mathfrak{A}} = \Pi_+ \bar{\mathcal{K}}$ где $\bar{\mathcal{K}}$ — ядро задачи (3.1) в $\mathcal{F}^b$. Выполнено также неравенство (см. [3])

$$\forall u \in \bar{\mathfrak{A}} \quad \|u(\cdot)\|_{\mathcal{F}_+^b} \leq R_1.$$

Определение 3.1. Будем говорить, что траекторные аттракторы $\mathfrak{A}_\varepsilon$ сходятся к траекторному аттрактору $\bar{\mathfrak{A}}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ в топологическом пространстве Θ_+^{loc} , если для любой окрестности $\mathcal{O}(\bar{\mathfrak{A}})$ в Θ_+^{loc} найдется $\varepsilon_1 > 0$ такое, что $\mathfrak{A}_\varepsilon \subseteq \mathcal{O}(\bar{\mathfrak{A}})$ при любом $\varepsilon < \varepsilon_1$, т.е. для любого $M > 0$

$$\text{dist}_{\Theta_{0,M}}(\Pi_{0,M} \mathfrak{A}_\varepsilon, \Pi_{0,M} \bar{\mathfrak{A}}) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Введем еще одно вспомогательное промежуточное пространство

$$\mathbf{V}^1 := \{u \in [H^1(D)]^2, (\nabla, u) = 0, u^1|_{\Gamma_2 \cup \Gamma_4} = 0, u^2|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_3} = 0\},$$

состоящее из функций с областью определения D (без препятствий), но с граничными условиями на ∂D , как в исходной задаче (1.1). Заметим, что пространство $\mathbf{V}$ является подпространством $\mathbf{V}^1$, $\mathbf{V} \subset \mathbf{V}^1$. Следовательно, $(\mathbf{V}^1)' \subset \mathbf{V}'$.

Сформулируем основную теорему об усреднении систем уравнений Навье — Стокса.

Теорема 3.1. В метрическом пространстве Θ_+^{loc} справедливо предельное соотношение

$$\mathfrak{A}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathfrak{A}}, \quad \varepsilon \rightarrow 0+. \quad (3.3)$$

Кроме того

$$\mathcal{K}_\varepsilon \rightarrow \bar{\mathcal{K}}, \quad \varepsilon \rightarrow 0+ \quad \text{в } \Theta^{\text{loc}}. \quad (3.4)$$

Замечание 3.1. Функции из множеств $\mathfrak{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{K}_\varepsilon$ заданы на областях D_ε с препятствиями. Однако, все эти функции можно продолжить нулем внутрь препятствий, и при этом нормы продолженных функций в пространствах $\mathbf{H}$ и $\mathbf{V}^1$ (определенных без препятствий) совпадают с соответствующими нормами в перфорированных пространствах $\mathbf{H}_\varepsilon$ и $\mathbf{V}_\varepsilon$. При нулевом продолжении внутрь препятствий имеем включение $\mathbf{V}_\varepsilon \subset \mathbf{V}^1$. Наконец, в теореме 3.1 все расстояния измеряются в пространствах Θ_+^{loc} и Θ^{loc} с учетом нулевого продолжения внутрь препятствий.

Доказательство теоремы 3.1. Ясно, что (3.4) влечет (3.3). Поэтому достаточно доказать (3.4), т.е. показать, что для любой окрестности $\mathcal{O}(\bar{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc} найдется $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\mathcal{O}) > 0$ такое, что

$$\mathcal{K}_\varepsilon \subset \mathcal{O}(\bar{\mathcal{K}}) \quad \forall \varepsilon < \varepsilon_1. \quad (3.5)$$

Предположим, что (3.5) неверно. Тогда найдутся окрестность $\mathcal{O}'(\bar{\mathcal{K}})$ в Θ^{loc} , последовательности $\varepsilon_k \rightarrow 0+$ ($k \rightarrow \infty$) и $u_{\varepsilon_k}(\cdot) = u_{\varepsilon_k}(s) \in \mathcal{K}_{\varepsilon_k}$ такие, что

$$u_{\varepsilon_k} \notin \mathcal{O}'(\bar{\mathcal{K}}) \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.6)$$

Из следствия 1.1 и неравенства (1.16) вытекает, что последовательность $\{u_{\varepsilon_n}\}$, продолженная нулем внутри препятствий, ограничена в пространстве

$$\mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}^1) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}') \right\},$$

которое отличается от пространства $\mathcal{F}^b$ заменой $\mathbf{V}$ на более широкое пространство $\mathbf{V}^1$:

$$\|u_{\varepsilon_n}\|_{\mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}^1)} + \|u_{\varepsilon_n}\|_{\mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}_+; \mathbf{H})} + \left\| \frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial t} \right\|_{\mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}')} \leq R_1. \quad (3.7)$$

Воспользуемся теперь свойством слабой компактности ограниченных последовательностей в банаховых пространствах: найдется функция

$$u_0 \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}^1) \cap \mathbf{L}_\infty(\mathbb{R}; \mathbf{H}) \cap \left\{ v \mid \frac{\partial v}{\partial t} \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V}') \right\},$$

для которой при переходе к подпоследовательности

$$u_{\varepsilon_n}(t) \rightharpoonup u_0(t) \quad (n \rightarrow \infty) \text{ слабо в } \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}^1),$$

$$*- \text{слабо в } \mathbf{L}_\infty^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{H}),$$

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_n}(t)}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_0(t)}{\partial t} \quad (n \rightarrow \infty) \text{ слабо в } \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathbf{V}').$$

В силу теоремы о сильной компактности мы можем также предполагать, что

$$u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{в } \Theta^{\text{loc}}. \quad (3.8)$$

Проверим, что $u_0 \in \bar{\mathcal{K}}$.

Функции $u_{\varepsilon_n}(x, t)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial t} - \nu \Delta u_{\varepsilon_n} + (u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} + \nabla p = g\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right), \quad x \in D_{\varepsilon_n}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

с граничными условиями

$$\nu \frac{\partial u_{\varepsilon_n}^1}{\partial n} + \alpha u_{\varepsilon_n}^1 = 0, \quad u_{\varepsilon_n}^2 = 0, \quad x \in \Gamma_1 \cap \Gamma_3,$$

$$u_{\varepsilon_n}^1 = 0, \quad \nu \frac{\partial u_{\varepsilon_n}^2}{\partial n} + \alpha u_{\varepsilon_n}^2 = 0, \quad x \in \Gamma_2 \cap \Gamma_4,$$

$$u_{\varepsilon_n} = 0, \quad x \in \Gamma_{\varepsilon_n},$$

в смысле обобщенных функций, т.е. выполнено интегральное тождество

$$\begin{aligned} & - \int_{D_{\varepsilon_n} \times \mathbb{R}} u_{\varepsilon_n} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdt + \nu \int_{D_{\varepsilon_n} \times \mathbb{R}} \nabla u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla \psi dxdt + \int_{\Omega_{\varepsilon_n} \times \mathbb{R}} (u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} \cdot \psi dxdt \\ & + \alpha \int_{(\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times \mathbb{R}} u_{\varepsilon_n}^1 \psi^1 dx_1 dt + \alpha \int_{(\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \times \mathbb{R}} u_{\varepsilon_n}^2 \psi^2 dx_2 dt = \int_{D_{\varepsilon_n} \times \mathbb{R}} g_\varepsilon(x) \cdot \psi dxdt \end{aligned}$$

для любых функций $\psi = (\psi^1, \psi^2) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{V}_\varepsilon)$.

Обозначим через $g_\varepsilon^0(x)$ внешнюю силу, которая получается из $g_\varepsilon^0(x)$ продолжением нулем внутрь препятствий $B_\varepsilon \cap D$. Функции $u_{\varepsilon_n}(x, t)$, продолженные нулем внутрь препятствий, являются слабыми решениями следующей задачи в области D без препятствий

$$\frac{\partial u_{\varepsilon_n}}{\partial t} - \nu \Delta u_{\varepsilon_n} + (u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} + \nabla p = g_{\varepsilon_n}^0(x), \quad x \in D, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\nu \frac{\partial u_{\varepsilon_n}^1}{\partial n} + \alpha u_{\varepsilon_n}^1 = 0, \quad u_{\varepsilon_n}^2 = 0, \quad x \in \Gamma_1 \cap \Gamma_3,$$

$$u_{\varepsilon_n}^1 = 0, \quad \nu \frac{\partial u_{\varepsilon_n}^2}{\partial n} + \alpha u_{\varepsilon_n}^2 = 0, \quad x \in \Gamma_2 \cap \Gamma_4,$$

т.е. выполнено тождество

$$\begin{aligned} & - \int_{D \times \mathbb{R}} u_{\varepsilon_n} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdt + \nu \int_{D \times \mathbb{R}} \nabla u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla \psi dxdt + \int_{D \times \mathbb{R}} (u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} \cdot \psi dxdt \\ & + \alpha \int_{(\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \times \mathbb{R}} u_{\varepsilon_n}^1 \psi^1 dx_1 dt + \alpha \int_{(\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \times \mathbb{R}} u_{\varepsilon_n}^2 \psi^2 dx_2 dt = \int_{D \times \mathbb{R}} g_\varepsilon^0(x) \cdot \psi dxdt \end{aligned}$$

для любых функций $\psi = (\psi^1, \psi^2) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{V}^1)$.

Заметим, что $\mathbf{V}$ является подпространством $\mathbf{V}^1$. Следовательно, имеется тождество

$$- \int_{D \times \mathbb{R}} u_{\varepsilon_n} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdt + \nu \int_{D \times \mathbb{R}} \nabla u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla \psi dxdt + \int_{D \times \mathbb{R}} (u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} \cdot \psi dxdt = \int_{D \times \mathbb{R}} g_\varepsilon^0(x) \cdot \psi dxdt, \quad (3.10)$$

для любой функции $\psi = (\psi^1, \psi^2) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{V})$. Интегралы по границе $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_4$ равны нулю, поскольку здесь след функции ψ равен нулю.

Из (3.7) заключаем, что для всех $M > 0$ имеются сходимости

$u_{\varepsilon_n}(t) \rightharpoonup u_0(t)$ ($n \rightarrow \infty$) слабо в $\mathbf{L}_2(-M, M; \mathbf{V}^1)$,

*-слабо в $\mathbf{L}_\infty(-M, M; \mathbf{H})$,

$\frac{\partial u_{\varepsilon_n}(t)}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial u_0(t)}{\partial t}$ ($n \rightarrow \infty$) слабо в $\mathbf{L}_2(-M, M; \mathbf{V}')$.

По теореме о компактности заключаем, что $u_{\varepsilon_n}(t) \rightarrow u_0(t)$ ($n \rightarrow \infty$) сильно в $\mathbf{L}_2(-M, M; \mathbf{H})$ и $u_{\varepsilon_n}(x, t) \rightarrow u_0(x, t)$ ($n \rightarrow \infty$) при почти всех $(x, t) \in D \times (-M, M)$. В частности, $u_{\varepsilon_n}(t) \rightarrow u_0(t)$ ($n \rightarrow \infty$) сильно в $\Theta_+^{\text{loc}} = \mathbf{L}_2^{\text{loc}}(\mathbb{R}; \mathbf{H})$.

Для предельного перехода в нелинейном члене, заметим, что

$$(u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^2 u_{\varepsilon_n}^i \partial_{x_i} u_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} (u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n}) - \left(\sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} u_{\varepsilon_n}^i \right) u_{\varepsilon_n} = \sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} (u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n}), \quad (3.11)$$

поскольку

$$\sum_{i=1}^2 \partial_{x_i} u_{\varepsilon_n}^i = (\nabla \cdot u_{\varepsilon_n}) = 0.$$

Выше было установлено, что $u_{\varepsilon_n}(x, t) \rightarrow u_0(x, t)$ ($n \rightarrow \infty$) при почти всех $(x, t) \in D \times (-M, M)$. Следовательно, в силу того, что $u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0^i u_0$ при почти всех $(x, t) \in D \times (-M, M)$, а из неравенства Ладыженской вытекает, что $u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n}$ ограничено в $\mathbf{L}_2(-M, M; \mathbf{H})$. Поэтому, $u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n} \rightarrow u_0^i u_0$ слабо в $\mathbf{L}_2(-M, M; \mathbf{H})$ (см. [3, лемма II.1.2]), и, следовательно, $\partial_{x_i} u_{\varepsilon_n}^i u_{\varepsilon_n} \rightarrow \partial_{x_i} u_0^i u_0$ слабо в $\mathbf{L}_2(-M, M; \mathbf{V}')$. Поэтому из (3.11) получаем

$$(u_{\varepsilon_n} \cdot \nabla) u_{\varepsilon_n} \rightarrow (u_0 \cdot \nabla) u_0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{слабо в } \mathbf{L}_2(-M, M; \mathbf{V}'). \quad (3.12)$$

В силу (1.2)

$$g\left(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\right) \rightharpoonup \bar{g}(x) \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{слабо в } \mathbf{H}.$$

Тогда $g_\varepsilon^0(x) \rightharpoonup \bar{g}(x)$ ($n \rightarrow \infty$) слабо в $\mathbf{H}$, поскольку площадь препятствий оценивается сверху величиной порядка $O(\varepsilon)$.

Наконец, имея полученные сходимости, в тождестве (3.10) совершаем предельный переход и получаем интегральное равенство

$$- \int_{D \times \mathbb{R}} u_0 \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdt + \nu \int_{D \times \mathbb{R}} \nabla u_0 \cdot \nabla \psi dxdt + \int_{D \times \mathbb{R}} (u_0 \cdot \nabla) u_0 \cdot \psi dxdt = \int_{D \times \mathbb{R}} \bar{g} \cdot \psi dxdt \quad (3.13)$$

для любой $\psi = (\psi^1, \psi^2) \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}; \mathbf{V})$ (см. подробное доказательство в [3, 18, 19]).

Нам осталось проверить, что $u_0 \in \mathcal{F}^b$. Для этого применим лемму 2.1, из которой непосредственно следует, что $u_0 \in \mathbf{L}_2^b(\mathbb{R}; \mathbf{V})$.

Следовательно, $u_0 \in \overline{\mathcal{K}}$, т.е. u_0 — полная траектория задачи (3.1). В то же время мы установили, что $u_{\varepsilon_n}(t) \rightarrow u_0(t)$ ($n \rightarrow \infty$) в Θ_+^{loc} и, следовательно, $u_{\varepsilon_n}(t) \in \mathcal{O}'(u_0(t)) \subset \mathcal{O}'(\overline{\mathcal{K}})$ при $\varepsilon_n \ll 1$. Это противоречит (3.6). Теорема доказана. $\square$

Литература

1. R. Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*, Springer, New York (1988).
2. А.В. Бабин, М. И. Вишик, *Аттракторы эволюционных уравнений*, Наука, М. (1989).
3. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, *Attractors for Equations of Mathematical Physics*, Am. Math. Soc. Providence, RI (2002).
4. M. Lobo, O. A. Oleinik, M. E. Pérez, T. A. Shaposhnikova, “On homogenization of solutions of boundary value problems in domains perforated along manifolds”, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (IV)*, **25**, No. 34, 611–629 (1997).
5. Р. Р. Гадильшин, Ю. О. Королева, Г. А. Чечкин, “О сходимости решений и собственных элементов краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы”, *Дифференц. уравнения* **46**, No. 5, 665–677 (2010).
6. Р. Р. Гадильшин, Ю. О. Королева, Г. А. Чечкин, “Об асимптотике простого собственного значения краевой задачи в области, перфорированной вдоль границы”, *Дифференц. уравнения* **47**, No. 6, 819–828 (2011).
7. G. A. Chechkin, Yu. O. Koroleva, L.-E. Persson, P. Wall, “On spectrum of the Laplacian in a circle perforated along the boundary: application to a Friedrichs-type inequality”, *Int. J. Differ. Equ.* **2011**, Article No. 619623 (2011).
8. G. A. Chechkin, Yu. O. Koroleva, L.-E. Persson, P. Wall, “A new weighted Friedrichs-type inequality for a perforated domain with a sharp constant”, *Eurasian Math. J.* **2**, No. 1, 81–103 (2011).
9. Y. Amirat, O. Bodart, G. A. Chechkin, A. L. Piatnitski, “Asymptotics of a spectral-sieve problem”, *J. Math. Anal. Appl.* **435**, No. 2, 1652–1671 (2016).
10. G. A. Chechkin, C. D’Apice, U. De Maio, R. R. Gadyl’shin, “On singularly perturbed Steklov problem in domain perforated along the boundary”, *C. R. Мéc.* **344**, No. 1, 12–18 (2016).
11. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, A. Yu. Goritsky, “Homogenization of trajectory attractors of 3D Navier–Stokes system with randomly oscillating force”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A* **37**, No. 5, 2375–2393 (2017).
12. R. Temam, M. Ziane, “Navier–Stokes equations in three-dimensional thin domains with various boundary conditions”, *Adv. Differ. Equ.* **1**, 499–546 (1996).
13. M. Ziane, “On the two-dimensional Navier–Stokes equations with the free boundary condition”, *Appl. Math. Optim.* **38**, No. 1, 1–19 (1998).
14. G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, L. S. Pankratov, “Homogenization of trajectory attractors of Ginzburg–Landau equations with randomly oscillating terms”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **23**, No. 3, 1133–1154 (2018).
15. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, “Weak convergence of attractors of reaction–diffusion systems with randomly oscillating coefficients”, *Appl. Anal.* **98**, No. 1-2, 256–271 (2019).
16. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, ““Strange term” in homogenization of attractors of reaction–diffusion equation in perforated domain”, *Chaos Solitons Fractals* **140**, Article No. 110208 (2020).
17. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, V. V. Chepyzhov, A. A. Tolemis, “Homogenization of attractors to Ginzburg–Landau equations in media with locally periodic obstacles: sub- and supercritical cases”, *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.* **2**, 40–56 (2024).
18. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, “Trajectory attractors for the 3D Navier–Stokes system and some generalizations”, *Top. Methods Nonlinear Anal.* **8**, 217–243 (1996).

19. V. V. Chepyzhov, M. I. Vishik, “Evolution equations and their trajectory attractors”, *J. Math. Pures Appl.* **76**, No. 10, 913–964 (1997).
20. R. Temam, *Navier–Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam etc. (1979).

Статья поступила в редакцию 30 марта 2026 г.
принята к публикации 19 мая 2026 г.

А. А. Бондарев

ДВУМЕРНАЯ АВТОНОМНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СИСТЕМА С ПОЛНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТЬЮ ВДОЛЬ ЛЮБОГО ЛУЧА, НО ЧАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТЬЮ МАССИВНОГО ХАРАКТЕРА

Построен пример двумерной автономной нелинейной (с нулевым линейным приближением) дифференциальной системы, у которой, с одной стороны, имеется общерадиальная полная неустойчивость (сразу трех типов: по Ляпунову, по Перрону и верхнепредельного), с другой стороны, все ее решения, начинающиеся во внешности единичного круга, стремятся по норме к нулю при неограниченном росте времени.

1. Введение

1.1. Настоящая статья посвящена исследованию реализуемости на конкретных дифференциальных системах контрастных сочетаний свойств устойчивости и неустойчивости трех типов: *ляпуновского, перроновского и верхнепредельного*. Она продолжает цикл публикаций автора (см. исследования [1]–[3] и библиографию там же) о возможностях реализаций такого рода сочетаний свойств, называемых далее *стабильностными* [4].

Основной ее результат логически усиливает классический пример дифференциальной системы, построенный в [5, гл. III, § 6.3], у которой, с одной стороны, все решения стремятся к нулю при неограниченном росте времени, но с другой стороны, имеет место неустойчивость по Ляпунову, а также усиливает в двумерном случае построенный ранее автором в [2] пример автономной дифференциальной системы, у которой, во-первых, *меры неустойчивости* (см. их определения и свойства в [6]–[8]) трех вышеперечисленных типов полны (т.е. равны единице), во-вторых, имеется *массивная частная устойчивость* перроновского и верхнепредельного типов.

1.2. Для числа $n \in \mathbb{N}$ и фазовой области $G \subseteq \mathbb{R}^n$, содержащей точку 0, рассмотрим на временной полуоси $\mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty)$ допускающую нулевое решение автономную и, вообще говоря, нелинейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(x), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in G, \quad f(0) = 0, \quad f \in C^1(G, \mathbb{R}^n). \quad (1.1)$$

Ее правая часть f в силу наложенного на нее последнего требования (1.1) обеспечивает [9, гл. 2, п. 2.1] для задач Коши существование и единственность их *непродолжаемых* [9, гл. 2, § 2.7] решений $x_f(\cdot, x_0) \equiv (x_{f,1}(\cdot, x_0), \dots, x_{f,n}(\cdot, x_0))^T$, удовлетворяющих начальным условиям $x_f(0, x_0) = x_0$.

Исследование выполнено при поддержке фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект No. 22-8-10-3-1).

А. А. Бондарев: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; albondarev1998@yandex.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* (2027)

© А. А. Бондарев, 2026

Будем использовать обозначение $\rho_G \equiv \sup \{ \rho > 0 \mid \mathbb{B}_\rho \subseteq G \}$, в котором для $\rho > 0$ положено $\mathbb{B}_\rho \equiv \{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid 0 < |x_0| \leq \rho \}$, $\mathbb{B}_{\rho,u} \equiv \{ cu \mid 0 < c \leq \rho \} \subset \mathbb{B}_\rho$, $u \in \mathbb{S} \equiv \{ x_0 \in \mathbb{R}^n \mid |x_0| = 1 \}$.

Отметим, что для величины ρ_G справедливо двойное неравенство $0 < \rho_G \leq +\infty$, вытекающее из открытости фазовой области G .

Введем следующее определение стабильностных свойств нулевого решения дифференциальной системы (1.1).

Определение 1.1 ([4]). Скажем, что система (1.1) обладает *ляпуновской*, *перроновской* или *верхнепределельной*:

1) *устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_G)$, что все начальные значения $x_0 \in \mathbb{B}_\delta$ удовлетворяют соответственно требованию

$$\sup_{t \in \mathbb{R}_+} |x_f(t, x_0)| \leq \varepsilon, \quad (1.2)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_f(t, x_0)| \leq \varepsilon, \quad (1.3)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} |x_f(t, x_0)| \leq \varepsilon, \quad (1.4)$$

2) *частной устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ хотя бы одно ненулевое начальное значение $x_0 \in G$ удовлетворяет соответствующему требованию (1.2)–(1.4),

3) *полной неустойчивостью*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta \in (0, \rho_G)$, что любое начальное значение $x_0 \in \mathbb{B}_\delta$ не удовлетворяет соответствующему требованию (1.2)–(1.4).

Замечание 1.1. Отметим, что каждое из требований (1.2)–(1.4) считается по умолчанию невыполненным, в частности, если решение $x_f(\cdot, x_0)$ определено не на всей полуоси $\mathbb{R}_+$, т.е. когда его фазовая кривая за конечное время выходит к границе фазовой области G или уходит на бесконечность.

Сужение в пп. 1 и 3 определения 1.1 множества начальных значений на лучи, исходящие из нуля, представляет

Определение 1.2 ([10]). Система (1.1) обладает *ляпуновским*, *перроновским* или *верхнепределельным*:

4) *радиальным* свойством — *устойчивостью* или *полной неустойчивостью* в направлении $u \in \mathbb{S}$, если она обладает соответствующим свойством из пп. 1 и 3 определения 1.1 с механической заменой в них множества $\mathbb{B}_\delta$ множеством $\mathbb{B}_{\delta,u}$,

5) *общерадиальным* свойством — *устойчивостью* или *полной неустойчивостью*, если соответствующее свойство из п. 4 настоящего определения имеет место в каждом направлении $u \in \mathbb{S}$.

Некоторое усиление свойств частной устойчивости путем распространения их на бесконечное (даже континуальное) множество начальных значений представляет нижеследующее

Определение 1.3 ([11]). Система (1.1) обладает *перроновской* или *верхнепределельной*

6) *массивной частной устойчивостью*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta \in (0, \rho_G)$, что сразу все начальные значения $x_0 \in G \setminus \mathbb{B}_\delta$ удовлетворяют соответственно требованию (1.3) или (1.4).

2. Основной результат

Обладание дифференциальной системой массивными частными устойчивостями, вообще говоря, не гарантирует наличие у нее устойчивости и даже *почти устойчивости* (см. соответствующее определение в [4, § 3]). Так, автором ранее были построены примеры систем, реализующие контрастные сочетания свойств из определения 1.3:

- в неавтономном случае — с крайней неустойчивостью [1],
- в автономном случае — с полными мерами неустойчивости [2].

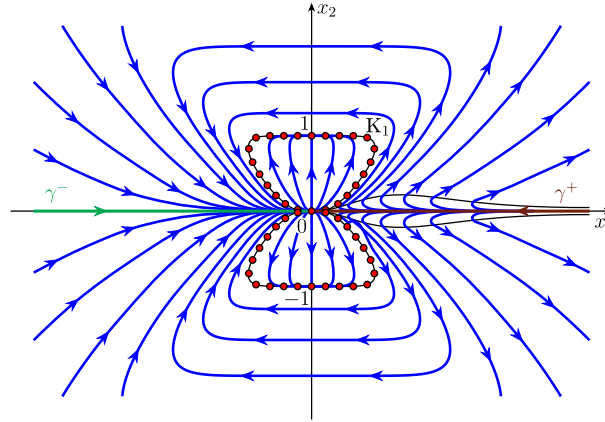


Рис. 1. Фазовый портрет системы (2.2)

Слдующий результат также представляет собой систему с подобного рода контрастными сочетаниями свойств массивной частной устойчивости, но с общерадиальными полными неустойчивостями (см. исследования сочетаний радиальных свойств в [3], [10], [12] и библиографию там же), и логически усиливает [10, теорема 7] результат работы [2] для двумерных фазовых пространств.

Теорема 2.1. Для $n = 2$ и области $G = \mathbb{R}^n$ существует дифференциальная система (1.1) с нулевым линейным приближением (вдоль нулевого решения), обладающая одновременно следующими свойствами:

- для любого $u \in \mathbb{S}$ существует такое $\delta > 0$, что каждое $x_0 \in \mathbb{B}_{\delta,u}$ удовлетворяет равенству

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |x_f(t, x_0)| = 1, \quad (2.1)$$

- любое $x_0 \in G \setminus \mathbb{B}_1$ удовлетворяет требованию (1.4) при $\varepsilon = 0$.

Замечание 2.1. Распространить результат теоремы на случай одномерных фазовых пространств невозможно, поскольку при $n = 1$ существование двух начальных значений разных знаков, удовлетворяющих требованию (1.4) при $\varepsilon = 0$, влечет [4, теорема 29] наличие у системы устойчивости (сразу всех трех типов).

Вопрос о существовании дифференциальных систем с набором стабильностных свойств из теоремы 2.1 в пространствах размерностей $n > 2$ пока остается открытым.

Доказательство теоремы 2.1. 1. На декартовой плоскости с координатами $x \equiv (x_1, x_2)^\top$ рассмотрим дифференциальную систему (ее фазовый портрет представлен на рис. 1)

$$\dot{x} = f(x), \quad f \equiv (f_1, f_2)^\top: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (2.2)$$

$$f_1(x_1, x_2) \equiv \psi^2(x_1, x_2) \cdot \begin{cases} x_1(1 - 2x_2^4), & x \in U, \\ \varphi(x_1, x_2), & x \notin U, \end{cases} \quad f_2(x_1, x_2) \equiv \psi^2(x_1, x_2) \cdot \begin{cases} 2x_2(1 - x_2^4), & x \in U, \\ 2x_1^7x_2, & x \notin U, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\varphi(x_1, x_2) \equiv x_1^8 - x_2^8 - \begin{cases} 0, & x \notin V, \\ 2(x_2^2 - x_1^4 e^{-2x_1})^2 e^{4x_1}, & x \in V, \end{cases} \quad \psi(x_1, x_2) \equiv x_1^8 + x_2^8 - x_2^4, \quad (2.4)$$

$$U \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \psi(x_1, x_2) < 0\}, \quad V \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \text{ \& \; } |x_2| \leq x_1^2 e^{-x_1}\}, \quad (2.5)$$

которая является системой вида (1.1), поскольку автономна, допускает нулевое решение и обладает непрерывно дифференцируемой на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ правой частью f , что вытекает непосредственно из равенств (2.2)–(2.5).

Исследуем далее качественное поведение всех решений $x_f(\cdot, x_0)$ системы (2.2).

- Рассмотрим сначала решения, начинающиеся в множестве $D \equiv \mathbb{R}^2 \setminus (\overline{U} \cup V)$ (здесь и ниже черта обозначает топологическое замыкание).

На множестве D система (2.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \psi^2(x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_1^8 - x_2^8 \\ 2x_1^7 x_2 \end{pmatrix}.$$

Фазовые кривые решений с начальными значениями $x_0 \in \gamma^- \equiv \{(x_1, 0)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 < 0\} \subset D$ полностью лежат на луче γ^- и движение на нем осуществляется в сторону возрастания координаты x_1 в силу справедливости оценок

$$f_1(x_1, 0) = x_1^8 > 0, \quad f_2(x_1, 0) = 0, \quad x_1 < 0,$$

что обеспечивает стремление таких решений к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

Фазовые кривые же всех остальных решений с начальными значениями $x_0 \in D$ являются дугами кривых

$$K_c \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^8 + x_2^8 - cx_2^4 = 0\} \quad (2.6)$$

для значений констант $c > 1$. Последние представляют собой замкнутые двухлепестковые кривые, касающиеся в нуле оси координат x_1 , что обеспечивает стремление к нулю при неограниченном росте времени и таких решений тоже.

- Кривая K_1 (см. равенство (2.6) для значения $c = 1$) полностью заполнена неподвижными точками в силу наличия в равенствах (2.3) множителя $\psi^2(x_1, x_2)$.

- Далее рассмотрим решения с начальными значениями $x_0 \in V$.

На множестве V система (2.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \psi^2(x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_1^8 - x_2^8 - 2(x_2^2 - x_1^4 e^{-2x_1})^2 e^{4x_1} \\ 2x_1^7 x_2 \end{pmatrix}.$$

Фазовые кривые решений с начальными значениями $x_0 \in \gamma^+ \equiv \{(x_1, 0)^\top \mid x_1 > 0\} \subset V$ полностью лежат на луче γ^+ и движение вдоль них осуществляется в сторону убывания координаты x_1 в силу справедливости оценок

$$f_1(x_1, 0) = -x_1^8 < 0, \quad f_2(x_1, 0) = 0, \quad x_1 > 0,$$

что обеспечивает стремление и таких решений к нулю при $t \rightarrow +\infty$.

- Из справедливости для точек границы ∂V асимптотики $x_2 = \pm x_1^2 e^{-x_1} \rightarrow \pm 0$ при $x_1 \rightarrow +\infty$ и выполнения на всем множестве V равенства $\operatorname{sgn} f_2(x_1, x_2) = \operatorname{sgn} x_2$ вытекает, что фазовые кривые решений с начальными значениями $x_0 \in V \setminus \gamma^+$ в некоторые моменты выходят на границу ∂V , после чего попадают в ранее исследованное множество D .

- Наконец, рассмотрим решения с начальными значениями $x_0 \in U$.

На множестве U система (2.2) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \psi^2(x_1, x_2) \begin{pmatrix} x_1(1 - 2x_2^4) \\ 2x_2(1 - x_2^4) \end{pmatrix}.$$

Фазовые кривые тех из рассматриваемых ее решений, которые удовлетворяют начальным условиям $x_{f,1}(0, x_0) = 0$, полностью лежат на оси координат x_2 и движение вдоль них осуществляется в сторону возрастания модуля указанной координаты в силу справедливости оценок

$$f_1(0, x_2) = 0, \quad f_2(0, x_2) = 2x_2(1 - x_2^4) \Rightarrow \operatorname{sgn} f_2(0, x_2) = \operatorname{sgn} x_2, \quad 0 < |x_2| < 1.$$

Далее, фазовые кривые всех остальных рассматриваемых решений представляют собой дуги кривых

$$K_c \equiv \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^8 + c(x_2^8 - x_2^4) = 0\}, \quad 0 < c < 1,$$

каждая из которых при рассмотрении ее во всей плоскости $\mathbb{R}^2$ проходит, в отличие от большинства кривых (2.6), через точки $(0, \pm 1)^\top$.

Из вышесказанного следует, что система (2.2) обладает:

- радиальной полной неустойчивостью (одновременно трех типов: ляпуновского, перроновского и верхнепредельного) во всех направлениях $u \in \mathbb{S} \setminus \{(\pm 1, 0)^\top\}$ в силу справедливости для каждого $x_0 \in U$ равенства (2.1),

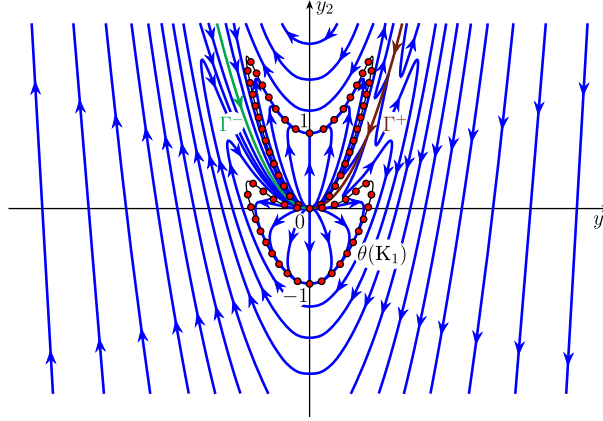


Рис. 2. Фазовый портрет системы (2.7)

– массивной частной устойчивостью перроновского и верхнепредельного типов, что вытекает из стремления к нулю при неограниченном росте времени всех ее решений с начальными значениями $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}_2$.

2. Сделаем в системе (2.2) следующее преобразование координат:

$$y = \theta(x) \equiv (x_1, x_2 + 2x_1^2)^\top, \quad y \equiv (y_1, y_2)^\top, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

В результате получим дифференциальную систему (ее фазовый портрет представлен на рис. 2)

$$\dot{y} = g(y), \quad g \equiv (g_1, g_2)^\top : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad y \in \mathbb{R}^2, \quad (2.7)$$

где обозначено

$$g_1(y_1, y_2) \equiv f_1(y_1, y_2 - 2y_1^2), \quad (2.8)$$

$$g_2(y_1, y_2) \equiv 4y_1 f_1(y_1, y_2 - 2y_1^2) + f_2(y_1, y_2 - 2y_1^2), \quad (2.9)$$

которая является системой вида (1.1) и обладает нулевым линейным приближением вдоль нулевого решения, что вытекает непосредственно из равенств (2.3)–(2.5) и (2.7)–(2.9).

Лучи $\gamma^\pm$ переводятся преобразованием $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ соответственно в ветви параболы $\Gamma^\pm \equiv \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \pm y_1 > 0 \text{ \& } y_2 = 2y_1^2\}$, касающиеся в нуле оси координат y_1 .

Построенная таким образом система (2.7) обладает:

– общерадиальной полной неустойчивостью всех трех типов, причем в направлениях $(\pm 1, 0)^\top$ указанные радиальные свойства имеют место в силу включения $\mathbb{B}_{1/2, (\pm 1, 0)^\top} \subset \theta(U)$ и справедливости для каждого начального значения $y_0 \in \theta(U)$ равенства (2.1) с механической заменой в нем символов x , x_0 и f на y , y_0 и g соответственно,

– массивной частной устойчивостью, поскольку все ее решения с начальными значениями $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{B}_3$ стремятся к нулю при неограниченном росте времени.

3. Остается лишь осуществить радиальное сжатие в системе (2.7) преобразованием

$$z = y/3, \quad z \equiv (z_1, z_2)^\top, \quad y \in \mathbb{R}^2.$$

При таком преобразовании круг $\mathbb{B}_3 \supset \overline{\theta(U)} \setminus \{0\} \supset \theta(K_1) \setminus \{0\}$ переходит в круг $\mathbb{B}_1$.

В результате получим дифференциальную систему

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{3}g_1(3z_1, 3z_2), \quad \dot{z}_2 = \frac{1}{3}g_2(3z_1, 3z_2), \quad z \in \mathbb{R}^2,$$

обладающую всеми свойствами, указанными в формулировке настоящей теоремы. Теорема доказана. $\square$

Благодарность. Автор приносит благодарность профессору И. Н. Сергееву за ценные замечания по тексту работы.

Литература

1. А. А. Бондарев, “Два контрастных примера многомерных дифференциальных систем с ляпуновской крайней неустойчивостью”, *Мат. заметки* **115**, No. 1, 24–42 (2024).
2. А. А. Бондарев, “Многомерная автономная дифференциальная система, обладающая единичной мерой неустойчивости, но массивной частной устойчивостью”, *Дифференц. уравнения* **60**, No. 8, 1011–1020 (2024).
3. А. А. Бондарев, “Примеры дифференциальных систем с контрастными сочетаниями радиальной устойчивости и неустойчивости”, *Вестн. Моск. ун-та, Мат. Мех.* No. 2, 36–43 (2025).
4. И. Н. Сергеев, “О перроновских, ляпуновских и верхнепределных свойствах устойчивости дифференциальных систем”, *Тр. семинара им. И. Г. Петровского* **33**, 353–423 (2023).
5. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, М. (1966).
6. И. Н. Сергеев, “Определение и свойства мер устойчивости и неустойчивости нулевого решения дифференциальной системы”, *Мат. заметки* **113**, No. 6, 895–904 (2023).
7. Н. В. Денисов, В. Д. Васильев, “Реализуемость неединичной суммы мер устойчивости и неустойчивости дифференциальной системы и их непрерывность по начальному моменту”, *Дифференц. уравнения* **60**, No. 11, 1574–1575 (2024).
8. В. Д. Васильев, “Реализуемость произвольной зависимости меры устойчивости дифференциальной системы от начального момента”, *Дифференц. уравнения* **61**, No. 11, 1572–1573 (2025).
9. И. Н. Сергеев, *Дифференциальные уравнения. Курс лекций*, Изд-во МГУ, М. (2023).
10. И. Н. Сергеев, “Радиальная устойчивость и неустойчивость дифференциальной системы”, *Вестн. Моск. ун-та, Мат. Мех.* No. 2, 83–88 (2025).
11. И. Н. Сергеев, “Массивные и почти массивные свойства устойчивости и неустойчивости дифференциальных систем”, *Дифференц. уравнения* **57**, No. 11, 1576–1578 (2021).
12. Н. В. Денисов, “Пример системы с единичной мерой устойчивости и тотальной радиальной неустойчивостью”, *Дифференц. уравнения* **61**, No. 11, 1573–1574 (2025).

Статья поступила в редакцию 3 сентября 2026 г.

принята к публикации 4 сентября 2026 г.

А. Е. Зернова

ЛОКАЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Исследуется локализация дискретного спектра многомерного несамосопряженного непрерывного функционально-разностного оператора с потенциалом $V \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Выведены мажорантные оценки модуля ядра резольвенты в зависимости от спектрального параметра λ . Для комплексных собственных чисел λ таких, что $\operatorname{Re} \lambda < 2n$, получено точное неравенство. Установлено множество, локализирующее дискретный спектр возмущенного оператора в терминах нормы $\|V\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$.

1. Введение

Пусть $P = -i d/dx$ обозначает самосопряженный квантово-механический оператор импульса в $L^2(\mathbb{R})$. Для $b > 0$ рассмотрим оператор Вейля $U(b) = \exp(-bP)$ с областью определения

$$\operatorname{dom}(U(b)) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : e^{-2\pi b\xi} \hat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\},$$

где $\hat{\psi}$ обозначает преобразование Фурье функции ψ ,

$$\hat{\psi}(\xi) = (\mathcal{F}\psi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \psi(x) dx.$$

Отметим, что функции ψ из $\operatorname{dom}(U(b))$ допускают аналитическое продолжение в полосу $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 < y < b\}$ с $\psi(x + iy) \in L^2(\mathbb{R})$ для всех $0 \leq y < b$. Более того, предел $\psi(x + ib - i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \psi(x + ib - i\varepsilon)$ существует в смысле сходимости в $L^2(\mathbb{R})$. Обозначая этот предел через $\psi(x + ib)$, можно записать действие оператора $U(b)$ в виде

$$(U(b)\psi)(x) = \psi(x + ib).$$

Обратный оператор $U^{-1}(b) = \exp(bP)$ и его область определения определяются аналогичным образом.

Функционально-разностный оператор $W_0(b)$ теперь определяется как оператор $W_0(b) = U(b) + U(b)^{-1} = 2 \operatorname{ch}(bP)$ с областью определения $\operatorname{dom}(W_0(b)) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : 2 \operatorname{ch}(2\pi b\xi) \hat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}$, где он действует следующим образом:

$$(W_0(b)\psi)(x) = \psi(x + ib) + \psi(x - ib).$$

Этот самосопряженный оператор унитарно эквивалентен оператору умножения на $2 \operatorname{ch}(2\pi b\xi)$. Его спектр абсолютно непрерывен и покрывает $[2, \infty)$ дважды.

В [1] была получена оценка для комплексных собственных значений оператора

$$W_V(b) = W_0(b) - V, \quad (1.1)$$

А. Е. Зернова: Научно-технологический университет «Сириус», Федеральная территория «Сириус», Россия; a.e.zernova@gmail.com.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* **302**, No. 5, 656–669 (2026).

© А. Е. Зернова, 2026

где V — комплекснозначный потенциал с $V \in L^1(\mathbb{R})$. Поскольку $2 \operatorname{ch}(2\pi bk) - 2 > (2\pi bk)^2$, имеем

$$W_0(b) - 2 > -b^2 \frac{d^2}{dx^2} \quad (1.2)$$

на $\operatorname{dom}(W_0(b))$. По неравенству Соболева для вещественных потенциалов оператор $W_V(b)$ ограничен снизу на общей области определения $W_0(b)$ и V . Следовательно, $W_V(b)$ допускает самосопряженное расширение по Фридрихсу. Более подробно о самосопряженных расширениях таких операторов, не только для комплекснозначных потенциалов, но и для конечных борелевских мер, см. [1].

Точные оценки для расположения комплексных собственных значений были получены и возникающие резонансы были изучены в [1]. В данной статье мы распространяем подход [1] на многомерный случай, построив аналитическое продолжение и мажоранты для функции Грина следующего свободного полуограниченного оператора:

$$\begin{aligned} (H_0\psi)(x) = & \sum_{k=1}^n \left(\psi(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \frac{i}{2\pi}, x_{k+1}, \dots, x_n) \right. \\ & \left. + \psi(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k - \frac{i}{2\pi}, x_{k+1}, \dots, x_n) \right), \quad \psi \in \operatorname{dom}(H_0), \end{aligned} \quad (1.3)$$

где без потери общности мы предполагаем, что $b = \frac{1}{2\pi}$. Таким образом, мы изучаем спектральные свойства несамосопряженного функционально-разностного оператора H_V

$$(H_V\psi)(x) := H_0\psi(x) - V\psi(x), \quad \psi \in \operatorname{dom}(H_V), \quad n \geq 1, \quad (1.4)$$

где V — комплекснозначный потенциал $V \in L^1(\mathbb{R}^n)$, и получаем точное условие локализации для его дискретного спектра. Отметим, что $\operatorname{dom}(H_0)$ и $\operatorname{dom}(H_V)$ операторов H_0 и H_V определяются так же, как в [1].

В импульсном представлении, получаемом с помощью преобразования Фурье $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\widehat{\psi}(\xi) = (\mathcal{F}\psi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-2\pi i(\xi, x)} dx,$$

свободный оператор H_0 действует как оператор умножения:

$$(\mathcal{F} H_0 \psi)(\xi) = 2 \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{ch}(\xi_k) \right) \widehat{\psi}(\xi), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Для получения основного результата мы изучаем аналитические свойства ядра свободной резольвенты $G(x - y; \lambda)$ оператора $(H_0 - \lambda)^{-1}$ и локализацию дискретного спектра возмущенного оператора Вейля H_0 комплекснозначным потенциалом $V = V(x)$ класса $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Основной результат статьи формулируется следующим образом.

Теорема 1.1. Пусть $V \in L^1(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначная функция. Если точка $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2n, +\infty)$ является дискретным собственным значением возмущенного оператора $H_V = H_0 - V$, то λ удовлетворяет следующим оценкам:

$$|G(0; \lambda)|^{-1} \leq \|V\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (1.5)$$

для λ таких, что $\operatorname{Re} \lambda < 2n$, и

$$C(\lambda)^{-1} |G(0; E(\lambda))|^{-1} \leq \|V\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (1.6)$$

для λ таких, что $\operatorname{Re} \lambda \geq 2n$, $\lambda \notin [2n, +\infty)$, где вещественная величина $E(\lambda) < 2n$ и мажорантный множитель $C(\lambda) > 1$ задаются формулами

$$E(\lambda) = 2n - |v|, \quad C(\lambda) = \sqrt{1 + \left(\frac{u - 2n + |v|}{|v|} \right)^2}.$$

Из леммы 3.1 и теоремы 1.1 немедленно следует, что оценка для собственных значений возмущенного оператора является точной (см. п. 4.2).

Следствие 1.1. Пусть оператор H_0 возмущен комплекснозначным потенциалом $V \in L^1(\mathbb{R}^n)$, и пусть λ — соответствующее комплексное собственное значение такое, что $\operatorname{Re} \lambda < 2n$. Тогда спектральная оценка (1.5) является точной и не может быть улучшена. Более того, равенство достигается на классе обобщенных одноточечных δ -потенциалов $V(x) = \gamma \delta(x)$ с константой связи $|\gamma| > 0$.

Здесь мы опираемся на фундаментальные результаты современной спектральной теории несамосопряженных операторов и, прежде всего, на классическую работу [2], посвященную изучению несамосопряженного оператора Шрёдингера $-\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ с комплекснозначным потенциалом $V \in L^1(\mathbb{R})$. В [2] были получены строгие границы для расположения дискретных собственных значений λ и резонансов, в частности было доказано, что все дискретные собственные значения оператора принадлежат кругу

$$|\lambda| \leq \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} |V(x)| dx \right)^2.$$

Существенную теоретическую основу также составила работа [3], где были получены точные количественные оценки для собственных значений бигармонического оператора $\Delta^2 + V$ в пространстве $\mathbb{R}^d$ для $d = 1, 2, 3$.

Параллельно интенсивно развивается дискретный аналог указанного круга задач. Так, в [4] изучался спектр дискретных операторов Шрёдингера с комплексным потенциалом $V(n)$ вида $(Hu)_k = -(u(k+1) + u(k-1)) + V(k)u(k)$ для $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ на полупрямой с заданным граничным условием при $k = 0$. Различные аспекты спектральной теории функционально-разностных операторов Вейля рассматривались также и ранее. В частности, для $-V = V_0 = e^{2\pi b x}$ оператор W_V впервые возник в связи с изучением квантовой модели Лиувилля на решетке [5]; его спектральные свойства изучались в [6, 7]. В случае $-V = 2 \operatorname{ch}(2\pi b x)$ оператор W_V имеет чисто дискретный спектр, состоящий из собственных значений, стремящихся к бесконечности. Асимптотики Вейля для функции распределения собственных значений и средних Рисса были получены в [8] и впоследствии распространены на полиномиально растущие потенциалы в [9]. Настоящую работу можно рассматривать как часть программы изучения различных спектральных свойств операторов Вейля с убывающими потенциалами.

Работа организована следующим образом. В § 2 мы приводим некоторые определения, связанные со свободным оператором.

Первый ключевой результат — это интегральное представление для ядра свободной резольвенты в импульсном пространстве (см. п. 3.1). На основе этого представления мы получаем (см. п. 3.2) аналитическое продолжение функции Грина на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль непрерывного спектра $\mathbb{C} \setminus [2n, +\infty)$. В п. 3.3 доказываются оценки для функции Грина. Мы выводим точную оценку в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 2n\}$ и мажорантную оценку для $\operatorname{Re} \lambda \geq 2n$, $\lambda \notin [2n, +\infty)$.

В § 4 применяется принцип Бирмана — Швингера к возмущенному оператору с комплекснозначным потенциалом, что позволяет доказать теорему 1.1. Численные расчеты функции Грина на дискретных сетках, проведенные для широкого диапазона комплексных параметров при $n = 2$, показывают, что глобальный максимум модуля функции Грина расположен в начале координат и для $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [4, +\infty)$ с $\operatorname{Re} \lambda \geq 4$. На основе этих результатов мы формулируем гипотезу о точной оценке для модуля функции Грина для всех спектральных параметров, лежащих вне непрерывного спектра.

В § 5 приведены некоторые примеры, демонстрирующие неточность мажорантной границы для $\operatorname{Re} \lambda \geq 4$, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ для возмущенных операторов с одноточечным дельта-потенциалом при различных значениях L^1 -нормы.

2. Предварительные сведения

Мы рассматриваем преобразование Фурье $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ и обратное к нему $\mathcal{F}^{-1}$

$$\mathcal{F}\psi(\xi) = \widehat{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) e^{-2\pi i(\xi, x)} dx, \quad \mathcal{F}^{-1}\widehat{\psi}(x) = \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\psi}(\xi) e^{2\pi i(\xi, x)} d\xi.$$

Мы рассматриваем функцию Грина $G(x; \lambda)$ как ядро резольвенты оператора H_0 , удовлетворяющее уравнению

$$(H_0 - \lambda)G(x; \lambda) = \delta(x),$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — спектральный параметр, а $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Применяя преобразование Фурье к обеим частям уравнения, мы получаем $M(\xi) \hat{G}(\xi; \lambda) = 1$, где

$$M(\xi) = 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{ch}(\xi_k). \quad (2.1)$$

Если λ не принадлежит непрерывному спектру оператора, мы имеем

$$G(x; \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i(\xi, x)}}{\sum_{k=1}^n 2 \operatorname{ch}(\xi_k) - \lambda} d\xi. \quad (2.2)$$

Рассмотрим непрерывный спектр оператора H_0 на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Оператор H_0 унитарно эквивалентен оператору умножения M , определенному на $L^2(\mathbb{R}^n)$ в импульсном пространстве:

$$(M\hat{\psi})(\xi) = 2 \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{ch}(\xi_k) \right) \hat{\psi}(\xi). \quad (2.3)$$

Спектр H_0 совпадает с областью значений M . Непрерывная функция $M(\xi) = 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{ch}(\xi_k)$ пробегает $[2n, +\infty)$, когда $\xi \in \mathbb{R}^n$ меняется.

Отметим, что $M(\xi)$ четна относительно каждой переменной ξ_k и, следовательно, для любой внутренней точки множества $(2n, +\infty)$ ее прообраз

$$\Lambda_\lambda = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^n : 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{ch}(\xi_k) = \lambda \right\}$$

образует невырожденное симметричное многообразие. Градиент

$$\nabla M(\xi) = \left(\frac{\partial M}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial M}{\partial \xi_n} \right) (2 \sinh \xi_1, 2 \operatorname{sh} \xi_2, \dots, 2 \operatorname{sh} \xi_n)$$

не обращается в нуль нигде на Λ_λ , что влечет абсолютную непрерывность спектра на интервале $(2n, +\infty)$.

Прообраз стягивается в изолированную точку только на границе непрерывного спектра $\lambda = 2n$. Следовательно, непрерывный спектр H_0 совпадает с $[2n, +\infty)$. Он определяет разрез в плоскости комплексного параметра $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2n, +\infty)$.

3. Ограниченность модуля ядра свободной резольвенты

В этом параграфе мы изучаем свойства локализации функции Грина $G(x; \lambda)$.

3.1. Интегральное представление в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 2n$. Пусть спектральный параметр $\lambda \in \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $\operatorname{Re} \lambda < 2n$. Рассмотрим исходное интегральное представление функции Грина в импульсном пространстве (2.2). Поскольку минимум функции $M(\xi) = 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{ch}(\xi_k)$ равен $2n$, для $\operatorname{Re} \lambda < 2n$ вещественная часть знаменателя в интеграле (2.2) строго положительна на всей плоскости интегрирования. Поэтому мы можем применить интегральное тождество Лапласа непосредственно к комплексному резольвентному множителю:

$$\frac{1}{2 \sum_{k=1}^n \operatorname{ch}(\xi_k) - \lambda} = \int_0^\infty e^{-t(2 \sum_{k=1}^n \operatorname{ch}(\xi_k) - \lambda)} dt. \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в (2.2) и меняя порядок интегрирования в соответствии с теоремой Фубини, мы разделяем переменные:

$$G(x; \lambda) = \int_0^\infty e^{t\lambda} \left(\prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^\infty e^{-2t \operatorname{ch} \xi_k} e^{2\pi i \xi_k x_k} d\xi_k \right) dt.$$

Внутренние интегралы по компонентам двойственных переменных сводятся к модифицированным функциям Бесселя второго рода (функциям Макдональда) с чисто мнимым индексом. Действительно,

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-2t \operatorname{ch} \xi_k} e^{2\pi i \xi_k x_k} d\xi_k = 2 \int_0^\infty e^{-2t \operatorname{ch} \xi_k} \cos(2\pi \xi_k x_k) d\xi_k.$$

Используя интегральное представление модифицированной функции Бесселя второго рода с чисто мнимым индексом $\nu = i(2\pi x)$:

$$K_\nu(2t) = \int_0^\infty e^{-2t \operatorname{ch} \xi_x} \cos(\xi_x \nu) d\xi_x,$$

мы получаем требуемое равенство

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-2t \operatorname{ch} \xi_k} e^{2\pi i \xi_k x_k} d\xi_k = 2K_{i2\pi x_k}(2t).$$

Известно, что функции $K_\nu(t)$ убывают экспоненциально: $K_{i2\pi x}(2t) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-2t}$ при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, в полуплоскости $\Omega_0 = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 2n\}$ функция Грина представляется в виде абсолютно сходящегося интеграла по времени:

$$G(x; \lambda) = 2^n \int_0^\infty e^{t\lambda} \prod_{k=1}^n K_{i2\pi x_k}(2t) dt. \quad (3.2)$$

Поскольку подынтегральное выражение в (3.2) непрерывно по t , а интеграл сходится равномерно по λ на любом компактном подмножестве Ω_0 , функция $G(x; \lambda)$ строго голоморфна (аналитична) по параметру λ в этой области.

3.2. Аналитическое продолжение на комплексную плоскость с разрезом. Чтобы расширить область сходимости интеграла, мы применяем теорему Коши о деформации контура интегрирования в комплексную плоскость времени. Сохраняя убывающий характер экспоненты в интегральном тождестве (3.1), мы выбираем угол поворота $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ и рассматриваем интеграл

$$I = \int_\Gamma e^{t\lambda} \prod_{k=1}^n K_{i2\pi x_k}(2t) dt$$

вдоль замкнутого контура $\Gamma = \gamma_0 + \gamma + \gamma_\varphi$, изображенного на рис. 1.

Интеграл I обращается в нуль как интеграл от голоморфной функции в области, ограниченной замкнутым контуром Γ . Вклад дуги γ стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$ в силу леммы Жордана и экспоненциального убывания функций Макдональда $K_\nu(z) \sim e^{-z}$ при $|z| \rightarrow \infty$. Поэтому интеграл вдоль вещественной полуоси совпадает с интегралом вдоль повернутого луча:

$$\int_{\gamma_0} f(t, \lambda) dt = \int_{\Gamma_\varphi} f(t, \lambda) dt, \quad (3.3)$$

где Γ_φ — путь, параметризованный соотношением $t = \tau e^{-i\varphi}$, $\tau \in [0, +\infty)$. Делая замену переменной $t = \tau e^{-i\varphi}$ с дифференциалом $dt = e^{-i\varphi} d\tau$ и принимая во внимание равенство (3.3), мы получаем представление функции Грина

$$G(x; \lambda) = 2^n e^{-i\varphi} \int_0^\infty e^{\tau e^{-i\varphi} \lambda} \prod_{k=1}^n K_{i2\pi x_k}(2\tau e^{-i\varphi}) d\tau. \quad (3.4)$$

Напомним, что функции $K_\nu(t)$ обладают экспоненциальной асимптотикой при $t \rightarrow +\infty$. Тогда для сходимости интеграла необходимо выбрать φ такое, чтобы выполнялось условие убывания экспоненты на бесконечности: $\operatorname{Re}(\tau e^{-i\varphi}(\lambda - 2n)) < 0$. В этом случае интеграл (3.4) определяет аналитическое продолжение функции Грина в полуплоскость $\Omega_\varphi = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda e^{-i\varphi}) < 2n \cos \varphi\}$.

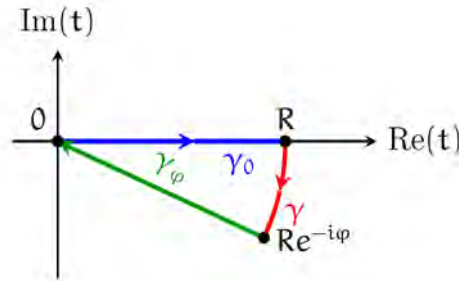


Рис. 1. Деформация контура интегрирования.

Семейство областей Ω_φ , $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$, образует открытое покрытие комплексной плоскости с разрезом $\mathbb{C} \setminus [2n, +\infty)$. Поскольку для двух различных φ_1 и φ_2 аналитические продолжения совпадают на $\Omega_{\varphi_1} \cap \Omega_{\varphi_2}$, из принципа единственности следует, что они определяют единственную голоморфную функцию во всей области резольвенты.

Меняя угол φ , мы единственным образом продолжаем $G(x; \lambda)$ на всю область резольвенты $\mathbb{C} \setminus [2n, +\infty)$.

3.3. Оценки для функции Грина. Теперь оценим модуль функции Грина.

Лемма 3.1. Пусть $G(x; \lambda)$ — функция Грина

$$G(x; \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{i2\pi(\xi, x)}}{M(\xi) - \lambda} d\xi,$$

где

$$M(\xi) = 2 \sum_{k=1}^n \operatorname{ch} \xi_k \geq 2n. \quad (3.5)$$

Тогда для $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < 2n\}$ справедливо следующее неравенство:

$$|G(x; \lambda)| \leq |G(0; \lambda)|.$$

Доказательство. Поскольку функция $M(\xi)$ четна, получаем

$$G(x; \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\cos(2\pi(\xi, x))}{M(\xi) - \lambda} d\xi.$$

Положим

$$w_A(x; \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin^2(\pi(\xi, x))}{M(\xi) - \lambda} d\xi, \quad w_B(x; \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\cos^2(\pi(\xi, x))}{M(\xi) - \lambda} d\xi.$$

Так как $\sin^2(\pi(\xi, x)) + \cos^2(\pi(\xi, x)) = 1$ и $\cos^2(\pi(\xi, x)) - \sin^2(\pi(\xi, x)) = \cos(2\pi(\xi, x))$, находим

$$w_A + w_B = G(0; \lambda), \quad w_B - w_A = G(x; \lambda).$$

Выразим разность квадратов модулей через скалярное произведение:

$$|G(0; \lambda)|^2 - |G(x; \lambda)|^2 = |w_A + w_B|^2 - |w_B - w_A|^2 = 4 \operatorname{Re}(w_A(x; \lambda) \overline{w_B(x; \lambda)}).$$

Мы разлагаем интегралы w_A и w_B на вещественную и мнимую части, предполагая, что $\lambda = u + iv$:

$$w_A(x; \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin^2(\pi(\xi, x))(M(\xi) - u)}{(M(\xi) - u)^2 + v^2} d\xi + i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin^2(\pi(\xi, x))v}{(M(\xi) - u)^2 + v^2} d\xi,$$

$$w_B(x; \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\cos^2(\pi(\xi, x))(M(\xi) - u)}{(M(\xi) - u)^2 + v^2} d\xi + i \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\cos^2(\pi(\xi, x))v}{(M(\xi) - u)^2 + v^2} d\xi.$$

В силу предположения $\operatorname{Re} \lambda = u < 2n$ разность $M(\xi) - u$ строго больше нуля для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, $\operatorname{Re} w_A$ и $\operatorname{Re} w_B$ положительны, тогда как $\operatorname{Im} w_A$ и $\operatorname{Im} w_B$ имеют одинаковый знак, равный $\operatorname{sgn}(v)$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}(w_A \overline{w_B}) = \operatorname{Re} w_A \operatorname{Re} w_B + \operatorname{Im} w_A \operatorname{Im} w_B > 0.$$

Следовательно, $|G(0; \lambda)|^2 - |G(x; \lambda)|^2 > 0$. Лемма доказана. $\square$

В заключение параграфа докажем следующее утверждение.

Лемма 3.2. Для функции Грина $G(x; \lambda)$ со спектральным параметром $\lambda = u + iv \in \mathbb{C} \setminus [2n, +\infty)$, удовлетворяющим условиям $\operatorname{Re} \lambda \geq 2n$ и $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$, справедливо следующее неравенство:

$$|G(x; \lambda)| \leq C(\lambda) G(0; E(\lambda)),$$

где вещественная величина $E(\lambda) < 2n$ и мажорантный множитель $C(\lambda) > 1$ задаются формулами

$$E(\lambda) = 2n - |v|, \quad C(\lambda) = \sqrt{1 + \left(\frac{u - 2n + |v|}{|v|} \right)^2}$$

и $G(0; E(\lambda))$ определяется равенством

$$G(0; E) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{2 \sum_{k=1}^n \operatorname{ch} \xi_k - E}.$$

Доказательство. Мы представляем функцию Грина через обратное преобразование Фурье

$$G(x; \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{2\pi i(\xi, x)}}{M(\xi) - \lambda} d\xi.$$

Оценивая модуль интеграла $G(x; \lambda)$ и принимая во внимание, что модуль числителя равен 1, получаем неравенство:

$$|G(x; \lambda)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{|M(\xi) - \lambda|}. \quad (3.6)$$

Для $\operatorname{Re} \lambda = u \geq 2n$ и $v = \operatorname{Im} \lambda \neq 0$ разность $M - u$ неположительна. Пусть $t = M - 2n \geq 0$, а $d = u - 2n \geq 0$. Выберем $E(\lambda) = 2n - |v| < 2n$. Теперь найдем минимальное значение отношения квадратов модулей

$$h(t) = \frac{(M - u)^2 + v^2}{(M - E(\lambda))^2} = \frac{(t - d)^2 + v^2}{(t + |v|)^2}, \quad t > 0.$$

Минимум $h(t)$ достигается в единственной точке

$$t = t_0 = d + |v| - \frac{|v|d}{|v| + d} > 0,$$

в которой функция h положительна и выражается как

$$h(t_0) = \frac{v^2}{(u - 2n + |v|)^2 + v^2} > 0.$$

Следовательно, для всех $M \geq 2n$ мы имеем поточечное неравенство

$$|M - \lambda| \geq \sqrt{h(t_0)} (M - E(\lambda)) = \frac{1}{C(\lambda)} (M - E(\lambda)),$$

где

$$C(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{h(t_0)}} = \sqrt{1 + \left(\frac{u - 2n + |v|}{|v|} \right)^2} \geq 1.$$

Подставляя полученную оценку в (3.6), мы получаем

$$|G(x; \lambda)| \leq C(\lambda) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{M(\xi) - E(\lambda)} = C(\lambda) G(0; E(\lambda)),$$

что завершает доказательство. $\square$

4. Локализация дискретного спектра

В этом параграфе мы применяем принцип Бирмана — Швингера для доказательства теоремы о локализации дискретного спектра оператора $H_V = H_0 - V$ и обсуждаем, является ли полученная оценка точной для вещественных и комплексных значений спектрального параметра.

4.1. Доказательство теоремы 1.1. Пусть V — комплекснозначный потенциал, $V \in L^1(\mathbb{R}^n)$, и H_V — возмущенный оператор, действующий по правилу

$$H_V \psi(x) = H_0 \psi(x) - V(x) \psi(x). \quad (4.1)$$

Если $V \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то H_V — неограниченный и несамосопряженный оператор. Существенный спектр H_V совпадает с непрерывным спектром невозмущенного оператора H_0 .

Рассмотрим спектральную задачу на собственные значения для оператора, определенного в (4.1),

$$H_V \psi(x) = \lambda \psi(x)$$

и положим $X = |V|^{1/2}$, $Y = \text{sgn}(V)|V|^{1/2}$, где $X, Y \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и $V = YX$. Рассмотрим оператор Бирмана — Швингера

$$K_\lambda = X(H_0 - \lambda)^{-1}Y.$$

Поскольку спектральный параметр λ принадлежит области регулярности $\mathbb{C} \setminus [2n, +\infty)$, свободный оператор $(H_0 - \lambda)$ имеет ограниченный обратный $(H_0 - \lambda)^{-1}$ с ядром, задаваемым аналитически продолженной функцией Грина $G(x - x'; \lambda)$.

В явной интегральной форме действие оператора K_λ на функцию $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ определяется соотношением

$$(K_\lambda \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{K}_\lambda(x, x') \varphi(x') dx',$$

где ядро интегрального оператора имеет вид

$$\mathcal{K}_\lambda(x, x') = X(x)G(x - x'; \lambda)Y(x').$$

Поскольку K_λ принадлежит классу операторов Гильберта — Шмидта, он компактен. Согласно леммам 3.1 и 3.2 $|G(x - x'; \lambda)|$ ограничена на всем пространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2n, +\infty)$. Так как $X, Y \in L^2(\mathbb{R}^n)$, подынтегральное выражение $|\mathcal{K}_\lambda(x, x')|^2$ мажорируется интегрируемой функцией $|V(x)| \cdot |V(x')| \cdot \sup |G|^2$. Из теоремы Фубини следует, что норма Гильберта — Шмидта конечна, $\|K_\lambda\|_{HS} < \infty$ и, как следствие, оператор K_λ компактен в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Согласно принципу Бирмана — Швингера точка $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2n, +\infty)$ является дискретным собственным значением оператора H_V тогда и только тогда, когда компактный оператор K_λ имеет собственное значение $\mu = 1$.

Существование собственного значения $\mu = 1$ означает, что спектральный радиус оператора $r(K_\lambda)$ не меньше единицы. Поскольку спектральный радиус и операторная норма мажорируются нормой Гильберта — Шмидта

$$1 \leq r(K_\lambda) \leq \|K_\lambda\| \leq \|K_\lambda\|_{HS},$$

мы получаем необходимое спектральное условие, зависящее от положения λ в комплексной плоскости.

1. Для $\text{Re } \lambda < 2n$ согласно лемме 3.1

$$1 \leq \|K_\lambda\|_{HS} \leq |G(0; \lambda)| \|V\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \quad (4.2)$$

откуда немедленно следует оценка (1.5).

2. Для остальных λ таких, что $\text{Re } \lambda \geq 2n$, $\lambda \notin [2n, +\infty)$, по лемме 3.2 мы аналогично получаем оценку (1.6).

Теорема доказана. $\square$

4.2. Доказательство следствия 1.1. В случае $\operatorname{Re} \lambda < 2n$ спектральная оценка (1.5), полученная в теореме 1.1, является точной. Действительно, рассмотрим предельный случай обобщенного точечного потенциала с комплексным ненулевым параметром $\gamma = ce^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $c > 0$:

$$V(x) = \gamma \delta(x). \quad (4.3)$$

L^1 -норма такого потенциала равна модулю константы связи c :

$$\|V\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = \iint_{\mathbb{R}^n} |\gamma| \delta(x) dx = c.$$

Мы применяем резольвенту свободного оператора $(H - \lambda)^{-1}$ к уравнению на собственные значения для возмущенного оператора $H_V = H - \gamma \delta(x)$

$$(H - \lambda)\psi(x) = \gamma \delta(x)\psi(x)$$

и выражаем собственную функцию через функцию Грина

$$\psi(x) = \gamma \psi(0) G(x; \lambda). \quad (4.4)$$

Очевидно, что собственная функция такого оператора совпадает с функцией Грина с точностью до нормировочного множителя.

Предположим, что нормировочный множитель $\gamma \psi(0)$ ненулевой. Тогда, вычисляя правую и левую части уравнения (4.4) в нуле и сокращая ненулевые множители, мы немедленно получаем точное уравнение на собственные значения

$$1 = \gamma G(0; \lambda). \quad (4.5)$$

Принимая во внимание, что $c = \|V\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$, мы записываем уравнение (4.5) следующим образом:

$$1 = \|V\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} |G(0; \lambda)|.$$

Таким образом, неравенство (1.5) для точечного обобщенного дельта-потенциала V с комплексной константой связи $\gamma \neq 0$ становится тождеством, что показывает, что константа 1 не может быть улучшена в случае $\operatorname{Re} \lambda < 2n$. $\square$

4.3. Открытый вопрос. Чтобы изучить различие между полученной в лемме 3.1 аналитической мажорантой $C(\lambda)G(0; E(\lambda))$ и фактической верхней гранью модуля ядра функции Грина в комплексной плоскости, мы провели численный эксперимент для точки пространственного максимума функции $|G(x; \lambda)|$ в случае $n = 2$.

Численные расчеты функции $G(x; \lambda)$ на дискретных сетках в ограниченных областях $x \in [-L, L]^2 \subset \mathbb{R}^2$ для широкого диапазона комплексных параметров $\operatorname{Re} \lambda \geq 4$ ($\operatorname{Im} \lambda \neq 0$) показывают, что в пределах области вычислений глобальный максимум модуля ядра неизменно наблюдается в начале координат: $|G(x; \lambda)| < |G(0; \lambda)|$ для $x \neq 0$. Контрпримеры неизвестны. Результаты этого анализа приводят к следующей гипотезе.

Гипотеза 4.1 (о точной оценке модуля функции Грина). Для любого $\lambda \in \mathbb{C} \setminus [2n, +\infty)$ точная верхняя грань модуля функции Грина достигается в начале координат:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |G(x; \lambda)| = |G(0; \lambda)|.$$

Если гипотеза 4.1 подтвердится, то необходимым условием существования дискретного собственного значения для любого комплекснозначного потенциала $V \in L^1(\mathbb{R}^n)$ будет точная оценка

$$\frac{1}{|G(0; \lambda)|} \leq \|V\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus [2n, +\infty),$$

которая становится точным равенством на классе одноточечных δ -потенциалов для комплексных значений константы связи.

5. Примеры

Проиллюстрируем точность полученной спектральной оценки, рассмотрим задачу на собственные значения с точечным потенциалом при $n = 2$, $V(x) = \gamma \cdot \delta(x)$ с комплексной постоянной $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, где $\gamma = c \cdot e^{i\theta}$, $c \neq 0$, и с $\|V\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = c$. Аналогично (4.4) – (4.5) получаем $1 = \gamma G(0; \lambda)$, где $G(0; \lambda)$ – значение функции Грина свободной задачи в начале координат:

$$G(0; \lambda) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{M(\xi) - \lambda}, \quad M(\xi) = 2 \sum_{k=1}^2 \text{ch } \xi_k.$$

Разделяя модуль и аргумент комплексного числа, запишем уравнение в виде эквивалентной системы

$$|G(0; \lambda)| = \frac{1}{c}, \quad (5.1)$$

$$\arg G(0; \lambda) = \pi - \theta \pmod{2\pi}. \quad (5.2)$$

Система (5.1), (5.2) определяет непрерывные кривые в комплексной плоскости переменной λ , получаемые при изменении θ в пределах $[0, 2\pi)$.

Сравним точную траекторию собственных значений с границей области локализации, гарантируемой теоремой 1.1:

- (1) В полуплоскости $\text{Re } \lambda < 4$ оценка точна, и граница области локализации совпадает с $|G(0; \lambda)| = \frac{1}{c}$.
- (2) В полуплоскости $\text{Re } \lambda \geq 4$ спектральный параметр λ удовлетворяет неравенству с аналитической мажорантой:

$$C(\lambda) G(0; E(\lambda)) \geq \frac{1}{c}, \quad (5.3)$$

где $E(\lambda)$ и множитель $C(\lambda)$ заданы леммой 3.2. Множество точек, превращающих неравенство (5.3) в равенство для $\text{Re } \lambda \geq 4$:

$$C(\lambda) G(0; E(\lambda)) = \frac{1}{c}, \quad (5.4)$$

определяет штриховую мажорантную линию границы области локализации.

Локализация спектра: точные траектории ($\text{Re } \lambda < 4$) и мажорантное отклонение ($\text{Re } \lambda \geq 4$).

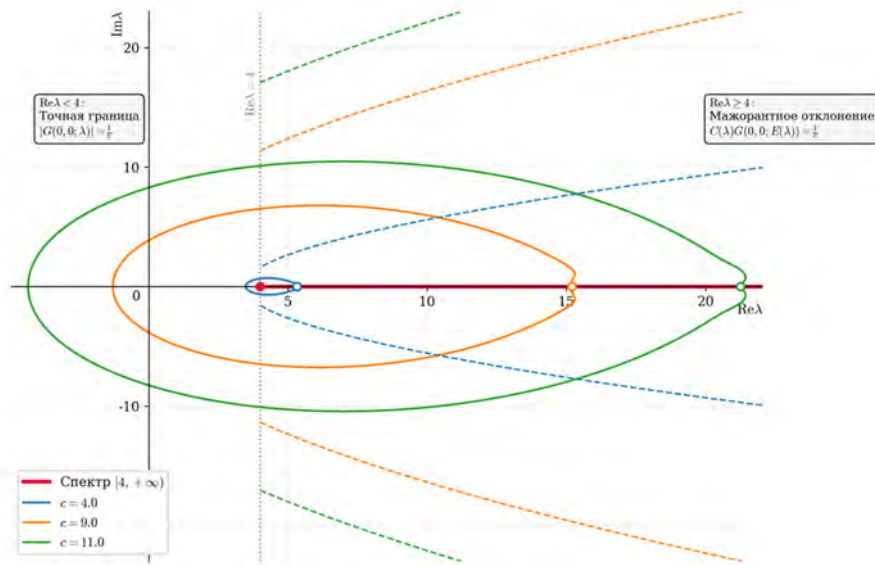


Рис. 2. Сравнение точных траекторий собственных значений $\lambda(\theta)$ точечного потенциала и мажорантных границ для различных значений модуля константы связи c .

На рис. 2 непрерывными кривыми показаны траектории собственных значений оператора H_V для различных значений $c = 4, 9, 11$.

Штриховые линии соответствующего цвета суть мажорантные границы, определяемые равенством (5.4) и задающие внешнюю область локализации спектра согласно теореме 1.1.

В полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda < 4$ штриховая граница тождественно совпадает со сплошной траекторией собственных значений.

В полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 4$ наблюдается отклонение штриховой линии вверх и вниз от горизонтальной оси. Более того, точные траектории собственных значений содержатся строго внутри мажорантной области локализации.

Благодарности. Автор благодарен своему научному руководителю А. А. Лаптеву за полезные обсуждения.

Литература

1. А. Зернова, А. Ильин, А. Лаптев, Л. Шиммер, “Собственные значения несамосопряженных функционально-разностных операторов,” *Функц. анал. прил.* **54**, No. 1, 49–63 (2025).
2. A. A. Abramov, A. Aslanyan, E. B. Davies, “Bounds on complex eigenvalues and resonances,” *J. Phys. A, Math. Gen.* **34**, No. 1, 57–72 (2001).
3. O. O. Ibrogimov, D. Krejčířík, A. Laptev, “Sharp bounds for eigenvalues of biharmonic operators with complex potentials in low dimensions,” *Math. Nachr.* **294**, No. 7, 1333–1349 (2021).
4. D. Krejčířík, A. Laptev, F. Štampach, “Spectral enclosures and stability for non-self-adjoint discrete Schroedinger operators on the half-line,” *Math. Subj. Classif.* **54**, 2379–2403 (2022).
5. L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, “Liouville model on the lattice,” in: *Field theory, quantum gravity and strings*, Lecture Notes in Phys., **246**, Springer, Berlin, 166–179 (1986).
6. R. Kashaev, “The quantum dilogarithm and Dehn twists in quantum Teichmüller theory,” in: *Integrable structures of exactly solvable two-dimensional models of quantum field theory*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, **35**, No. 6, 211–221 (2001).
7. R. Kashaev, M. Marino, “Operators from mirror curves and the quantum dilogarithm,” *Commun. Math. Phys.* **346**, 967–994 (2016).
8. A. Laptev, L. Schimmer, L. Takhtajan, “Weyl-type asymptotics and bounds for the eigenvalues of functional-difference operators for mirror curves,” *Geom. Funct. Anal.* **26**, 288–305 (2016).
9. A. Laptev, L. Schimmer, L. Takhtajan, “Weyl asymptotics for perturbed functional difference operators,” *J. Math. Phys.* **60**, No. 10, Paper No. 103505 (2019).

Статья поступила в редакцию 21 сентября 2026 г.

принята к публикации 27 сентября 2026 г.

А. А. Лаптев, Д. Сураган, А. Е. Зернова

СЛАБОСВЯЗАННЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Мы изучаем слабо притягивающие возмущения вещественным убывающим потенциалом функционально-разностного оператора

$$W_0(b) = 2 \operatorname{ch} \left(ib \frac{d}{dx} \right), \quad b > 0,$$

спектр которого есть $[2, \infty)$. В этой заметке мы доказываем, что оператор с малым потенциалом имеет ровно одно дискретное собственное значение ниже порога 2. Мы также показываем, что низшее собственное значение простое, а соответствующая собственная функция может быть выбрана строго положительной на $\mathbb{R}$. Доказательства основаны на принципе Бирмана — Швингера, явных ядрах свободной резольвенты и их рангово-одномерных пороговых сингулярностях. Как следствие, результаты дают утвердительный ответ в режиме слабой связи на открытый вопрос Лаптева и Шиммера [1] и дают ведущее восстановление полной силы возмущения по пороговому собственному значению.

1. Введение

Функционально-разностные операторы, порожденные операторами Вейля, привлекают значительное внимание в спектральной теории и математической физике. Напомним оператор Вейля

$$U(b) = \exp(-bP), \quad b > 0,$$

где $= -i \frac{d}{dx}$ — самосопряженный квантовомеханический оператор импульса в $L^2(\mathbb{R})$. Его область определения задается как

$$\operatorname{dom}(U(b)) = \left\{ \varphi \in L^2(\mathbb{R}) : e^{-2\pi b \xi} \widehat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}) \right\},$$

где $\widehat{\varphi}$ — преобразование Фурье функции φ ,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = (\mathcal{F}\varphi)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \xi x} \varphi(x) \, dx.$$

Отметим, что функции $\varphi \in \operatorname{dom}(U(b))$ допускают аналитическое продолжение в

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 < y < b\}$$

причем $\varphi(x + iy) \in L^2(\mathbb{R})$ для всех $0 \leq y < b$. Далее, предел

$$\varphi(x + ib - i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \varphi(x + ib - i\varepsilon)$$

А. А. Лаптев: Научно-технологический университет «Сириус», Федеральная территория «Сириус», Россия; a.laptev@imperial.ac.uk.

Д. Сураган: Назарбаев Университет, Астана, Казахстан; durvudkhan.suragan@nu.edu.kz.

А. Е. Зернова: Научно-технологический университет «Сириус», Федеральная территория «Сириус», Россия; ae.zernova@gmail.com.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* (2027)

© А. А. Лаптев, Д. Сураган, А. Е. Зернова, 2026

существует в смысле сходимости в $L^2(\mathbb{R})$. Обозначая этот предел через $\varphi(x + ib)$, можно записать действие оператора $U(b)$ в виде

$$(U(b)\varphi)(x) = \varphi(x + ib).$$

Обратный оператор $U^{-1}(b) = \exp(bP)$ и его область определения характеризуются аналогично.

При преобразовании Фурье свободный оператор

$$W_0(b) = U(b) + U(b)^{-1} = 2 \operatorname{ch}(-bP)$$

унитарно эквивалентен умножению на $2 \operatorname{ch}(2\pi b\xi)$. Этот оператор самосопряжен, определен на области

$$\operatorname{dom}(W_0(b)) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) : 2 \operatorname{ch}(2\pi b\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

и действует как

$$(W_0(b)\varphi)(x) = \varphi(x + ib) + \varphi(x - ib), \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}).$$

Его спектр абсолютно непрерывен и покрывает интервал $[2, \infty)$ дважды.

Цель этой заметки — получить некоторые спектральные свойства оператора

$$W_V(b) = W_0(b) - V, \tag{1.1}$$

где $V \geq 0$ и $V \in L^1(\mathbb{R})$. Поскольку

$$2 \operatorname{ch}(2\pi b\xi) - 2 > (2\pi b\xi)^2,$$

имеет место неравенство

$$W_0(b) - 2 > -b^2 \frac{d^2}{dx^2} \tag{1.2}$$

на $\operatorname{dom}(W_0(b))$. Таким образом, можно применить неравенство Соболева и заключить, что оператор (1.1) ограничен снизу на общей области определения $W_0(b)$ и V . Следовательно, он допускает самосопряженное расширение Фридрихса, которое мы продолжаем обозначать через $W_V(b)$. Спектр $W_V(b)$ состоит из существенного спектра $[2, \infty)$ и дискретных собственных значений конечной кратности меньше, чем 2. Детали этого аргумента в аналогичном случае оператора Шрёдингера можно найти в [2].

Возмущения $W_0(b)$ естественно возникают в спектральной теории функционально-разностных операторов типа Вейля, связанных с квантовой теорией Лиувилля, квантовой теорией Тейхмюллера и квантованными зеркальными кривыми. В частности, операторы, построенные из соотношений Вейля, появляются в локальной зеркальной симметрии и в изучении некомпактных квантовых групп (см., например, [3]–[10]).

В этой статье мы рассматриваем убывающие потенциалы, и это отличается от случая растущего потенциала, где получаются чисто дискретные спектры и асимптотики типа Вейля. Для $V \in L^1(\mathbb{R})$, $V \geq 0$, возмущение притягивающее, и возможные дискретные собственные значения лежат ниже порога 2. Для оператора (1.1) Лаптев и Шиммер [1] доказали точное неравенство Лоба — Тирринга при условии, что дискретный спектр остается в интервале $[-2, 2)$.

В данной статье мы импледуем задачу в режиме слабой связи. Мы рассматриваем

$$H_\alpha = W_0(b) - \alpha V(x), \quad V \in L^1(\mathbb{R}), \quad V \geq 0, \quad V \not\equiv 0, \quad \alpha > 0. \tag{1.3}$$

Основной результат статьи — следующее утверждение.

Теорема 1.1. Пусть $V \in L^1(\mathbb{R})$, $V \geq 0$, $\alpha > 0$.

- (1) Если потенциал V имеет компактный носитель, $V \in L_c^1(\mathbb{R})$, то существует $\alpha_0 > 0$ такое, что для любого $0 < \alpha < \alpha_0$ оператор H_α , заданный формулой (1.3), имеет ровно одно дискретное собственное значение, меньшее 2.
- (2) Предположим, что $V > 0$, $V \in L^1(\mathbb{R})$ и все собственные значения оператора H_α принадлежат интервалу $(-2, 2)$. Тогда наименьшее собственное значение оператора H_α простое, а соответствующая собственная функция может быть выбрана строго положительной.

Замечание 1.1. Мы полагаем, что ограничения на потенциал V в (1) иметь компактный носитель не требуется.

Теорема 1.1 дает утвердительный ответ в режиме слабой связи на открытый вопрос, поставленный в [1, § 4]: для потенциалов $V \in L^1_c(\mathbb{R})$, $V \geq 0$, и достаточно малых $\alpha > 0$ дискретный спектр состоит из одного собственного значения $\lambda(\alpha)$ в $(-2, 2)$, и соответствующая собственная функция строго положительна, т.е. режим слабой связи восстанавливает принцип неосцилляции, аналогичный классическому одномерному случаю Шрёдингера (см. [13] и [14], сравн. [15, п. 10.5]).

2. Доказательство теоремы 1.1 и некоторые обсуждения

Доказательство теоремы 1.1. Хорошо известно (см., например, [11]), что для отрицательного собственного значения λ оператора

$$-\frac{d^2}{dx^2} - \alpha V$$

имеем

$$|\lambda| \leq \frac{\alpha^2}{4} \|V\|_{L^1(\mathbb{R})}^2. \quad (2.1)$$

В силу неравенств (1.2) и (2.1) заключаем, что для любого $V \in L^1(\mathbb{R})$ существует $\alpha_0 > 0$ такое, что для $0 < \alpha < \alpha_0$ каждое собственное значение оператора H_α , определенного в (1.3), лежит в интервале $(-2, 2)$.

Параметризуем собственное значение λ , $-2 < \lambda < 2$, так, что

$$\lambda = 2 \cos \theta, \quad 0 < \theta < \pi.$$

Ядро свободной резольвенты $W_0(b)$ равно

$$G_\theta(x - y) = \frac{1}{2b \sin \theta} \frac{\operatorname{sh}((\pi - \theta)(x - y)/b)}{\operatorname{sh}(\pi(x - y)/b)},$$

с устранимым диагональным значением

$$G_\theta(0) = \frac{\pi - \theta}{2\pi b \sin \theta}.$$

Здесь и далее формула ядра и дихотомия положительности/осцилляции взята из [1].

Для $0 < \theta < \pi$ имеем

$$G_\theta(t) > 0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Определим оператор Бирмана — Швингера

$$K_\theta = \alpha V^{1/2} (W_0(b) - 2 \cos \theta)^{-1} V^{1/2},$$

ядро которого равно

$$K_\theta(x, y) = \alpha V(x)^{1/2} G_\theta(x - y) V(y)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Используя принцип Бирмана — Швингера, находим, что уравнение на собственные значения

$$(W_0(b) - \alpha V) \psi = 2 \cos \theta \psi$$

эквивалентно тому, что точка 1 принадлежит спектру компактного интегрального оператора K_θ ,

$$1 \in \sigma(K_\theta).$$

Используя, что $\operatorname{supp} V$ компактен, находим

$$G_\theta(x - y) = \frac{1}{2b\theta} + O(1) \quad (2.4)$$

при $\theta \downarrow 0$ равномерно по $x, y \in \operatorname{supp} V$. Поэтому (2.3) вместе с (2.4) дают

$$K_\theta = \frac{\alpha}{2b\theta} P_V + R_\theta,$$

где R_θ остается равномерно ограниченным при $\theta \downarrow 0$. Также имеем

$$(P_V f)(x) = V(x)^{1/2} \int_{\mathbb{R}} V(y)^{1/2} f(y) \, dy.$$

Оператор P_V имеет ранг один, и его единственное ненулевое собственное значение равно $\|V\|_{L^1(\mathbb{R})}$. Таким образом, наибольшее собственное значение $\mu_1(\theta)$ оператора K_θ удовлетворяет

$$\mu_1(\theta) = \frac{\alpha\|V\|_{L^1(\mathbb{R})}}{2b\theta} + O(1), \quad \theta \downarrow 0,$$

тогда как остальные собственные значения K_θ равномерно ограничены вблизи $\theta = 0$. Отметим, что вдали от $\theta = 0$ все семейство Бирмана — Швингера равномерно ограничено. Следовательно, для достаточно малых $\alpha > 0$ только наибольшее собственное значение Бирмана — Швингера может удовлетворять уравнению

$$\mu(\theta) = 1. \quad (2.5)$$

Наибольшее собственное значение действительно является решением этого уравнения, поскольку $\mu_1(\theta) \rightarrow \infty$ при $\theta \downarrow 0$.

Решение единственно: в переменной $\lambda = 2 \cos \theta$, так как

$$\frac{d\mu_1(\lambda)}{d\lambda} = \alpha\|(W_0(b) - \lambda)^{-1}V^{1/2}f\|_2^2 > 0,$$

μ_1 строго возрастает. Следовательно, главное собственное значение Бирмана — Швингера строго возрастает при $\lambda \uparrow 2$. Таким образом, H_α имеет ровно одно собственное значение, меньше 2 для всех достаточно малых α .

Остается показать простоту низшего собственного значения и положительность соответствующей собственной функции, пока все собственные значения H_α принадлежат $(-2, 2)$. Здесь нам не нужно предполагать, что носитель V компактен.

Поскольку $G_\theta(x) > 0$ и $V > 0$, компактный оператор K_θ является улучшающим положительность на $L^2(\mathbb{R})$. В силу [12, теорема 13.44] наибольшее собственное значение этого оператора простое и имеет строго положительную собственную функцию. Если f — собственная функция оператора Бирмана — Швингера, то соответствующая собственная функция H_α имеет вид

$$\psi(x) = \alpha \int_{\mathbb{R}} G_\theta(x-y)V(y)^{1/2}f(y) dy.$$

Поскольку $G_\theta > 0$, а $V^{1/2}f$ положительна и не равна нулю тождественно, получаем $\psi(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Собственное значение, следовательно, простое, а его собственная функция положительна. Доказательство завершено. $\square$

Замечание 2.1. Положительность основного состояния не является глобальным свойством для произвольных притягивающих связей. Действительно, для возмущения ранга один

$$W_0(b) - c\delta_0,$$

в котором $c > 2\pi b$ — единственное собственное значение, меньше -2 . Записывая

$$\lambda = -2 \operatorname{ch} \omega, \quad \omega > 0,$$

можно найти собственное значение из уравнения

$$c = 2\pi b \frac{\operatorname{sh} \omega}{\omega}.$$

Соответствующая собственная функция пропорциональна

$$\psi(x) = \frac{\sin(\omega x/b)}{2b \operatorname{sh} \omega \operatorname{sh}(\pi x/b)}.$$

Эта функция меняет знак, потому что $\sin(\omega x/b)$ меняет знак. Следовательно, утверждение о неосцилляции естественно связано с режимом слабой связи, в котором единственное собственное значение остается в $(-2, 2)$.

Замечание 2.2. Решая (2.5), т.е. $\mu_1(\theta(\alpha)) = 1$, получаем

$$\theta(\alpha) = \frac{\alpha}{2b}\|V\|_{L^1(\mathbb{R})} + O(\alpha^2).$$

Следовательно,

$$\lambda(\alpha) = 2 \cos \theta(\alpha) = 2 - \theta(\alpha)^2 + O(\theta(\alpha)^4) = 2 - \frac{\alpha^2}{4b^2} \|V\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 + O(\alpha^3)$$

(см. [10, теорема 1.1] для более общего класса потенциалов).

Замечание 2.3. В доказательстве теоремы 1.1 имеем $\lambda(\alpha) = 2 \cos \theta(\alpha)$, и

$$\theta(\alpha) = \frac{\alpha}{2b} \|V\|_{L^1(\mathbb{R})} + O(\alpha^2).$$

Поэтому полная масса малого потенциала определяется в главном порядке собственным значением $\lambda(\alpha)$:

$$\alpha \|V\|_{L^1(\mathbb{R})} = 2b\theta(\alpha) + O(\alpha^2).$$

Поскольку

$$\theta(\alpha) = \arccos \left(\frac{\lambda(\alpha)}{2} \right),$$

получаем

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} V(x) \, dx = 2b \arccos \left(\frac{\lambda(\alpha)}{2} \right) + O(\alpha^2). \quad (2.6)$$

Используя

$$2 - \lambda(\alpha) = \theta(\alpha)^2 + O(\theta(\alpha)^4),$$

это можно также записать как

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} V(x) \, dx = 2b \sqrt{2 - \lambda(\alpha)} + O(2 - \lambda(\alpha)).$$

Предположим, что V известно и неизвестна только константа связи α . Тогда из (2.6) получаем

$$\alpha = \frac{2b}{\|V\|_{L^1(\mathbb{R})}} \arccos \left(\frac{\lambda(\alpha)}{2} \right) + O(\alpha^2).$$

Эквивалентно,

$$\alpha = \frac{2b}{\|V\|_{L^1(\mathbb{R})}} \sqrt{2 - \lambda(\alpha)} + O(2 - \lambda(\alpha)).$$

Следовательно, сам потенциал восстанавливается, в главном порядке, как

$$\alpha V(x) \simeq \frac{2b}{\|V\|_{L^1(\mathbb{R})}} \arccos \left(\frac{\lambda(\alpha)}{2} \right) V(x).$$

Эквивалентно,

$$\alpha V(x) \simeq \frac{2b \sqrt{2 - \lambda(\alpha)}}{\|V\|_{L^1(\mathbb{R})}} V(x).$$

Теперь предположим, что спектральные данные включают не только собственное значение λ , но и соответствующую положительную собственную функцию ψ . Поскольку согласно теореме 1.1 собственная функция строго положительна, $\psi(x) > 0$, можем разделить на $\psi(x)$. Заметим, что

$$\widehat{\psi}(\xi) = \alpha(2 \operatorname{ch}(2\pi b\xi) - \lambda)^{-1} \widehat{V\psi}(\xi)$$

убывает как $e^{-2\pi b|\xi|}$, так что ψ продолжается голоморфно в полосу $|\operatorname{Im} z| < b$ и

$$(W_0(b)\psi)(x) = \psi(x + ib) + \psi(x - ib).$$

Поэтому

$$\alpha V(x) = \frac{\psi(x + ib) + \psi(x - ib) - \lambda\psi(x)}{\psi(x)}.$$

Литература

1. A. Laptev, L. Schimmer, “A sharp Lieb–Thirring inequality for functional difference operators,” *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* **17**, No. 105, 1–10 (2021).
2. R. L. Frank, A. Laptev, T. Weidl, *Schrödinger Operators: Eigenvalues and Lieb–Thirring Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge (2022).
3. M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Mariño, C. Vafa, “Topological strings and integrable hierarchies,” *Comm. Math. Phys.* **261**, No. 2, 451–516 (2006).
4. L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan, “Liouville model on the lattice,” *Lect. Notes Phys.* **246**, 166–179 (1986).
5. A. Grassi, Y. Hatsuda, M. Mariño, “Topological strings from quantum mechanics,” *Ann. Henri Poincaré* **17**, No. 11, 3177–3235 (2016).
6. R. Kashaev, “The quantum dilogarithm and Dehn twists in quantum Teichmüller theory,” in: *Integrable structures of exactly solvable two-dimensional models of quantum field theory*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, **35**, No. 6, 211–221 (2001).
7. A. Laptev, L. Schimmer, L. A. Takhtajan, “Weyl type asymptotics and bounds for the eigenvalues of functional-difference operators for mirror curves,” *Geom. Funct. Anal.* **26**, No. 1, 288–305 (2016).
8. A. Laptev, L. Schimmer, L. A. Takhtajan, “Weyl asymptotics for perturbed functional difference operators,” *J. Math. Phys.* **60**, No. 10, 103505, 1–10 (2019).
9. L. A. Takhtajan, L. D. Faddeev, “On the spectral theory of a functional-difference operator in conformal field theory,” *Izv. Math.* **79**, No. 2, 388–410 (2015).
10. A. Zernova, A. Ilyin, A. Laptev, L. Schimmer, “Eigenvalues of non-selfadjoint functional difference operators,” *Funct. Anal. Appl.* **59**, No. 3, 258–270 (2025).
11. A. Aslanyan, E. B. Davies, “Spectral instability for some Schrödinger operators,” *Numer. Math.* **85**, No. 4, 525–552 (2000).
12. M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators*, Academic Press, New York etc., (1978).
13. B. Simon, “The bound state of weakly coupled Schrödinger operators in one and two dimensions,” *Ann. Physics* **97**, No. 2, 279–288 (1976).
14. M. Klaus, “On the bound state of Schrödinger operators in one dimension,” *Ann. Physics* **108**, No. 2, 288–300 (1977).
15. G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics. With Applications to Schrödinger Operators*, Am. Math. Soc., Providence, RI (2014).

Статья поступила в редакцию 29 сентября 2026 г.
принята к публикации 7 октября 2026 г.

И. Х. Мусин, Р. С. Юлмухаметов

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ В ВИДЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^p$, H_D — опорная функция области D , $\Phi = (\varphi_m)_{m=1}^\infty$ — последовательность неотрицательных отдельно радиальных плюрисубгармонических функций в $\mathbb{C}^p$ таких, что $\varphi_m(z) = o(\|z\|)$ при $\|z\| \rightarrow +\infty$. В терминах преобразования Фурье — Лапласа функционалов дано описание сильно сопряженного пространства к проективному (индуктивному) пределу нормированных пространств целых функций в $\mathbb{C}^p$ с нормой

$$\|F\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}^p} |F(z)| e^{-H_D(\operatorname{Im} z) - \varphi_m(z)}.$$

Из полученного описания следует возможность представления ультрадифференцируемых функций в виде преобразования Фурье — Лапласа функционалов на специальным образом построенном весовом пространстве целых функций.

1. Введение

Будем использовать следующие обозначения. Для $z = (z_1, \dots, z_p)$, $w = (w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{C}^p$ полагаем $\langle z, w \rangle = z_1 w_1 + \dots + z_p w_p$, $\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \dots + |z_p|^2}$ и $|z| = |z_1| + \dots + |z_p|$. Обозначаем через $\mathbb{R}_+^p$ элементы $\mathbb{R}^p$ с неотрицательными координатами, через $\mathbb{Z}_+^p$ — элементы $\mathbb{R}_+^p$ с целочисленными координатами. Для $t \geq 0$ полагаем $t^+ = \max(t, 1)$, $\ln^+ t = \ln t$ при $t \geq 1$, $\ln^+ t = 0$ при $0 \leq t < 1$. Для $t = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p$ обозначаем $e^t = (e^{t_1}, \dots, e^{t_p})$. Для $t = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{C}^p$ — $\ln t := (\ln |t_1|, \dots, \ln |t_p|)$ и для $r = (r_1, \dots, r_p) \in \mathbb{R}_+^p$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}_+^p$ полагаем $r^k := r_1^{k_1} \dots r_p^{k_p}$. Пространство целых функций в $\mathbb{C}^p$ обозначается $H(\mathbb{C}^p)$.

Для локально выпуклого пространства X обозначаем через X' пространство линейных непрерывных функционалов на X и через X^* — сильное сопряженное пространство. Действие функционала $S \in X'$ на элемент $f \in X$ записываем в виде $\langle S, f \rangle$. Если X — локально выпуклое пространство функций, голоморфных в области $G \subset \mathbb{C}^p$, и множество $\Omega = \{x : e^{-i\langle x, z \rangle} \in X\}$ непусто, то преобразованием Фурье — Лапласа функционала $S \in X'$ будем называть функцию $\hat{S}(x) = \langle S_z, e^{-i\langle x, z \rangle} \rangle$, $x \in \Omega$. Пространство функций $\{\hat{S} : S \in X^*\}$ обозначим через $\hat{X}$. Если система экспонент $\mathcal{E} = \{e^{-i\langle x, z \rangle}\}_{x \in \Omega}$ полна в X , то отображение $\mathcal{L} : S \rightarrow \hat{S}$ устанавливает алгебраический изоморфизм пространств X^* и $\hat{X}$. Задача описания сопряженного пространства в терминах преобразования Фурье — Лапласа функционалов состоит в определении пространства $\hat{X}$ в теоретико-множественном смысле и описании топологии в $\hat{X}$, индуцированной из X^* ,

Исследование первых двух параграфов выполнено в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (код научной темы FMRS-2025-0010). Исследование третьего параграфа выполнено в рамках реализации программы развития Научно-образовательного математического центра Приволжского федерального округа (соглашение No. 075-02-2026-1332).

И. Х. Мусин: Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Уфа, Россия; musin_ildar@mail.ru.

Р. С. Юлмухаметов: Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН и Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия; Yulmukhametov@mail.ru.

Английский перевод: *J. Math. Sci.* (2027)

© И. Х. Мусин, Р. С. Юлмухаметов, 2026

с помощью равномерных или интегральных весовых норм. Интерес к этой задаче связан с тем, что результаты в этом направлении находят широкое и эффективное применение в различных областях математики [1]–[4].

С каждой функцией $h : \mathbb{R}^p \rightarrow (-\infty, +\infty)$ и ограниченной выпуклой областью $D \subset \mathbb{R}^p$ свяжем нормированное подпространство $C(D, h) \subset C^\infty(D)$ с нормой

$$\|f\|_h = \sup_{x \in D} \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p} |(D^k f)(x)| e^{-h(k)},$$

где для $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}_+^p$

$$(D^k f)(x) = \frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial^{k_1} x_1 \dots \partial^{k_p} x_p}.$$

Для последовательности $\mathcal{H} = (h_m)_{m=1}^\infty$ функций $h_m : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ при условии непрерывности вложений $C(D, h_{m+1}) \rightarrow C(D, h_m)$ обозначаем через $\mathcal{C}_{\text{pr}}(D, \mathcal{H})$ проективный предел пространств $C(D, h_m)$, а в предположении непрерывности вложений $C(D, h_m) \rightarrow C(D, h_{m+1})$ обозначаем через $\mathcal{C}_{\text{ind}}(D, \mathcal{H})$ индуктивный предел пространств $C(D, h_m)$.

Для функции $g : \mathbb{R}^p \rightarrow (-\infty, +\infty]$ введем сопряженную по Юнгу – Фенхелю функцию $\tilde{g}$ по формуле

$$\tilde{g}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^p} (\langle x, y \rangle - g(x)), \quad y \in \mathbb{R}^p.$$

Для функции $g : \mathbb{R}_+^p \rightarrow (-\infty, +\infty]$ положим

$$g^*(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^p} (\langle x, y \rangle - g(x)), \quad y \in \mathbb{R}^p,$$

и обозначим через $g[e]$ функцию в $\mathbb{R}^p$, определяемую по правилу $g[e](y) = g(e^y)$ $y \in \mathbb{R}^p$.

В [5] при некотором наборе условий на семейство $\mathcal{H} = \{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ отдельно радиальных выпуклых функций $h_m : \mathbb{R}^p \rightarrow (-\infty, +\infty)$ таких, что для некоторого $a_m > 0$

$$h_m(x) \geq \|x\| \ln(1 + \|x\|) - a_m \|x\| - a_m, \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

показано, что пространство преобразований Фурье – Лапласа сильного сопряженного $\mathcal{C}_{\text{pr}}^*(D, \mathcal{H})$ изоморфно индуктивному пределу нормированных пространств целых функций с нормой

$$\|F\|_m = \sup_{z \in \mathbb{C}^p} |F(z)| e^{-H_D(\text{Im } z) - \tilde{h}_m(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|)}.$$

В [6] найдены условия на семейство $\mathcal{H} = \{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ выпуклых в $\mathbb{R}^p$ функций h_m , при которых преобразование Фурье – Лапласа устанавливает изоморфизм сильно сопряженного пространства $\mathcal{C}_{\text{ind}}^*(D, \mathcal{H})$ и проективного предела нормированных пространств

$$\{F \in H(\mathbb{C}^p) : \|F\|_m := \sup_{z \in \mathbb{C}^p} |F(z)| e^{-H_D(\text{Im } z) - \ln A_m(|z_1|, \dots, |z_p|)} < \infty\},$$

где

$$A_m(r) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^p} r^k e^{-h_m(k)}.$$

В данной работе рассматривается задача противоположного направления, а именно, задача описания пространств преобразования Фурье – Лапласа линейных непрерывных функционалов на весовых пространствах целых функций. В зависимости от способа построения весовых пространств целых функций рассмотрены два случая. В обоих случаях D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^p$.

Случай 1. Пусть $\Phi = (\varphi_m)_{m=1}^\infty$ — последовательность отдельно радиальных плюрисубгармонических функций в $\mathbb{C}^p$ таких, что $\varphi_m(z) = o(\|z\|)$ при $z \rightarrow \infty$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} (\varphi_m(z) - \varphi_{m+1}(z)) = +\infty$. Задача состоит в том, чтобы описать в терминах преобразования Фурье – Лапласа сильное сопряженное пространство к проективному пределу $H_{\text{pr}}(\Phi)$ нормированных пространств

$$H(\mathbb{C}^p, H_D(\text{Im } z) + \varphi_m(z)) = \left\{ F \in H(\mathbb{C}^p) : \|F\|_m := \sup_{z \in \mathbb{C}^p} \frac{|F(z)|}{e^{H_D(\text{Im } z) + \varphi_m(z)}} < \infty \right\}.$$

Будет доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть последовательность $\Phi = (\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$ неотрицательных раздельно радиальных плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^p$ функций φ_m удовлетворяет условиям

$$\varphi_m(z) \geq \varphi_{m+1}(z) + 3p\sqrt{p} \ln(1 + \|z\|), \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (1.1)$$

$$\varphi_m(z) = o(\|z\|), \quad z \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

$$\varphi_{m+1}(|z_1|^+, \dots, |z_p|^+) \leq \varphi_m(z), \quad z \in \mathbb{C}^p. \quad (1.3)$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим

$$h_m(x) = (\varphi_m[e])^*(|x_1|, \dots, |x_p|), \quad x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Тогда преобразование Фурье — Лапласа устанавливает изоморфизм пространства $H_{\text{pr}}^*(\Phi)$ на индуктивный предел $\mathcal{C}_{\text{ind}}(D, \mathcal{H})$ пространств $C(D, h_m)$.

Случай 2. Пусть $\Phi = (\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$ — последовательность раздельно радиальных плюрисубгармонических функций в $\mathbb{C}^p$ таких, что $\varphi_m(z) = o(\|z\|)$ при $z \rightarrow \infty$ и $\lim_{z \rightarrow \infty} (\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z)) = +\infty$. Обозначим через $H_{\text{ind}}(\Phi)$ индуктивный предел нормированных пространств $H(\mathbb{C}^p, H_D(\text{Im } z) + \varphi_m(z))$. В этом случае верна следующая теорема.

Теорема 1.2. Пусть последовательность Φ неотрицательных плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^p$ раздельно радиальных функций φ_m удовлетворяет условию (1.2) и такова, что

$$\varphi_{m+1}(z) \geq \varphi_m(z) + 3p\sqrt{p} \ln(1 + \|z\|), \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad m \in \mathbb{N},$$

$$\varphi_m(|z_1|^+, \dots, |z_p|^+) \leq \varphi_{m+1}(z), \quad z \in \mathbb{C}^p.$$

Для каждого $m \in \mathbb{N}$ пусть

$$h_m(x) = (\varphi_m[e])^*(|x_1|, \dots, |x_p|), \quad x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Тогда преобразование Фурье — Лапласа устанавливает изоморфизм пространства $H_{\text{ind}}^*(\Phi)$ на проективный предел $\mathcal{C}_{\text{pr}}(D, \mathcal{H})$ пространств $C(D, h_m)$.

Из теоремы 1.1 можно вывести следующее утверждение о представлении ультрадифференцируемых функций в выпуклой области в виде преобразований Фурье.

Теорема 1.3. Пусть D — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{R}^p$ и h — раздельно радиальная выпуклая функция в $\mathbb{R}^p$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x) - \sqrt{p}\|x\| \ln(\|x\| + 1)}{\|x\|} = +\infty. \quad (1.4)$$

Тогда для любой функции $f \in C(D, h)$ найдутся число $m \in \mathbb{N}$ и функция $F \in H(\mathbb{C}^p)$ такие, что

$$\int_{\mathbb{C}^p} |F(z)|^2 e^{-2H_D(\text{Im } z) - 2\tilde{h}_m(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|)} d\lambda_p(z) < \infty,$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{C}^p} \overline{F}(z) e^{-i\langle x, z \rangle - 2H_D(\text{Im } z) - 2\tilde{h}_m(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|)} d\lambda_p(z),$$

где $h_1(x) = h(x)$,

$$h_{m+1}(x) = \sup_{\|y\| \leq 3p\sqrt{p}} h_m(x + y) + 3p\sqrt{p} \ln(2p), \quad m \in \mathbb{N}.$$

2. Вспомогательные утверждения

Докажем несколько утверждений о выпуклых функциях.

Лемма 2.1. Пусть φ — раздельно радиальная неотрицательная плюрисубгармоническая функция в $\mathbb{C}^p$ такая, что для некоторых положительных b и c

$$\varphi(z) \leq b\|z\| + c, \quad z \in \mathbb{C}^p, \quad (2.1)$$

$$\frac{\varphi(z)}{\ln\|z\|} \rightarrow \infty, \quad \|z\| \rightarrow \infty, \quad (2.2)$$

Пусть функция $v : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ определена по формуле

$$v(t) = \varphi(e^{t_1}, \dots, e^{t_p}), \quad t = (t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^p.$$

Тогда v — выпуклая неубывающая по каждой переменной в $\mathbb{R}^p$ функция такая, что:

$$v(t) \leq b\sqrt{p}e^{\|t\|} + c, \quad t \in \mathbb{R}^p,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty, t \in \mathbb{R}_+^p} \frac{v(t)}{\|t\|} = +\infty.$$

Кроме того, справедливы следующие утверждения.

1. Для любого $y \in \mathbb{R}_+^p$

$$\tilde{v}(y) \geq v^*(y) \geq \|y\| \ln(\|y\| + 1) - a\|y\| - a, \quad (2.3)$$

где $a = \max(\ln^+(eb\sqrt{p}), b\sqrt{p} + c + 1)$.

2. Для $\eta \in \mathbb{R}_+^p$ точка $x_\eta \in \mathbb{R}_+^p$, в которой достигается супремум функции $v_\eta(x) = \langle x, \eta \rangle - v(x)$ по $x \in \mathbb{R}_+^p$, удовлетворяет оценке

$$\|x_\eta\| \geq \max(\ln^+ \|\eta\| - 2a, 0).$$

Доказательство. Выпуклость и неубывание по каждой переменной функции v в $\mathbb{R}^p$ следует из свойств плюрисубгармонических функций в $\mathbb{C}^p$, радиальных по каждой переменной [7].

Поточечная оценка сверху на v вытекает из (2.1) и соотношения

$$\|e^t\| = \sqrt{e^{2t_1} + \dots + e^{2t_p}} \leq \sqrt{p}e^{\max|t_k|} \leq \sqrt{p}e^{\|t\|}, \quad t \in \mathbb{R}^p.$$

Соотношение $\lim_{t \rightarrow \infty, t \in \mathbb{R}_+^p} v(t)/\|t\| = +\infty$, следует из (2.2), так как для $t \in \mathbb{R}_+^p$

$$\|e^t\| = \sqrt{e^{2t_1} + \dots + e^{2t_p}} \geq e^{\max|t_k|} \geq e^{\frac{\|t\|}{\sqrt{p}}}. \quad (2.4)$$

1. Очевидно, что $\tilde{v}(y) \geq v^*(y)$ для любого $y \in \mathbb{R}^p$.

Далее, для $y \in \mathbb{R}_+^p$

$$v^*(y) \geq \sup_{x \in \mathbb{R}_+^p} (\langle x, y \rangle - b\sqrt{p}e^{\|x\|} - c) = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^p} (\|x\|\|y\| - b\sqrt{p}e^{\|x\|}) - c = \sup_{t \geq 0} (t\|y\| - b\sqrt{p}e^t) - c.$$

Поэтому, если $\|y\| \geq b\sqrt{p}$, то

$$v^*(y) \geq \|y\| \ln \frac{\|y\|}{b\sqrt{p}} - \|y\| - c,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} v^*(y) &\geq \|y\| \ln \frac{\|y\|}{1 + \|y\|} + \|y\| \ln(1 + \|y\|) - \|y\| \ln(eb\sqrt{p}) - c \\ &\geq \|y\| \ln(\|y\| + 1) - \|y\| \ln(eb\sqrt{p}) - c - 1 \geq \|y\| \ln(\|y\| + 1) - \|y\| \ln^+(eb\sqrt{p}) - c - 1. \end{aligned}$$

Если $\|y\| < b\sqrt{p}$, то $v^*(y) \geq -b\sqrt{p} - c$. Из полученных неравенств следует искомая оценка снизу функции v^* на $\mathbb{R}_+^p$ с $a = \max(\ln^+(eb\sqrt{p}), b\sqrt{p} + c + 1)$.

2. Отметим вначале, что утверждение леммы 3 из [5] справедливо также для функций g , определенных и полунепрерывных снизу в $\mathbb{R}_+^p$, и таких, что $g(0) = 0$ и при некотором $r > 0$

$$g(x) \geq \|x\| \ln(\|x\| + 1) - r\|x\| - r, \quad x \in \mathbb{R}_+^p.$$

А именно, какова бы ни была точка $x \in \mathbb{R}^p$ для точки $\xi_x \in \mathbb{R}_+^p$, в которой достигается супремум в $\mathbb{R}_+^p$ функции $g_x(\xi) = \langle \xi, x \rangle - g(\xi)$, имеем $\|\xi_x\| \leq e^{2r} e^{\|x\|}$.

Обозначим функцию $v - \varphi(1, \dots, 1)$ через V . Функция V — выпуклая в $\mathbb{R}^p$, принимает конечные значения и, значит, непрерывная в $\mathbb{R}^p$. Теми же свойствами обладает функция v^* (а значит, и V^*). Так как v не убывает по каждой переменной в $\mathbb{R}^p$, имеем $V^*(0) = 0$. Кроме того, поскольку $V^*(y) = v^*(y) + \varphi(1, \dots, 1)$ и $\varphi(1, \dots, 1) \geq 0$, ввиду неравенства (2.3) имеем

$$V^*(y) \geq \|y\| \ln(\|y\| + 1) - a\|y\| - a, \quad y \in \mathbb{R}_+^p.$$

Для $y \in \mathbb{R}_+^p$ обозначим через x_y точку в $\mathbb{R}_+^p$, в которой достигается супремум функции $\langle x, y \rangle - v(x)$ по $x \in \mathbb{R}_+^p$. Тогда в этой точке достигается также супремум функции $\langle x, y \rangle - V(x)$ по $x \in \mathbb{R}_+^p$, т.е. x_y — точка в $\mathbb{R}_+^p$, в которой неравенство

$$\langle x, y \rangle \leq V^*(y) + V(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^p,$$

превращается в равенство

$$\langle x_y, y \rangle = V^*(y) + V(x_y).$$

Возьмем произвольную точку $\eta \in \mathbb{R}_+^p$. Тогда

$$\langle x_\eta, y \rangle - V^*(y) \leq V(x_\eta), \quad y \in \mathbb{R}_+^p,$$

$$\langle x_\eta, \eta \rangle - V^*(\eta) = V(x_\eta).$$

Таким образом, супремум по $y \in \mathbb{R}_+^p$ функции $\langle x_\eta, y \rangle - V^*(y)$ достигается в точке $y = \eta$. Согласно вышесказанному $\|\eta\| \leq e^{2a} e^{\|x_\eta\|}$. Следовательно, $\|x_\eta\| \geq \max(\ln^+ \|\eta\| - 2a, 0)$. $\square$

Для функции $g : \mathbb{R}_+^p \rightarrow \mathbb{R}$ обозначим через g^* «целочисленную сопряженную» функцию

$$g^*(x) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p} (\langle x, k \rangle - g(k)), \quad x \in \mathbb{R}^p.$$

Лемма 2.2. Пусть v и v_0 — выпуклые неубывающие по каждой переменной функции в $\mathbb{R}_+^p$ такие, что

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}_+^p} \frac{v(x)}{e^{\|x\|}} &< \infty, \\ \lim_{\|x\| \rightarrow \infty, x \in \mathbb{R}_+^p} \frac{v(x)}{\|x\|} &= +\infty, \\ v_0(x) &\leq v(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^p. \end{aligned}$$

Тогда

$$v(x) \geq (v^*)^*(x) \geq v_0(x) - \sqrt{p}\|x\|, \quad x \in \mathbb{R}_+^p.$$

Доказательство. Положим $V(x) = v(|x_1|, \dots, |x_p|)$ для $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$. Тогда функция V раздельно радиальна, выпукла и принимает конечные значения в $\mathbb{R}^p$. Для $x \in \mathbb{R}_+^p$

$$v(x) = V(x) = \widetilde{(V)}(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^p} (\langle x, y \rangle - \widetilde{V}(y)) = \sup_{y \in \mathbb{R}_+^p} (\langle x, y \rangle - \widetilde{V}(y)),$$

и, так как для любого $y \in \mathbb{R}_+^p$

$$\widetilde{V}(y) = \sup_{t \in \mathbb{R}^p} (\langle t, y \rangle - V(t)) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+^p} (\langle t, y \rangle - V(t)) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+^p} (\langle t, y \rangle - v(t)) = v^*(y),$$

получаем

$$v(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}_+^p} (\langle x, y \rangle - v^*(y)) = (v^*)^*(x) \geq \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p} (\langle x, k \rangle - v^*(k)) = (v^*)^*(x).$$

Далее, в силу условия на рост функции v достаточно доказать правое неравенство для функции v_0 , обладающей свойством $v_0(t)/\|t\| \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}_+^p$

$$\begin{aligned} v_0(x) &= (v_0^*)^*(x) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p, s \in [0;1]^n} (\langle k + s, x \rangle - v_0^*(k + s)) \\ &\leq \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p, s \in [0;1]^n} (\langle k + s, x \rangle - v^*(k)) \leq (v^*)^*(x) + \sqrt{p}\|x\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

3. Доказательство теорем 1.1 и 1.2

Пусть семейство $\Phi = (\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$ неотрицательных раздельно радиальных плюрисубгармонических в $\mathbb{C}^p$ функций φ_m удовлетворяет условиям (1.1)-(1.3) теоремы 1.1 и $v_m(x) = \varphi_m(e^{x_1}, \dots, e^{x_p})$, $h_m(x) = v_m^*(|x_1|, \dots, |x_p|)$ для $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $m \in \mathbb{N}$. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ и $k \in \mathbb{Z}_+^p$ положим $M_k^{(m)} = e^{h_m(k)}$. Обозначим через Σ семейство последовательностей $\{(M_k^{(m)})_{k \in \mathbb{Z}_+^p}, m \in \mathbb{N}\}$.

Пользуясь условием (1.1), нетрудно показать, что для любого функционала $S \in H_{\text{pr}}^*(\Phi)$ функция $\widehat{S}$ определена и бесконечно дифференцируема в D и

$$(D^k \widehat{S})(x) = \langle S_z, (-i)^{|k|} z^k e^{-i\langle x, z \rangle} \rangle, \quad x \in D, \quad k \in \mathbb{Z}_+^n.$$

Отметим, что пространство $H_{\text{pr}}(\Phi)$ в силу условия (1.1) является пространством (M^*) и ввиду [8, теорема 5] функционал $S \in H_{\text{pr}}^*(\Phi)$ продолжается как линейный непрерывный функционал на некотором пространстве $H(\mathbb{C}^p, H_D(\text{Im } z) + \varphi_m(z))$. Поэтому для любых $x \in D$ и $k \in \mathbb{Z}_+^p$

$$\begin{aligned} |(D^k \widehat{S})(x)| &\leq \|S\|_m \sup_{z \in \mathbb{C}^p} |z^k| e^{\langle x, \text{Im } z \rangle - H_D(\text{Im } z) - \varphi_m(z)} \\ &\leq \|S\|_m \exp \sup_{z \in \mathbb{C}^p} (\langle \ln^+ z, k \rangle - \varphi_{m+1}(|z_1|^+, \dots, |z_1|^+)) = \|S\|_m e^{h_{m+1}(k)}, \end{aligned}$$

где $\|S\|_m$ — норма функционала на $H(\mathbb{C}^p, H_D(\text{Im } z) + \varphi_m(z))$. Следовательно, линейное преобразование $\mathcal{L}: S \in H_{\text{pr}}^*(\Phi) \rightarrow \widehat{S}$ непрерывно действует из $H_{\text{pr}}^*(\Phi)$ в пространство $\mathcal{C}_{\text{ind}}(D, \mathcal{H})$.

Инъективность преобразования Фурье — Лапласа будет доказана, если убедимся в полноте системы $\mathcal{E} = \{e^{-i\langle x, z \rangle}\}_{x \in D}$ в пространстве $H_{\text{pr}}(\Phi)$. Для этого воспользуемся теоремой 3.1 из [6], утверждающей, что при выполнении определенных условий на семейство $\mathcal{H} = \{h_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ преобразование $S \rightarrow \langle S_x, e^{-i\langle x, z \rangle} \rangle$ устанавливает изоморфизм сильно сопряженного пространства $\mathcal{C}_{\text{ind}}^*(D, \mathcal{H})$ и проективного предела $H_0(\Sigma)$ пространств $H(\mathbb{C}^p, H_D(\text{Im } z) + \ln A_m(z))$, где

$$A_m(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^p} \frac{|z^k|}{M_k^{(m)}}, \quad z \in \mathbb{C}^p.$$

Проверим выполнение ее условий. Прежде всего, отметим, что согласно первому утверждению леммы 2.1 функции h_m удовлетворяют условию (3.1) теоремы 3.1 из [6], а именно,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h_m(x) - \|x\| \ln(\|x\| + 1)}{\|x\|} > -\infty.$$

Покажем, что для семейства Σ выполнены условия (3.2) и (3.3) этой теоремы, а именно,

(1) для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p} \frac{M_k^{(m)}}{M_k^{(m+1)}} < \infty, \quad (\mathcal{F}1)$$

(2) для каждого $j \in \mathbb{N}$ найдется номер $m = m(j) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\sum_k \frac{\sup_{|s| \leq 1} M_{k+s}^{(j)}}{M_k^{(m)}} < \infty. \quad (\mathcal{F}2)$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $x_k^{(m)}$ точку достижения максимума по $x \in \mathbb{R}_+^p$ функции $\langle x, k \rangle - v_m(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} \ln M_k^{(m)} - \ln M_k^{(m+1)} &= h_m(k) - h_{m+1}(k) = v_m^*(k) - v_{m+1}^*(k) \\ &\leq \langle x_k^{(m)}, k \rangle - v_m(x_k^{(m)}) - (\langle x_k^{(m)}, k \rangle - v_{m+1}(x_k^{(m)})) = v_{m+1}(x_k^{(m)}) - v_m(x_k^{(m)}). \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь условием (1.1) (а также неравенством (2.4)), получим

$$\ln M_k^{(m)} - \ln M_k^{(m+1)} \leq -3p \|x_k^{(m)}\|.$$

Заметим, что ввиду условий (1.1) и (1.2) найдется число $c_0 > 0$ такое, что для всех функций φ_m будет выполнено неравенство

$$\varphi_m(z) \leq \frac{1}{\sqrt{p}} \|z\| + c_0, \quad z \in \mathbb{C}^p.$$

Теперь учтем, что в силу леммы 2.1

$$\|x_k^{(m)}\| \geq \ln^+ \|k\| - 2(c_0 + 2).$$

Поэтому для всех $k \in \mathbb{Z}_+^p$, $\|k\| > e^{2(c_0+2)}$, при любом m

$$\frac{M_k^{(m)}}{M_k^{(m+1)}} \leq \frac{e^{6(c_0+2)p}}{\|k\|^{3p}}.$$

Следовательно, при некотором $A > 0$, не зависящем от m ,

$$\frac{M_k^{(m)}}{M_k^{(m+1)}} \leq \frac{A}{(1 + \|k\|)^{3p}}, \quad k \in \mathbb{Z}_+^p. \quad (3.1)$$

Тем самым условие (F1) выполнено.

Проверим теперь выполнение условия (F2). Пусть $j \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$v_j(x) - v_{j+1}(x) \geq 3p\|x\|, \quad x \in \mathbb{R}_+^p,$$

при любых $k \in \mathbb{Z}_+^p$ и $s \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| \leq 1$,

$$v_j^*(k+s) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+^p} (\langle k+s, t \rangle - v_j(t)) \leq \sup_{t \in \mathbb{R}_+^p} (\langle k, t \rangle + \|t\| - v_j(t)) \leq v_{j+1}^*(k).$$

Поэтому с учетом предыдущей оценки и неравенства (3.1) имеем

$$\sum_k \frac{\max_{|s| \leq 1} M_{k+s}^{(j)}}{M_k^{(j+2)}} = \sum_k \frac{e^{\max_{|s| \leq 1} v_j^*(k+s)}}{e^{v_{j+2}^*(k)}} \leq \sum_k \frac{e^{v_{j+1}^*(k)}}{e^{v_{j+2}^*(k)}} = \sum_k \frac{M_k^{(j+1)}}{M_k^{(j+2)}} \leq \sum_k \frac{A}{(1 + \|k\|)^{3p}} < \infty.$$

Поэтому условие (F2) выполнено для $m(j) = j + 2$. Итак, все условия теоремы 3.1 из [6] выполнены.

Далее, отметим, что в условиях нашей теоремы пространства $H_0(\Sigma)$ и $H_{\text{pr}}(\Phi)$ совпадают. В самом деле, пусть $m \in \mathbb{N}$ произвольно и $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$. Если $|z_1| \geq 1, \dots, |z_p| \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \ln A_m(z) &\geq \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p} (\langle k, \ln z \rangle - \ln M_k^{(m)}) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p} (\langle k, \ln z \rangle - v_m^*(k)) \\ &= (v_m^*)^*(\ln |z_1|, \dots, \ln |z_p|) = (v_m^*)^*(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда у точки z имеются компоненты, по модулю меньшие, чем 1. Пусть, например, $|z_1| < 1, \dots, |z_l| < 1$ ($1 \leq l \leq p$). Тогда

$$\begin{aligned} \ln A_m(z) &\geq \sup_{k=(0, \dots, 0, k_{l+1}, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}_+^p} (\langle k, \ln z \rangle - \ln M_k^{(m)}) = \sup_{k=(0, \dots, 0, k_{l+1}, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}_+^p} (\langle k, \ln z \rangle - v_m^*(k)) \\ &= \sup_{k=(0, \dots, 0, k_{l+1}, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}_+^p} (k_{l+1} \ln |z_{l+1}| + \dots + k_p \ln |z_p| - v_m^*(0, \dots, 0, k_{l+1}, \dots, k_p)) \\ &\geq \sup_{k=(k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}_+^p} (k_1 \ln^+ |z_1| + \dots + k_l \ln^+ |z_l| + k_{l+1} \ln |z_{l+1}| + \dots + k_p \ln |z_p| - v_m^*(k)) \\ &= (v_m^*)^*(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|). \end{aligned}$$

Итак, для любого $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$

$$\ln A_m(z) \geq (v_m^*)^*(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|).$$

Теперь, пользуясь леммой 2.2 с $v = v_m$ и $v_0 = v_{m+1}$ и учитывая условие (1.1), получим

$$\ln A_m(z) \geq v_{m+1}(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|) - \sqrt{p} \|(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|)\|$$

$$\geq v_{m+2}(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|) = \varphi_{m+2}(|z_1|^+, \dots, |z_p|^+).$$

Тогда тем более справедливо неравенство

$$\ln A_m(z) \geq \varphi_{m+2}(z), \quad z \in \mathbb{C}^p.$$

С другой стороны, воспользовавшись неравенством (3.1), для любого $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$ имеем при некотором $C_m > 0$

$$\ln A_{m+2}(z) \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p} (\langle k, \ln z \rangle - \ln M_K^{(m+1)}) + C_m = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p} (\langle k, \ln z \rangle - v_{m+1}^*(k)) + C_m.$$

Отсюда, обозначив для краткости $(\ln |z_1|^+, \dots, \ln |z_p|^+)$ через $\ln^+ z$ и пользуясь леммой 2.2 и условием (1.3), находим

$$\ln A_{m+2}(z) \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}_+^p} (\langle k, \ln^+ z \rangle - v_{m+1}^*(k)) + C_m = (v_{m+1}^*)^*(\ln^+ z) + C_m$$

$$\leq v_{m+1}(\ln^+ z) + C_m = \varphi_{m+1}(|z_1|^+, \dots, |z_p|^+) + C_m \leq \varphi_m(z) + C_m.$$

Таким образом, имеют место непрерывные вложения

$$H(\mathbb{C}^p, H_D(\operatorname{Im} z) + \varphi_{m+2}(z)) \hookrightarrow H(\mathbb{C}^p, H_D(\operatorname{Im} z) + \ln A_m(z)),$$

$$H(\mathbb{C}^p, H_D(\operatorname{Im} z) + \ln A_{m+2}(z)) \hookrightarrow H(\mathbb{C}^p, H_D(\operatorname{Im} z) + \varphi_m(z))$$

Отсюда следует, что пространства $H_0(\Sigma)$ и $H_{\operatorname{pr}}(\Phi)$ совпадают.

По теореме 3.1 из [6] и согласно вышесказанному преобразование $\mathcal{L}_0 : S \in \mathcal{C}_{\operatorname{ind}}^*(D, \mathcal{H}) \longrightarrow \langle S_x, e^{-i\langle x, z \rangle} \rangle$ устанавливает изоморфизм сильно сопряженного пространства $\mathcal{C}_{\operatorname{ind}}^*(D, \mathcal{H})$ и $H_{\operatorname{pr}}(\Phi)$.

Из теоремы Арцела — Асколи следует, что пространство $\mathcal{C}_{\operatorname{ind}}(D, \mathcal{H})$ является пространством (LN^*) , значит оно рефлексивно (см. [8]). Следовательно, семейство точечных функционалов $\delta_x : f \rightarrow f(x)$, где $x \in D$, полно в $\mathcal{C}_{\operatorname{ind}}^*(D, \mathcal{H})$, а семейство их образов при преобразовании Фурье — Лапласа будет полным в пространстве $H_{\operatorname{pr}}(\Phi)$, то есть, система экспонент $\mathcal{E} = \{e^{-i\langle x, z \rangle}, x \in D\}$ будет полна в пространстве $H_{\operatorname{pr}}(\Phi)$. Таким образом, отображение $\mathcal{L} : S \longrightarrow \widehat{S}(x) = S_z(e^{-i\langle x, z \rangle})$ инъективно.

Покажем, что отображение $\mathcal{L}$ сюръективно. Пусть $f \in \mathcal{C}_{\operatorname{ind}}(D, \mathcal{H})$ взято произвольно. Как уже отмечалось выше, пространство $\mathcal{C}_{\operatorname{ind}}(D, \mathcal{H})$ рефлексивно. Поэтому линейный функционал Rf на $\mathcal{C}_{\operatorname{ind}}^*(D, \mathcal{H})$, действующий по правилу

$$\langle Rf, S \rangle = \langle S, f \rangle, \quad S \in \mathcal{C}_{\operatorname{ind}}^*(D, \mathcal{H}),$$

является непрерывным. Определим теперь функционал S_f на $H_{\operatorname{pr}}(\Phi)$ по формуле

$$\langle S_f, F \rangle = \langle Rf, \mathcal{L}_0^{-1}(F) \rangle, \quad F \in H_{\operatorname{pr}}(\Phi).$$

Очевидно, что S_f — линейный непрерывный функционал на $H_{\operatorname{pr}}(\Phi)$. Обозначим через e_x отображение $z \in \mathbb{C}^n \longrightarrow e^{-i\langle x, z \rangle}$. Тогда

$$\mathcal{L}(S_f)(x) = \widehat{S}_f(x) = \langle S_f, e_x \rangle = \langle Rf, \mathcal{L}_0^{-1}(e_x) \rangle = \langle Rf, \delta_x \rangle = \langle \delta_x, f \rangle = f(x).$$

Таким образом, $\mathcal{L} : H_{\operatorname{pr}}^*(\Phi) \longrightarrow \mathcal{C}_{\operatorname{ind}}(D, \mathcal{H})$ — сюръективное отображение.

Непрерывность обратного отображения следует из теоремы об открытом отображении (см. например, [9]). Теорема 1.1 доказана.

Теорема 1.2 доказывается по такой же схеме. При этом доказательство полноты системы экспонент в пространстве $H_{\operatorname{ind}}(\Phi)$ и доказательство сюръективности преобразования Фурье — Лапласа $\mathcal{L} : H_{\operatorname{ind}}^*(\Phi) \longrightarrow \mathcal{C}_{\operatorname{pr}}(D, \mathcal{H})$ основано на [5, теорема 1].

4. Доказательство теоремы 1.3

Отметим, что последовательность $(\varphi_m)_{m=1}^\infty$ функций φ_m , определенных в $\mathbb{C}^p$ по правилу $\varphi_m(z) = \widetilde{h}_m(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|)$, где $z = (z_1, \dots, z_p)$, удовлетворяет условиям (1.1) и (1.2) теоремы 1.1. В самом деле, для любых $y, t \in \mathbb{R}^p$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^p} (\langle y, x \rangle - h_m(x+t)) = \sup_{u \in \mathbb{R}^p} (\langle y, u-t \rangle - h_m(u))$$

$$= \sup_{u \in \mathbb{R}^p} (\langle y, u \rangle - h_m(u)) - \langle y, t \rangle = \tilde{h}_m(y) - \langle y, t \rangle.$$

Поэтому

$$\tilde{h}_{m+1}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^p} (\langle y, x \rangle - \sup_{\|t\| \leq 3p\sqrt{p}} h_m(x+t) - 3p\sqrt{p} \ln(2p)) \leq \tilde{h}_m(y) - 3p\sqrt{p}\|y\| - 3p\sqrt{p} \ln(2p).$$

Отсюда с использованием элементарных неравенств

$$\ln^+ \|z\| \leq \max_{1 \leq k \leq p} \ln^+ \sqrt{p} |z_k| \leq \|(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|)\| + \ln p,$$

$$\ln(\|z\| + 1) \leq \ln^+ \|z\| + \ln 2$$

следует, что семейство $(\varphi_m)_{m=1}^\infty$ удовлетворяет условиям (1.1).

Далее, так как по условию (1.4) теоремы для любого $M > 0$ найдется число $C > 0$ такое, что

$$h(x) \geq \sqrt{p}\|x\| \ln \|x\| + M\|x\| - C, \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

в результате элементарных вычислений получим

$$\tilde{h}(y) \leq \sup_{t>0} (t\|y\| - \sqrt{p}t \ln t - Mt + C) = \sqrt{p}e^{\frac{1}{\sqrt{p}}(\|y\| - \sqrt{p} - M)} + C.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim}_{y \rightarrow \infty} \tilde{h}(y) e^{-\frac{1}{\sqrt{p}}\|y\|} \leq \sqrt{p} e^{-\frac{M+\sqrt{p}}{\sqrt{p}}}.$$

Следовательно,

$$\tilde{h}(y) = o(e^{\frac{1}{\sqrt{p}}\|y\|}), \quad y \rightarrow \infty.$$

Поскольку $\tilde{h}_m(y) \leq \tilde{h}(y)$ при любых $m \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{R}^p$, то

$$\tilde{h}_m(y) = o(e^{\frac{1}{\sqrt{p}}\|y\|}), \quad y \rightarrow \infty.$$

Отсюда и из элементарного неравенства

$$\|(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|)\| \leq \sqrt{p} \max_k \ln^+ |z_k| \leq \sqrt{p} \ln^+ \|z\|$$

следует, что $\varphi_m(z) = o(\|z\|)$ при $z \rightarrow \infty$. Следовательно, выполнено условие (1.2) теоремы 1.1.

Так как по условию теоремы $f \in C(D, h)$, имеем $f \in C_{\text{ind}}(D, \mathcal{H})$. Тогда по теореме 1.1 любая функция $f \in C_{\text{ind}}(D, \mathcal{H})$ является преобразованием Фурье — Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала S на проективном пределе $H_{\text{pr}}(\Phi)$ пространств $H(\mathbb{C}^p, H_D(\text{Im } z) + \varphi_m(z))$:

$$f(x) = \langle S_z, e^{-i\langle x, z \rangle} \rangle, \quad x \in D. \quad (4.1)$$

Чтобы придать этому представлению аналитический вид, перейдем в пространстве $H_{\text{pr}}(\Phi)$ к интегрально-весовой топологии. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим $\psi_m(z) = H_D(\text{Im } z) + \varphi_m(z)$, $z \in \mathbb{C}^p$. Обозначим через $H_2(\mathbb{C}^p, \psi_m)$ пространство целых функций F в $\mathbb{C}^p$, для которых

$$\|F\|_{2,m} = \left(\int_{\mathbb{C}^p} |F(z)|^2 e^{-2\psi_m(z)} d\lambda_p(z) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

и через $\tilde{H}_{\text{pr}}(\Phi)$ — проективный предел пространств $H_2(\mathbb{C}^p, \psi_m)$. Ввиду условия (1.1)

$$\begin{aligned} \|F\|_{2,m}^2 &= \int_{\mathbb{C}^p} |F(z)|^2 e^{-2\psi_m(z)} d\lambda_p(z) \leq \int_{\mathbb{C}^p} |F(z)|^2 e^{-2\psi_{m+1}(z)} \frac{d\lambda_p(z)}{(1 + \|z\|)^{6p\sqrt{p}}} \\ &\leq C_p \sup_{z \in \mathbb{C}^p} |F(z)|^2 e^{-2\psi_{m+1}(z)} = C_p \|F\|_{m+1}^2, \end{aligned}$$

где

$$C_p = \int_{\mathbb{C}^p} \frac{d\lambda_p(z)}{(1 + \|z\|)^{6p\sqrt{p}}}.$$

Следовательно, пространство $H(\mathbb{C}^p, H_D(\text{Im } z) + \varphi_{m+1}(z))$ непрерывно вложено в пространство $H_2(\mathbb{C}^p, \psi_m)$, а пространство $H_{\text{pr}}(\Phi)$ — в пространство $\tilde{H}_{\text{pr}}(\Phi)$.

Для доказательства обратного вложения воспользуемся следствием 2 леммы 4 из [5], согласно которому для любого $m \in \mathbb{N}$ найдется постоянная $A_m > 0$ такая, что для $w = (w_1, \dots, w_p)$, $z = (z_1, \dots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, удовлетворяющих условию

$$|w_j - z_j| \leq \frac{1}{2p \prod_{k=1}^p (1 + |z_k|)}, \quad j = 1, \dots, p, \quad (4.2)$$

выполняется неравенство

$$|\varphi_m(w) - \varphi_m(z)| \leq A_m.$$

Поскольку

$$|H_D(\operatorname{Im} w) - H_D(\operatorname{Im} z)| \leq \left(\sup_{x \in D} \|x\| \right) \|z - w\|, \quad z, w \in \mathbb{C}^p,$$

при некотором $B_m > 0$ для точек z, w , удовлетворяющих (4.2),

$$|\psi_m(w) - \psi_m(z)| \leq B_m. \quad (4.3)$$

Пусть $z \in \mathbb{C}^p$,

$$r(z) = \frac{1}{2p} \prod_{k=1}^p (1 + |z_k|)^{-1}$$

и $\Omega(z) = B(z_1, r(z)) \times \dots \times B(z_p, r(z))$, где $B(z_j, r(z))$ — замкнутый круг радиуса $r(z)$ с центром в точке z_j , $j = 1, \dots, p$. Так как для произвольной функции $F \in H_2(\mathbb{C}^p, \psi_{m+1})$

$$|F(z)|^2 \leq \frac{1}{(\pi r^2(z))^p} \int_{\Omega(z)} |F(w)|^2 d\lambda_p(w),$$

имеем

$$\frac{\pi^p |F(z)|^2}{e^{2\psi_{m+1}(z) - 2p \ln r(z)}} \leq e^{2 \max_{w \in \Omega(z)} |\psi_{m+1}(w) - \psi_{m+1}(z)|} \int_{\Omega(z)} |F(w)|^2 e^{-2\psi_{m+1}(w)} d\lambda_p(w).$$

Отсюда с учетом неравенства

$$2p \ln r(z) \geq -2p \ln(1 + \|z\|) - 2p \ln(2p)$$

и оценки (4.3) следует

$$\pi^p (2p)^{-2p} |F(z)|^2 e^{-2(\psi_{m+1}(z) + p \ln(1 + \|z\|))} \leq e^{2B_{m+1}} \int_{\mathbb{C}^p} |F(w)|^2 e^{-2\psi_{m+1}(w)} d\lambda_p(w).$$

Теперь, воспользовавшись условием (1.1), получим неравенство

$$\sup_z |F(z)|^2 e^{-2\psi_m(z)} \leq \pi^{-p} (2p)^{2p} e^{2B_{m+1}} \int_{\mathbb{C}^p} |F(w)|^2 e^{-2\psi_{m+1}(w)} d\lambda_p(w),$$

которое означает, что пространство $H_2(\mathbb{C}^p, H_D(\operatorname{Im} z) + \varphi_{m+1}(z))$ непрерывно вложено в пространство $H(\mathbb{C}^p, \psi_m)$. А отсюда уже следует, что $\tilde{H}_{\text{pr}}(\Phi)$ непрерывно вложено в пространство $H_{\text{pr}}(\Phi)$. Таким образом, пространства $\tilde{H}_{\text{pr}}(\Phi)$ и $H_{\text{pr}}(\Phi)$ изоморфны.

Линейный непрерывный функционал в представлении (4.1), являясь линейным непрерывным функционалом на $\tilde{H}_{\text{pr}}(\Phi)$, продолжается как линейный непрерывный функционал на некоторое пространство $H_2(\mathbb{C}^p, \psi_m)$. Поскольку $H_2(\mathbb{C}^p, \psi_m)$ — гильбертово пространство, линейный непрерывный функционал S порождается некоторым элементом $F \in H_2(\mathbb{C}^p, \psi_m)$:

$$\langle S, g \rangle = \int_{\mathbb{C}^p} g(z) \overline{F}(z) e^{-2\psi_m(z)} d\lambda_p(z), \quad g \in H_2(\mathbb{C}^p, \psi_m).$$

Следовательно,

$$f(x) = \int_{\mathbb{C}^p} \overline{F}(z) e^{-i\langle x, z \rangle - 2H_D(\operatorname{Im} z) - 2\tilde{h}_m(\ln^+ |z_1|, \dots, \ln^+ |z_p|)} d\lambda_p(z).$$

Теорема 1.3 доказана.

Литература

1. А. В. Абанин, И. А. Филиппев, “Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций”, *Сиб. мат. журн.* **47**, No. 3, 485–500 (2006).
2. R. W. Braun, R. Meise, B. A. Taylor, “Ultradifferentiable functions and Fourier analysis”, *Results. Math.* **17**, No. 3-4, 206–237 (1990).
3. B. A. Taylor, “Analytically uniform spaces of infinitely differentiable functions”, *Commun. Pure Appl. Math.* **24**, No. 1, 39–51 (1971).
4. В. В. Жаринов, “Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS ”, *Успехи мат. наук* **34**, No. 4, 97–131 (1979).
5. I. Kh. Musin, “On the Fourier–Laplace transform of functionals on a space of infinitely differentiable functions on a convex compact”, *J. Math. Anal. Appl.* **505**, No. 2, Article ID 125509 (2022).
6. A. V. Lutsenko, I. Kh. Musin, R. S. Yulmukhametov, “Description of the duals of subspaces of infinitely differentiable functions”, *J. Math. Sci.*, **279**, No. 4, 478–492 (2024).
7. Л. И. Ронкин, *Введение в теорию целых функций многих переменных*, Наука, М. (1971).
8. Ж. Себаштьян-и-Силва, “О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложениях”, *Сб. перев. Математика* No. 1, 60–77 (1957).
9. R. Meise, D. Vogt, *Introduction to Functional Analysis*, Clarendon, Oxford (1997).

Статья поступила в редакцию 9 июля 2026 г.

принята к публикации 14 июля 2026 г.

Е. Д. Нурсултанов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФИНАЛЬНО МОНОТОННЫХ ФУНКЦИЙ

Исследуется преобразование Фурье финально монотонных функций — функций, монотонных вне некоторого ограниченного множества. Для финально монотонной функции $f \in L_{p,q}(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, доказано, что ее преобразование Фурье определено при всех ненулевых значениях аргумента, удовлетворяет весовой оценке типа Харди — Литтлвуда — Боаса и, как следствие, может иметь особенность лишь в начале координат. Получен двойственный результат для рядов с финально монотонными коэффициентами по регулярным ортонормированным системам — тригонометрической, мультипликативным, в частности системе Уолша. Доказательства опираются на два результата, представляющих самостоятельный интерес: неравенство, уточняющее классическое неравенство Гёльдера в терминах сетевых пространств, и новые интерполяционные теоремы на конусах финально монотонных функций и последовательностей.

1. Введение

Вопрос об интегрируемости преобразования Фурье функции в зависимости от ее свойств восходит к классическим работам по гармоническому анализу. Одним из первых результатов такого рода, относящихся к монотонным функциям, является следующая хорошо известная теорема Харди — Литтлвуда [1, § 4.12].

Теорема А. Пусть $1 < p < 2$ и f — неотрицательная невозрастающая функция на $(0, +\infty)$, стремящаяся к нулю на бесконечности, и

$$\widehat{f}(t) = \int_0^{+\infty} f(x) \cos tx \, dx$$

означает косинус-преобразование функции f . Тогда

$$\|\widehat{f}\|_{L_p(0,\infty)} \lesssim \left(\int_0^\infty x^{p-2} f(x)^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Периодический аналог теоремы А можно найти в [2, § 6] и [3, гл. 12, § 6].

Стремясь дать точное описание весов, при которых преобразование Фурье монотонной функции принадлежит весовому пространству Лебега, Боас [4] выдвинул следующую гипотезу.

Е. Д. Нурсултанов: Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Казахстанский филиал, Астана, Казахстан; er-nurs@yandex.kz

Английский перевод: *J. Math. Sci.* (2027)

© Е. Д. Нурсултанов, 2026

Гипотеза. Пусть $1 < p < \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$, и f — неотрицательная невозрастающая функция на $(0, \infty)$, стремящаяся к нулю на бесконечности. Пусть $\hat{f}$ является косинус- или синус-преобразованием функции f . Тогда для любого $-1/p' < \gamma < 1/p$

$$x^{-\gamma} \hat{f}(x) \in L_p(0, \infty)$$

тогда и только тогда, когда

$$x^{1+\gamma-\frac{2}{p}} f(x) \in L_p(0, \infty).$$

Гипотеза Боаса была подтверждена Загером [5], который установил даже более сильное утверждение в терминах весовых пространств Лебега и пространств Лоренца.

Теорема В. Пусть f — неотрицательная четная функция, невозрастающая на $(0, +\infty)$ и стремящаяся к нулю на бесконечности. Тогда

$$\|f\|_{L_{p,q}(\mathbb{R})} \asymp \|\hat{f}\|_{L_{p',q}(\mathbb{R})}, \quad 1 < p < \infty, \quad 0 < q \leq \infty, \quad (1.1)$$

$$\|f\|_{L_q(\mathbb{R}, u_{p,q})} \asymp \|\hat{f}\|_{L_q(\mathbb{R}, u_{p,q})}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leq q \leq \infty, \quad (1.2)$$

где $L_q(\mathbb{R}, u_{p,q})$ — весовое пространство Лебега с весовой функцией $u_{p,q}(x) = |x|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.

Вокруг гипотезы Боаса сложилось целое направление исследований. Лифлянд и Тихонов [6] (см. также [7, 8]) доказали гипотезу Боаса для класса обобщенно монотонных функций. Более того, в случае синус-преобразования им удалось расширить диапазон допустимых значений параметра γ . Впоследствии Горбачев, Лифлянд и Тихонов [9] получили многомерный вариант этого результата для радиальных функций.

Соотношение (1.1) теоремы В было обобщено автором [10] (см. также [11]) на класс слабо монотонных функций при $1 < p < 2$. Позднее Копежанова, Нурсултанов и Перссон [12] распространили соотношение (1.1) на слабо монотонные функции в пространствах Лоренца с более общими весами, а в [13, 14] теми же авторами был установлен аналог теоремы Харди — Литтлвуда — Боаса для обобщенно монотонных функций в терминах сетевых пространств.

Аналоги теоремы Харди — Литтлвуда — Боаса для α -монотонных функций в периодическом и непериодическом случаях были получены в работах [15, 16]. Дальнейшие результаты, связанные с теоремой Харди — Литтлвуда — Боаса, можно найти в [17]–[19].

Во всех упомянутых результатах монотонность функции выступает как глобальное структурное предположение. Вместе с тем именно поведение функции на бесконечности оказывает решающее влияние на свойства ее преобразования Фурье. Это делает естественным изучение функций, монотонных лишь вне некоторого ограниченного множества, поведение которых вблизи начала координат может быть произвольным.

Определение 1.1. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *финально монотонной*, если существует число N такое, что f монотонна на каждом из множеств $(-\infty, -N]$ и $[N, +\infty)$.

В отличие от классов, фигурирующих в перечисленных выше работах, финально монотонные функции, вообще говоря, не предполагаются ни знакопостоянными, ни монотонными в окрестности начала координат, что существенно расширяет рассматриваемый класс.

Настоящая работа посвящена исследованию преобразования Фурье финально монотонных функций, а также свойств функций, коэффициенты Фурье которых образуют финально монотонную последовательность. Ключевую роль при решении поставленных задач играют два инструмента: неравенство, в определенном смысле уточняющее классическое неравенство Гёльдера (§ 3), и новые интерполяционные теоремы на конусе финально монотонных функций (§ 4). В качестве приложения установлено, в частности, что преобразование Фурье финально монотонной функции из $L_{p,q}(\mathbb{R})$ может иметь особенность лишь в начале координат.

На протяжении всей статьи запись $T \lesssim S$ означает, что существует константа $C > 0$, для которой $T \leq CS$; запись $T \asymp S$ означает, что одновременно $T \lesssim S$ и $S \lesssim T$.

2. Сетевые пространства

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ — пространство с мерой μ и $M^* = \{e \in \mathfrak{F} : 0 < \mu(e) < \infty\}$. Зафиксируем семейство $M \subset M^*$ измеримых множеств. Назовем такое семейство *сетью*

Для функции f , интегрируемой на каждом $e \in M$, определим функцию

$$\bar{f}(t, M) := \sup_{\substack{e \in M \\ \mu(e) > t}} \frac{1}{\mu(e)} \left| \int_e f(x) d\mu \right|, \quad t > 0.$$

Если $\sup\{\mu(e) : e \in M\} = \alpha < \infty$ и $t > \alpha$, то мы полагаем $\bar{f}(t, M) := 0$. Функцию $\bar{f}(\cdot, M)$ назовем *усреднением функции f по сети M* .

Для $0 < p, q \leq \infty$ *сетевое пространство* $N_{p,q}(M)$ состоит из всех измеримых функций f , для которых конечна величина

$$\|f\|_{N_{p,q}(M)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (t^{1/p} \bar{f}(t, M))^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, & 0 < p, q < \infty, \\ \sup_{t>0} t^{1/p} \bar{f}(t, M), & 0 < p \leq \infty, q = \infty. \end{cases}$$

Замечание 2.1. Пространство $N_{p,q}(M)$ является квазинормированным как фактор-пространство с ядром

$$J = \left\{ f : \int_e f(x) dx = 0, e \in M \right\}.$$

Следующие примеры показывают связь сетевых пространств с классическими пространствами.

Примеры. 1. Предположим, что $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Пусть $M = \{e \subset \Omega : \mu(e) < \infty\}$ — семейство всех подмножеств Ω конечной меры. Тогда $N_{p,q}(M) = L_{p,q}(\Omega, \mu)$, т.е. $N_{p,q}(M)$ совпадает с пространством Лоренца.

2. Пространства $N_{p,q}(M)$ в определенной степени чувствительны к распределению колебаний и сингулярностям функций.

Пусть M обозначает множество отрезков в $\mathbb{R}$, а $f_\Omega(x)$ представляет собой характеристическую функцию множества $\Omega = \bigcup_{k=1}^\infty [a_k, a_k + 1]$. Последовательность $\{a_k\}$ определяет распределение колебаний $f_\Omega(x)$. Если $a_k = b + (k \ln^{1/q} k)^{p'}$, то f_Ω принадлежит $N_{p,q+\varepsilon}(M)$ для каждого $\varepsilon > 0$, но f_Ω не принадлежит $N_{p,q}(M)$.

3. Пусть $r > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ и $B_r(x)$ — шар с центром в точке x и радиуса r . Пусть $1 < p < \infty$, $\lambda = n/p'$,

$$M(x) = \bigcup_{r>0} \{e \subset B_r(x) : |e| \geq |B_r(x)|/2\}, \quad M = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} M(x).$$

Тогда $N_{p,\infty}(M)$ совпадает с *пространством Морри* [20]

$$M_1^\lambda = \{f : \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ r>0}} r^{-\lambda} \|f\|_{L_1(B_r(x))} < \infty\}.$$

Пространство $N_{p,q}(M(x))$ совпадает с *локальным пространством Морри* [21]

$$M_{1,q,x}^\lambda = \left\{ f : \int_0^\infty (r^{-\lambda} \|f\|_{L_1(B_r(x))})^q \frac{dt}{t} < \infty \right\}.$$

Если $n = 1$, $x = 0$, то пространство $N_{p,p}(M(0))$ совпадает с пространством Чезаро [22]

$$Ces_p = \left\{ f : \int_0^\infty \left(\frac{1}{t} \int_{-t/2}^{t/2} |f(s)| ds \right)^p dt < \infty \right\}.$$

4. Пусть $M = \{[a, b] \subset \mathbb{R} : a < b\}$ и $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Функция $\cos(x)$ принадлежит $N_{p,q}(M, \mu)$, но $|\cos(x)|$ не принадлежит $N_{p,q}(M, \mu)$.

5. Дискретные сетевые пространства. Пусть S — множество всех конечных подмножеств из $\mathbb{Z}^n$. Для фиксированного семейства множеств $W \subset S$ определим пространство $\mathbf{n}_{p,q}(W)$, как множество последовательностей $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^n}$, с конечной квазинормой

$$\|a\|_{\mathbf{n}_{p,q}(W)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{\frac{q}{p}-1} (\bar{a}_k(W))^q \right)^{1/q}$$

для $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ и

$$\|a\|_{\mathbf{n}_{p,q}(W)} = \sup_{1 \leq k < \infty} k^{1/p} \bar{a}_k(W)$$

для $q = \infty$ и $0 < p \leq \infty$, где

$$\bar{a}_k(W) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\substack{e \in W \\ |e| > k}} \frac{1}{|e|} \left| \sum_{m \in e} a_m \right|;$$

здесь $|e|$ — количество индексов в e .

6. Пусть $1 < p < \infty$, и пусть $W = \{e \subset \mathbb{Z}^n : |e| < \infty\}$ — семейство всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^n$. Тогда $\mathbf{n}_{p,q}(W) = l_{p,q}$ т.е. $\mathbf{n}_{p,q}(W)$ является пространством Лоренца.

Имеют место следующие свойства N -пространств [23] (см. также [24]).

Пусть M, W — произвольные сети в Ω и $\mathbb{Z}^n$ соответственно.

(1) Если $M_1 \subset M$ и $W_1 \subset W$, то

$$N_{p,q}(M) \hookrightarrow N_{p,q}(M_1), \quad \mathbf{n}_{p,q}(W) \hookrightarrow \mathbf{n}_{p,q}(W_1).$$

(2) Если $b > 1$, то

$$\|f\|_{N_{p,q}(M)} \asymp \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} (b^{k/p} \bar{f}(b^k, M))^q \right)^{1/q}, \quad \|a\|_{\mathbf{n}_{p,q}(W)} \asymp \left(\sum_{k=0}^{\infty} (b^{k/p} \bar{a}_{[b^k]}(W))^q \right)^{1/q}; \quad (2.1)$$

здесь $[x]$ — целая часть числа x .

(3) Для $0 < q \leq q_1$

$$N_{p,q}(M) \hookrightarrow N_{p,q_1}(M), \quad \mathbf{n}_{p,q}(W) \hookrightarrow \mathbf{n}_{p,q_1}(W).$$

(4) Пусть $0 < p < p_1 \leq \infty$ и $0 < q, q_1 \leq \infty$. Если сеть M такая, что $\sup_{e \in M} |e| = \alpha < \infty$, то $N_{p_1,q_1}(M) \hookrightarrow N_{p,q}(M)$, $\mathbf{n}_{p,q}(W) \hookrightarrow \mathbf{n}_{p_1,q_1}(W)$.

(5) Если $1 < p \leq \infty$, то

$$\|f\|_{N_{p,\infty}(M)} = \sup_{e \in M} \frac{1}{|e|^{1/p'}} \left| \int_e f(x) d\mu \right|, \quad \|a\|_{\mathbf{n}_{p,\infty}(W)} = \sup_{e \in W} \frac{1}{|e|^{1/p'}} \left| \sum_{m \in e} a_m \right|. \quad (2.2)$$

3. Основная лемма

В этом параграфе мы приводим достаточно простые леммы, которые играют важную роль в дальнейшем.

Лемма 3.1. Пусть f, g — измеримые функции такие, что $f \cdot g \in L_1(\Omega, \mu)$. Тогда

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu = \int_0^{\infty} \left(\int_{\{x \in \Omega: g_+(x) \geq t\}} f(x)d\mu - \int_{\{x \in \Omega: g_-(x) \geq t\}} f(x)d\mu \right) dt,$$

где

$$g_+(x) = \frac{|g(x)| + g(x)}{2}, \quad g_-(x) = \frac{|g(x)| - g(x)}{2}.$$

Доказательство. Из определения функций g_+ , g_- и теоремы Фубини имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu &= \int_{\Omega} f(x)(g_+(x) - g_-(x))d\mu \\ &= \int_{\Omega} f(x) \int_0^{g_+(x)} dt d\mu - \int_{\Omega} f(x) \int_0^{g_-(x)} dt d\mu \int_0^{\infty} \left(\int_{\{x \in \Omega: g_+(x) \geq t\}} f(x)dx - \int_{\{x \in \Omega: g_-(x) \geq t\}} f(x)dx \right) dt, \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Пусть g — измеримая функция. Семейство множеств

$$M(g) = \{\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \geq t\}\}_{t>0} \cup \{\{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq -t\}\}_{t>0} \quad (3.1)$$

назовем *сетью* соответствующей функции g . Заметим, что $M(g)$ является подмножеством некоторой локальной сети.

Мы приведем неравенство, которое в некотором смысле уточняет неравенство Гёльдера.

Лемма 3.2 (основная лемма). Пусть $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, $g \in L_{p',q'}(\Omega, \mu)$, $M(g)$ — сеть, соответствующая функции g .

(i) Если $f \in N_{p,q}(M(g))$, g — неотрицательная функция и

$$g_r(x) = \min\{r, g(x)\} \chi_{E_r}(x), \quad r > 1, \quad E_r = \{x \in \Omega : g(x) \geq 1/r\},$$

то имеет место неравенство

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g_r(x)d\mu \right| \lesssim_{p,q} \|f\|_{N_{p,q}(M(g))} \|g\|_{L_{p',q'}(\Omega, \mu)}. \quad (3.2)$$

(ii) Если $f \in L_{p,q}(\Omega, \mu)$, то имеет место неравенство

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu \right| \lesssim \|f\|_{N_{p,q}(M(g))} \|g\|_{L_{p',q'}(\Omega, \mu)}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Пусть $g \in L_{p',q'}(\Omega, \mu)$, $f \in N_{p,q}(M(g))$. Из определения функции g_r имеем $\lim_{r \rightarrow \infty} g_r(x) = g(x)$, $x \in \Omega$ и $M(g_r) \subset M(g)$.

Для функции $f \in N_{p,q}(M(g))$ и функции g_r можно применить лемму 3.1

$$\int_{\Omega} f(x)g_r(x)d\mu = \int_0^{\infty} \int_{\{x \in \Omega: g_r(x) \geq t\}} f(x)d\mu dt.$$

Обозначим через g_r^* невозрастающую перестановку функции g_r . Сделаем замену $t \rightarrow g_r^*(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f(x)g_r(x)d\mu \right| &= \left| \int_0^{\infty} \int_{\{x \in \Omega: g_r(x) \geq g_r^*(t)\}} f(x) d\mu dg_r^*(t) \right| \\ &\leq \left| \int_0^{\infty} \mu\{x \in \Omega : g_r(x) \geq g_r^*(t)\} \bar{f}(t, M(g_r)) dg_r^*(t) \right| \\ &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \mu\{x \in \Omega : g_r(x) \geq g_r^*(t)\} \bar{f}(t, M(g_r)) dg_r^*(t) \right| \\ &\leq \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \bar{f}(2^k, M(g_r)) \int_{2^k}^{2^{k+1}} \mu\{x \in \Omega : g_r(x) \geq g_r^*(t)\} dg_r^*(t) \right|. \end{aligned}$$

Далее заметим, что если $\mu\{x \in \Omega : g_r(x) \geq g_r^*(t)\} > t$, то найдется $\delta > 0$ такое, что $g_r^*(t) = g_r^*(t + \delta)$ и, следовательно, $(g_r^*)'(t) = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \left| \int_{2^k}^{2^{k+1}} \mu\{x \in \Omega : g_r(x) \geq g_r^*(t)\} dg_r^*(t) \right| \leq \left| \int_{2^k}^{2^{k+1}} t dg_r^*(t) \right| \\ & \leq 2^{k+1} \left| \int_{2^k}^{2^{k+1}} dg_r^*(t) \right| = 2^{k+1}(g_r^*(2^k) - g_r^*(2^{k+1})) \leq 2^{k+1}g_r^*(2^k). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} f(x)g_r(x)d\mu \right| \lesssim \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \bar{f}(2^k, M(g_r))g_r^*(2^k) \\ & \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{\frac{k}{p}} \bar{f}(2^k, M(g_r)))^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (2^{\frac{k}{p'}} g_r^*(2^k))^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \\ & \lesssim \|f\|_{N_{p,q}(M(g_r))} \|g_r\|_{L_{p',q'}(\Omega, \mu)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $M(g_r) \subset M(g)$ и $g_r(x) \leq g(x)$, имеем

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g_r(x)d\mu \right| \lesssim \|f\|_{N_{p,q}(M(g_r))} \|g_r\|_{L_{p',q'}(\Omega, \mu)} \leq \|f\|_{N_{p,q}(M(g))} \|g\|_{L_{p',q'}(\Omega, \mu)}.$$

Пусть теперь $f \in L_{p,q}(\Omega, \mu)$. Это условие позволяет применить лемму 3.1 к интегралу

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)d\mu.$$

Далее, проводя рассуждения, что и выше, получим (3.3). □

4. Интерполяционные теоремы

Определение 4.1. Будем говорить, что функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *финально монотонная*, если найдется N такой, что f монотонна на множествах $(-\infty, -N]$ и $[N, +\infty)$.

Множество всех финально монотонных функций с параметром N обозначим B_N .

Докажем интерполяционную теорему на конусе финально монотонных функций.

Теорема 4.1. Пусть $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $\theta \in (0, 1)$, $N > 0$. (A_0, A_1) — совместимая пара нормированных пространств. Если для квазилинейного оператора T

$$\|Tf\|_{A_0} \leq M_1 \|f\|_{L_{p_0, q_0}(\mathbb{R})} \quad \forall f \in L_{p_0, 1}(\mathbb{R}) \cap B_N,$$

$$\|Tf\|_{A_1} \leq M_1 \|f\|_{L_{p_1, q_1}(\mathbb{R})} \quad \forall f \in L_{p_1, 1}(\mathbb{R}) \cap B_N,$$

то для любой функции $f \in L_{p,q}(\mathbb{R}) \cap B_N$

$$\|Tf\|_{A_{\theta, q}} \leq c M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L_{p,q}(\mathbb{R})},$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ и константа c не зависит от f и N .

Доказательство. Пусть $f \in L_{p,q}(\mathbb{R}) \cap B_N$. Тогда очевидно, что

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Пусть $c > 0$, $t > 0$, $\gamma = \frac{p_0 p_1}{p_1 - p_0}$. Определим множество

$$G_t = \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| \geq f^*((ct)^{\gamma})\}.$$

Определим функции $f_0(x) = (f(x) - a \cdot \operatorname{sgn} f(x))\chi_{G_t}(x)$, где $a = f^*((ct)^\gamma)$ и $f_1 = f(x) - f_0(x)$. Тогда $f_0 \in L_{p_0,1}(\mathbb{R}) \cap B_N$, $f_1 \in L_{p_1,1}(\mathbb{R}) \cap B_N$, $f = f_0 + f_1$. Оценим K -функционал

$$K(t, f, A_0, A_1) = \inf_{Tf=b_0+b_1} (\|b_0\|_{A_0} + t\|b_1\|_{A_1}) \lesssim \inf_{f=f_0+f_1} (\|Tf_0\|_{A_0} + t\|Tf_1\|_{A_1})$$

$$\leq M_0\|f_0\|_{L_{p_0,q_0}} + M_1t\|f_1\|_{L_{p_1,q_1}} \leq M_0\|f_0\|_{L_{p_0,r}} + M_1t\|f_1\|_{L_{p_1,r}},$$

где $r = \min(q_0, q_1, q)$

Оценим каждое слагаемое

$$\|f_0\|_{L_{p_0,r}}^r = \int_0^\infty (s^{\frac{1}{p_0}} f_0^*(s))^r \frac{ds}{s} \leq \int_0^{(ct)^\gamma} (s^{\frac{1}{p_0}} (f^*(s) - f^*((ct)^\gamma)))^r \frac{ds}{s},$$

$$\|f_1\|_{L_{p_1,r}}^r = \int_0^\infty (s^{\frac{1}{p_1}} f_1^*(s))^r \frac{ds}{s} = \int_0^\infty (s^{\frac{1}{p_1}} \min\{f^*(s), f^*((ct)^\gamma)\})^r \frac{ds}{s}$$

$$= [p_1((ct)^\gamma)^{\frac{1}{p_1}} f^*((ct)^\gamma)]^r + \int_{(ct)^\gamma}^\infty (s f^*(s))^r \frac{ds}{s}.$$

Таким образом,

$$\|Tf\|_{A_{\theta,q}} = \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, f))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta} \left(M_0 \left(\int_0^{(ct)^\gamma} (s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s))^r \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{r}} \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. + t M_1 \left([p_1((ct)^\gamma)^{\frac{1}{p_1}} f^*((ct)^\gamma)]^r + \int_{t^\gamma}^\infty (s f^*(s))^r \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{r}} \right] \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\lesssim M_0 c^{\theta(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \left(\int_0^\infty \left[t^{-\theta(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \left(\int_0^t (s^{\frac{1}{p_0}} f^*(s))^r \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{r}} \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + M_1 c^{-(1-\theta)(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \|f\|_{L_{p,q}}$$

$$+ M_1 c^{-(1-\theta)(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} \left(\int_0^\infty \left[(t^{1-\theta})(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}) \left(\int_t^\infty ((s-t)^{\frac{1}{p_1}} f^*(s))^r \frac{ds}{s} \right)^{\frac{1}{r}} \right]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Используя неравенство Харди, получим

$$\|Tf\|_{A_{\theta,q}} \lesssim (M_0 c^{\theta(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})} + M_1 c^{-(1-\theta)(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1})}) \|f\|_{L_{p,q}}.$$

Минимизируя правую часть относительно параметра c , получим требуемое неравенство. $\square$

Пусть $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $a > 0$. Определим пространства

$$\mathfrak{L}_{p,q,a} = \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : \left(\int_0^a (t^{\frac{1}{p}} \sup_{|s| \geq t} |f(s)|)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\}.$$

Заметим, что если $f \in \mathfrak{L}_{p,q,a}$, то f ограничена на $\{x \in \mathbb{R} : |x| > \delta\}$ для всех $\delta > 0$.

Лемма 4.1. Пусть $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $a > 0$. Тогда

$$(\mathfrak{L}_{p_0,\infty,a}, \mathfrak{L}_{p_1,\infty,a})_{\theta,q} \hookrightarrow \mathfrak{L}_{p,q,a},$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\theta \in (0, 1)$.

Доказательство. Пусть $f \in (\mathfrak{L}_{p_0,\infty,a}, \mathfrak{L}_{p_1,\infty,a})_{\theta,q}$ и $f = f_0 + f_1$ — произвольное представление функции f такое, что $f_0 \in \mathfrak{L}_{p_0,\infty,a}$, $f_1 \in \mathfrak{L}_{p_1,\infty,a}$. Тогда для $0 < t \leq a$

$$t^{\frac{1}{p}} \sup_{|s| \geq t} |f(s)| \leq t^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0}} (t^{\frac{1}{p_0}} \sup_{|s| \geq t} |f_0(s)|) + t^{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1}} t^{\frac{1}{p_1}} \sup_{|s| \geq t} |f_1(s)|$$

$$\leq t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{p_0}} (\|f_0\|_{\mathfrak{L}_{p_0,\infty,a}} + t^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}} \|f_1\|_{\mathfrak{L}_{p_1,\infty,a}})$$

Учитывая произвольность представления $f = f_0 + f_1$, имеем

$$t^{\frac{1}{p}} \sup_{|s| \geq t} |f(s)| \leq t^{-\theta(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} K(t^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}, f; \mathfrak{L}_{p_0,\infty,a}, \mathfrak{L}_{p_1,\infty,a})$$

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\mathfrak{L}_{p,q,a}(\mathbb{R})} &= \left(\int_0^a (t^{\frac{1}{p}} \sup_{|s| \geq t} |f(s)|)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_0^\infty (t^{-\theta(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} K(t^{\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1}}, f))^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\times \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_{(\mathfrak{L}_{p_0,\infty,a}, \mathfrak{L}_{p_1,\infty,a})_{\theta,q}}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Определение 4.2. Последовательность вещественных чисел $a = \{a_k\}_{k=1}^\infty$ называется *финально монотонной*, если найдется n такой, что a монотонна на множестве $[n, +\infty)$.

Множество всех финально монотонных функций с параметром n обозначим D_n .

Имеет место аналогичное теореме 4.1 утверждение.

Теорема 4.2. Пусть $0 < p_0 < p_1 < \infty$, $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$, $\theta \in (0, 1)$, $n \in \mathbb{N}$, (A_0, A_1) — совместимая пара нормированных пространств. Если для квазилинейного оператора T

$$\|Ta\|_{A_0} \leq M_0 \|a\|_{l_{p_0,1}} \quad \forall a \in l_{p_0,1} \cap D_n,$$

$$\|Ta\|_{A_1} \leq M_1 \|a\|_{l_{p_1,1}} \quad \forall a \in l_{p_1,1} \cap D_n,$$

то для любой $a \in l_{p,q} \cap D_n$

$$\|Ta\|_{A_{\theta,q}} \leq c M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|a\|_{l_{p,q}},$$

где $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ и константа c не зависит от a и n .

5. Преобразование Фурье финально монотонной функции

Теорема 5.1. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$. Если $f \in L_{p,q}(\mathbb{R}) \cap B_N$, то для всех $|s| > 0$ существует предел

$$\widehat{f}(s) := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) e^{-ixs} dx \quad (5.1)$$

и верно неравенство

$$\left(\int_0^{\frac{1}{N}} (t^{\frac{1}{p'}} \sup_{|s| \geq t} |\widehat{f}(s)|)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|f\|_{L_{p,q}}. \quad (5.2)$$

Доказательство. Докажем сначала слабое неравенство

$$\sup_{0 < t \leq \frac{1}{N}} t^{\frac{1}{p'}} \sup_{|s| \geq t} |\widehat{f}(s)| \lesssim \|f\|_{L_{p,1}}, \quad 1 < p < \infty. \quad (5.3)$$

Пусть $r > N$. Тогда

$$\left| \int_{-r}^r f(x) e^{-ixs} dx \right| \leq \left| \int_0^r f(x) e^{-ixs} dx \right| + \left| \int_{-r}^0 f(x) e^{-ixs} dx \right| = I_1(s, r) + I_2(s, r).$$

Для оценки каждого слагаемого воспользуемся основной леммой:

$$I_1(s, r) = \left| \int_0^r \chi_{[0,r)} f(x) e^{-ixs} dx \right| \lesssim \|\chi_{[0,r)} f\|_{L_{p,1}} \|\chi_{[0,r)} \exp(-is \cdot)\|_{N_{p',\infty}(M_f^+)},$$

$M_f^+ = \{\{0 \leq x \leq r : f(x) \geq \xi\}_{\xi > 0} \cup \{0 \leq x \leq r : -f(x) \geq \xi\}_{\xi < 0}\}$ — сеть, соответствующая функции $f\chi_{[0,r]}$. Так как $f \in B_N$, для любого $e \in M_f^+$ множество $\overline{e \cap [N, \infty)}$ является отрезком. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\chi_{[0,r]} \exp(-is \cdot)\|_{N_{p',\infty}(M_f^+)} &= \sup_{e \in M_f^+} \left| \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \int_e \chi_{[0,r]}(x) e^{-ixs} dx \right| \\ &\leq \sup_{e \in M_f^+} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_{e \cap [0,N]} \chi_{[0,r]}(x) e^{-ixs} dx \right| + \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_{e \cap [N,+\infty)} \chi_{[0,r]}(x) e^{-ixs} dx \right| \\ &\leq \sup_{e \in M_f^+} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_{e \cap [0,N]} \chi_{[0,r]}(x) e^{-ixs} dx \right| + \sup_{e \in M_f^+} \frac{1}{|e|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_{e \cap [N,+\infty)} \chi_{[0,r]}(x) e^{-ixs} dx \right| \\ &\leq \sup_{e \in M_f^+} \frac{e \cap [0, N]}{|e|^{\frac{1}{p}}} + \sup_{e \in M_f^+} \frac{1}{|e \cap [N, \infty)|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_{e \cap [N, \infty)} e^{-ixs} dx \right| \leq N^{\frac{1}{p'}} + \sup_{e \in M_0} \frac{1}{|e|} \left| \int_e e^{-ixs} dx \right|, \end{aligned}$$

где M_0 — множество всех отрезков из $\mathbb{R}_+$.

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \|\chi_{[0,r]} \exp(-is \cdot)\|_{N_{p',\infty}(M_f^+)} &\lesssim N^{\frac{1}{p'}} + |s|^{-1} \sup_{\omega \in M_0} \frac{1}{|\omega|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_{s\omega} e^{-ix} dx \right| \\ &= N^{\frac{1}{p'}} + |s|^{-\frac{1}{p'}} \sup_{\omega \in M_0} \frac{1}{|s\omega|^{\frac{1}{p}}} \left| \int_{s\omega} e^{-ix} dx \right| \lesssim N^{\frac{1}{p'}} + |s|^{-\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_1(s, r) \lesssim (N^{\frac{1}{p'}} + |s|^{-\frac{1}{p'}}) \|\chi_{[0,r]} f\|_{L_{p,1}}.$$

Аналогично

$$I_2(s, r) \lesssim (N^{\frac{1}{p'}} + |s|^{-\frac{1}{p'}}) \|\chi_{[-r,0]} f\|_{L_{p,1}}.$$

Из этих оценок следует существование предела (5.1).

Таким образом, получим

$$\begin{aligned} \sup_{0 < \xi \leq \frac{1}{N}} \xi^{\frac{1}{p'}} \sup_{|s| \geq \xi} |\hat{f}(s)| &\lesssim \sup_{0 < \xi \leq \frac{1}{N}} \xi^{\frac{1}{p'}} \sup_{s \geq \xi} (N^{\frac{1}{p'}} + s^{-\frac{1}{p'}}) \|f\|_{L_{p,1}} \\ &= \sup_{0 < \xi \leq \frac{1}{N}} \xi^{\frac{1}{p'}} (N^{\frac{1}{p'}} + \xi^{-\frac{1}{p'}}) \|f\|_{L_{p,1}} = 2 \|f\|_{L_{p,1}} \end{aligned}$$

Тем самым (5.3) доказано. Далее, используя интерполяционную теорему 4.1 и лемму 4.1, получим (5.2). $\square$

Следствие 5.1. Пусть $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$ и $f \in L_{p,q}(\mathbb{R}) \cap B_N$. Тогда преобразование Фурье $\hat{f}(\xi)$ может иметь особенность только в точке $\xi = 0$.

Определение 5.1. Ортонормированную систему $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ назовем *регулярной*, если существует константа B такая, что

1) для любого отрезка e из $[0, 1]$ и $k \in \mathbf{N}$

$$\left| \int_e \varphi_k(x) dx \right| \leq B \min(|e|, 1/k),$$

2) для любого отрезка w из $\mathbf{N}$ и $x \in (0, 1]$

$$\left| \sum_{k \in w} \varphi_k(x) \right| \leq B \min(|w|, 1/x).$$

Тригонометрические системы, мультипликативные системы и, в частности, система Уолша являются регулярными.

Теорема 5.2. Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ — регулярная система, $1 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$. Если $a \in l_{p,q} \cap D_n$, то $f \in L_{p',q}[0,1]$ и верно неравенство

$$\left(\int_0^{\frac{1}{n}} (t^{\frac{1}{p'}} \sup_{|s| \geq t} |f(s)|)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \lesssim \|a\|_{l_{p,q}}. \quad (5.4)$$

Доказательство. Докажем сначала слабое неравенство

$$\sup_{0 < t \leq \frac{1}{n}} t^{\frac{1}{p'}} \sup_{|s| \geq t} |f(s)| \lesssim \|a\|_{l_{p,1}}, \quad 1 < p < \infty. \quad (5.5)$$

Пусть $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$. Так как система $\{\varphi_k\}$ регулярная, она является ограниченной в совокупности т.е. найдется $M > 0$ такое, что

$$|\varphi_k(x)| \leq M, \quad x \in [0,1], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Пусть $r \in \mathbb{N}$ и $r \gg n$. Тогда

$$\left| \sum_{k=1}^r a_k \varphi_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^r a_k \varphi_k(x) \right| \leq M \|a^r\|_{l_p'} n^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k^r - a_{k+1}^r| D_k(x);$$

здесь $a^r = \{a_k^r\}_{k=1}^{\infty}$, где

$$a_k^r = \begin{cases} a_k, & k \leq r, \\ 0, & k \geq r, \end{cases}$$

и $D_k(x) = \sum_{m=n+1}^k \varphi_m(x)$ — ядро Дирихле по системе Φ .

Оценим второе слагаемое

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k^r - a_{k+1}^r| D_k(x) \right| \leq \sup_{k > n} k^{-\frac{1}{p'}} |D_k(x)| \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{1}{p'}} |a_k^r - a_{k+1}^r|.$$

Из определения регулярной системы следует

$$|D_k(x)| \leq B \min(k, 1/x).$$

Если $k \leq 1/x$, то

$$k^{-\frac{1}{p'}} |D_k(x)| \leq B k^{\frac{1}{p}} \leq B x^{-\frac{1}{p}}.$$

Если $1/x < k$, то

$$k^{-\frac{1}{p'}} |D_k(x)| \leq B k^{-\frac{1}{p'}} \frac{1}{x} \leq B x^{-\frac{1}{p}}.$$

Следовательно,

$$\sup_{k \geq n} k^{-\frac{1}{p'}} |D_k(x)| \leq B x^{-\frac{1}{p}}, \quad x \in [0,1].$$

Далее заметим, что из условия финально монотонности последовательности $\{a_k^r\}_{k=1}^{\infty}$ следует

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k^{\frac{1}{p'}} |a_k^r - a_{k+1}^r| \leq \|a^r\|_{l_{p',1}}.$$

Следовательно,

$$\left| \sum_{k=1}^r a_k \varphi_k(x) \right| \leq M n^{\frac{1}{p}} \|a^r\|_{l_p} + B x^{-\frac{1}{p}} \|a^r\|_{l_{p',1}} \lesssim (n^{\frac{1}{p}} + x^{-\frac{1}{p}}) \|a^r\|_{l_{p',1}}. \quad (5.6)$$

Учитывая, что последовательность элементов $\{a^r\}_r$ фундаментальна в пространстве $l_{p',1}$ получим сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x).$$

Таким образом, имеем

$$|f(x)| \lesssim (n^{\frac{1}{p}} + x^{-\frac{1}{p}}) \|a\|_{l_{p',1}}$$

или

$$\sup_{0 < t \leq \frac{1}{n}} t^{\frac{1}{p}} \sup_{x \geq t} |f(x)| \lesssim \sup_{0 < t \leq \frac{1}{n}} t^{\frac{1}{p}} \sup_{x \geq t} (n^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{p}}) \|a\|_{l_{p',1}} \leq \|a\|_{l_{p',1}}.$$

Далее, как и в теореме 5.1, применяя интерполяционную теорему 4.2, получим требуемое утверждение. $\square$

Литература

1. Е. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, ОГИЗ, М. (1948).
2. R. P. Boas Jr., *Integrability Theorems for Trigonometric Transforms*, Springer, New York (1967).
3. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, Т. I, II, Мир, М. (1965).
4. R. P. Boas Jr., "The integrability class of the sine transform of a monotonic function", *Stud. Math.* **44**, 365–369 (1972).
5. Y. Sagher, "Integrability conditions for the Fourier transform", *J. Math. Anal. Appl.* **54**, 151–156 (1976).
6. E. Liflyand, S. Tikhonov, "Extended solution of Boas' conjecture on Fourier transforms", *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **346**, 1137–1142 (2008).
7. M. Dyachenko, E. Liflyand, S. Tikhonov, "Uniform convergence and integrability of Fourier integrals", *J. Math. Anal. Appl.* **372**, 328–338 (2010).
8. E. Liflyand, S. Tikhonov, "Two-sided weighted Fourier inequalities", *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.* **11**, 341–362 (2012).
9. D. Gorbachev, E. Liflyand, S. Tikhonov, "Weighted Fourier inequalities: Boas' conjecture in $\mathbb{R}^n$ ", *J. Anal. Math.* **114**, 99–120 (2011).
10. Е. Д. Нурсултанов, "Сетевые пространства и преобразование Фурье", *Докл. Акад. Наук* **361**, 597–599 (1998).
11. E. Nursultanov, S. Tikhonov, "Net spaces and boundedness of integral operators", *J. Geom. Anal.* **21**, 950–981 (2011).
12. А. Н. Копежанова, Е. Д. Нурсултанов, Л.-Е. Перссон, "О неравенствах для преобразования Фурье функций из пространств Лоренца", *Мат. заметки* **90**, No. 5, 785–788 (2011).
13. A. Kopezhanova, E. Nursultanov, L.-E. Persson, "Some new two-sided inequalities concerning the Fourier transform", *Math. Inequal. Appl.* **20**, No. 3, 855–864 (2017).
14. A. Kopezhanova, E. Nursultanov, L.-E. Persson, "A new generalization of Boas theorem for some Lorentz spaces $\Lambda_q(\omega)$ ", *J. Math. Inequal.* **12**, No. 3, 619–633 (2018).
15. M. Dyachenko, A. Mukanov, E. Nursultanov, "A Boas-type theorem for α -monotone functions", *Math. Scand.* **120**, 39–58 (2017).
16. A. Mukanov, "Integrability of the Fourier transforms of α -monotone functions", *Eurasian Math. J.* **6**, No. 1, 132–135 (2015).
17. L. De Carli, D. Gorbachev, S. Tikhonov, "Pitt and Boas inequalities for Fourier and Hankel transforms", *J. Math. Anal. Appl.* **408**, No. 2, 762–774 (2013).
18. A. Debernardi, "The Boas problem on Hankel transforms", *J. Fourier Anal. Appl.* **25**, No. 6, 3310–3341 (2019).
19. A. Mukanov, E. D. Nursultanov, "On L_p -integrability of functions with general monotone Fourier coefficients", *J. Fourier Anal. Appl.* **32**, No. 76 (2026).
20. C. B. Morrey Jr., "On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations", *Trans. Amer. Math. Soc.* **43**, No. 1, 126–166 (1938).
21. В. С. Гулиев, *Интегральные операторы в функциональных пространствах на однородных группах и в областях в $\mathbb{R}^n$* , МИАН, Москва (1994).

22. С. В. Асташкин, Л. Малигранда, “Геометрия функциональных пространств Чезаро”, *Функци. анал. прил.* **45**, No. 1, 79–83 (2011).
23. Е. Д. Нурсултанов, “Сетевые пространства и неравенства типа Харди–Литлвуда”, *Мат. сб.* **189**, No. 3, 83–102 (1998).
24. E. D. Nursultanov, *Inequalities and Integral Operators in Function Spaces*, CRC, New York (2026).
25. В. И. Буренков, Е. Д. Нурсултанов, “Описание интерполяционных пространств для локальных пространств типа Морри”, *Труды МИАН* **269**, 52–62 (2010).

Статья поступила в редакцию 4 августа 2026 г.

принята к публикации 23 сентября 2026 г.